

## Versuch 223

### Messung der Boltzmannkonstante

#### Teil I Brownsche Bewegung



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

#### I Messaufbau

- Durchlichtmikroskop Motic B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser
- PC mit Drucker

- Thermometer
- Objektmikrometer

#### II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Demtröder, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Die Grundlagen zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Sie in der Versuchsbeschreibung des Versuchs 251: *Statistik des radioaktiven Zerfalls* nachlesen.
- Homepage des Praktikums  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

#### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomial- und Gauß-Verteilung. Verständnisfragen:

1. Was ist Wärme aus Sicht der kinetischen Theorie der Wärme? Was besagt der Gleichverteilungssatz? Wie hoch ist die thermische Geschwindigkeit eines Partikels der Masse  $10^{-15}$  kg bei Zimmertemperatur?
2. Berechnen Sie das Produkt  $kT$  für Zimmertemperatur und geben Sie diesen in der Einheit eV an. Diesen Wert sollten Sie sich für die Zukunft unbedingt merken.
3. Was bezeichnet man als Brownsche Bewegung? Worin liegt die Ursache dieser Bewegung? Welche Größen haben Einfluss auf die Brownsche Bewegung?
4. Wie groß ist der zu erwartende Wert der mittleren Verschiebung bzw. der mittleren quadratischen Verschiebung eines Partikels.
5. Berechnen Sie die mittlere quadratische Verschiebung eines Partikels (Partikelradius  $a=500$  nm) suspendiert in Wasser ( $T=20^\circ\text{C}$ ) innerhalb eines

Zeitraums von  $t=1$  s. Die Viskosität von Wasser können Sie Abbildung 12 entnehmen.

## IV Aufgaben

1. Präparieren Sie eine Mikroskopprobe einer Partikelsuspension.
2. Nehmen Sie jede Sekunde und mindestens 150 Mal das Mikroskopbild eines einzelnen Partikels auf.
3. Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops mit einem Objektmikrometer.
4. Vermessen Sie die Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder.
5. Berechnen Sie aus der mittleren quadratischen Verschiebung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante.

## V Motivation

**Mit Blütenpollen läßt sich die Existenz von Atomen und Molekülen beweisen**

„Heute vor 100 Jahren, am 11. Mai 1905, reichte Albert Einstein bei den *Annalen der Physik* eine wichtige Arbeit ein, in der er die sogenannte Brownsche Bewegung erklärte. Dem schottischen Botaniker Robert Brown war bereits im Jahr 1827 aufgefallen, daß Blütenpollen in einem Glas Wasser eine eigenartige Zickzackbewegung ausführen. Was war die Ursache dafür? Alle Versuche, diese Brownsche Bewegung zu erklären, scheiterten zunächst. Sie blieb jahrzehntelang geheimnisvoll. Erst Albert Einstein erkannte, daß die Bewegung der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit durch ein fortwährendes Stoßen der Wassermoleküle verursacht wird. Dies war in jener Zeit tatsächlich noch ein gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist. Und gleichzeitig paßte Einsteins Beschreibung zur molekularen Theorie der Wärme. Je wärmer beispielsweise Wasser ist, um so größer ist die mittlere Geschwindigkeit, mit der die Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stöße verursachen können. So erklärt sich auch der Begriff Thermodynamik: Wärme ist eben

etwas Dynamisches. Einstein schrieb damals an einen Freund, daß „unter der Voraussetzung der molekularen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von der Größenordnung  $1/1000$  Millimeter bereits eine wahrnehmbare ungeordnete Bewegung ausführen müssen, welche durch die Wärmebewegung erzeugt ist.“

Nahezu zeitgleich mit Albert Einstein lieferte auch der polnische Physiker Marian Smoluchowski eine korrekte Erklärung der Brownschen Bewegung. Es war dann allerdings der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin der einige Jahre später die Brownsche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigte. Dafür wurde Perrin im Jahr 1926 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. <sup>1</sup>

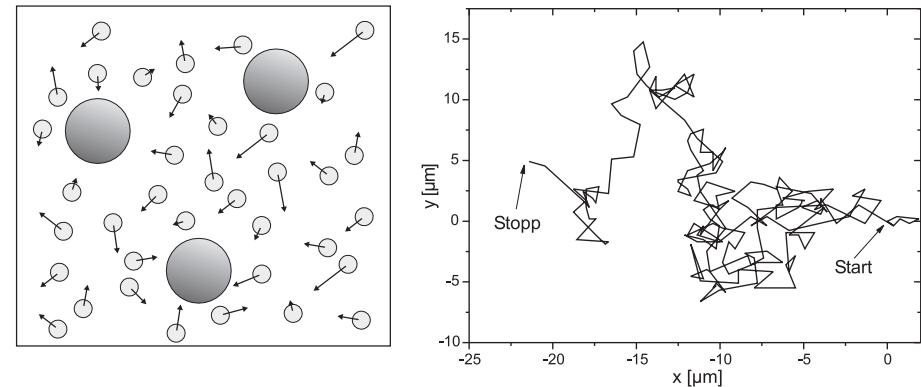


Abbildung 2: Links: Modell der Brownschen Bewegung. Die Moleküle des umgebenden Mediums stoßen aufgrund ihrer thermischen Energie mit den suspendierten Partikeln, wodurch sich diese auf völlig unregelmäßigen Bahnen bewegen. Rechts: Gemessene Bahn eines einzelnen Partikels.

In diesem Versuch werden Sie die Brownsche Bewegung von Partikeln suspendiert in Wasser mit einem Mikroskop beobachten und deren statistische Bewegung untersuchen (Abbildung 2). Durch Vermessen der Teilchenbahn und der Berechnung der pro Zeiteinheit auftretenden mittleren Verschiebung, können Sie die Boltzmannkonstante bestimmen.

<sup>1</sup>Norbert Lossau, Artikel vom 11. Mai 2005 in der Zeitung „Die Welt“

Eine genaue Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung ist nur bei der Beobachtung sehr vieler Einzelschritte möglich und daher im Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich. Bei einer sorgfältigen Durchführung ist aber eine Genauigkeit von besser als 10 % möglich. Aus diesem Grund werden Sie in Teil II dieses Versuchs ein weiteres Experiment durchführen, mit dem Sie die Boltzmannkonstante weitaus genauer bestimmen können. Bei diesem Versuch messen Sie das thermische Rauschen eines ohmschen Widerstands. Dabei ist eine Genauigkeit von besser als 1 % möglich.

## VI Grundlagen

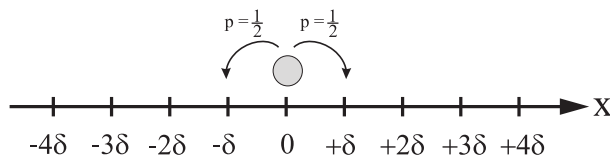


Abbildung 3: *Eindimensionaler Random-Walk. Bei jedem Stoß bewegt sich das Partikel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts. Die Sprungweite  $\delta$  soll bei allen Stößen gleich groß sein*

Die Brownsche Bewegung lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Random-Walk Modell quantitativ beschreiben (Abbildung 3). Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, dass sich ein Partikel nur in einer Dimension, der x-Richtung, bewegen kann. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das Partikel an der Position  $x = 0$ . Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, das Partikel nach der Zeit  $t$  im Intervall  $[x, x + \Delta x]$  zu finden. Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Das Partikel erfährt alle  $\tau$ -Sekunden einen Stoß. Innerhalb der Zeit  $t$  treten somit  $n = t/\tau$  Stoßprozesse auf.
- Bei jedem Stoß wird das Partikel um die gleiche Distanz  $\delta$  verschoben. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Partikel dabei um  $+\delta$  nach rechts, bzw. um  $-\delta$  nach links bewegt, sind gleich groß.
- Bei mehreren Partikeln hängt die Brownsche Bewegung eines einzelnen Partikels nicht von der Bewegung der anderen Partikel ab. Jedes Partikel

bewegt sich völlig unabhängig von den anderen, auch dann, wenn sich zwei oder mehrere Partikel sehr nahe kommen.

Damit sich das Partikel nach  $n$ -Stößen an der Position  $x = m\delta$  befindet, muss es insgesamt  $(n+m)/2$ -mal in die positive x-Richtung gelaufen sein und  $(n-m)/2$ -mal in die negative Richtung. Dabei ist zu beachten, dass  $m$  bei geradem  $n$  ebenfalls gerade sein muss und entsprechend bei ungeradem  $n$ , ungerade sein muss.

Beispiel: Befindet sich das Partikel nach  $n = 10$  Stößen an der Position  $6\delta$  (d.h.  $m = 6$ ), so ist es insgesamt  $(n+m)/2 = 8$ -mal nach rechts gesprungen und  $(n-m)/2 = 2$ -mal nach links. Nun gibt es aber verschiedene Möglichkeiten, wie das Partikel an die Position  $x = m\delta$  gekommen ist. Es kann z.B. am Anfang zweimal nach links gesprungen sein und anschließend hintereinander 8 Mal nach rechts gelaufen sein. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \quad (1)$$

Möglichkeiten, welchen Weg das Partikel gelaufen sein könnte. Für unser Beispiel mit  $n = 10$  und  $m = 6$  ergeben sich 45 verschiedene Schrittfolgen.

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeit  $P(m; n)$  angeben, mit welcher sich das Partikel nach  $n$ -Stößen an der Position  $x = m\delta$  befindet. Diese ist gerade durch die Binomialverteilung<sup>2</sup> gegeben:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2}, \quad (2)$$

wobei  $p$  die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Sprungs nach links bzw. nach rechts angibt. Da die Sprungwahrscheinlichkeiten in beiden Richtungen gleich groß sind, gilt  $p = 1/2$  und somit

$$P(m; n) = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3)$$

In der Regel ist die Zeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen sehr klein, so dass  $n = t/\tau$  bei einer Beobachtungszeit von typischerweise  $t = 1$  s, eine sehr große Zahl darstellt. Für diesen Fall können wir  $n!$  und  $m!$  mit Hilfe der Stirlingschen Formel

<sup>2</sup>Siehe auch Versuch 251 „Statistik des radioaktiven Zerfalls“

$$n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \quad (4)$$

nähern. Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für die Wahrscheinlichkeit  $P(m; n)$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \quad (5)$$

Wir wollen nun statt  $m$  und  $n$ , die leicht messbaren Größen  $x$  und  $t$  verwenden. Da  $m$  entweder gerade oder ungerade ist, gilt für  $\Delta m$ :

$$\Delta m = \pm 2 \quad (6)$$

und somit

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x \quad (7)$$

Substituieren wir  $n = t/\tau$  sowie  $m = x/\delta$  und definieren zusätzlich die Größe  $D$ :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau}, \quad (8)$$

so erhalten wir schließlich für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit  $t$  innerhalb des Bereichs  $[x, x + \Delta x]$  zu finden:

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (9)$$

$P(x; t)$  in Gleichung (9) ist eine Gaußverteilung (Abbildung 4). Die allgemeine Form solch einer Verteilung lautet

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

wobei  $\langle x \rangle$  den Mittelwert und  $\sigma^2$  die Varianz, bzw.  $\sigma$  die Standardabweichung beschreiben.

Da die Verteilung (9) symmetrisch zu  $x = 0$  ist, verschwindet die mittlere Verrückung  $\langle x \rangle$ :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0. \quad (11)$$

Dies ist auch sofort einzusehen, da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel bei einem Stoß entweder nach links oder nach rechts springt, gleich groß ist.

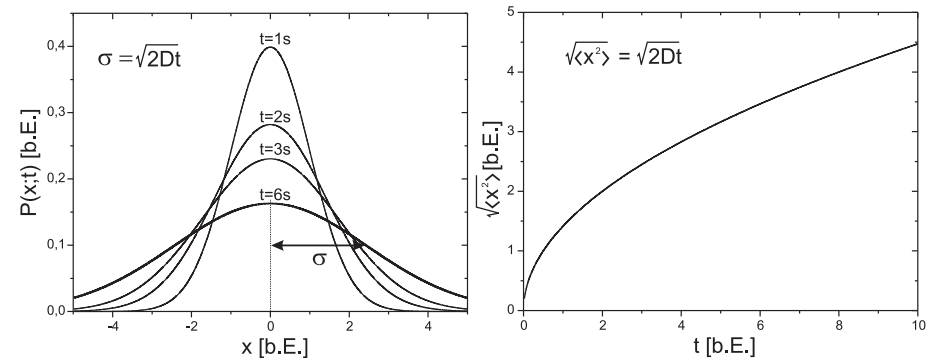


Abbildung 4: Links: Gaußverteilung mit dem Mittelwert  $\langle x \rangle = 0$  und der Varianz  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 2Dt$ . Da die Varianz zeitabhängig ist, wird die Verteilung mit zunehmender Zeit immer breiter. Rechts: Mittleres Verschiebungsquadrat  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  als Funktion der Zeit.

Der verschwindende Mittelwert  $\langle x \rangle$  ist daher nicht geeignet, die Brownsche Bewegung des Partikels zu beschreiben. Anders sieht es aus, wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle x^2 \rangle$  berechnen:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2. \quad (12)$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat entspricht der Varianz  $\sigma^2 = 2Dt$  und damit der Breite der Verteilung.

Damit können wir das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung wie folgt formulieren:

Der mittlere Abstand ( $\equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ ) eines Partikels vom Ursprungsort, nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit  $t$  zu:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad \text{Einstein-Smoluchowski-Gleichung.} \quad (13)$$

Bisher haben wir die Brownsche Bewegung nur in einer Dimension untersucht. Unser Ergebnis lässt sich aber sehr einfach auf mehrere Dimensionen übertra-

gen. Findet die Brownsche Bewegung in zwei Dimensionen statt, so gilt für das mittlere Verschiebungsquadrat<sup>3</sup>  $\langle r^2 \rangle$ :

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (14)$$

Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, liefert jeder Summand den Beitrag  $2Dt$  und somit

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}, \quad (15)$$

bzw. im Dreidimensionalen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}. \quad (16)$$

Der Parameter  $D$  wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die Beweglichkeit des Partikels im umgebenden Medium. Nach Einstein ist der Diffusionskoeffizient gegeben durch

$$D = \frac{kT}{f}, \quad (17)$$

wobei  $f$  den Reibungskoeffizienten,  $k$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur der Flüssigkeit darstellen. Für kugelförmige Partikel mit dem Radius  $a$ , die in einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  suspendiert sind, berechnet sich  $f$  nach dem Stokesschen Gesetz (siehe Versuch 212 - Zähigkeit von Flüssigkeiten):

$$f = 6\pi\eta a. \quad (18)$$

Damit folgt für den Diffusionskoeffizient nach Stokes-Einstein:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \quad (19)$$

Diese Beziehung verknüpft die makroskopischen Größen  $\eta$ ,  $a$  und  $T$  mit den mikroskopischen Größen  $\delta$  und  $\tau$  in Gleichung (8). Einsetzen von (19) in Gleichung (15), liefert für das mittlere Verschiebungsquadrat kugelförmiger Partikel im Zweidimensionalen:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t. \quad (20)$$

<sup>3</sup>Im mehrdimensionalen Fall schreiben wir für das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle r^2 \rangle$  anstatt  $\langle x^2 \rangle$ .

Damit haben wir die Möglichkeit die Boltzmannkonstante experimentell zu bestimmen. Sind die Größen  $T$ ,  $\eta$  und der Kugelradius  $a$  der Partikel bekannt, so kann durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrats die Boltzmannkonstante berechnet werden:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle. \quad (21)$$

## VII Durchführung

Lesen Sie **bevor** Sie mit den Messungen beginnen, diesen Abschnitt vollständig durch! Eine Einführung in die Bedienung des Mikroskops und der Messprogramme, erhalten Sie durch den Versuchsbetreuer.

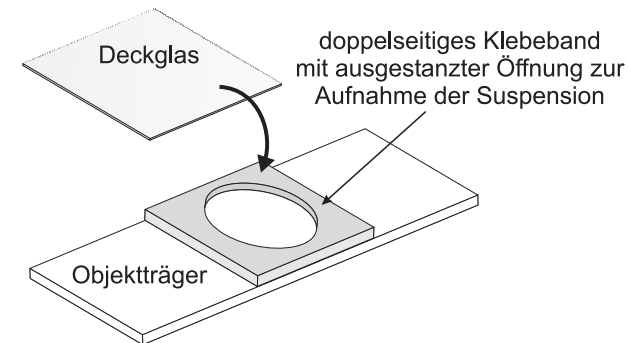


Abbildung 5: Skizze der Probenfassung. Die ausgestanzte Öffnung des doppelseitigen Klebebands wird mit der zu untersuchenden Suspension befüllt und anschließend mit dem Deckglas verschlossen.

1. **Probenpräparation:** Sie sollen die Brownsche Bewegung suspendierter Latex-Partikel in Wasser untersuchen. Um diese mit dem Mikroskop beobachten zu können, benötigen wir eine Probenfassung, die einerseits dick genug ist, so dass sich die suspendierten Partikel darin frei bewegen können, andererseits muss diese auch dünn genug sein, damit eine Fokussierung mit dem Mikroskop möglich ist. Um dies zu gewährleisten, werden Sie

zunächst eine Probenfassung gemäß Abbildung 5 anfertigen: Auf einen Objektträger wird ein doppelseitiges Klebeband aufgebracht, in dessen Mitte zuvor ein Loch ausgestanzt wurde. In diese Öffnung wird die Probenflüssigkeit eingefüllt und mit einem Deckglas verschlossen. Das doppelseitige Klebeband erfüllt dabei zwei Aufgaben: Zum einen vergrößert dieses das Probenvolumen, so dass sich die suspendierten Partikel frei bewegen können, zum anderen dient es zur Abdichtung der Flüssigkeit, wodurch ungewollte Strömungen durch Verdunstungsprozesse unterdrückt werden.

Fertigen Sie vor Versuchsbeginn stets eine neue Probe an! Schneiden Sie dazu ein Stück doppelseitiges Klebeband passend auf die Größe des Deckglases ( $24\text{ mm} \times 32\text{ mm}$ ) zurecht und stanzen Sie mit dem Locheisen zentrisch ein Loch in das Klebeband (Holzunterlage verwenden!). Anschließend kleben Sie das Klebeband mittig auf den Objektträger und entfernen die Abdeckfolie. Schütteln Sie die Flasche mit der Probenflüssigkeit gut durch und pipettieren Sie  $250\text{ }\mu\text{l}$  der Probenflüssigkeit in die ausgestanzte Öffnung des Klebebands. Werfen Sie die Pipettenspitze nach Gebrauch sofort in den Abfall. Der Durchmesser der Partikel ist auf der Flasche angegeben. Notieren Sie diesen Wert in Ihr Protokollheft. Legen Sie nun das Deckglas auf das doppelseitige Klebeband und drücken Sie es mit einem Papiertuch vorsichtig an. Dabei darf ruhig etwas von der Flüssigkeit herausfließen. Allerdings dürfen sich keine (größeren) Luftblasen in der Flüssigkeit bilden! Trocknen Sie die Probe mit einem Papiertuch ab und geben Sie auf die Mitte des Deckglases **einen Tropfen** Immersionsöl. Spannen Sie nun die Probe auf den Mikroskoptisch (Abbildung 6) ein. Am Objektivkranz des Mikroskops wählen Sie das Objektiv 100/1.25 oil (100-fache Vergrößerung, Numerische Apertur  $NA=1,25$ ) aus.

*Frage: Wozu wird das Immersionsöl benötigt?*

Schalten Sie die Mikroskopbeleuchtung ein. Bewegen Sie nun den Mikroskoptisch **VORSICHTIG** mit Hilfe der Fokuseinstellung (*Grob-fokussierung* in Abbildung 6) soweit in Richtung des Objektivs, bis dieses **gerade** den Öltropfen berührt. Versuchen Sie nun durch **vorsichtiges** Scharfstellen mit Hilfe des Feinreglers, einzelne Partikel der Suspension zu beobachten. Die  $xy$ -Position der Probe können sie mit Hilfe der beiden  $xy$ -Einstellräder verstellen. Die Fokussierung ist bei der gewählten 1000-fachen Vergrößerung nicht ganz einfach. Sollten Sie hierbei Probleme haben, wenden Sie sich an den Versuchsbetreuer.

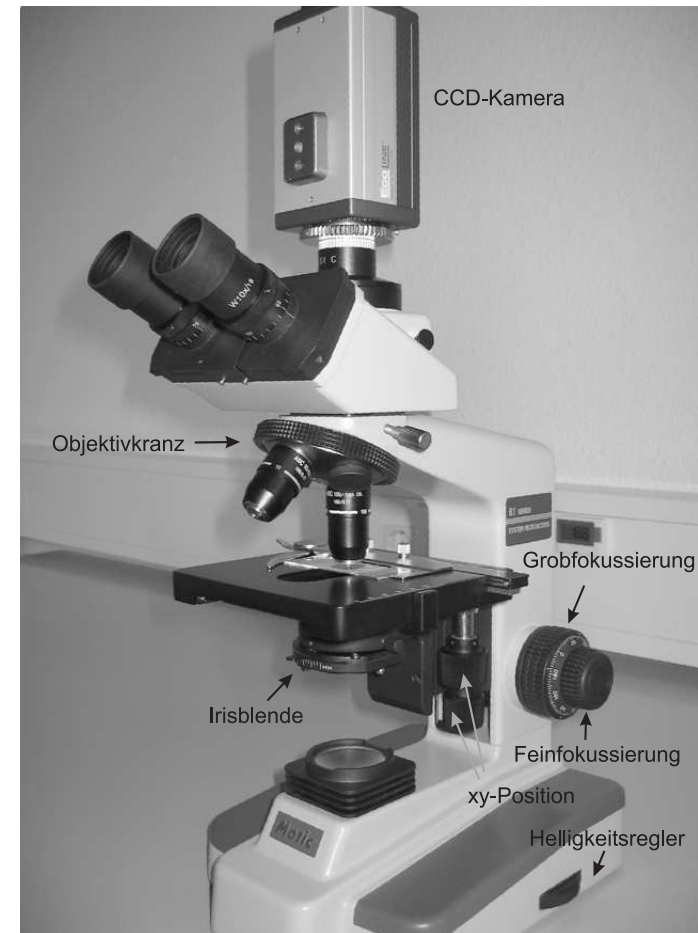


Abbildung 6: Bedienungselemente des Mikroskops.



**Achtung:** Bei der Versuchsdurchführung können systematische Fehler auftreten, die unbedingt zu vermeiden sind:

- Überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich nur ein einziges Partikel beobachten. Manchmal kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere Partikel „zusammenkleben“. Dies lässt sich gut erkennen, indem man etwas den Fokus variiert.
- Auf keinen Fall dürfen Sie während der Messung die  $xy$ -Position des Objektisches verstellen. Auch Erschütterungen des Mikroskops müssen unbedingt vermieden werden.
- Beim Nachfokussieren dürfen Sie mit dem Objektiv auf keinen Fall das Deckglas ihrer Probe berühren. Der dadurch erzeugte Druck, würde die Partikel verdrängen und somit die eigentliche Brownsche Bewegung verfälschen. Sollten Sie beim Nachfokussieren eine abrupte Partikelbewegung beobachten, so müssen Sie sich ein anderes, „höher gelegenes“ Partikel suchen, dessen Position Sie ohne Berührung des Deckglases scharf stellen können.
- Die Probe muss sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Ist dies nicht der Fall, so treten Konvektionsströme auf, die wiederum die Brownsche Bewegung verfälschen. Zudem ist es möglich, dass die Probe schlecht präpariert wurde: Ist die Suspension nicht vollständig mit dem Klebeband abgedichtet, so können durch Verdunstungsprozesse ebenfalls ungewünschte Strömungen in der Probe auftreten. Warten Sie daher zur Temperierung der Probe einige Minuten ab, bevor Sie mit der Messung beginnen. Sollte dann immer noch eine Strömungsbewegung erkennbar sein, so müssen Sie gegebenenfalls eine neue Probe vorbereiten. Wenden Sie sich in diesem Fall an Ihren Betreuer.

2. **Aufnahme einer Bildfolge:** Starten Sie vom Desktop aus das Programm *Kamera.exe*. Dieses Programm nimmt in einem festen Zeitabstand ein Bild auf und speichert dieses auf dem Computer. Tragen Sie im Messprogramm für den Zeitabstand 1 s ein. Schalten Sie die Option *Bilder speichern* zunächst ab.

Suchen Sie sich nun ein Partikel aus, in dessen unmittelbarer Umgebung sich keine anderen Partikel befinden und stellen Sie die  $xy$ -Position des Mikroskoptisches so ein, dass sich das ausgewählte Partikel im Zentrum des Mikroskopbildes befindet. Zur Verbesserung des Kontrastes sollten Sie die Irisblende am Kondensor auf die Position *MIN* stellen.

Da die Brownsche Bewegung nicht nur in der  $xy$ -Bildebene, sondern auch in  $z$ -Richtung erfolgt, wird es passieren, dass das zu beobachtende Partikel aus dem Fokus läuft und somit nicht mehr sichtbar wird. Um dem entgegenzuwirken, müssen Sie die Fokussierung des Mikroskops mit dem Feinregler dauernd nachjustieren. Dies erfordert einiges an Feingefühl und besonders Konzentration.

Führen Sie zunächst eine Probemessung durch: Damit sich die Probe durch die Mikroskopbeleuchtung nicht zusätzlich aufheizt, drehen Sie die Helligkeit auf das Minimum zurück. Die Kamera ist auch bei dieser Minimalbeleuchtung empfindlich genug, kontrastreiche Bilder zu liefern. Starten Sie das Programm durch Anklicken des Pfeils in der linken oberen Ecke und versuchen Sie der Bewegung eines Partikels über mehrere Minuten auf dem Monitor zu folgen. Sobald das Partikel auch nur leicht unscharf zu erkennen ist, müssen Sie sofort mit dem Feintrieb des Mikroskops den Fokus vorsichtig nachstellen. **Das Partikel muss während der ganzen Zeit eindeutig erkennbar sein!**

Wenn Sie nun genug Übung im Nachfokussieren erlangt haben und die zuvor genannten Punkte bezüglich der systematischen Fehler berücksichtigt haben, können Sie mit der eigentlichen Messung beginnen. Stoppen Sie das Messprogramm. Schalten Sie die Option *Bilder speichern* ein und starten Sie erneut das Programm. **Insgesamt ist jede Sekunde und mindestens 150 mal, ein Bild aufzunehmen.** Entfernen Sie nach der Messung die Probe und werfen Sie diese in den Abfall. **Achtung: Auf keinen Fall dürfen Sie nach Beendigung der Messung das Programm nochmals starten. Ihre zuvor aufgenommenen Bilder würden sonst überschrieben werden.**

3. **Notieren Sie die Zimmertemperatur.** Das Thermometer ist auf der Rückseite des Mikroskops angebracht.
4. **Eichung des Abbildungsmaßstabs:** Um später die Position des Partikels ausmessen zu können, müssen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmen. Benutzen Sie dazu das ausliegende Objektmikrometer. Geben Sie einen Tropfen Immersionsöl auf das Objektmikrometer und legen Sie dieses auf den Mikroskoptisch. Stellen Sie vorsichtig den Fokus ein und positionieren Sie den Mikroskoptisch so, dass Sie den Maßstab gemäß Abbildung 7 erkennen können. Beenden Sie das Messprogramm

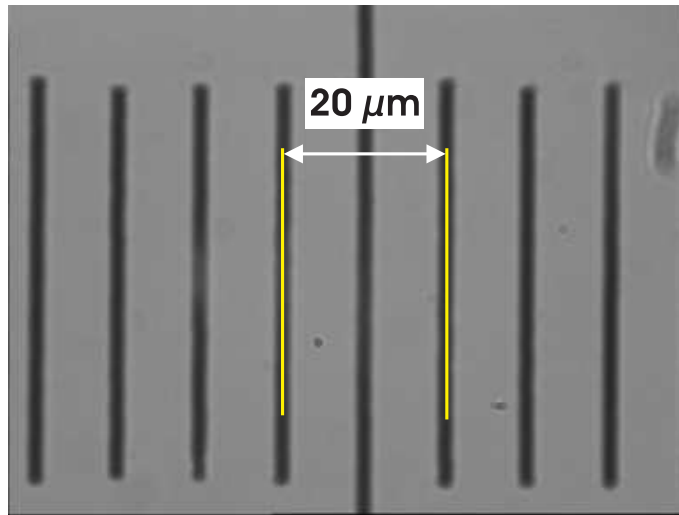


Abbildung 7: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer. Die Distanz zwischen zwei Teilstrichen beträgt  $10\text{ }\mu\text{m}$ .

und starten Sie das Programm *Eichung.exe*. Optimieren Sie nochmals die Bildschärfe und speichern Sie dann das Eichbild. Reinigen Sie das Objektmikrometer mit einem Papiertuch und legen Sie es zurück in die Aufbewahrungsbox.

- Vermessung der Partikelpositionen:** Starten Sie das Programm *Auswertung.exe* vom Desktop aus. Um die Partikelpositionen zu bestimmen, müssen Sie wissen, wie viele Bildpixel einem Mikrometer entsprechen. Laden Sie dazu das zuvor gespeicherte Eichbild (Schalter *Eichbild laden* im Feld *Eichung*) und messen Sie mit Hilfe des Cursors den Pixelabstand über eine Distanz von  $20\text{ }\mu\text{m}$  (Abbildung 7). Die Pixelwerte werden im Feld *Marker* angezeigt. Den Cursor können Sie zum einen mit der Maus bewegen, als auch mit den Steuerpfeilen unter dem Bildfeld (Abbildung 8). Tragen Sie den gemessenen Pixelabstand in das Feld *Eichung* ein.

Nach dieser Eichung können Sie mit der Vermessung der Partikelpositionen Ihrer aufgenommenen Bilder beginnen. Laden Sie das erste Bild, indem Sie auf den Schalter *Bild laden* klicken (der daneben liegende Schalter soll auf der Position *Auto* stehen). Verfahren Sie den Marker nun so, dass dieser

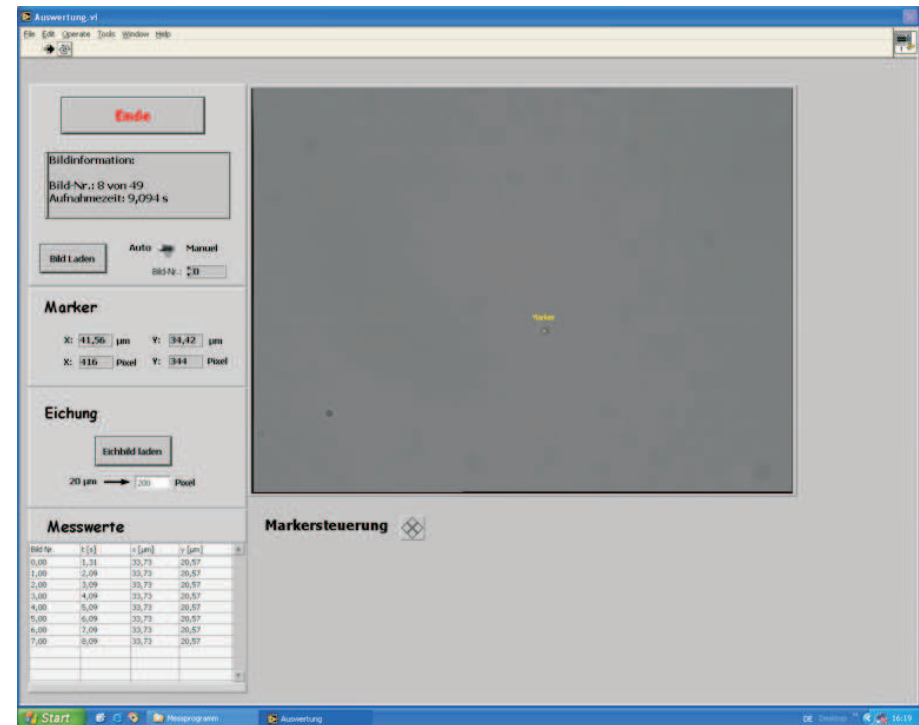


Abbildung 8: Bedienoberfläche des Programms zur Ausmessung der Partikelpositionen der aufgenommenen Bilder.

sich **exakt** in der Mitte des Partikels befindet. Die entsprechenden Koordinaten werden im Feld „Marker“ angezeigt. Wenn Sie nun erneut auf den Schalter *Bild laden* klicken, wird die zuvor ausgemessene Partikelposition gespeichert, im Feld *Messwerte* angezeigt, und das nächst folgende Bild geladen. Vermessen Sie so die Partikelposition aller aufgenommenen Bilder. Das Programm wird automatisch gestoppt, wenn Sie die Partikelposition des letzten aufgenommenen Bildes bestimmt haben. Die Messwerte werden unter *C:\Messungen\Messung.dat* als Textdatei gespeichert.

- Fangen Sie sofort mit der Auswertung der Messdaten an.



## VIII Auswertung

Die Auswertung erfolgt mit der auf dem Messrechner installierten Software Origin. Achtung: Da es im Laborbuch nicht möglich ist nachzuvollziehen, welche Rechnungen Sie mit Origin durchgeführt haben, muss bei allen Spaltenberechnungen die entsprechende Rechenvorschrift (Formel) im Laborbuch kommentiert werden!

### 1. Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler.

Die Messdaten sind in der Datei **Messung.dat** im Ordner Messungen auf dem Desktop gespeichert. Für jede Messung enthält die Datei drei Einträge: Die Zeit in Sekunden sowie die  $x$  und die  $y$ -Koordinaten in  $\mu\text{m}$ . Starten Sie Origin und importieren Sie die Datei **Messung.dat**: **Datei**  $\rightarrow$  **Import**  $\rightarrow$  **Einzelnes ASCII**. Beschriften Sie die Spaltenköpfe angemessen und speichern Sie das Projekt unter einem sinnvollen Namen.

Verschaffen Sie sich einen grafischen Eindruck von der Wanderung des Partikels. Setzen Sie dazu die Spalte mit den  $x$ -Koordinaten als **X** und die für die  $y$ -Koordinaten als **Y** und zeichnen Sie diese Daten als Punkt-Liniendiagramm. Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollheft ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 9.

Die Messdaten geben die absoluten Koordinaten an, wir brauchen aber die Koordinatenänderungen  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  und  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$  sowie deren Quadrate. Erweitern Sie die Tabelle daher um sechs Spalten: Zeitdifferenz  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta x^2$ ,  $\Delta y^2$  und  $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ . Die Differenzen können Sie wie folgt berechnen: Die zu berechnende Spalte markieren, Rechtsklick auf den Spaltenkopf  $\rightarrow$  **Spaltenwerte errechnen** auswählen. Geben Sie anschließend folgende Formel ein:  $\text{col}(t)[i+1] - \text{col}(t)[i]$ . Für „t“ in „col(t)“ müssen Sie natürlich Ihren gewählten Spaltennamen eintragen. Wiederholen Sie diese Berechnungen für die anderen Spalten. In der letzten Spalte kann natürlich keine Differenz mehr berechnet werden, in ihr erscheint ein Strich.

Als nächstes brauchen wir Mittelwerte und Fehler der Messwerte in den neu berechneten Spalten. In Origin lassen sich diese Werte mit Hilfe der Spaltenstatistik berechnen: Die zu berechnende Spalte markieren, Rechtsklick auf den Spaltenkopf  $\rightarrow$  **Spaltenstatistik**  $\rightarrow$  **Dialog öffnen** auswählen. Klicken Sie im sich öffnenden Fenster auf

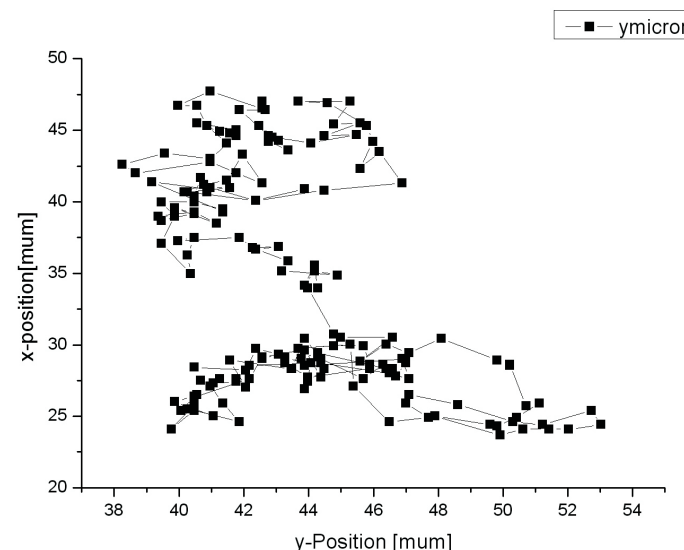


Abbildung 9: *Bewegung eines Partikels.*

Zu **berechnende Mengen** und danach auf **Momente** und wählen Sie die benötigte Größen aus. Das Ergebnisfenster liefert für alle ausgewählten Spalten die gewünschten Resultate. Notieren Sie sich in einer Tabelle für jede Messgröße die folgenden Werte: Mittelwert, Standardabweichung, SE des Mittelwerts, die minimalen und maximalen Werte.

Damit ist die mittlere quadratische Abweichung  $\langle r^2 \rangle$  und dessen Fehler  $\Delta \langle r^2 \rangle$  bestimmt. Berechnen Sie hieraus die Boltzmannkonstante und die Diffusionskonstante  $D$  mit den jeweiligen Fehlern.

### 2. Kontrollverteilung

Nach Gleichung 9 ist die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit  $t$  innerhalb des Bereichs  $[x, x + \Delta x]$  zu finden durch eine Gaußverteilung gegeben. Überprüfen Sie dies, indem Sie die gemessenen Partikelverschiebungen in ein Histogramm eintragen. Da die Brownsche Bewegung isotrop

ist, können Sie sowohl die Verschiebungen  $\Delta x$  als auch die Verschiebungen  $\Delta y$  gemeinsam in das gleiche Histogramm eintragen. Kopieren Sie gemeinsam die Daten  $\Delta x$  und  $\Delta y$  in eine neue Spalte. Markieren Sie mit der linken Maustaste den Spaltenkopf. Wählen Sie durch Rechtsklick auf den Spaltenkopf die Option **Zeichnen** → **Statistikdiagramme** → **Histogramm** aus. Öffnen Sie das Datenblatt des Histogramms: Rechtsklick ins Histogramm → **Gehe zu Klassierungsdaten**. Zeichnen Sie mit diesen Daten ein Säulendiagramm der Verteilung.

Berechnen Sie mit Hilfe der Spaltenstatistik den Mittelwert  $\mu$  sowie die Standardabweichung  $\sigma$  der Verteilung und zeichnen Sie anhand dieser beiden Werte eine Gaußkurve in das Säulendiagramm mit ein. Am einfachsten geht dies, wenn Sie die nichtlineare Fitfunktion in Origin verwenden und alle Fitparameter festhalten. Stimmt der berechnete Mittelwert mit dem theoretischen Wert überein? Berechnen Sie aus der Breite  $\sigma$  der Verteilung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante und vergleichen Sie diese mit dem zuvor bestimmten Werten. Drucken Sie das Säulendiagramm mit der berechneten Gaußkurve aus.

### 3. Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate.

Nach Gleichung (13) ist das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle r^2 \rangle$  proportional zur Zeit.

Berechnen Sie eine neue Spalte im Arbeitsblatt mit der kumulativen Verteilung von  $\langle r^2 \rangle$ . Nutzen Sie hierzu folgenden Trick:

- Tragen Sie in die erste Zeile der neuen Spalte die Summe der Zeilen 1 und 2 von  $\langle r^2 \rangle$  von Hand ein.
- Die anderen Zeilen berechnen Sie gemäß den Vorgaben in Abbildung 10 (Rechtsklick auf den Spaltenkopf → **Spaltenwerte errechnen** auswählen).

Stellen Sie diese Werte in einem neuen Diagramm als Funktion der Zeit dar. Es sollte sich ein linearer Zusammenhang gemäß Abbildung 11 ergeben. Fitten Sie eine Gerade an die Daten. Aus der Steigung kann wieder die Diffusionskonstante bestimmt werden. Stimmt sie mit den anderen Messungen überein?

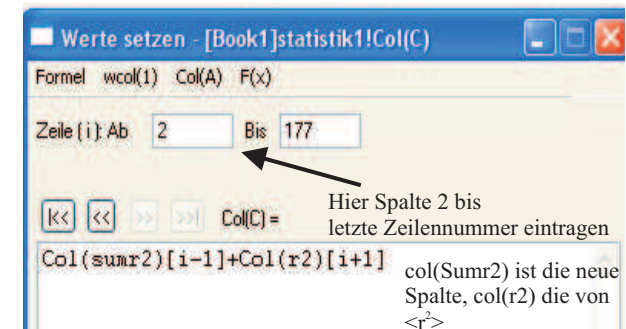


Abbildung 10: Berechnung der kumulativen Verschiebung.

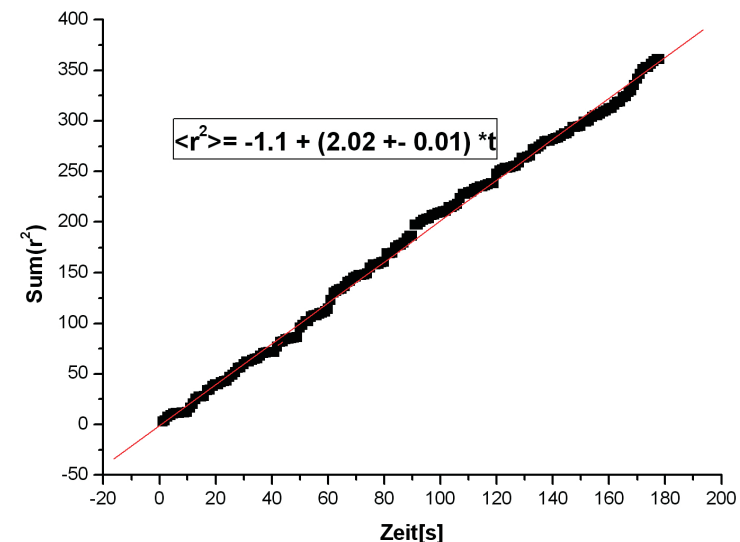


Abbildung 11: Kumulative Verschiebung eines Partikels.

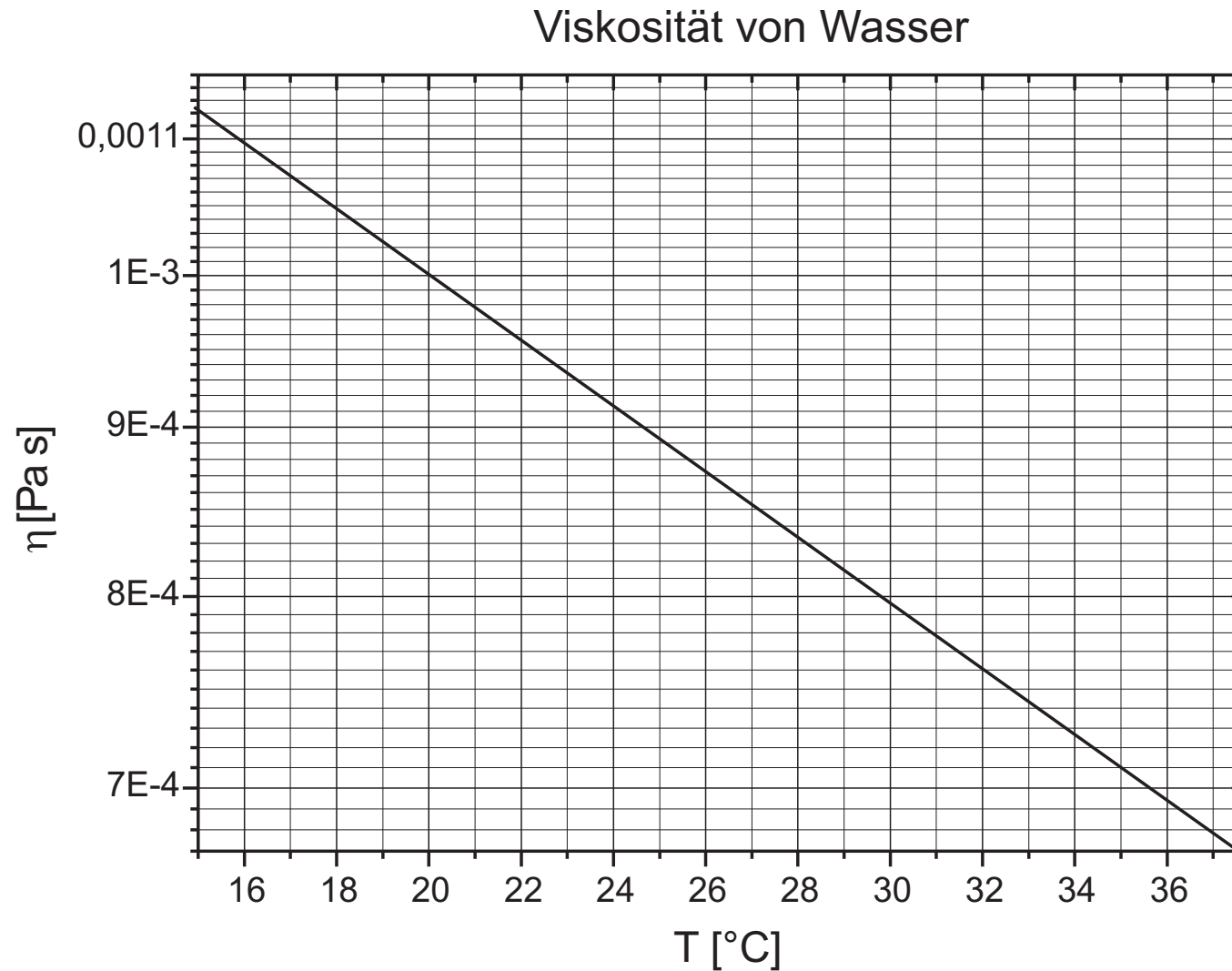


Abbildung 12: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser.