PEP 1 - Algoritmos Numéricos

Jennifer Andrea Velozo Bruna

2 de junio de 2021

Resumen

Un sistema de ecuaciones se puede resolver de distintas maneras y con ditintos métodos. En esta experiencia se implmentan algoritmos para obtener la inversa de una matriz de dimensión 4225, y se resuelve un sistema de ecuaciones utilizando la matriz inversa obtenida, concluyendo que esta forma de resolución de sistemas no es la más óptima.

1. Introducción

Un método numérico es la aplicación de cálculos y álgebra que se llevan a una herramienta computacional informática, como por ejemplo Matlab, la cual es utilizada para el desarrollo de esta experiencia.

El presente documento tiene como objetivo mostrar los resultados y un análisis de la PEP N°1 de la asignatura Algoritmos Numéricos.

La experiencia se divide en dos partes:

1. Implementar 3 algoritmos: AIT (algoritmo tradicional de obtención de matriz inversa), AID (algoritmo optimizado para estructuras de datos dispersos para obtención de matriz inversa), y LSQR-Disperso, el cual es un método para resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$.

2. Comparar y evaluar la eficacia, costo temporal y costo operacional luego de resolver el sistema de ecuaciones de 4225 incógnitas usando:
$x = b(AT)$, $x = b(AD)$ y $x = LSQR_D(A, b)$

2. Metodología

El método utilizado para obtener la matriz inversa es LU Doolittle [1], mientras que para obtener la matriz inversa con datos dispersos se utiliza el método LSQR-Disperso [1].

Para llevar a cabo la implementación de los algoritmos y realizar el análisis de los resultados obtenidos es necesario comprender algunos conceptos y las técnicas que se utilizan.

2.1. Error

El error es la diferencia entre el valor experimental y el valor real de la solución, y luego a este resultado se le aplica la función *norm* de Matlab, la cual calcula la distancia euclidiana, para así obtener un valor de error.

2.2. Tolerancia

Es el valor de error que se desea obtener al usar un algoritmo numérico. Para resolver el sistema de ecuaciones utilizando la matriz inversa con datos dispersos y el método LSQR-Disperso, se utiliza una tolerancia de 1×10^{-8}.

2.3. Costo temporal

Representa el número de operaciones aritméticas que se realizan. Se considera como una operación: una suma, una resta, una mutliplicación, una división.

2.4. Costo espacial

Corresponde al tiempo que tarda en ejecutarse el algoritmo hasta llegar a un resultado final. En la implementación se trabaja con la funciones *tic* y *toc* de Matlab para obtener el tiempo transcurrido, medido en segundos.

2.5. Especificaciones técnicas

No está demás mencionar las características técnicas que posee la máquina donde se implementan y ejecutan los algoritmos, puesto que si se ejecutan una máquina con diferentes especificaciones, se pueden obtener resultados distintos.

- Sistema operativo: Windows 10 Home 64 bits
- Procesador: Intel(R) Core(TM) i5-9300H CPU @ 2.40GHz (8 CPUs)
- Memoria RAM: 8192 MB

2.6. Técnicas utilizadas

Sabiendo que $A \times A^{-1} = MatrizIdentidad_A$ y haciendo una analogía con un sistema de ecuaciones $Ax = b$, se tiene que la matriz inversa es la incógnita, por lo cual se puede aplicar un método de resolución de sistemas de ecuaciones para obtenerla.

Para implementar el algoritmo AIT, se utiliza el método LU Doolittle, donde la matriz A se descompone en L y U, y luego se procede a resolver los sistemas $L \times B = I$ (siendo I la matriz identidad) con una sustitución progresiva, y $U \times AT = B$ con sustitución regresiva, obteniendo la matriz inversa AT.

Por otro lado, la implementación del algoritmo AID consiste en tener un ciclo hasta n (dimensión de la matriz) donde se invoca al método LSQR-Disperso entregándole la matriz A como una estructura de datos dispersos, y b como 1 columna de la matriz identidad, para así obtener 1 columna de la matriz inversa. Este ciclo se repite hasta obtener todas las columnas de la matriz inversa.

3. Resultados

Con el objetivo de comparar la eficacia de los algoritmos AIT y AID, se calcula el error asociado al obtener la inversa de la matriz, como se muestra en la Tabla 1. Cabe destacar que para obtener la inversa real de la matriz, se utiliza la función $inv(A)$ de Matlab.

Algoritmo	**Eficacia**
AIT	$0{,}1211 \times 10^{-5}$
AID	$0{,}1703 \times 10^{-11}$

Tabla 1: Error de AIT y AID

Luego se compara la eficacia de los algoritmos, obteniendo el error asociado al resolver $x = b(AT)$, $x = b(AD)$ y $x = LSQR_D(A, b)$, los cuales se ven reflejados en la Tabla 2.

Solución	**Eficacia**
AT	$0{,}2210 \times 10^{-6}$
AD	0,1132
LSQR-Disperso	$0{,}9961 \times 10^{-9}$

Tabla 2: Eficacia de cada solución

Además, para comparar la eficiencia de cada algoritmo, se obtienen sus costos temporales y espaciales, como se muestran en la Tabla 3.

Solución	**Tiempo [s]**	**Espacio**
AT	672,4018389	201179505475
AD	1179,9055438	657238638225
LSQR-Disperso	0,412314	218339556

Tabla 3: Costos temporales y espaciales

4. Discusión

Analizando la Tabla 1 que muestra los errores obtenidos al calcular la inversa, se puede apreciar que el algoritmo AID presenta un mayor error en comparación al algoritmo AIT.

Por otro lado, observando la Tabla 2, se deduce que al resolver el sistema de ecuaciones utilizando la matriz inversa AD presenta un mayor error que al resolver el sistema utilizando la matriz AT.

Además, observando la Tabla 3, se deduce que utilizando la matriz inversa AD, el sistema de ecuaciones tarda más en resolverse y ejecuta una cantidad elevada de operaciones aritméticas, lo cual se debe a que el algoritmo del método LSQR-Disperso se ejecuta 4225 veces para obtener la inversa de la matriz.

Cabe destacar que el método LSQR-Disperso es el que menos error posee al resolver el sistema de ecuaciones, y además tiene un bajo costo temporal y espacial en comparación a la solución obtenida utilizando AT y AD, con lo cual se deduce que dicho método es eficiente y eficaz.

5. Conclusiones

En primer lugar, se concluye que se cumplieron los objetivos planteados de manera exitosa, pudiendo implementar los algoritmos solicitados y comparar el error y costo de éstos.

Luego de haber finalizado con la experiencia, se puede concluir que se esperaba que el algoritmo AID fuera el más óptimo, sin embargo, no resultó así, pues la implemtación de éste consiste en invocar al método LSQR-Disperso n veces, siendo n la dimensión de la matriz (4225).

Dados los errores y los elevados costos tanto temporales como espaciales, se puede decir que usar la matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones es ineficaz e ineficiente. Sin embargo, al aumentar la tolerancia para obtener AID, el algoritmo finaliza su ejecución en menos tiempo pero con pérdida de eficacia, lo cual no es tan conveniente, pues se busca obtener una solución experimental lo más cercana posible a la solución real del sistema.

Por otro lado, una de las complicaciones que se presentó, fue el cómo implementar el algoritmo AID, pues se pedía trabajar con estructuras de datos dispersos. Pero como ya se tenía implementado el método LSQR-Disperso, se procedió a hacer uso de éste.

Otra complicación fue el tiempo que tardan en ejecutarse los algoritmos AIT y AID para la matriz de dimensión 4225, pues como se muestra en la Tabla 3, hay que esperar 11 minutos para AIT y 20 minutos para AID aproximadamente para obtener los resultados; sin embargo, esto puede depender de las especificaciones técnicas que tenga la máquina donde se ejecutan dichos algoritmos.

Referencias

[1] Plaza, Sergio. (2017) Métodos Numéricos. Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile.