

Ajuste de una serie estacional multiplicativa con modelos globales y locales

1. Análisis descriptivo

Considere la serie de producción trimestral de cemento portland, una serie estacional multiplicativa que va desde trimestre 1 de 1956 al trimestre 3 de 1994, presentada en la Figura 1. Se desea ajustar esta serie e implementar la estrategia de validación cruzada ajustando con los primeros $n = 151$ datos de la serie y pronosticando los últimos $m = 4$ datos, que corresponden al período comprendido entre el cuarto trimestre de 1993 al tercer trimestre de 1994.

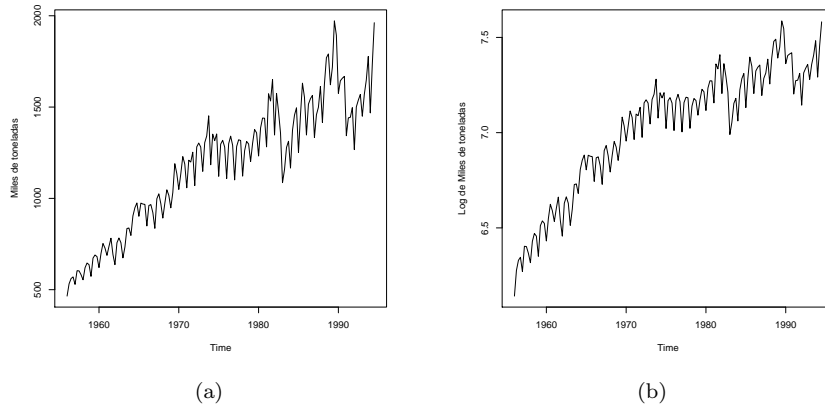


Figura 1: (a) Serie de producción trimestral de cemento portland y (b) su logaritmo natural

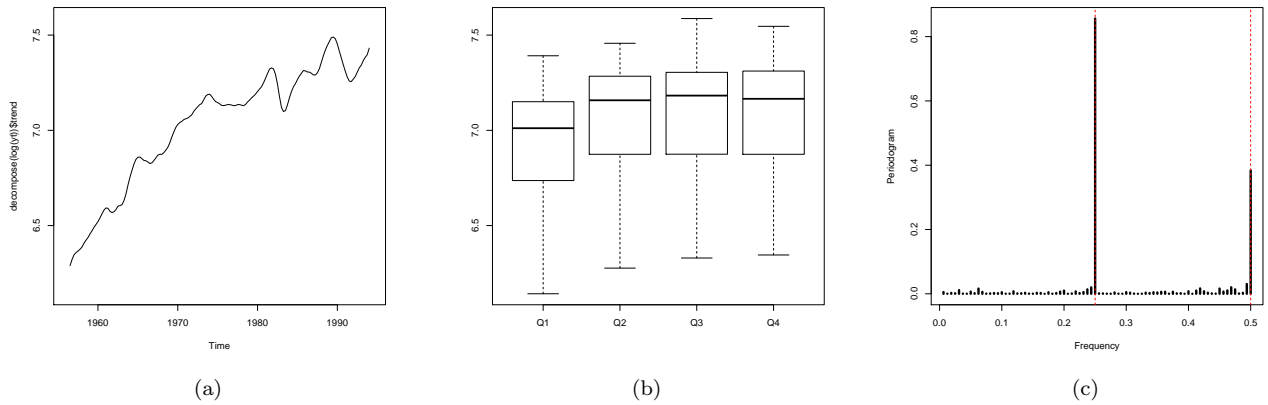


Figura 2: (a) Componente de tendencia para el logaritmo natural; (b) Distribución por trimestres del logaritmo natural de la serie; (c) Periodograma sobre las diferencias de los logaritmos naturales de la serie

De la descomposición de logaritmo natural (incluso sobre la serie original), en la componente de tendencia estimada por el filtro decompose (ver Figura 2(a)) es evidente la presencia de ciclos y que la serie tiende a crecer en forma no lineal. De la gráfica de la serie y de su logaritmo se concluye que existe un patrón periódico anual con una forma constante en el tiempo. En los boxplots comparativos se observa que en promedio en cada año es menor la producción para el primer trimestre comparado con el trimestre 4, mientras que para los trimestres 2 y 3 la producción puede ser en promedio igual a la del trimestre 4. El periodograma reafirma la existencia de componente estacional (ver Figura

2(c)) pues muestra asociación de la serie con dos componentes periódicas (por valor alto del periodograma en esas frecuencias): en las frecuencias 0.25 y 0.5.

2. Modelos propuestos

Por el análisis descriptivo, para los modelos globales la tendencia en escala logaritmo natural puede ser ajustada por un polinomio de grado $p = 2, 3$ y la componente estacional puede representarse como un factor y por tanto usar variables indicadoras en los modelos globales. Se proponen los siguientes modelos de regresión, donde t es el índice de tiempo y $I_{i,t}$ es la indicadora del trimestre i en el tiempo t ,

- **Modelo 1:** Modelo log-cuadrático estacional con indicadoras, trimestre de referencia Q4

$$\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t} + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (1)$$

- **Modelo 1b:** Modelo log-cúbico estacional con indicadoras, trimestre de referencia Q4

$$\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t} + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

- **Modelo 2:** Modelo exponencial-cuadrático estacional con indicadoras, trimestre de referencia Q4

$$Y_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t}) + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

- **Modelo 2b:** Modelo exponencial-cúbico estacional con indicadoras, trimestre de referencia Q4

$$Y_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t}) + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (4)$$

Por otro lado, asumiendo que las componentes estructurales, es decir la tendencia y la estacionalidad de la serie, pueden cambiar en el tiempo, se proponen los siguientes modelos locales

- **Modelo 3:** Según Holt-Winters Multiplicativo,

$$Y_{t+h} = (\beta_{0,t} + \beta_{1,t} \times h) \times \sum_{i=1}^4 \delta_{i,t} I_{i,t+h} + E_{t+h} \quad (5)$$

con $\sum_{i=1}^4 \delta_{i,t} = 4$, $\beta_{0,t}$, $\beta_{1,t}$ y $\delta_{i,t}$, nivel, pendiente y efectos estacionales en t , respectivamente, evolucionan lentamente con t , y $E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

- **Modelo 4:** Usando la combinación del filtro de la descomposición clásica multiplicativa combinada con loess cuadrático óptimo (parámetro de suavizamiento óptimo con criterio AICC), el modelo local en este caso es: En la vecindad de un tiempo t_k , ($t_k = 1, 2, \dots, 151$)

$$Y_t = (\beta_{0,k} + \beta_{1,k} t + \beta_{2,k} t^2) \times \sum_{i=1}^4 \delta_i I_{i,t} + E_t, \quad \forall t \in \text{vecindad de } t_k, \text{ con } E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \text{ y } \sum_{i=1}^4 \delta_i = 4 \quad (6)$$

donde $\beta_{0,k}$, $\beta_{1,k}$ y $\beta_{2,k}$ son los parámetros de la parábola en la vecindad de t_k , $I_{i,t}$ la variable indicadora del trimestres i en el tiempo t y δ_i efecto estacional o efecto del trimestre i .

3. Resultados de ajuste

- Para ajustar los modelos 2 y 2b (modelos de regresión no lineal) en R con la función `nls()`, se usaron como valores iniciales las estimaciones de los parámetros de los modelos 1 y 1b, respectivamente. La Tabla 1 muestra los parámetros estimados en los modelos globales; la Tabla 2 resume resultados del suavizamiento Holt-Winters y la Tabla 3 da las estimaciones de efectos estacionales por el filtro de descomposición. En la Tabla 4 se muestran las ecuaciones ajustadas en los modelos globales, las ecuaciones de suavizamiento Holt-Winters y la ecuación ajustada de la componente estacional según el filtro de la descomposición multiplicativa.

- El suavizamiento óptimo obtenido en R con la función `HoltWinters()` arrojó los resultados de la Tabla 2, allí, los parámetros que R denomina s_1 , s_2 , s_3 y s_4 corresponden a los últimos valores suavizados de los efectos estacionales, pero presentados en el orden de los trimestres correspondientes a los tiempos de los pronósticos: $t = 152, 153, 154, 155$, es decir, Q4, Q1, Q2, y Q3, respectivamente, por lo cual se da la correspondencia indicada en la tabla entre los s_i arrojados por R y las estimaciones de los efectos estacionales $\hat{\delta}_{j,151}$.
- Para el ajuste y pronóstico en el modelo 4 se siguieron los siguientes pasos con los primeros $n = 151$ datos, teniendo en cuenta que la serie original es de componentes multiplicativas (se usó criterio AICC en el loess cuadrático):

1. Obtención de las estimaciones de los efectos estacionales, $\hat{\delta}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ y de la componente estacional de la descomposición multiplicativa y de $\hat{S}_t = \sum_{i=1}^4 \hat{\delta}_i I_{i,t}$, con la función R `decompose()`;
2. Desestacionalización o ajuste estacional de la serie. En este caso, como las componentes son multiplicativas, se obtiene como $Y_t^{\text{adj}} = Y_t / \hat{S}_t$, la cual sólo contiene tendencia, ciclos y componente de error.
3. Ajuste LOESS de la serie Y_t^{adj} , lo cual produce una estimación de la componente de tendencia, \hat{T}_t .
4. Calculamos los valores ajustados como $\hat{Y}_t = \hat{T}_t \times \hat{S}_t$.
5. Los residuales de ajuste se calculan como $\hat{E}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
6. Para los pronósticos hacemos el pronóstico LOESS para la serie Y_t^{adj} , es decir, pronosticamos la componente T_t , para $t = 152, 153, 154, 155$ y obtenemos a $\hat{T}_{151}(L)$. Para la estacionalidad se determina la estación correspondiente a cada uno de estos cuatro tiempos, en este caso, tenemos que éstas son Q_4, Q_1, Q_2, Q_3 , respectivamente y así, $\hat{S}_{151}(L) = \sum_{i=1}^4 \hat{\delta}_i I_{i,151+L}$, para estos cuatro tiempos produce la sucesión $\hat{\delta}_4, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3$, en este orden. Finalmente, los pronósticos se construyen como el producto,

$$\hat{Y}_{151}(L) = \hat{T}_{151}(L) \times \hat{S}_{151}(L), \text{ con } L = 1, 2, 3, 4$$

- En el ajuste de la componente estacional del modelo 4 se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 3, donde se muestra la estimación de los cuatro efectos estacionales, es decir los $\hat{\delta}_i$ y la componente estacional ajustada presentada en última fila de la Tabla 4 e ilustrada en la Figura 4(a). En la estimación de T_t , $t = 1, 2, \dots, 151$, sobre la serie desestacionalizada, Y_t^{adj} , se obtuvieron los resultados del loess cuadrático óptimo con el criterio AICC para la escogencia del parámetro de suavizamiento α , el cual corresponde a $\alpha_{\text{ótimo}} = 0.1306021$; este valor ha sido obtenido por la función `loess.as()` de la librería `fancova`, como puede verse en la Figura 3, en donde el objeto `yt3` al cual se le aplicó LOESS es la serie ajustada estacionalmente, es decir, es Y_t^{adj} , $t = 1, 2, \dots, 151$. La Figura 4(b) muestra a la serie Y_t^{adj} y su ajuste LOESS cuadrático óptimo. La combinación multiplicativa de las estimaciones de la tendencia y la estacionalidad produce el valor estimado de la serie, \hat{Y}_t , ésta se ilustra en la Figura 5(f). Para la comparación de los ajustes se ha calculado AIC y BIC, donde el número de parámetros en el modelo 4 se ha aproximado como

$$p = (\# \text{ parámetros equiv. LOESS}) + (s - 1) = 24.11 + 3 \approx 27$$

- Los ajustes de los seis modelos se exhiben en las gráficas de la Figura 5.
- En todos los modelos, AIC y BIC se han calculado con la versión $\exp(C_n^*(p))$ usando residuales en escala original, es decir, $Y_t - \hat{Y}_t$ (pseudo residuos en el caso de los modelos 1 y 1b). Ver Tabla 7.

Nota: En el modelo 4, también puede probarse con ajuste LOESS grado 1 en lugar de grado 2 y variando el criterio de información (AICC o GCV) para la selección del parámetro de suavizamiento loess óptimo. En este taller, aunque no se presentan los resultados variando grado de polinomio y criterios en ajustes loess alternativos, se ha escogido usar loess cuadrático con criterio AICC, pues al combinarlo con los ajustes y pronósticos de la componente estacional obtenidos con el filtro de la descomposición multiplicativa, resultó ser el mejor tanto en el análisis de residuos como en los pronósticos ex-post y calidad del ajuste final de la serie con los primeros $n = 151$ datos.

Tabla 1: Parámetros ajustados en modelos globales

Tabla 1-a: Modelo 1				
Parámetro	Estimación	Error Estándar	T_0	$P(t_{145} > T_0)$
β_0	6.3076	0.0205	308.04	0.0000
β_1	0.0155	0.0005	28.97	0.0000
β_2	-5.6729×10^{-5}	0.0000	-16.66	0.0000
δ_1	-0.1324	0.0164	-8.07	0.0000
δ_2	-0.0185	0.0164	-1.13	0.2610
δ_3	0.0152	0.0164	0.93	0.3559
$\sqrt{MSE} = 0.07107$.				
Tabla 1-b: Modelo 1b				
Parámetro	Estimación	Error Estándar	T_0	$P(t_{144} > T_0)$
β_0	6.2508	0.0249	251.3447	0.0000
β_1	0.0199	0.0013	15.3924	0.0000
β_2	-1.2897×10^{-4}	0.0000	-6.5427	0.0000
β_3	3.1684×10^{-7}	0.0000	3.7161	0.0003
δ_1	-0.1317	0.0157	-8.3657	0.0000
δ_2	-0.0185	0.0157	-1.1772	0.2410
δ_3	0.0145	0.0157	0.9188	0.3597
$\sqrt{MSE} = 0.06813$.				
Tabla 1-c: Modelo 2				
Parámetro	Estimación	Error Estándar	T_0	$P(t_{145} > T_0)$
β_0	6.3550	0.0332	191.708	0.0000
β_1	0.0143	0.0008	18.714	0.0000
β_2	-4.9977×10^{-5}	0.0000	-11.588	0.0000
δ_1	-0.1432	0.0188	-7.602	0.0000
δ_2	-0.0290	0.0177	-1.643	0.1020
δ_3	0.0063	0.0173	0.362	0.7180
Tabla 1-d: Modelo 2b				
Parámetro	Estimación	Error Estándar	T_0	$P(t_{144} > T_0)$
β_0	6.2547	0.0475	131.6348	0.0000
β_1	0.0201	0.0021	9.6295	0.0000
β_2	-1.3229×10^{-4}	0.0000	-4.7567	0.0000
β_3	3.3012×10^{-7}	0.0000	2.9983	0.0032
δ_1	-0.1431	0.0183	-7.8079	0.0000
δ_2	-0.0296	0.0172	-1.7195	0.0877
δ_3	0.0051	0.0169	0.3039	0.7616

Tabla 2: Parámetros óptimos de suavizamiento y coeficientes estimados, Holt-Winters multiplicativo en $t = n = 151$

Parámetros de suavizamiento	Valor óptimo
α	0.7734918
β	0.0065979
γ	0.5651145
Coefficientes	Valor en $n = 151$
$a = \hat{\beta}_{0,151}$	1612.7974
$b = \hat{\beta}_{1,151}$	8.9204
$s_1 = \hat{\delta}_{4,151}$	1.0334
$s_2 = \hat{\delta}_{1,151}$	0.8812
$s_3 = \hat{\delta}_{2,151}$	0.9737
$s_4 = \hat{\delta}_{3,151}$	1.0227

Tabla 3: Efectos estacionales estimados en el modelo 4

i	δ_i
1	0.9053
2	1.0140
3	1.0478
4	1.0329
suma	4.0000

Tabla 4: Ecuaciones ajustadas en modelos globales. Ecuaciones de suavizamiento Holt-Winters. Ajuste componente estacional por filtro de descomposición

Modelo	Ecuación
1	$\hat{Y}_t \approx \exp [6.3076 + 0.0155t - 5.6729 \times 10^{-5}t^2 - 0.1324I_{1,t} - 0.0185I_{2,t} + 0.0152I_{3,t}] \times \exp \left(\frac{(0.07107)^2}{2} \right)$
1b	$\hat{Y}_t \approx \exp [6.2508 + 0.0199t - 1.2897 \times 10^{-4}t^2 + 3.1684 \times 10^{-7}t^3 - 0.1317I_{1,t} - 0.0185I_{2,t} + 0.0145I_{3,t}] \times \exp \left(\frac{(0.06813)^2}{2} \right)$
2	$\hat{Y}_t = \exp [6.3550 + 0.0143t - 4.9977 \times 10^{-5}t^2 - 0.1432I_{1,t} - 0.0290I_{2,t} + 0.0063I_{3,t}]$
2b	$\hat{Y}_t = \exp [6.2547 + 0.0201t - 1.3229 \times 10^{-4}t^2 + 3.3012 \times 10^{-7}t^3 - 0.1431I_{1,t} - 0.0296I_{2,t} + 0.0051I_{3,t}]$
3	$\hat{\beta}_{0,t} = 0.7734918 \left(Y_t / \hat{S}_{t-4} \right) + 0.2265082 \left(\hat{\beta}_{0,t-1} + \hat{\beta}_{1,t-1} \right)$ $\hat{\beta}_{1,t} = 0.006597877 \left(\hat{\beta}_{0,t} - \hat{\beta}_{0,t-1} \right) + 0.9934021 \hat{\beta}_{1,t-1}$ $\hat{S}_t = 0.5651145 \left(Y_t / \hat{\beta}_{0,t} \right) + 0.4348855 \hat{S}_{t-4}$ $\hat{Y}_t = \left(\hat{\beta}_{0,t-1} + \hat{\beta}_{1,t-1} \right) \times \hat{S}_{t-4}$
4	$\hat{S}_t = \sum_{i=1}^4 \hat{\delta}_i I_{i,t} = 0.9053I_{1,t} + 1.0140I_{2,t} + 1.0478I_{3,t} + 1.0329I_{4,t}$

```

R Console (64-bit)
Archivo Editar Misc. Paquetes Ventanas Ayuda
> yt2=ts(yt[t],frequency=4,start=c(1956,1)) #serie con las primeras n observaciones
> des=decompose(yt2,type="multiplicative") #Descomposición multiplicativa
> St=des$seasonal #Extrayendo la serie de componente estacional
> yt3=yt2/St #Serie desestacionalizada en forma multiplicativa
> ajusteLoess=loess.as(t,yt3,degree=2,criterion="aicc",family="gaussian",plot=F)
> summary(ajusteLoess)
Call:
loess(formula = y ~ x, data = data.bind, span = span1, degree = degree,
      family = family)

Number of Observations: 151
Equivalent Number of Parameters: 24.11
Residual Standard Error: 37.96
Trace of smoother matrix: 26.67 (exact)

Control settings:
span      : 0.1306021
degree    : 2
family    : gaussian
surface   : interpolate      cell = 0.2
normalize: TRUE
parametric: FALSE
drop.square: FALSE
> |

```

Figura 3: Salida R: Resumen ajuste loess cuadrático óptimo sobre serie Y_t^{adj}

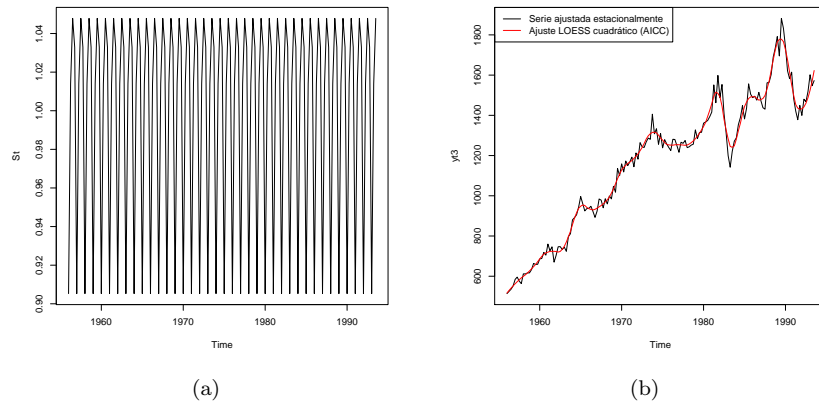


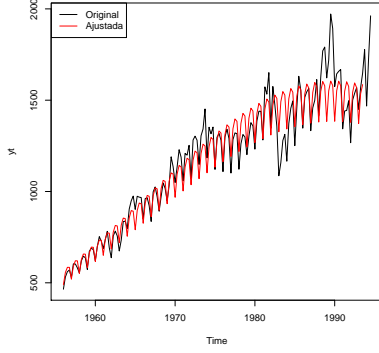
Figura 4: (a) Estimación componente estacional según filtro de descomposición multiplicativa; (b) Serie ajustada estacionalmente y su ajuste LOESS cuadrático óptimo ($\alpha_{\text{óptimo}} = 0.1306021$)

Tabla 5: Tests sobre significancia de parámetros importantes en modelos globales

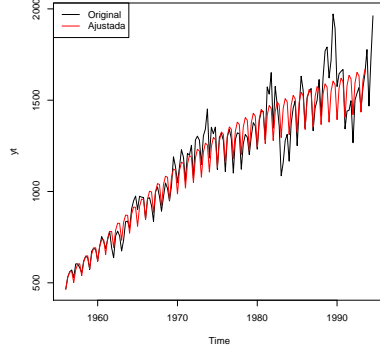
Prueba de hipótesis	Estadístico de la prueba
$H_0 : \beta_p = 0$ vs. $H_1 : \beta_p \neq 0$	$T_0 = \frac{\beta_p}{s.e(\beta_p)} \sim t_\nu$
Tests individuales para δ_i , $i = 1, 2, 3$, $H_0 : \delta_i = 0$ vs. $H_1 : \delta_i \neq 0$	$T_0 = \frac{\delta_i}{s.e(\delta_i)} \sim t_\nu$
En todos estos tests se rechaza H_0 si $P(t_\nu > T_0)$ es pequeño, donde $\nu = 151 - k$, con k el total de parámetros en cada modelo. p es el grado del polinomio.	

Tabla 6: $\exp(\hat{\delta}_i) \times 100\%$ en modelos globales

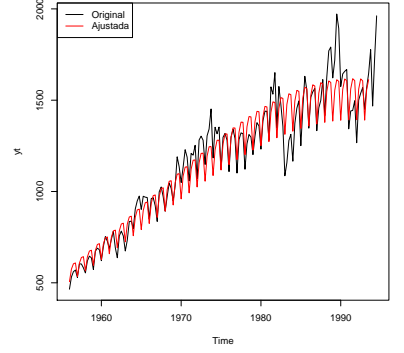
Modelo	$i = 1$	2	3
1	87.60	98.16	101.53
1b	87.66	98.16	101.46
2	86.66	97.14	100.63
2b	86.67	97.09	100.51



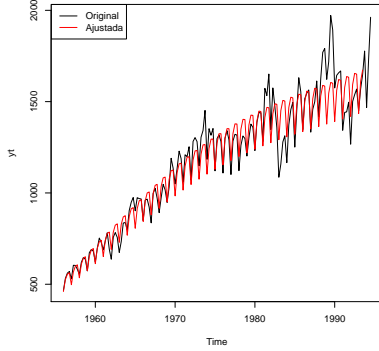
(a)



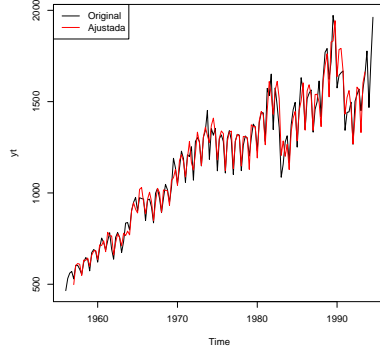
(b)



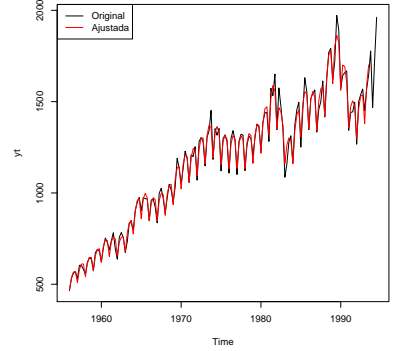
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5: (a) Ajuste modelo 1, (b) ajuste modelo 1b, (c) ajuste modelo 2, (d) ajuste modelo 2b, (e) ajuste Holt-Winters, (f) ajuste combinación filtro descomposición multiplicativa y loess cuadrático.

Tabla 7: Tabla resumen de AIC y BIC, versión $\exp(C_n^*(p))$

Modelo	$p = \#$ Parám.	AIC	BIC
modelo 1	6	9590.517	10812.109
modelo 2	6	9399.777	10597.074
modelo 1b	7	8995.101	10345.524
modelo 2b	7	8956.667	10301.320
H-W óptimo *	5	3451.106	3820.610
Descompos-LOESS	27	1684.217	2888.722
* $p = (s - 1) + 2$			

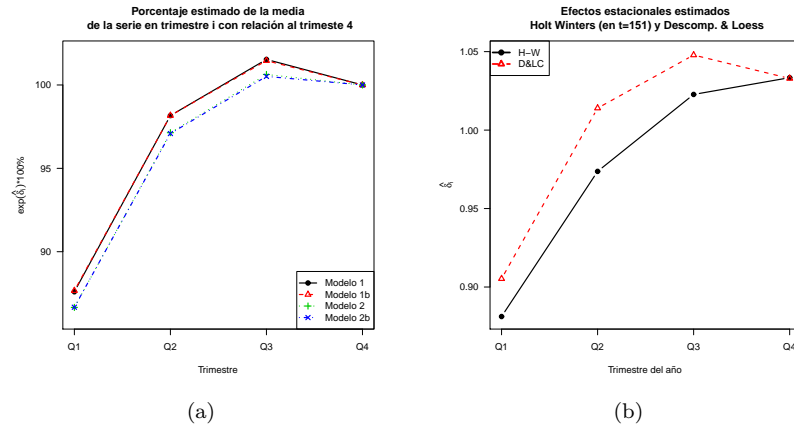


Figura 6: (a) $\exp(\hat{\delta}_i) \times 100\%$, $i = 1, 2, 3$ en modelos globales, (b) efectos estacionales estimados en modelos locales (para Holt Winters últimos valores actualizados en $t = 151$).

Con base en los resultados de ajuste presentados, responda lo siguiente:

- En los modelos globales ¿Son significativos el polinomio usado en cada caso y la componente estacional con la representación mediante variables indicadoras?

Sol: Desarrollando los tests enunciados en la Tabla 5, con base en resultados en Tablas 1-a a 1-d, se concluye que en cada modelo global es significativo el respectivo polinomio propuesto (aunque esto no implica que el modelo es correcto). Para la componente estacional, a un nivel de significancia de 0.05, en los cuatro modelos se concluye que sólo δ_1 es estadísticamente significativo, sin embargo, esto es suficiente para afirmar que la componente estacional modelada globalmente como un factor, es estadísticamente significativa.

- En los modelos globales ¿Cuál es la interpretación de los $\hat{\delta}_i$? ¿difieren mucho las conclusiones sobre estas estimaciones entre los modelos globales?

Sol: Como los cuatro modelos son de tipo multiplicativo, debemos considerar $\exp(\delta_i) \times 100\% = \frac{E[Y_t | t \in \text{trimestre } i]}{E[Y_t | t \in \text{trimestre } 4]} \times 100\%$, por tanto, al usar los valores estimados, los resultados en Tabla 6 estiman el porcentaje de la producción de cemento que en promedio se espera en el trimestre i con relación al valor de la producción en el trimestre 4, en cada año. Se observa que para el trimestre 1 es de aproximadamente un 87.7% según modelos 1 y 1b y de 86.7% según modelos 2 y 2b, mientras que para los trimestres 2 y 3 son valores muy próximos al 100%; sin embargo, teniendo en cuenta los resultados de los tests de significancia, deberíamos concluir que estadísticamente en promedio en cada año, la producción en trimestres 2 y 3 iguala la del trimestre 4. Vemos además que las cifras estimadas con modelos 1 y 1b (las cuales son muy similares entre sí) superan en casi un 1% a las de los modelos 2 y 2b (las cuales también son muy similares entre sí). Para ver la evolución dentro de un año calendario se presenta gráfica en la Figura 6(a): vemos que la forma estimada para el patrón estacional es similar entre los modelos globales, pero con valores del modelo 1 y 1b mayores a los de modelos 2 y 2b. Estas diferencias pudieran ser importantes teniendo en cuenta que los porcentajes serían sobre miles de toneladas de cemento.

- Compare gráficamente la forma de la estimación de la componente estacional del modelo 4 con la estimación de la misma en los modelos globales ¿difiere mucho? ¿por qué? ¿Estas estimaciones aproximan apropiadamente el patrón estacional?

Sol: Comparando las series de valores en Figuras 6(a) vs. 6(b) (la de color rojo en esta última) vemos que la forma del patrón estimado para la componente estacional, según los modelos globales y el filtro de descomposición, es idéntica, esto es de esperarse ya que el filtro de descomposición también ajusta globalmente la componente estacional. Ahora bien, sobre qué también es estimada la componente estacional por los cuatro modelos globales y el filtro de descomposición, debemos verlo en las gráficas del ajuste total de la serie, en Figura 5. Allí vemos que hay algunos años donde el comportamiento de la serie dentro del año calendario difiere un poco con relación a la estimación; sin embargo, no vemos un patrón general que indique que la componente estacional estimada sea muy sesgada con relación a la componente estacional observada.

- Compare también la última estimación de los efectos estacionales que dio Holt-Winters con las estimaciones de estos efectos según el filtro de la descomposición multiplicativa ¿difieren mucho?

Sol: En la Figura 6(b) podemos realizar tal comparación. Vemos que la estimación local que hace Holt-Winters del patrón estacional, hacia el final de la serie, difiere de la estimación global que hace el filtro de la descomposición multiplicativa, particularmente en el comportamiento entre trimestre 3 vs. trimestre 4: Holt-Winters muestra el mayor valor en el trimestre 4, mientras que el filtro lo muestra en el trimestre 3 (lo mismo que los modelos globales). Además las estimaciones con Holt-Winters de los efectos estacionales numéricamente son un poco menores a las del filtro. Pudiera ser que hacia el final de la serie haya cambiado un poco el patrón estacional, o bien, estas diferencias pudieran deberse a valores extremos que están ocurriendo en los últimos datos del ajuste. De cualquier manera, la diferencia observada podría causar diferencias importantes en los pronósticos teniendo en cuenta que estos coeficientes multiplican a la tendencia en las ecuaciones de pronóstico y que la tendencia tiene como unidad de medida las mismas unidades de la serie (miles de toneladas).

■ *¿Qué se concluye de la Figura 4(b)?*

Sol: En esa figura vemos que la curva loess logra muy buen ajuste sobre la serie desestacionalizada, siguiendo conjuntamente tendencia y ciclos. Esto se debe a que de acuerdo a los resultados en la Figura 3, el ajuste loess se concentró mucho en los patrones locales ya que cada que se realizó un ajuste local fueron usados aproximadamente un 13.1 % del total de los 151 datos ajustados, alcanzando un número equivalente de parámetros de cerca de 24 lo cual indica la imposibilidad de lograr globalmente el mismo ajuste. Debe observarse además que la curva loess termina con pendiente positiva, luego, en los pronósticos la tendencia será proyectada de forma creciente.

■ *¿Qué se concluye sobre la calidad del ajuste de los modelos globales vs. locales? también determine entre los modelos globales cuál modelo recomendaría inicialmente como mejor modelo global para ajustar la serie de producción trimestral de cemento. Tenga en cuenta no sólo las medidas numéricas sino también los resultados gráficos.*

Sol: Es claro que los modelos globales no logran buen ajuste porque no ajustan los ciclos, en cambio ambos modelos locales logran seguir tanto tendencia, como estacionalidad y ciclos. Esto es corroborado por los valores de AIC y BIC que son mucho menores en los modelos locales. Ahora bien, cualitativamente (examinando las gráficas), parece haber mejor ajuste de la serie con Holt-Winters, sin embargo, los criterios de información favorecen a la combinación del filtro de descomposición con loess cuadrático, pero tenga en cuenta que el cálculo de AIC y BIC en Holt-Winters es una aproximación muy burda y tal vez por ello no aparece con las menores cifras en los criterios de información. Entre los modelos globales, vemos que modelos 1 y 2 terminan con un ajuste de tendencia que será decreciente más rápidamente que con modelos 1b y 2b, esto al parecer también hace que sea mayor la diferencia en los ajustes según criterios de información, pues de acuerdo a estas medidas, son mejores los modelos con polinomios de grado 3 que con grado 2 y el mejor ajuste global es con el modelo 2b.

4. Análisis de residuales

En la Figura 7 se muestran las gráficas de las series de tiempo de los residuos de ajuste, en tanto que en la Figura 8 se muestran los gráficos de residuos de ajuste vs. valores ajustados (en la escala de ajuste que usó cada modelo). Con base en estas gráficas responda a lo siguiente:

■ *Sobre el supuesto de media cero para los errores de ajuste ¿qué se concluye en los seis modelos?*

Sol: En las figuras presentadas en las gráficas de residuos vs. tiempo y vs. valores ajustados, no se observa evidencia contra el supuesto de que los errores tienen media cero (a pesar de la variación cíclica alrededor de cero, que se observa en las series de tiempo de los residuos de los modelos globales), pues en todos los casos los residuos parecen bien centrados en cero.

■ *¿Es válido el supuesto de varianza constante en los seis modelos?*

Sol: En todos los modelos parece haber problemas con este supuesto, pero es particularmente grave su violación en los dos modelos exponenciales (modelos 2 y 2b).

■ *¿Hay patrones en los residuos que indiquen carencia de ajuste en la estructuras de regresión de los modelos globales?*

Sol: No hay evidencia de carencia de ajuste severa en las componentes estructurales (o sea en tendencia y estacionalidad), pues en los residuos vs. valores ajustados no se observan patrones claros con forma de U o de W que indiquen mal ajuste de la tendencia, ni patrones periódicos en las gráficas de las series de tiempo de residuos de ajuste que indiquen mal ajuste de la estacionalidad.

■ *¿Hay ciclos presentes en los residuales? ¿qué se deriva de estos patrones?*

Sol: En las series de tiempo de los residuos de los modelos globales hay evidencia de ciclos no explicados (los cuales se dan centrados en cero), lo cual implica que los errores en los modelos globales, separados un periodo en el tiempo, están positivamente correlacionados, es decir, $\text{Corr}(E_t, E_{t+1}) > 0$, por lo cual ya no es válido el supuesto de independencia. Por el contrario, en las series de tiempo de los residuos de los dos modelos locales no son observables a simple vista patrones cíclicos, aunque esto no es una garantía suficiente para afirmar la validez de la independencia entre los errores de ajuste de estos dos modelos, es un punto a favor de estos modelos.

■ ¿Qué hacen mejor los métodos locales vs. los globales?

Sol: Los métodos locales logran seguir ciclos, por eso son mejores que los modelos globales.

■ ¿Cuál es el mejor modelo de acuerdo al análisis de los residuales?

Sol: Considerando todo lo antes dicho, de los seis modelos, el modelo 4 seguido de Holt-Winters, son los mejores. Entre los globales, son mejores los modelos 1 y 1b, ya que en estos dos el problema de varianza no constante no es tan severa como en los modelos 2 y 2b, y en los residuos de los cuatro modelos globales observamos básicamente el mismo patrón de ciclos.

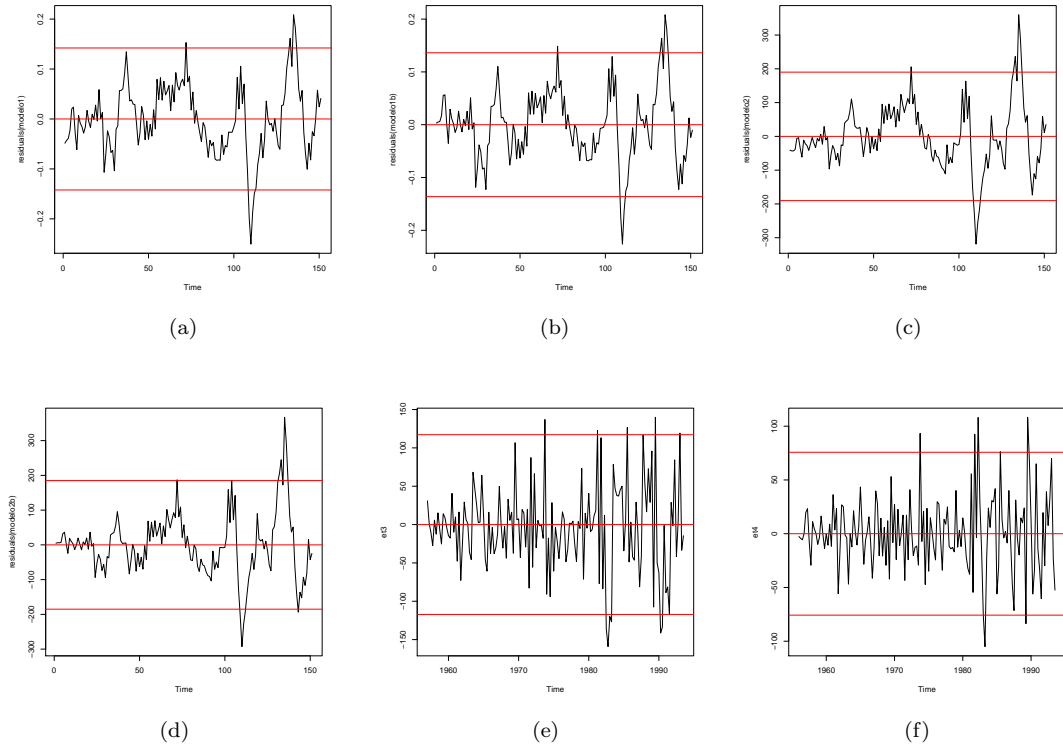


Figura 7: Series de los residuos de ajuste: (a) modelo 1, (b) modelo 1b, (c) modelo 2, (d) modelo 2b, (e) modelo 3 (Holt-Winters), (f) modelo 4 (combinación filtro descomposición multiplicativa y loess cuadrático)

5. Pronósticos ex-post para la validación cruzada

En la Tabla 8 se muestran las ecuaciones de pronósticos de los seis modelos considerados en este taller, todos con origen en $t = n = 151$ (Q4 de 1993). En la Tabla 10 se muestran los resultados numéricos de los pronósticos ex-post en los seis modelos y en la Tabla 11 se informan los valores reales de la serie en los períodos pronosticados. Una comparación gráfica de los pronósticos puntuales y valores reales se presenta en la Figura 9. La Tabla 12 muestra resultados para evaluar precisión de los pronósticos puntuales y de los I.P del 95 % donde fue posible calcular estos intervalos.

Nota: En el modelo 4 no conocemos directamente los valores de los parámetros del ajuste del último polinomio local loess, $\hat{\beta}_{0,151}$, $\hat{\beta}_{1,151}$ y $\hat{\beta}_{2,151}$; estos quedan internamente guardados en el objeto R que guardó el ajuste loess. Los pronósticos puntuales del modelo 4 fueron obtenidos combinando los pronósticos de las componentes como se indica en la Tabla 9.

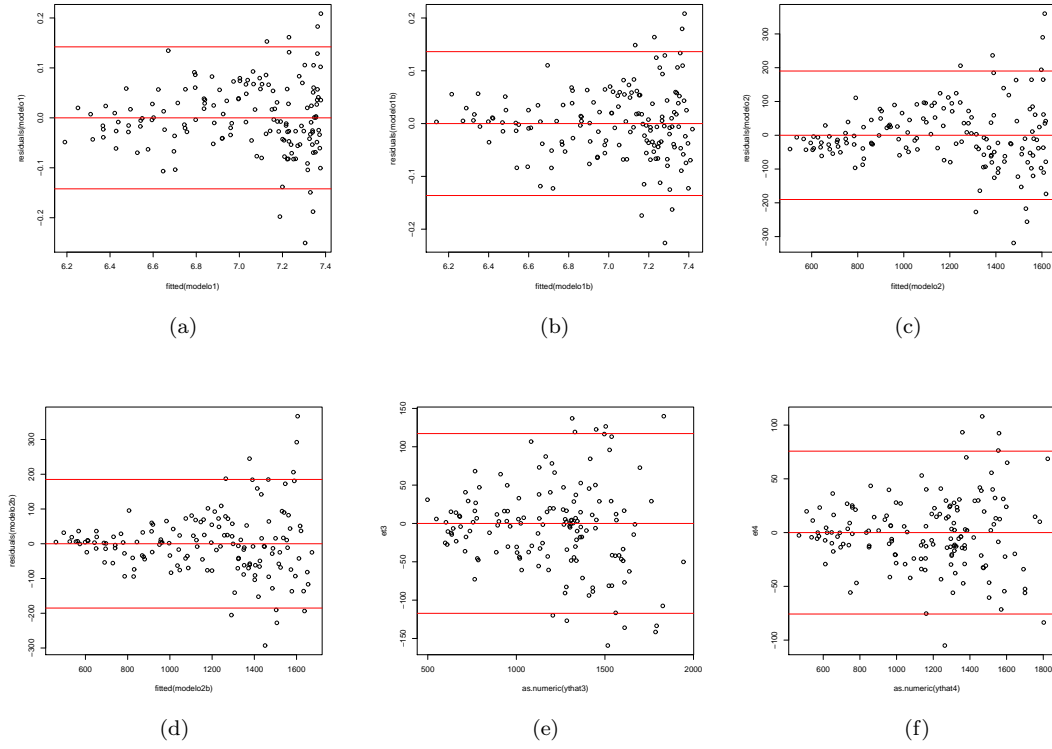


Figura 8: Residuos de ajuste vs. valores ajustados: (a) modelo 1, (b) modelo 1b, (c) modelo 2, (d) modelo 2b, (e) modelo 3 (Holt-Winters), (f) modelo 4 (combinación filtro descomposición multiplicativa y loess cuadrático)

Tabla 8: Ecuaciones de pronósticos en la escala original

Modelo 1
$\hat{Y}_{151}(L) \approx \exp [6.3076 + 0.0155(151 + L) - 5.6729 \times 10^{-5}(151 + L)^2 - 0.1324I_{1,151+L} - 0.0185I_{2,151+L} + 0.0152I_{3,151+L}] \times \exp \left(\frac{(0.07107)^2}{2} \right)$
Modelo 1b
$\hat{Y}_{151}(L) \approx \exp [6.2508 + 0.0199(151 + L) - 1.2897 \times 10^{-4}(151 + L)^2 + 3.1684 \times 10^{-7}(151 + L)^3 - 0.1317I_{1,151+L} - 0.0185I_{2,151+L} + 0.0145I_{3,151+L}] \times \exp \left(\frac{(0.06813)^2}{2} \right)$
Modelo 2
$\hat{Y}_{151}(L) = \exp [6.3550 + 0.0143(151 + L) - 4.9977 \times 10^{-5}(151 + L)^2 - 0.1432I_{1,151+L} - 0.0290I_{2,151+L} + 0.0063I_{3,151+L}]$
Modelo 2b
$\hat{Y}_{151}(L) = \exp [6.2547 + 0.0201(151 + L) - 1.3229 \times 10^{-4}(151 + L)^2 + 3.3012 \times 10^{-7}(151 + L)^3 - 0.1431I_{1,151+L} - 0.0296I_{2,151+L} + 0.0051I_{3,151+L}]$
Modelo 3 (Suavizamiento Holt-Winters multiplicativo)
$\hat{Y}_{151}(L) = (1612.7974 + 8.9204 \times L) \times (0.8812I_{1,151+L} + 0.9737I_{2,151+L} + 1.0227I_{3,151+L} + 1.0334I_{4,151+L})$
Modelo 4: $\hat{Y}_{151}(L) = \hat{T}_{151}(L) \times \hat{S}_{151}(L)$
$\hat{Y}_{151}(L) = [\hat{\beta}_{0,151} + \hat{\beta}_{1,151}(151 + L) + \hat{\beta}_{2,151}(151 + L)^2] \times [0.9053I_{1,151+L} + 1.0140I_{2,151+L} + 1.0478I_{3,151+L} + 1.0329I_{4,151+L}]$

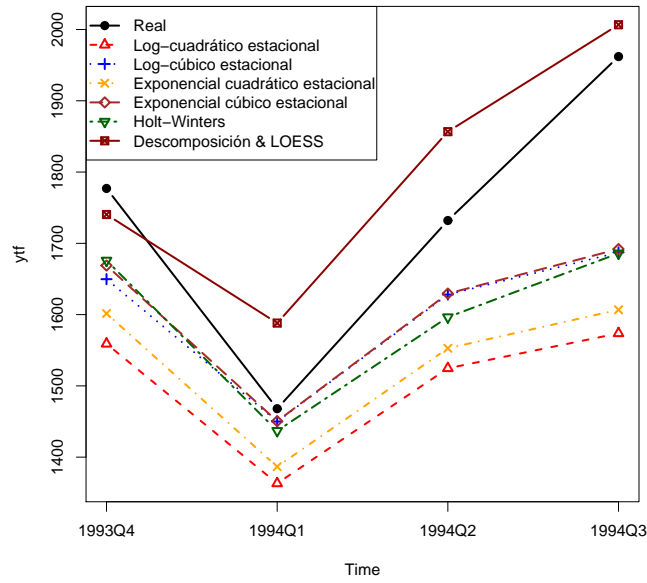


Figura 9: Valores reales y pronosticados con los seis modelos

Tabla 9: Cálculo pronósticos en el modelo 4

Fecha	L	$T_{151}(L)$	$S_{151}(L)$	$Y_{151}(L) = T_{151}(L) \times S_{151}(L)$
1993 Q4	1	1684.9945	1.0329	1740.4176
1994 Q1	2	1754.2727	0.9053	1588.1075
1994 Q2	3	1831.0237	1.0140	1856.6539
1994 Q3	4	1915.0780	1.0478	2006.6768

Tabla 10: Pronósticos - Miles de ton.

Tabla 10-a: Modelo 1				
Período	L	pronóstico	Lim. Inf	Lim. Sup
1993 Q4	1	1559.005	1346.977	1804.409
1994 Q1	2	1363.155	1177.658	1577.869
1994 Q2	3	1524.635	1316.905	1765.133
1994 Q3	4	1573.712	1359.018	1822.323
Tabla 10-b: Modelo 1b				
Período	L	pronóstico	Lim. Inf	Lim. Sup
1993 Q4	1	1649.702	1429.387	1903.976
1994 Q1	2	1450.015	1255.496	1674.671
1994 Q2	3	1628.089	1408.739	1881.594
1994 Q3	4	1687.280	1458.900	1951.411
Tabla 10-c: Modelo 2				
Período	L	pronóstico	Lim. Inf	Lim. Sup
1993 Q4	1	1601.560	-	-
1994 Q1	2	1386.640	-	-
1994 Q2	3	1552.730	-	-
1994 Q3	4	1606.770	-	-
Tabla 10-d: Modelo 2b				
Período	L	pronóstico	Lim. Inf	Lim. Sup
1993 Q4	1	1668.857	-	-
1994 Q1	2	1450.493	-	-
1994 Q2	3	1629.504	-	-
1994 Q3	4	1691.936	-	-
Tabla 10-e: Modelo 3				
Período	L	pronóstico	Lim. Sup	Lim. Inf
1993 Q4	1	1675.90	1776.16	1575.64
1994 Q1	2	1436.91	1561.43	1312.39
1994 Q2	3	1596.42	1757.51	1435.32
1994 Q3	4	1685.92	1847.71	1524.14
Tabla 10-f: Modelo 4				
Período	L	pronóstico	Lim. Sup	Lim. Inf
1993 Q4	1	1740.4176	-	-
1994 Q1	2	1588.1075	-	-
1994 Q2	3	1856.6539	-	-
1994 Q3	4	2006.6768	-	-

Tabla 11: Serie de valores reales en período 1993-Q4 a 1994-Q3

	Q1	Q2	Q3	Q4
1993				1777
1994	1468	1732	1962	

Tabla 12: Tabla evaluación de precisión de los pronósticos

Modelo	Pronósticos puntuales			Intervalos	
	RMSE	MAE	MAPE (%)	Ampl. Media I.P	Cobertura (%)
modelo1	251.138	229.623	12.793	442.294	75
modelo1b	160.310	130.978	7.098	464.783	75
modelo2	221.205	197.826	10.968	-	-
modelo2b	154.468	124.552	6.740	-	-
Modelo 3	162.625	135.962	7.427	273.830	50
Modelo 4	91.240	81.505	4.929	-	-

Con base en los resultados de pronósticos responda lo siguiente:

- *¿Cuál es la interpretación de los pronósticos y sus I.P?*

Sol: Los pronósticos puntuales en la Tabla 10, indican el valor que cada modelo ajustado con los primeros $n = 151$ datos, predice que será observado para la serie en cada periodo de los pronósticos ex-post. Por ejemplo, para el trimestre 2 de 1994, el modelo 1 pronostica que la producción de cemento Portland será de 1524.635 miles de ton., mientras que los modelos 1b, 2, 2b, 3 y 4, pronostican, respectivamente, que la producción será de 1628.089, 552.730, 1629.504, 1596.42 y 1856.6539, miles de ton. Por su parte, los I.P del 95 %, predicen el rango de valores en el cual podrá darse el valor de la serie, con una confianza del 95 %, por ejemplo, para el trimestre 2 de 1994, el modelo 1 predice que la producción de cemento estará entre 1316.905 y 1765.133, en miles de ton., mientras que el modelo 1b pronostica que la producción será observada entre 1408.739 y 1881.594, en miles de ton. y Holt-Winters predice que estará entre 1757.51 y 1435.32, en miles de ton. Vemos diferencias importantes tanto en los pronósticos puntuales como por intervalos, por lo que es necesario calcular medidas promedios.

- *¿Cuál es la interpretación de las medidas MAE, MAPE y RMSE? ¿según estas medidas cuál modelo pronostica mejor?*

Sol: En cada modelo, MAE y RMSE miden el error que en promedio se comete (\pm miles de ton., pues esta es la unidad de medida de los datos) en cada pronóstico ex-post con horizonte de 4 períodos, mientras que MAPE mide este error medio de pronóstico en términos porcentuales (\pm %), con relación a cada valor realmente observado. Por tanto, se concluye con base en los resultados en la Tabla 12, que los modelos puntualmente más precisos en los pronósticos son en su orden, modelos 4 y 2b, mientras que los modelos menos precisos fueron en su orden, modelos 1 y 2.

- *Con base en la amplitud media y cobertura de los I.P ¿qué se concluye?*

Sol: Debemos comparar entre modelos 1, 1b y 3. A pesar que en el modelo 3 (Holt-Winters) los I.P son en promedio más estrechos, la cobertura alcanzada es muy baja, pues de los cuatro valores reales sólo son cubiertos 2 de ellos por sus respectivos I.P. Por el contrario, en modelos 1 y 1b la cobertura es 3 de 4, pero esto lo logra con I.P's que en promedio son mucho más amplios. En los tres modelos se tiene poca precisión en los pronósticos por I.P. Sin embargo, mirando más de cerca los valores reales en los periodos pronosticados, vemos que hay valores muy atípicos en estos periodos, difíciles de pronosticar con un margen razonable de error, y esto debe tenerse en cuenta con Holt-Winters.

- *¿Qué se concluye de la Figura 9?*

Sol: Los pronósticos ex-post son sesgados: Los modelos 1, 1b, 2, 2b, y 3 sub estiman los valores reales, mientras que los del modelo 4 los sobre estiman ¿qué es peor?, depende de quien vaya a usar estos pronósticos ¿un productor de cemento? o un ¿comprador de cemento? Sin embargo, en promedio los pronósticos del modelo 4 están más próximos a los valores reales. De nuevo hay que tener en cuenta que en los periodos ex-post han ocurrido valores muy atípicos en la serie.

- *Calcule el pronóstico para Q3 de 1994 en modelos 3 y 4 usando la ec. de pronóstico.*

Sol: Primero que todo, debemos identificar el valor de L y el periodo del año observado en la fecha dada. Como el ajuste llegó hasta el trimestre 3 de 1993, contamos después de esta fecha un total de $L = 4$ periodos hasta el trimestre 3 de 1994; además, como esta fecha es un trimestre 3, entonces de las cuatro variables indicadoras, sólo $I_{3,151+L} = I_{3,155} = 1$. Luego, reemplazando L en las ecuaciones de pronósticos, tenemos,

- En el modelo 3: $\hat{Y}_{151}(4) = (1612.7974 + 8.9204 \times 4) \times \hat{\delta}_{3,151} = (1612.7974 + 8.9204 \times 4) \times 1.0227 = 1685.899$ miles de ton. (las diferencias con la cifra en Tabla 10 se deben a las aproximaciones en valores de nivel, pendiente y efecto estacional).
- En el modelo 4: $\hat{Y}_{151}(4) = \hat{T}_{151}(4) \times \hat{\delta}_3 = \hat{T}_{151}(4) \times 1.0478$, y de la Tabla 9, tenemos que $\hat{T}_{151}(4) = 1915.0780$, por tanto, $\hat{Y}_{151}(4) = 1915.0780 \times 1.0478 = 2006.619$ miles de ton. (las diferencias con la cifra en Tabla 9 se deben a las aproximaciones en valores tendencia loess pronosticada y efecto estacional).

6. Conclusiones

Considerando todos los resultados de ajuste, evaluación de residuos y medidas de pronóstico ¿Cual modelo recomienda finalmente para el ajuste y pronóstico? ¿por qué?

Sol: Teniendo como primer criterio de selección los resultados en el análisis de residuales, en segundo lugar los resultados de pronósticos y por último los de ajuste, se concluye que el mejor modelo por el momento, es el modelo 4. por otra parte, sólo considerando los modelos globales, a pesar de mejor precisión en pronósticos puntuales con el modelo 2b, se debe seleccionar al modelo 1b, pues este último resultó mejor en el análisis de residuos que el modelo 2b.

7. Código R usado

A continuación vea con atención la programación utilizada. Estudie con cuidado cada caso.

Código R 7.1. Cargar librerías y definir funciones de usuario: **crit.inf.resid()** para calcular $C_n^*(p)$ donde el argumento **residuales** se refiere a la diferencia: $Y_t - \hat{Y}_t$, y el argumento **n.par** corresponde al número de parámetros del modelo al cual calcula las medidas. Por defecto calcula versión AIC. La función usuario **factoresdeltai()** es para obtener las estimaciones de los factores estacionales δ_i en la descomposición clásica con función **decompose()** y maneja como argumentos a **descom** para especificar el objeto R que guarde el resultado de la función **decompose()** sobre la serie recortada para ajuste con validación cruzada, el argumento **s** se refiere a la longitud del periodo estacional y el argumento **estacionini** es el número de la estación o período del año observado en $t = 1$. La función usuario **amplitud()** es para calcular la amplitud media de los intervalos de pronóstico y tiene como argumentos a **LIP** y **LSP** para especificar respectivamente, los valores de los límites inferior y superior de los intervalos. Finalmente, la función usuario **cobertura()**, es para calcular la cobertura de los intervalos de pronóstico en la validación cruzada y sus argumentos son, **real** que corresponde a los valores observados en los periodos pronosticados, y **LIP**, **LSP** para especificar respectivamente, los valores de los límites inferior y superior de los intervalos.

```
library(TSA);library(forecast);library(fANCOVA)
crit.inf.resid=function(residuales,n.par,AIC="TRUE"){
  if(AIC=="TRUE"){
    CI=log(mean(residuales^2))+2*n.par/length(residuales) #Calcula AIC
  }
  if(AIC=="FALSE"){
    CI=log(mean(residuales^2))+n.par*log(length(residuales)/length(residuales) #Calcula BIC
  }
  CI
}

factoresdeltai=function(descom,s,estacionini){
  if(estacionini==1){
    deltasi=descom$figure
  }
  if(estacionini!=1){
    j=estacionini;deltasi=c(descom$figure[(s-j+2):s],descom$figure[1:(s-j+1)])
  }
  deltasi
}

amplitud=function(LIP,LSP){
  a=LSP-LIP
  am=mean(a)
  am
}

cobertura=function(real,LIP,LSP){
  I=ifelse(real>=LIP & real<=LSP,1,0)
  p=mean(I)
  p
}
```

Código R 7.2. Lectura de los datos, creación serie de tiempo y gráficas descriptivas

```
yt=scan()  
465 532 561 570 529 604 603 582 554 620 646  
637 573 673 690 681 621 698 753 728 688 737  
782 692 637 757 783 757 674 734 835 838 797  
904 949 975 902 974 969 967 849 961 966 922  
836 998 1025 971 892 973 1047 1017 948 1032  
1190 1136 1049 1134 1229 1188 1058 1209 1199  
1253 1070 1282 1303 1281 1148 1305 1342 1452  
1184 1352 1316 1353 1121 1297 1318 1281 1109  
1299 1341 1290 1101 1284 1321 1317 1122 1261  
1312 1298 1202 1302 1377 1359 1232 1386 1440  
1439 1282 1573 1533 1651 1347 1575 1475 1357  
1086 1158 1279 1313 1166 1373 1456 1496 1251  
1456 1631 1554 1347 1516 1546 1564 1333 1458  
1499 1613 1416 1625 1770 1791 1622 1719 1972  
1893 1575 1644 1658 1668 1343 1441 1444 1497  
1267 1501 1538 1569 1450 1569 1648 1777 1468  
1732 1962  
  
yt=ts(yt,frequency=4,start=c(1956,1)) #serie con todas las observaciones  
plot(yt,ylab="Miles de toneladas")  
plot(log(yt),ylab="Log de Miles de toneladas")  
  
plot(decompose(log(yt))$trend,ylim=c(min(log(yt)),max(log(yt))))  
  
boxplot(log(yt)~cycle(log(yt)),names=c("Q1","Q2","Q3","Q4")) #boxplots según trimestres, para el logaritmo natural  
  
periodogram(diff(log(yt)),lwd=4) #periodograma sobre los logaritmos diferenciados  
abline(v=c(0.25,0.5),col=2,lty=2)
```

Código R 7.3. Definiendo índice de tiempo $t = 1, 2, \dots, n$ (objeto t), la serie para ajuste en esos tiempos (objeto $yt2$); se crean directamente las tres variables indicadoras en el objeto $trim$ que es una matriz cuyas columnas son en su orden, las indicadoras de los trimestres 1 a 3, que se separan luego en los objetos $Q1$, $Q2$ y $Q3$, definidos también para los primeros n tiempos.

```
m=4 #Número de períodos a pronosticar dentro de la muestra  
n=length(yt)-m #tamaño de la muestra para el ajuste  
s=4 #longitud periodo estacional  
t=1:n #índice de tiempo  
yt2=ts(yt[t],frequency=4,start=c(1956,1)) #serie con las primeras n observaciones  
lnyt2=log(yt2) #serie de logaritmos con las primeras n observaciones  
  
#DEFINIENDO INDICADORAS PARA ESTACIONALIDAD  
#pueden usarse en modelos de regresión lineal y en  
#modelos de regresión no lineal  
trim=seasonaldummy(yt2) #observe que se usa función seasonaldummy()  
Q1=trim[,1]  
Q2=trim[,2]  
Q3=trim[,3]
```

Código R 7.4. Especificando valores de los predictores en los pronósticos para los modelos de regresión, así como los valores reales de la serie en los períodos de pronóstico, $t = n + 1, \dots, N$ (o sea $t = 152, 153, 154, 155$. vea objetos $tnuevo$, $Q1nuevo$, $Q2nuevo$, $Q3nuevo$ y yt_f).

```
tnuevo=c((n+1):(n+m)) #definiendo valor de t para las m observaciones a pronosticar  
trimnuevo=seasonaldummy(yt2,h=m) #valores de las variables indicadoras en los pronósticos  
Q1nuevo=trimnuevo[,1]  
Q2nuevo=trimnuevo[,2]  
Q3nuevo=trimnuevo[,3]  
  
yt_f=ts(yt[tnuevo],frequency=4,start=c(1993,4)) #Tomando de la serie completa los últimos m valores que son pronosticados,  
#comenzando en 1993-Q4
```

Código R 7.5. Ajuste y pronósticos modelo 1: $\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t} + E_t$, $E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

```
modelo1=lm(lnyt2~t+I(t^2)+Q1+Q2+Q3)  
summary(modelo1)  
  
#Serie de tiempo de valores ajustados en escala original  
ythat1=ts(exp(fitted(modelo1))*exp(summary(modelo1)$sigma^2/2),frequency=4,start=c(1956,1))  
  
#GRAFICANDO LA SERIE, SUS AJUSTES MODELO 1  
plot(yt)  
lines(ythat1,col=2)
```

```

legend("topleft", legend=c("Original", "Ajustada"), col=c(1,2), lty=1)

#Calculando AIC y BIC usando exp(C*n(p))
#Primero calculamos los seudoresiduos del modelo log
resmod1.orig=yt2-ythat1
npar1=length(coef(modelo1)[coef(modelo1)!=0]); npar1 #número parámetros modelo 1
aic1=exp(crit.inf.resid(resmod1.orig,n.par=npar1))
aic1
bic1=exp(crit.inf.resid(resmod1.orig,n.par=npar1,AIC="FALSE"))
bic1

#GRÁFICO DE RESIDUALES EN ESCALA LOG
plot.ts(residuals(modelo1), ylim=c(min(residuals(modelo1), -2*summary(modelo1)$sigma),
max(residuals(modelo1), 2*summary(modelo1)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo1)$sigma, 0, 2*summary(modelo1)$sigma), col=2)

plot(fitted(modelo1), residuals(modelo1), ylim=c(min(residuals(modelo1), -2*summary(modelo1)$sigma),
max(residuals(modelo1), 2*summary(modelo1)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo1)$sigma, 0, 2*summary(modelo1)$sigma), col=2)

#PRONOSTICANDO PERÍODOS t=152 a 155 EN ESCALA ORIGINAL
predicciones1=exp(predict(modelo1, data.frame(t=tnuevo, Q1=Q1nuevo, Q2=Q2nuevo, Q3=Q3nuevo),
interval="prediction"))*exp(summary(modelo1)$sigma^2/2)
predicciones1=ts(predicciones1, frequency=4, start=c(1993,4))
predicciones1

#Convirtiendo en serie de tiempo los pronósticos
ytprn1=ts(predicciones1[,1], frequency=4, start=c(1993,4)) #los pronósticos comienzan desde 1993-Q4

accuracy(ytprn1, ytf) #Calculando exactitud de los pronósticos puntuales

#Amplitud media y cobertura I.P
Amplmodelo1=amplitud(LIP=predicciones1[,2], LSP=predicciones1[,3])
Amplmodelo1

Cobmodelo1=cobertura(real=ytf, LIP=predicciones1[,2], LSP=predicciones1[,3])
Cobmodelo1

```

Código R 7.6. Ajuste y pronósticos modelo 1b: $\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t} + E_t$, $E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

```

modelo1b=lm(lnyt2~t+I(t^2)+I(t^3)+Q1+Q2+Q3)
summary(modelo1b)

#Serie de tiempo de valores ajustados en escala original
ythat1b=ts(exp(fitted(modelo1b))*exp(summary(modelo1b)$sigma^2/2), frequency=4, start=c(1956,1))

#GRAFICANDO LA SERIE, SUS AJUSTES MODELO1b
plot(yt)
lines(ythat1b, col=2)
legend("topleft", legend=c("Original", "Ajustada"), col=c(1,2), lty=1)

#Calculando AIC y BIC usando exp(C*n(p))
#Primero calculamos los seudoresiduos del modelo log
resmod1b.orig=yt2-ythat1b
npar1b=length(coef(modelo1b)[coef(modelo1b)!=0]); npar1b #número parámetros modelo 1b
aic1b=exp(crit.inf.resid(resmod1b.orig,n.par=npar1b))
aic1b
bic1b=exp(crit.inf.resid(resmod1b.orig,n.par=npar1b,AIC="FALSE"))
bic1b

#GRÁFICO DE RESIDUALES EN ESCALA LOG
plot.ts(residuals(modelo1b), ylim=c(min(residuals(modelo1b), -2*summary(modelo1b)$sigma),
max(residuals(modelo1b), 2*summary(modelo1b)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo1b)$sigma, 0, 2*summary(modelo1b)$sigma), col=2)

plot(fitted(modelo1b), residuals(modelo1b), ylim=c(min(residuals(modelo1b), -2*summary(modelo1b)$sigma),
max(residuals(modelo1b), 2*summary(modelo1b)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo1b)$sigma, 0, 2*summary(modelo1b)$sigma), col=2)

#PRONOSTICANDO PERÍODOS t=152 a 155 EN ESCALA ORIGINAL
predicciones1b=exp(predict(modelo1b, data.frame(t=tnuevo, Q1=Q1nuevo, Q2=Q2nuevo, Q3=Q3nuevo),
interval="prediction"))*exp(summary(modelo1b)$sigma^2/2)
predicciones1b

#Convirtiendo en serie de tiempo los pronósticos
ytprn1b=ts(predicciones1b[,1], frequency=4, start=c(1993,4)) #los pronósticos comienzan desde 1993-Q4

accuracy(ytprn1b, ytf) #Calculando exactitud de los pronósticos

#Amplitud media y cobertura de los I.P
Amplmodelo1b=amplitud(LIP=predicciones1b[,2], LSP=predicciones1b[,3])
Amplmodelo1b

```

```
Cobmodelo1b=cobertura(real=ytf,LIP=predicciones1b[,2],LSP=predicciones1b[,3])
Cobmodelo1b
```

Código R 7.7. Ajuste y pronósticos modelo 2: $Y_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t}) + E_t$, $E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

```
#AJUSTANDO MODELO EXPONENCIAL CUADRÁTICO ESTACIONAL USANDO COMO VALORES INICIALES
#PARÁMETROS AJUSTADOS DEL MODELO 1, SON SEIS EN TOTAL CON beta0
coef0=coef(modelo1) #extrae coeficientes ajustados del modelo1

modelo2=nls(yt2~exp(beta0+beta1*t+beta2*I(t^2)+delta1*Q1+delta2*Q2+delta3*Q3),
start=list(beta0=coef0[[1]],beta1=coef0[[2]],beta2=coef0[[3]],delta1=coef0[[4]],delta2=coef0[[5]],delta3=coef0[[6]]))
summary(modelo2)

#Serie de tiempo de valores ajustados
ythat2=ts(fitted(modelo2),frequency=4,start=c(1956,1))

#GRAFICANDO LA SERIE, SUS AJUSTES MODELO 2
plot(yt)
lines(ythat2,col=2)
legend("topleft",legend=c("Original","Ajustada"),col=c(1,2),lty=1)

#Calculando AIC y BIC usando exp(C*n(p))
npar2=length(coef(modelo2)[coef(modelo2)!=0]); npar2 #número parámetros modelo 2
aic2=exp(crit.inf.resid(residuals(modelo2),n.par=npar2))
aic2

bic2=exp(crit.inf.resid(residuals(modelo2),n.par=npar2,AIC="FALSE"))
bic2

#GRÁFICOS DE RESIDUALES
plot.ts(residuals(modelo2),ylim=c(min(residuals(modelo2),-2*summary(modelo2)$sigma),
max(residuals(modelo2),2*summary(modelo2)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo2)$sigma,0,2*summary(modelo2)$sigma),col=2)

plot(fitted(modelo2),residuals(modelo2),ylim=c(min(residuals(modelo2),-2*summary(modelo2)$sigma),
max(residuals(modelo2),2*summary(modelo2)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo2)$sigma,0,2*summary(modelo2)$sigma),col=2)

#PRONÓSTICOS DEL MODELO EXPONENCIAL CUADRÁTICO ESTACIONAL
predicciones2=predict(modelo2,newdata=data.frame(t=tnuevo,Q1=Q1nuevo,Q2=Q2nuevo,Q3=Q3nuevo),interval="prediction")
predicciones2

#Convirtiendo en serie de tiempo las predicciones
ytpron2=ts(predicciones2,frequency=4,start=c(1993,4))

accuracy(ytpron2,ytf) #Calculando exactitud de los pronósticos
```

Código R 7.8. Ajuste y pronósticos modelo 2b: $Y_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \sum_{i=1}^3 \delta_i I_{i,t}) + E_t$, $E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

```
#AJUSTANDO MODELO EXPONENCIAL CÚBICO ESTACIONAL USANDO COMO VALORES INICIALES
#PARÁMETROS AJUSTADOS DEL MODELO 1b, SON SIETE EN TOTAL CON beta0
coef0b=coef(modelo1b) #extrae coeficientes ajustados del modelo1b

modelo2b=nls(yt2~exp(beta0+beta1*t+beta2*I(t^2)+beta3*I(t^3)+delta1*Q1+delta2*Q2+delta3*Q3),
start=list(beta0=coef0b[[1]],beta1=coef0b[[2]],beta2=coef0b[[3]],beta3=coef0b[[4]],delta1=coef0b[[5]],delta2=coef0b[[6]],
delta3=coef0b[[7]]))
summary(modelo2b)

#Serie de tiempo de valores ajustados
ythat2b=ts(fitted(modelo2b),frequency=4,start=c(1956,1))

#GRAFICANDO LA SERIE, SUS AJUSTES Y PRONÓSTICOS
plot(yt)
lines(ythat2b,col=2)
legend("topleft",legend=c("Original","Ajustada"),col=c(1,2),lty=1)

#Calculando AIC y BIC usando exp(C*n(p))
npar2b=length(coef(modelo2b)[coef(modelo2b)!=0]); npar2b #número parámetros modelo 2b
aic2b=exp(crit.inf.resid(residuals(modelo2b),n.par=npar2b))
aic2b

bic2b=exp(crit.inf.resid(residuals(modelo2b),n.par=npar2b,AIC="FALSE"))
bic2b

#GRÁFICOS DE RESIDUALES
plot.ts(residuals(modelo2b),ylim=c(min(residuals(modelo2b),-2*summary(modelo2b)$sigma),
max(residuals(modelo2b),2*summary(modelo2b)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo2b)$sigma,0,2*summary(modelo2b)$sigma),col=2)
```



```

plot(fitted(modelo2b), residuals(modelo2b), ylim=c(min(residuals(modelo2b), -2*summary(modelo2b)$sigma),
max(residuals(modelo2b), 2*summary(modelo2b)$sigma)))
abline(h=c(-2*summary(modelo2b)$sigma, 0, 2*summary(modelo2b)$sigma), col=2)

#PRONÓSTICOS DEL MODELO EXPONENCIAL CÚBICO ESTACIONAL
predicciones2b=predict(modelo2b, newdata=data.frame(t=tnuevo, Q1=Q1nuevo, Q2=Q2nuevo, Q3=Q3nuevo), interval="prediction")
predicciones2b

#Convirtiendo en serie de tiempo las predicciones
ytpron2b=ts(predicciones2b, frequency=4, start=c(1993, 4))
ytpron2b

accuracy(ytpron2b, ytf) #Calculando exactitud de los pronósticos

```

Código R 7.9. Cálculo de $\exp(\hat{\delta}_i) \times \%100$ en modelos globales y su comparación gráfica.

```

efectosestac1=ts(c(exp(coef(modelo1)[4:6])*100, 100), freq=1, start=1) #parámetros 4 a 6 son los deltas_i
efectosestac1b=ts(c(exp(coef(modelo1b)[5:7])*100, 100), freq=1, start=1) #parámetros 5 a 7 son los deltas_i
efectosestac2=ts(c(exp(coef(modelo2)[4:6])*100, 100), freq=1, start=1) #parámetros 4 a 6 son los deltas_i
efectosestac2b=ts(c(exp(coef(modelo2b)[5:7])*100, 100), freq=1, start=1) #parámetros 5 a 7 son los deltas_i

par(mar=c(5, 5, 4, 2))
plot(efectosestac1, lwd=2, las=2, type="b", pch=19,
main="Porcentaje estimado de la media\n de la serie en trimestre i con relación al trimestre 4",
ylim=c(86, 102), xaxt="n", xlab="Trimestre", ylab=expression(paste(exp(hat(delta)[i]), sep=" ", "*" , sep=" ", "100%")))

lines(efectosestac1b, type="b", pch=2, lty=2, col=2, lwd=2)
lines(efectosestac2, type="b", pch=3, lty=3, col=3, lwd=2)
lines(efectosestac2b, type="b", pch=4, lty=4, col=4, lwd=2)
axis(1, at=1:4, labels=c("Q1", "Q2", "Q3", "Q4"))
legend("bottomright", legend=c("Modelo 1", "Modelo 1b", "Modelo 2", "Modelo 2b"), pch=c(19, 2, 4), col=1:4, lty=1:4, lwd=2)

```

Código R 7.10. Ajuste y pronósticos modelo 3: suavizamiento exponencial Holt-Winters multiplicativo para Y_t , $t = 1, 2, \dots, n = 151$ (o sea sobre la serie recortada, denominada en programa R como `yt2`).

```

suaviza=HoltWinters(yt2, seasonal="multiplicative")
suaviza

ythat3=fitted(suaviza)[,1] #valores ajustados. Ya tienen formato de serie de tiempo

#GRAFICANDO LA SERIE, SUS AJUSTES Y PRONÓSTICOS
plot(yt)
lines(ythat3, col=2)
legend("topleft", legend=c("Original", "Ajustada"), col=c(1, 2), lty=1)

et3=residuals(suaviza) #residuales. Ya tienen formato de serie de tiempo

#Calculando AIC y BIC usando exp(C*n(p))
npar3=(s-1)+2; npar3 #Aprox. del número de parámetros del suavizamiento
aic3=exp(crit.inf.resid(residuals(suaviza), n.par=npar3)) #número de parámetros es (s-1)+2=5
aic3

bic3=exp(crit.inf.resid(residuals(suaviza), n.par=npar3, AIC="FALSE"))
bic3

df3=n-2*s-((s-1)+2)
MSE3=suaviza$SSE/df3 #MSE aproximado del ajuste total del Suavizamiento
MSE3

#GRÁFICOS DE RESIDUALES MODELO 3
plot(et3, ylim=c(min(-2*sqrt(MSE3), et3), max(2*sqrt(MSE3), et3)))
abline(h=c(-2*sqrt(MSE3), 0, 2*sqrt(MSE3)), col=2)

plot(as.numeric(ythat3), et3, ylim=c(min(-2*sqrt(MSE3), et3), max(2*sqrt(MSE3), et3)))
abline(h=c(-2*sqrt(MSE3), 0, 2*sqrt(MSE3)), col=2)

#PREDICCIONES Y INTERVALOS DE PRONÓSTICO
predicciones3=predict(suaviza, n.ahead=4, prediction.interval=TRUE)
predicciones3

ytpron3=predicciones3[,1] #Separando los pronosticos puntuales
ytpron3

accuracy(ytpron3, ytf) #Calculando exactitud de los pronósticos

#Amplitud media y cobertura de los I.P
Amp1modelo3=amplitud(LIP=predicciones3[,3], LSP=predicciones3[,2])
Amp1modelo3

Cobmodelo3=cobertura(real=ytf, LIP=predicciones3[,3], LSP=predicciones3[,2])
Cobmodelo3

```

Código R 7.11. *Ajustes y pronósticos modelo 4: combinando filtro de descomposición clásica multiplicativa & LOESS cuadrático con criterio AICC, para Y_t , $t = 1, 2, \dots, n = 151$ (o sea sobre la serie recortada, denominada en programa R como $yt2$).*

```
des=decompose(yt2,type="multiplicative") #Descomposición multiplicativa

St=des$seasonal #Extrayendo la serie de componente estacional
plot(St)

deltas_i=factoresdeltai(descom=des,s=4,estacionini=1) #Obteniendo valor de los s factores estacionales estimados
#el período es s=4 y la serie arranca en estación
data.frame(deltas_i)

#Pronósticos para la componente estacional
i=c(4,1,2,3) #identificando la estación correspondiente a los m=4 períodos de pronóstico
Stnuevo=deltas_i[i] #Asignando el valor de St a los periodos a pronosticar
Stnuevo=ts(Stnuevo,frequency=4,start=c(1993,4)) #convirtiendo en serie de tiempo al pronóstico de St
Stnuevo

#AJUSTES Y PRONÓSTICOS LOESS ÓPTIMO GRADO 2 DE LA TENDENCIA, USANDO AICC EN LA SELECCIÓN de alpha
yt3=yt2/St #Serie desestacionalizada en forma multiplicativa
ajusteLoess=loess.as(t,yt3,degree=2,criterion="aicc",family="gaussian",plot=F)

summary(ajusteLoess)
Tt=ts(fitted(ajusteLoess),frequency=4,start=c(1956,1)) #tendencia estimada por loess

alfa.optim=ajusteLoess$pars$span #guardando el valor óptimo del parámetro alfa
alfa.optim

plot(yt3)
lines(Tt,col=2)
legend("topleft",legend=c("Serie ajustada estacionalmente","Ajuste LOESS cuadrático (AICC)"),col=c(1,2),lty=1)

#Pronósticos de sólo tendencia por loess cuadrático óptimo
#sobre la serie desestacionalizada
Ttnuevo=predict(loess(yt3~t,span=alfa.optim,degree=2,control=loess.control(surface="direct")),data.frame(t=ttnuevo),se=FALSE)
#convirtiendo en serie de tiempo al pronóstico de Tt
Ttnuevo=ts(Ttnuevo,freq=4,start=c(1993,4))
Ttnuevo

#AJUSTE DE LA SERIE COMBINANDO DE FORMA MULTIPLICATIVA
#LOS AJUSTES DE LAS COMPONENTES
ythat4=Tt*St

#GRAFICANDO LA SERIE, SUS AJUSTES Y PRONÓSTICOS
plot(yt)
lines(ythat4,col=2)
legend("topleft",legend=c("Original","Ajustada"),col=c(1,2),lty=1)

#RESIDUALES
et4=yt2-ythat4

#Calculando AIC y BIC usando exp(C*n(p))
npar4=round(ajusteLoess$np)+s-1;npar4 #número aproximado de parámetros en ajuste descompos. & loess
aic4=exp(crit.inf.resid(et4,n.par=npar4))
aic4

bic4=exp(crit.inf.resid(et4,n.par=npar4,AIC="FALSE"))
bic4

#GRÁFICOS DE RESIDUALES
df=n-(round(ajusteLoess$np)+s-1) #Grados de libertad aproximados del ajuste total
MSE4=sum(et4^2)/df #MSE aproximado del ajuste total del modelo 1
MSE4

plot(et4,ylim=c(min(-2*sqrt(MSE4),et4),max(2*sqrt(MSE4),et4)))
abline(h=c(-2*sqrt(MSE4),0,2*sqrt(MSE4)),col=2)

plot(as.numeric(ythat4),et4,ylim=c(min(-2*sqrt(MSE4),et4),max(2*sqrt(MSE4),et4)))
abline(h=c(-2*sqrt(MSE4),0,2*sqrt(MSE4)),col=2)

#Pronóstico de la serie combinando de forma multiplicativa
#los pronósticos de las componentes
ytpron4=Ttnuevo*Stnuevo
ytpron4

#tabla resumen de los pronósticos de las componentes y de la serie
tablapron4=cbind(Pron_Tt=Ttnuevo,Pron_St=Stnuevo,Pron_serie=ytpron4)
tablapron4

#Calculando medidas de precisión de pronósticos
accuracy(ytpron4,ytf)
```

Código R 7.12. Comparación gráfica de efectos estacionales en los dos modelos locales

```
#Extrayendo y comparando efectos estacionales en los dos modelos locales
#En Holt-Winters de este ejemplo, coeficientes 4 a 6 son delta_i, para i=1, 2, 3 y coeficiente 3 es delta_4
deltasiHW=ts(suaviza$coef[c(4:6,3)],freq=1,start=1)
deltasDL=ts(deltas_i,freq=1,start=1) #Los delta_i según el filtro de descomposición
win.graph()
par(mar=c(5,5,4,2))
plot(deltasiHW,lwd=2,las=2,ylab=expression(hat(delta[i])),ylim=c(0.88,1.05),type="b",pch=19,
main="Efectos estacionales estimados\n Holt Winters (en t=151) y Descomp. & Loess",xlab="Trimestre del año",xaxt="n")
lines(deltasDL,lty=2,type="b",pch=2,lwd=2,col=2)
axis(1,at=1:4,labels=c("Q1","Q2","Q3","Q4"))
legend("topleft",legend=c("H-W","D&LC"),col=1:2,lty=c(1,2),lwd=3,pch=c(19,2))
```

Código R 7.13. Comparación gráfica de los seis métodos de pronósticos y la serie original en los periodos pronosticados. Observe con cuidado la especificación de los argumentos `pch=`, `lty=`, y `col=`, usados para distinguir cada serie según tipo de símbolo para los puntos graficados, tipo de línea y de color, respectivamente. En la leyenda del gráfico debe mantenerse la misma correspondencia de símbolos gráficos, tipos de línea y de color usados en cada caso.

```
##COMPARACIÓN GRÁFICA DE LOS SEIS PRONÓSTICOS PRODUCIDOS Y VALORES REALES###
plot(ytf,ylim=c(min(ytf,ytpron1,ytpron1b,ytpron2,ytpron2b,ytpron3,ytpron4),
max(ytf,ytpron1,ytpron1b,ytpron2,ytpron2b,ytpron3,ytpron4)),type="b",pch=19,lwd=2,xaxt="n")
axis(1,at=time(ytf),labels=c("1993Q4","1994Q1","1994Q2","1994Q3"))
lines(ytpron1,lty=2,col="red",type="b",pch=2,lwd=2)
lines(ytpron1b,lty=3,col="blue",type="b",pch=3,lwd=2)
lines(ytpron2,lty=4,col="orange",type="b",pch=4,lwd=2)
lines(ytpron2b,lty=5,col="brown",type="b",pch=5,lwd=2)
lines(ytpron3,lty=6,col="darkgreen",type="b",pch=6,lwd=2)
lines(ytpron4,lty=7,col="darkred",type="b",pch=7,lwd=2)
legend("topleft",legend=c("Real","Log-cuadrático estacional","Log-cúbico estacional","Exponencial cuadrático estacional",
"Exponencial cúbico estacional","Holt-Winters","Descomposición & LOESS"),
lty=c(1:7),pch=c(19,2:7),col=c("black","red","blue","orange","brown","darkgreen","darkred"),lwd=2)
```