7. Derivatives

▼ Learning Module 1: Pricing and valuation of forward commitments

1. 远期与期货的定价与估值

1）现货持有套利模型 Carry Arbitrage Model

- 现货持有套利模型 — 标的资产不产生现金流
  - 现货持有套利模型的现金流

头寸	t=0 时刻（初始）	t=T 时刻（到期日）
标的资产现货头寸	以现货价格 S_0 购买标的资产 现金流流出： $-S_0$	以 S_T 将标的资产出售 现金流流入： $+S_T$
借贷头寸	借款 S_0 以购买标的资产 现金流流入： $+S_0$	还本付息 $FV(S_0)=S_0(1+r)^T$ 现金流流出： $-S_0(1+r)^T$
远期合约头寸 合约价格： $F_0(T)$	远期合约签订初期价值为 0 $V_0(T)=0$	远期到期价值（出售标的资产）等于合约价格与现货价格之差： $V_T(T)=F_0(T)-S_T$
合计	$V_0(T)=0$	$F_0(T)-FV(S_0)$

  - 定价：

$$F_0(T)=FV(S_0)=S_0(1+r)^T\text{或者}S_0e^{r_cT}\text{（连续复利）}$$

当 $F_0(T)-FV(S_0)$ 时为正向套利，即远期合约价格大于标的资产复利后价值，反之为反向套利

  - 估值：远期合约签订后，在到期前的某一时间点的货币价值，可以概括为 without the position（不曾拥有远期合约的价格）减去 with the position（拥有远期合约的价格）的差额，即

$$V_t(T)=S_t-F_0(T)/(1+r)^{T-t}\text{或者}=S_t-F_0(T)e^{-r_c(T-t)}$$

- 现货持有套利模型 — 标的资产产生现金流
  - 定价：

$$F_0(T)=(S_0+CC_0-CB_0)(1+r)^T\text{或}(S_0+CC_0-CB_0)e^{r_cT}$$

其中 CB_0 为标的资产的持有收益 carry benefits，CC_0 为持有成本 carry costs，两者均以现值形式呈现

  - 估值：

$$V_t(T)=(S_t+CC_t-CB_t)-F_0(T)/(1+r)^{T-t}$$

2）股票及权益指数远期合约的定价与估值

- 股票远期合约
  - 定价：

$$F_0(T)=(S_0-PVD_0)(1+r)^T=S_0(1+r)^T-FVD_t$$

  - 估值：

$$V_t(T)=(S_t-PVD_t)-F_0(T)/(1+r)^{T-t}$$

- 权益指数远期合约
  - 定价：

$$F_0(T)=S_0e^{(r_c-CB)T}$$

- 估值：

$$V_t(T)=S_te^{-CB(T-t)}-F_0(T)e^{-r_c(T-t)}=[F_t(T)-F_0(T)]e^{-r_c(T-t)}$$

3）远期利率协议 FRA 的定价与估值

- FRA 的多头头寸按照合约约定的固定利率支付借入一笔虚拟贷款，空头头寸则收取以固定利率计算的收益，因此多头在浮动利率上升时盈利，空头在浮动利率下降时盈利
- FRA 通常用 $a\times b$ FRA 形式表示，a 代表从签订日起到FRA到期日的月份数，b 代表从签订日起到贷款结算到期日的月数
- 定价 FR：

$$1+S_b\times\frac{30}{360}b=(1+S_a\times\frac{30}{360}a)\times(1+FR\times\frac{30}{360}(b-a))$$

- 估值：
  - t = a 时

$$V_t=\frac{NP\times(\text{Underlying rate - Forward rate})\times\frac{\text{Days}}{360}}{1+\text{Underlying rate}\times\frac{\text{Days}}{360}}$$

  - t < a 时

    第一步：计算t时刻新的FRA的价格 FR_t

    $1+S_{b-t}\times\frac{30}{360}(b-t)=(1+S_a\times\frac{30}{360}(a-t))\times(1+FR_t\times\frac{30}{360}(b-a))$

    第二步：计算折现前价值

$$V=NP\times(FR_t-FR_0)\times(\frac{\text{Days from a to b}}{360})$$

    第三步：计算折现价值

$$V_t=\frac{V}{1+S_{b-t}\times\frac{\text{Days from t to b}}{360}}$$

4）固定收益远期合约的定价与估值

- 定价：

$$F_0(T)=(S_0-PVC_0)(1+r)^T=S_0(1+r)^T-FVC_T$$

- 估值：

$$V_t(T)=(S_t-PVC_t)-F_0(T)/(1+r)^{T-t}=[F_t(T)-F_0(T)]/(1+r)^{T-t}$$

5）固定收益期货合约的定价与估值

- 固定收益期货特点：
  - 期货债券价格通常是净价报价，全价 = 净价 + 应计利息 accrued interest
  - 实际交割价格 = 期货价格 * 转换因子（CF）
- 定价：
  - 应计利息 AI = $\frac{t}{T}\times PMT$
  - 期货合约全价 S_0 ：

$$[(S_0-PVC)(1+r)^T-AI_T]/CF \text{ 或 } [S_0(1+r)^T-FVC-AI_T]/CF$$

2. 互换的定价与估值

1）利率互换的定价与估值

- 基本假设：

- 市场完全，不存在任何无风险利润
    - 允许投资者进行无限制的买空和卖空
    - 不存在任何交易费用
    - 不存在违约风险
- 定价：
    - 定价原理：$PV_{fix} = PV_{FLT} = \text{Par value}$
    - 固定互换利率 FS （其中折现因子$D_n = 1/(1+S_n)^n$, S_n 为浮动利率）

$$FS = \frac{1-D_n}{D_1+D_2+\cdots+D_n}$$

- 估值：
    - 合约在 t 时刻的价值是浮动利率债券现值与固定利率债券现值之差
    - 注意，每一个结算日，浮动利率债券的票息率都会被重置为市场利率，支付利息后其价值都会回归到面值

2）货币互换的定价与估值

- 与利率互换进行净额结算不同，货币互换在每一个现金流交换时点，都根据名义本金进行全额的利息交换（避免汇率波动的影响），本金则到期末才进行返还
- 定价：与利率互换一致。注意，如果计算的利率不到一年，例如半年，则需要乘2得到年利率
- 估值：$V(t)_A = FB_A - S_t FB_B$，其中 S_t 为汇率

3）权益互换的定价与估值

- 权益互换支付方必定支付浮动收益
- 定价：与利率互换一致
- 估值：
    - 收固定付股权收益：$V_t(T) = PV_{\text{Fixed Bond}} - \frac{S_t}{S_{t-1}} \times NP$
    - 收浮动付股权收益：$V_t(T) = PV_{\text{Floating Bond}} - \frac{S_t}{S_{t-1}} \times NP$
    - 收权益收益1付权益收益2：

其中 R 为上一个重置日至今（t时刻）的股权收益

▼ Learning Module 2: Valuation of contingent claims

在期权定价领域内，二叉树定价适用于离散时间，BSM 模型适用于连续时间。

1. 二叉树定价估值模型

1）单步二叉树

- 基本思想：在市场没有任何套利机会的前提假设下，构建一个具有无风险收益的证券组合来确定期权价值
- 市场处于风险中性时，$\pi_u = \frac{1+R_f-d}{u-d}$, $\pi_d = 1-\pi_u$
  其中 u 和 d 是上涨和下跌的幅度，R_f 为无风险利率
- 最优对冲比率 hedge ratio $h = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = \frac{P^+ - P^-}{S^+ - S^-}$

T=0	股票价格	S_0	
概率		上涨 π_u	下跌 π_d
T=1	股票价格	$S^+ = S_0 u$	$S^- = S_0 d$
	期权价格	$f_u = C^+$ 或 P^+	$f_d = P^-$ 或 C^-
	看涨期权价值	$C^+ = Max(0, S^+ - X)$	$C^- = Max(0, S^- - X)$
	看跌期权价值	$P^+ = Max(0, X - S^+)$	$P^- = Max(0, X - S^-)$

- 股票期权价值的具体计算步骤：
    - 计算期权到期日时，股价上涨或下跌时的收益 $C^+/P^+/C^-/P^-$

- 计算单步期权预期收益率，即在到期日股价上升或下跌情况下收益的加权平均值，权数为风险中性概率 π_u 和 π_d
- 将在到期日的预期值（终值）以无风险利率予以折现，从而得到今天的现值，即期权的价值/价格
- 看涨期权的价值/价格

$$f = C_0 = \frac{\pi_u C^+ + \pi_d C^-}{(1+R_f)^T}$$

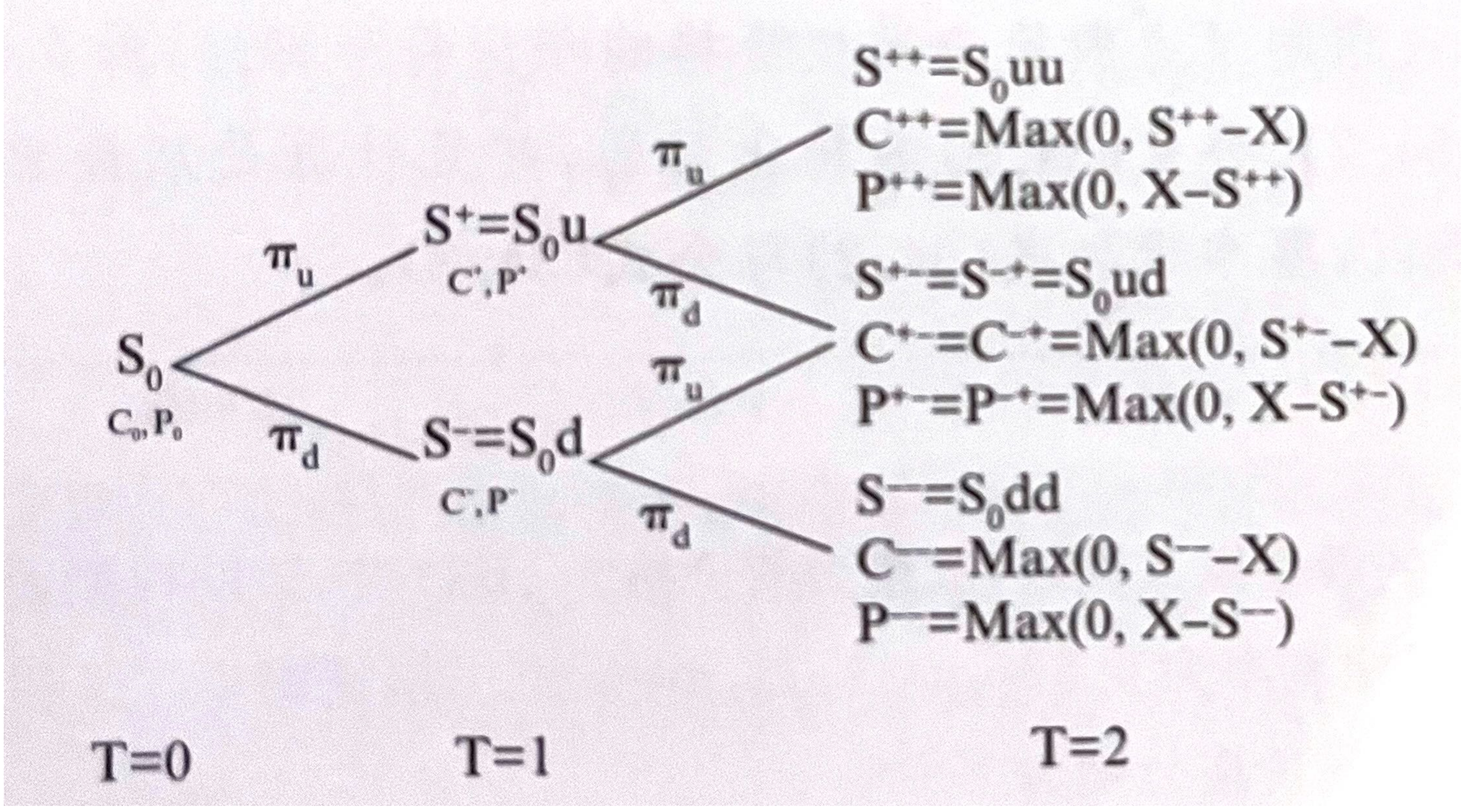
- 看跌期权的价值/价格

$$f = P_0 = \frac{\pi_u P^+ + \pi_d P^-}{(1+R_f)^T}$$

- 根据定价模型得到的理论价格，和实际市场价格的大小关系，可以发现套利机会。

2）两步二叉树

- 欧式期权的二叉树定价



- 初始期权的价值/价格 = T=2时的价格加权后进行无风险利率折现到 T=1，再加权并折现后得到 T=0 的价格

- 美式期权提前行权问题
  - 标的资产为不支付红利股票的美式期权
    - 看涨期权：价格将会高于执行价格，故不会提前执行
    - 看跌期权：可能会提前执行，尤其是深度实值的看跌期权
  - 标的资产为支付红利的股票美式期权
    - 看涨期权：深度实值时提前行权会更有利，提前行权的概率随着D的增加而增加
    - 看跌期权：深度实值时提前行权会更有利，提前行权概率随着D的增加而减小
  - 二叉树定价：需要在每一个树权末端节点决定期权是否将被执行，即，在每个节点都要选择执行价值与理论价值较高的一个

3）利率二叉树

- 利率二叉树与股票二叉树模型相似，利率期权的标的资产是利率乘以本金，执行价格则是利率，每个节点的利率是与节点期相对应的单期远期利率，再乘以名义金额得到收益价值

2. Black-Scholes-Merton（BSM）模型
   - 适用于连续时间，使用连续复利形式
   - 针对以股票为标的资产的期权

   1）BSM 期权定价模型前提假设

- 前提假设：
  - 不允许提前行权，因此只适用于欧式期权定价
  - 标的资产价格的变化遵循几何布朗运动，符合对数正态分布，且连续，不存在跳跃点
  - 标的资产收益率是连续复利形式，利率已知
  - 允许无风险利率的借贷，利率已知
  - 标的资产回报的波动率在期权到期期限内是已知的
  - 市场无摩擦：
    - 市场上的交易无税收、无交易成本和监管限制
    - 市场上不存在任何无风险的套利机会
    - 标的资产具有高度流动性，可以连续交易并可以无限分割
    - 允许卖空标的资产，并将所获资金用于无风险利率的投资

2）BSM 期权定价模型

- 不支付股息的 BSM 期权定价模型

  看涨期权：$C_0 = S_0N(d_1) - Xe^{-R_f^cT}N(d_2)$

  看跌期权：$P_0 = Xe^{-R_f^cT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$

  其中 $d_1 = \frac{ln(S_0/X)+(R_f^c+\sigma^2/2)\times T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$，N(x)为标准正态分布的累积分布函数

- 支付股息的欧式股票期权或货币期权

  看涨期权：$C_0 = S_0e^{-\gamma T}N(d_1) - Xe^{-R_f^cT}N(d_2)$

  看跌期权：$P_0 = Xe^{-R_f^cT}N(-d_2) - S_0e^{-\gamma T}N(-d_1)$

  其中 $d_1 = \frac{ln(S_0/X)+(R_f^c-\gamma+\sigma^2/2)\times T}{\sigma\sqrt{T}}$，$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$，N(x)为标准正态分布的累积分布函数，$\gamma$ 为持有收益 carry benefits

- 隐含的波动率
  - BSM 模型中的 5 个 inputs：股票当前价格 S_0，期权执行价格 X，到期期限 T，无风险利率 R_f^c 以及股价波动率 σ，其中只有股票价格波动率无法观测，通常使用历史数据样本进行预测，因此我们称期权市场价格中隐含了标的资产收益率的波动率

3）不同期权类型的 Black 定价模型

BSM 针对以股票为标的资产，Black 定价模型是对 BSM 模型的调整变形，用于对（股指）期货期权、利率期权以及互换期权进行定价的模型

- 欧式期货期权

  忽略期货应有的保证金要求以及逐日盯市/按市值计价 making to market 的制度

  欧式看涨期货期权 $C_0 = e^{-R_f^cT}[F_0(T)N(d_1) - XN(d_2)]$

  欧式看跌期权 $P_0 = e^{-R_f^cT}[XN(-d_2) - F_0(T)N(-d_1)]$

  其中 $d_1 = \frac{ln(F_0(T)/X)+(\sigma^2/2)\times T}{\sigma\sqrt{T}}$,$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

- 利率期权 FRA

  欧式看涨期权 $C_0 = e^{-R_f^c\times\frac{N}{12}}[FRA\times N(d_1) - XN(d_2)]\times NP\frac{N-M}{12}$

  欧式看跌期权 $P_0 = e^{-R_f^c\times\frac{N}{12}}[XN(-d_2) - FRA\times N(-d_1)]\times NP\frac{N-M}{12}$

  其中 $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{M}{12}}}[ln(\frac{FRA}{X}) + \frac{\sigma^2}{2}\times\frac{M}{12}]$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\frac{M}{12}}$

- 互换期权
  - 支付方互换赋予购买者进入一个以固定利率支付、浮动利率收取的利率互换的权利。该互换持有者通常预测未来的利率会上升，类似看涨期权
  - 互换期权的概念

名称	买入	卖出
支付方互换	支付期权费 C	收取期权费 C

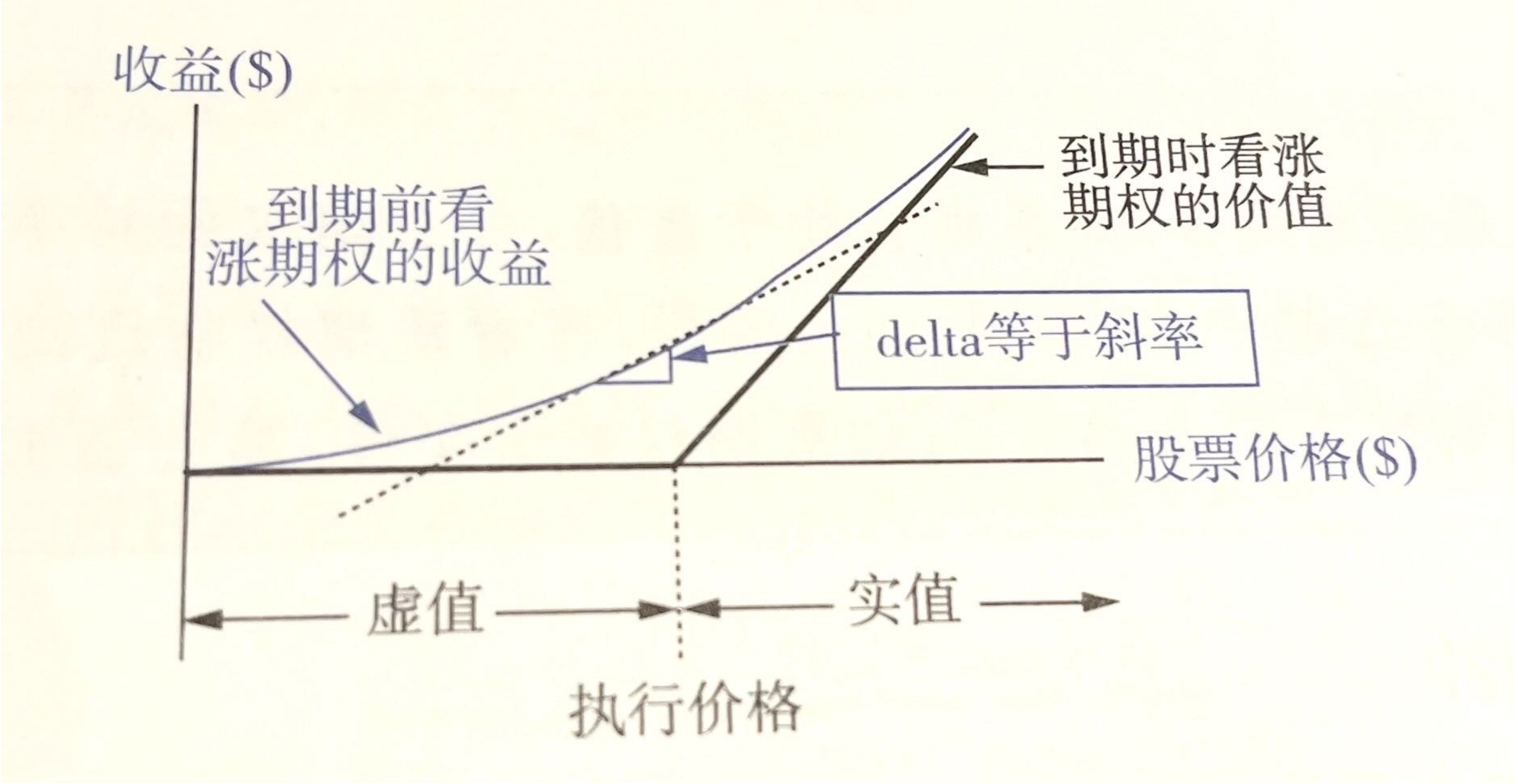
	支付固定、收取浮动	若执行，收取固定、支付浮动
收取方互换	支付期权费 P	收取期权费 P
	支付浮动、收取固定	若执行，收取浮动、支付固定

3. 希腊字母

   衡量在其他四个变量不变的情况下，特定变量的某种变化对期权价格的影响。这里专注于欧式期权，股票的股息或红利用 δ 表示

   1）Delta Δ

- 标的资产价格微小变化对期权价格的影响，是期权价格对当前股价的一阶导数
- 在期权到期前，其价值 = 内在价值 + 时间价值，因此是一条曲线而不是折线



- 支付红利的股票欧式看涨期权 $\Delta_c = \frac{\delta c}{\delta S} = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = e^{-\delta T} N(d_1)$
- 支付红利的股票欧式看跌期权 $\Delta_p = \frac{\delta p}{\delta S} = \frac{P^+ - P^-}{S^+ - S^-} = -e^{-\delta T} N(-d_1)$
- 当期权处于平值状态时，看涨期权和看跌期权的 delta 分别是 0.5 和 -0.5

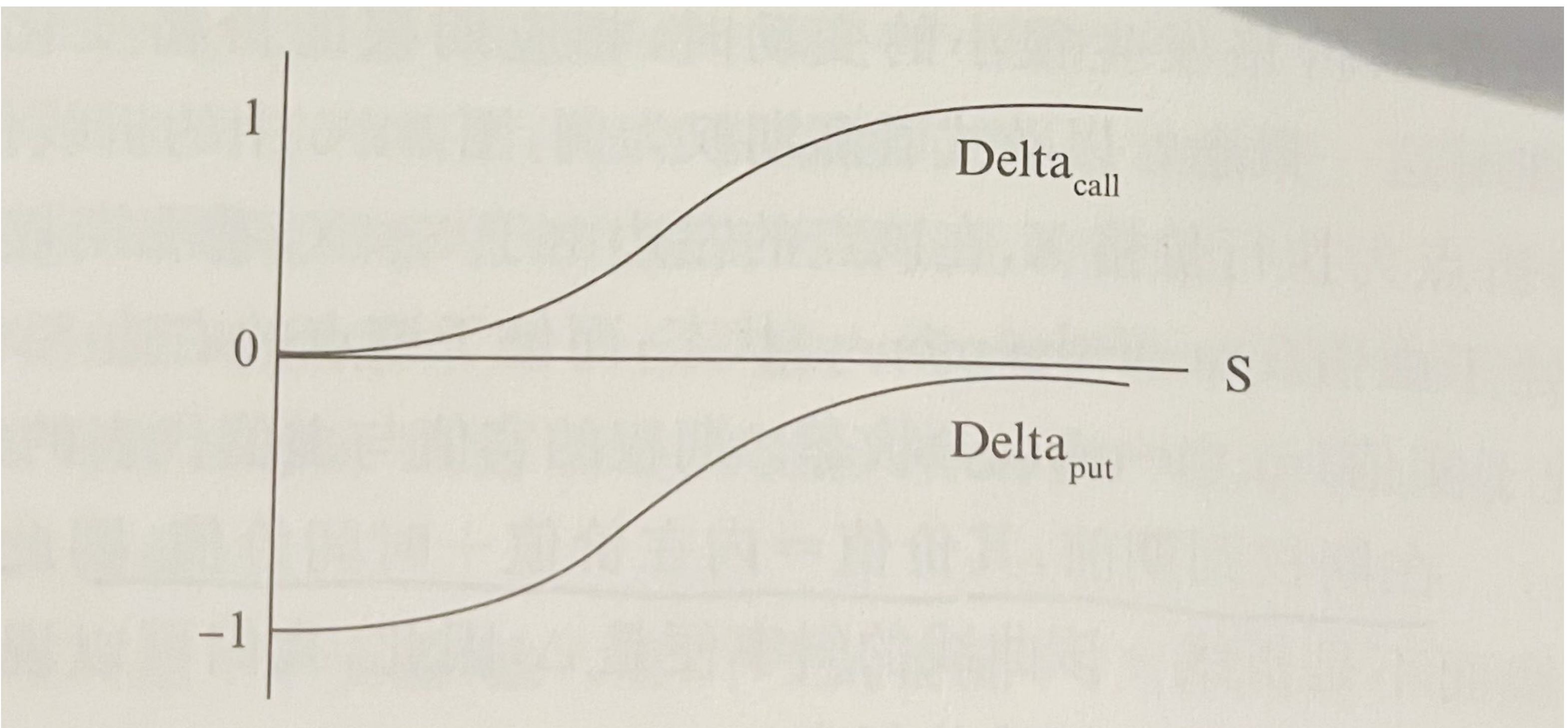


图 34.6　不支付股息股票期权的 Δ 与股票价格之间的关系

- Delta 对冲
  - 将标的资产与期权相结合，使得投资组合的价值不会随标的资产价格的变化而变化，即，使 delta = 0
  - delta 份标的资产的多头头寸相当于1份看涨期权的空头头寸，则看涨期权的多头头寸应该使用标的资产的空头头寸来对冲，看跌期权的多头头寸应该使用标的资产的多头头寸来对冲 （保证两种金融资产价格变化方向相反）（期权的数量总是比股票数量多）

$$\mathbf{D}, \mathbf{D}$$

2）Gamma Γ

- 标的资产价格发生较小变化时，Delta 的变化，是期权价格对当前股价的二阶导数
- 期权处于深度实值或深度虚值时，gamma 趋向于 0，平值时最大
- 期权离到期日越远，gamma 越小

3）Theta θ

- 期权流逝的时间 t 发生较小变化对期权价格的变化，也叫 time decay，是期权价格对时间 t 变化的一阶导数
- 注意：时间不是一个风险因子
- 无论看涨期权还是看跌期权，theta 通常为负，但深度实值看跌期权的 theta可能为正（可能被提前行权）

4）Vega Λ

- 股价波动率发生较小变化对期权价格的影响，是期权价格对股价波动率的一阶导数
- 5各变量中，期权价格对于资产波动率变化的敏感性最高
- 期权多头方的 vega 一定为正值

5）Rho ρ

- 期权价格对无风险利率的一阶导数
- 看涨期权 rho>0，看跌期权 rho<0