

# Grundlagen der Kryptographie und Steganographie

## STUDIENARBEIT

für die Prüfung zum

Bachelor of Science

des Studiengangs Informatik / Angewandte Informatik

an der

Dualen Hochschule Baden-Württemberg Karlsruhe

von

**Jens Döllmann**

Abgabedatum 17. Mai 2021

Bearbeitungszeitraum

2 Semester

Matrikelnummer

8876462

Kurs

TINF18B4

Gutachter der Studienakademie

Ralf Brune

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Symmetrische Verschlüsselung . . . . .	3
1.2	Modulare Arithmetik . . . . .	4
1.3	Die Verschiebe- oder Cäsar-Chiffre . . . . .	8

# Tabellenverzeichnis

1.1	Enkodierung des lateinischen Alphabets . . . . .	8
-----	--	---

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Kryptologie und ihre Untergebiete . . . . .	2
1.2	Kommunikation über einen unsicheren Kanal . . . . .	3
1.3	Kommunikation mit symmetrischer Verschlüsselung . . . . .	4

# Kapitel 1

## Einleitung

Redet man heutzutage über das Thema Kryptographie, sind im Gespräch wahrscheinlich Themen wie E-Mail-Verschlüsselung, Internetprotokolle oder Anwendungen im Bankwesen. Auch bekannt sind die Angriffe auf kryptographische Systeme, wie zum Beispiel die Entzifferung der durch die Enigma-Chiffriermaschine verschlüsselten deutschen Funkprüche während des Zweiten Weltkrieges. Es scheint als wäre Kryptographie stark mit den modernen elektronischen Kommunikationstechniken verbunden. Dies ist allerdings nicht so: Frühe Formen der Kryptographie gehen zurück bis etwa 2000 v. Chr., als bereits im antiken Ägypten neben den Standard-Hieroglyphen zusätzlich auch „geheime“ Zeichen verwendet wurden (Paar und Pelzl 2010, S. 2). Es werden prinzipiell zwei unterschiedliche kryptographische Verfahren unterschieden, diese sind Symmetrische- und Asymmetrische Algorithmen. Die symmetrische Verschlüsselung ist seit langer Zeit ein fester Bestandteil der Kryptographie, mit bekannten historischen Verfahren wie die Cäsar-Chiffre welche bereits im antiken Rom für das Verschlüsseln von Nachrichten verwendet wurde. Asymmetrische Verschlüsselung hingegen ist eine gänzlich neue Form der Kryptographie, Whitfield Diffie, Martin Hellman und Ralph Merkle haben die Idee im Jahr 1976 erstmalig öffentlich eingeführt (ebd., S. 3). Eine Übersicht über das Gebiet der Kryptographie ist in Abbildung 1.1 zu sehen (ebd., S. 3). Es ist zu bemerken, dass an oberster Stelle nicht die Kryptographie, sondern der Oberbegriff Kryptologie zu finden ist, welche sich in die zwei großen Bereiche unterteilt:

**Kryptographie** Die Wissenschaft eine Nachricht so zu verändern, dass ihr Sinn nur von dem Empfänger verstanden werden kann, für den sie bestimmt ist.

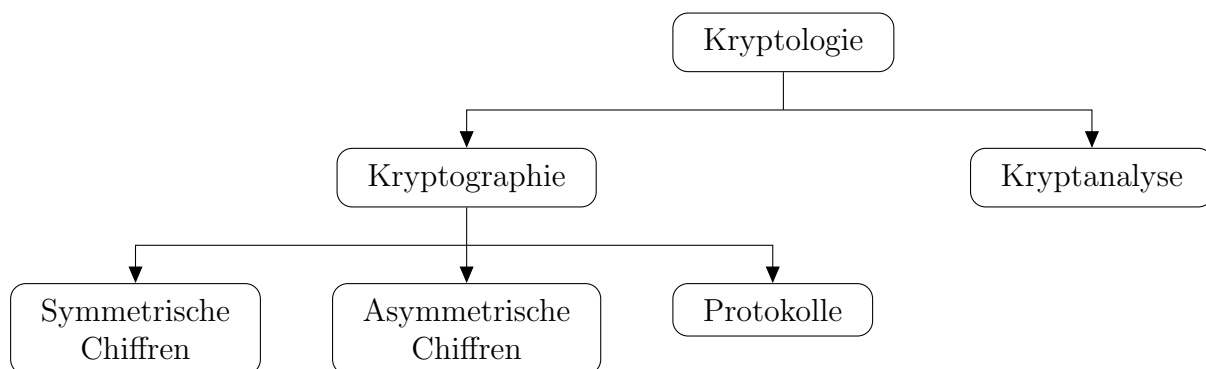


Abbildung 1.1: Die Kryptologie und ihre Untergebiete

**Kryptanalyse** Die Wissenschaft ein kryptographisches System zu analysieren mit dem Ziel mögliche Schwachstellen aufzudecken. Die Kryptanalyse ist ein äußerst wichtiger Teil der Kryptologie. Ohne Personen welche versuchen ein kryptographisches System zu brechen, wird man nie herausfinden können ob das System wirklich sicher ist. Ein starkes Kryptoverfahren sollte dem *Kerckhoffs's principle* unterliegen, welches im Jahr 1883 von Auguste Kerckhoffs postuliert wurde und von Paar und Pelzl durch folgende Definition beschrieben ist (2010, S. 11):

**Definition 1.0.1** (*Kerckhoffs's principle*). „*A cryptosystem should be secure even if the attacker knows all details about the system, with the exception of the secret key. In particular, the system should be secure when the attacker knows the encryption and decryption algorithms.*“

Auf den ersten Blick scheint das *Kerckhoffs's principle* nicht sonderlich intuitiv. Es sei einfach zu glauben, dass ein System sicherer sein muss, wenn die Details der Implementierung geheim gehalten werden. In der Regel ist dies aber nicht so. Ein Kryptoverfahren bleibt nicht für immer geheim und die Vergangenheit hat gezeigt, dass ein System dessen geheimes Design an die Öffentlichkeit gelangt, fast immer unsicher ist. Ein hierfür gutes Beispiel ist das Content Scrambling System (CSS) für das Verschlüsseln von DVD-Videoinhalten. Trotz großer Bemühungen der Industrie die Funktionsweise von CSS geheim zu halten, gelang das Design durch Reverse Code Engineering schnell an die Öffentlichkeit. Es zeigten sich Mängel in der Implementierung, welche das Brechen der Verschlüsselung mit sehr geringen Aufwand ermöglichten (Barry 2004).

## 1.1 Symmetrische Verschlüsselung

Denkt man an die Teilbereiche der Kryptographie, ist die Symmetrische Verschlüsselung das wohl klassischste Beispiel. Zwei Parteien kommunizieren mit einem Algorithmus zum Ver- und Entschlüsseln von Nachrichten und haben sich auf einen gemeinsamen geheimen Schlüssel geeinigt. Wie es in der Literatur sehr beliebt ist, wird die Idee der symmetrischen Verschlüsselung mit einem einfachen Beispiel eingeführt (Paar und Pelzl 2010, S. 4–6): Zwei Parteien Alice und Bob möchten über einen unsicheren Kanal Nachrichten untereinander austauschen. Ein unsicherer Kanal ist hierbei lediglich die Kommunikationsstrecke, z.B. das Internet, die Luftschnittstelle bei WLAN und Mobilfunk oder jedes andere Medium, über das sich digitale Daten übertragen lassen.

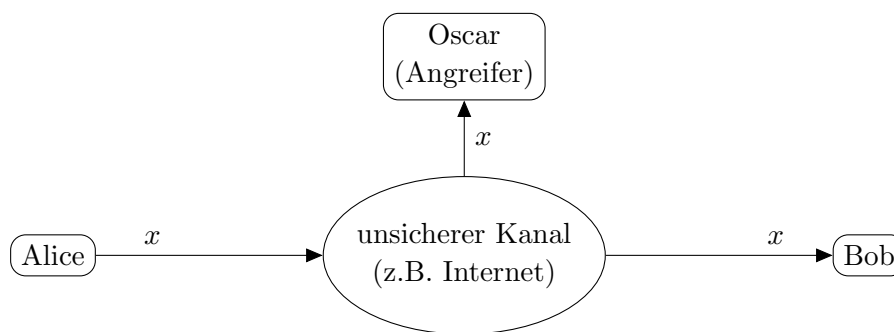


Abbildung 1.2: Kommunikation über einen unsicheren Kanal

Es ist klar warum Alice und Bob gerne geheime Nachrichten austauschen würden. Alice möchte sich an ihrem Bankkonto anmelden und sendet ihr Passwort zu Bob. Ein potenzieller Angreifer Oscar soll die Passwörter von Alice nicht in Klartext mitlesen können. In einer solchen Situation bietet die Symmetrische Verschlüsselung eine gute Lösung: Bevor Alice ihr Passwort sendet, verschlüsselt sie es mit einem symmetrischen Algorithmus. Bob invertiert die Verschlüsselung und erhält die unverschlüsselte Nachricht. Wurde für die Verschlüsselung ein sicherer Algorithmus gewählt, erscheint die Nachricht für Oscar nur wie eine zufällige Folge von Bits.

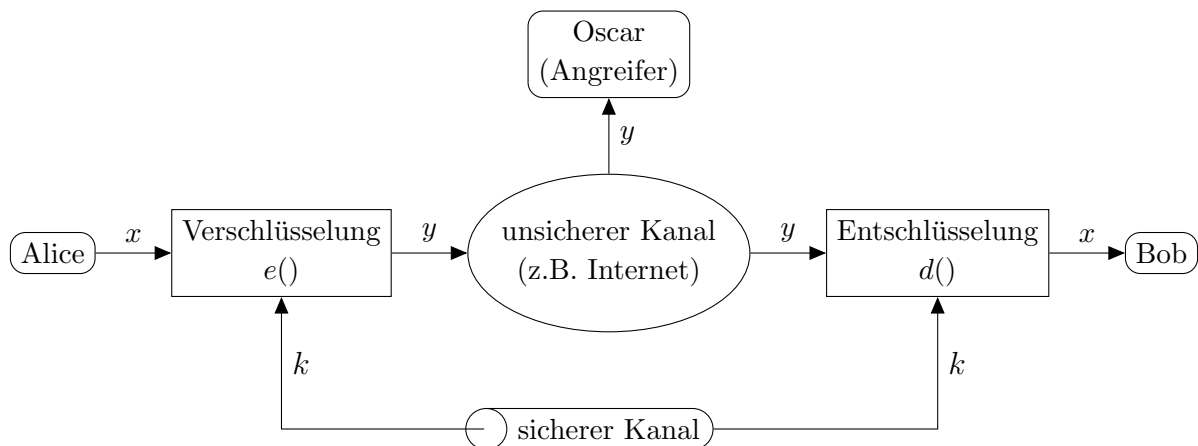


Abbildung 1.3: Kommunikation mit symmetrischer Verschlüsselung

Die Variablen  $x, y$  und  $k$  aus Abbildung 1.3 haben in der Kryptographie eine besondere Bedeutung:

- $x$  ist der Klartext (engl. *plaintext*).
- $y$  ist das Chiffre oder der Geheimtext (engl. *ciphertext*).
- $k$  ist der Schlüssel (engl. *key*).
- $e(\cdot)$  ist die Verschlüsselung (engl. *encryption*).
- $d(\cdot)$  ist die Entschlüsselung (engl. *decryption*), d.h. die Umkehrfunktion von  $e$ .

Für die Symmetrische Verschlüsselung wird der geheime Schlüssel  $k$  benötigt. Dieser muss vor der Kommunikation auf einem sicheren Weg zwischen Alice und Bob verteilt werden.

## 1.2 Modulare Arithmetik

Fast alle kryptographischen Algorithmen, sowohl Symmetrische als auch Asymmetrische Chiffren, basieren auf Arithmetik in einer endlichen Menge von ganzen Zahlen (Paar und Pelzl 2010, S. 13). Dies steht im Gegensatz zu der Mathematik (und dem Alltagsleben) in der wir es gewöhnt sind in unendlichen Mengen zu rechnen, z.B. die natürlichen Zahlen oder die reellen Zahlen. Die modulare Arithmetik, d.h. die Division mit Rest, bietet eine gute Möglichkeit um in diesen begrenzten Mengen rechnen zu können.



**Lemma 1.2.1** (Remmert und Ullrich 2008, S. 179–180). *Folgende Aussagen über drei ganze Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $m$ , wobei  $m > 0$ , sind äquivalent:*

- i)  $a$  und  $b$  lassen bei Division mit Rest durch  $m$  denselben Rest.*
- ii) Die Differenz  $a - b$  ist durch  $m$  teilbar.*

*Beweis.*  $\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$

Es seien  $a = q_1m + r_1$  und  $b = q_2m + r_2$  mit  $0 \leq r_1, r_2 < m$ , die Gleichungen, die bei Division mit Rest entstehen.

*i)  $\Rightarrow$  ii):*

Es gilt:  $r_1 = r_2$ .

Zu zeigen:  $m|(a - b)$ .

$$\begin{aligned} a - b &= q_1m + r_1 - q_2m + r_2 \\ a - b &= (q_1 - q_2)m + r_1 - r_2 \\ \Rightarrow a - b &= (q_1 - q_2)m \\ \frac{a - b}{m} &= q_1 - q_2 \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:  $m|(a - b)$ .

*ii)  $\Rightarrow$  i):*

Es gilt:  $m|(a - b)$ .

Zu zeigen:  $r_1 = r_2$ .

$$\begin{aligned} m|(a - b) \\ \Rightarrow m|(q_1m + r_1) - (q_2m + r_2) \\ \Rightarrow m|(q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2) \end{aligned}$$

$m|(q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2)$  und  $m|(q_1 - q_2)m$ , weshalb gelten muss:  $m|(r_1 - r_2)$ .<sup>1</sup>

$r_1 - r_2$  muss ein Vielfaches von  $m$  sein oder 0. Da sich  $r_1$  und  $r_2$  im Bereich  $[0, m)$  befinden ist die einzige Lösung  $r_1 - r_2 = 0$ . Es folgt:  $r_1 = r_2$ . □

---

<sup>1</sup>Aus  $a|b$  und  $a|c$  folgt  $a|(xb + yc)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$  (Remmert und Ullrich 2008, S. 23). Also mit konkreten Werten  $m|(q_1 - q_2)m + (r_1 - r_2) - (q_1 - q_2)m \Rightarrow m|(r_1 - r_2)$ .

Nach Gauß nennt man zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$ , die bei der Division durch  $m$  denselben Rest ergeben, *kongruent modulo  $m$* . Anstelle der schwerfälligen Teilbarkeitsschreibweise  $m|(a-b)$  führte Gauß folgende Schreibweise ein (Remmert und Ullrich 2008, S. 180):

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{oder kürzer:} \quad a \equiv b \pmod{m} \quad (1.1)$$

Beispiel 1.2.1. Es sind  $a = 29$  und  $m = 8$ . Man schreibt

$$29 \equiv 5 \pmod{8} \quad \text{oder als Gleichung:} \quad 29 = 3 \cdot 8 + 5$$

und deshalb  $8|(29-5)$ . △

Die Gleichung der Modulo Rechnung hat unendlich viele Lösungen. Zu einem gegebenen  $m$  gibt es beliebig viele Zahlen  $a$ , welche den selben Rest ergeben.

Beispiel 1.2.2. Die folgenden Zahlen erfüllen die Gleichung  $a \pmod{8} = 5$ . Sie werden kongruent modulo 8 genannt:

$$29 \equiv 21 \equiv 13 \equiv 5 \equiv -3 \equiv -11 \pmod{8}$$

Elemente welche bei der Modulo Rechnung den gleichen Rest ergeben, können in eine Klasse zusammengefasst werden, diese nennt man dann eine Restklasse bezüglich  $m$ . Die acht Restklassen bezüglich 8 sind:

$$\begin{aligned} &\{\dots, -24, -16, -8, 0, 8, 16, 24, \dots\} \\ &\{\dots, -25, -17, -9, 1, 9, 17, 25, \dots\} \\ &\vdots \\ &\{\dots, -17, -9, -1, 7, 15, 23, 31, \dots\} \end{aligned}$$

△

Alle Elemente einer Restklasse verhalten sich gleich. Zu einem gegebenen Modulo  $m$  spielt es keine Rolle, welches Element der Restklasse für eine Berechnung ausgewählt wird. Diese Eigenschaft ist von großem Nutzen, vor allem bei Berechnungen mit großen Zahlen, wie es in der Kryptographie oft der Fall ist.

Beispiel 1.2.3 (Paar und Pelzl 2010, S. 15–16). Die Hauptoperation in vielen Asymmetrischen Chiffren ist die Exponentiation der Form  $x^e \bmod m$ , wobei  $x, e, m$  sehr große ganze Zahlen sind. Anhand eines Beispiels können zwei Formen der modularen Exponentiation gezeigt werden. Es soll das Ergebnis der Berechnung  $3^8 \bmod 7$  ermittelt werden. Im ersten Beispiel wird das Ergebnis einfach ausgerechnet, und im zweiten Beispiel wird zwischen den Restklassen gewechselt:

1.  $3^8 = 6561 \equiv 2 \bmod 7$ , weil  $6561 = 937 \cdot 7 + 2$

Wir erhalten das relative große Zwischenergebnis 6561 obwohl wir wissen, dass das Ergebnis im Bereich  $[0, 6]$  liegen muss.

2. Es ist  $3^3 = 27 \equiv -1 \bmod 7$ . Man schreibt:

$$3^8 = (3^3)^2 \cdot 3^2 \equiv (-1)^2 \cdot 9 \equiv 2 \bmod 7$$

Indem man das Zwischenergebnis  $3^3 = 27$  mit einem kleineren Element aus der selben Restklasse ersetzt, kann das Ergebnis effizient ermittelt werden. Zwischenergebnisse werden nie größer als 27 und man könnte die Berechnung mit wenig Aufwand auch ohne Taschenrechner durchführen.

△

*Bemerkung 1.2.1.* Paar und Pelzl (ebd., S. 16) haben sich in ihrem Buch darauf geeinigt, in der Kongruenzrelation (1.1) ein  $b$  für gewöhnlich so zu wählen, dass:

$$0 \leq b < m$$

Man schreibt somit  $27 \equiv 6 \ (7)$  und nicht  $27 \equiv -1 \ (7)$  oder  $27 \equiv 13 \ (7)$ .<sup>2</sup> Mathematisch macht es jedoch keinen Unterschied.

---

<sup>2</sup>Mit dieser Vereinbarung ist das  $b$  der Relation  $a \equiv b \ (m)$  eine Lösung für die Gleichung  $a \bmod m = r = b$ .

Um das bekannte Verschlüsselungsverfahren, die Cäsar-Chiffre, im nächsten Abschnitt besser beschreiben zu können, wird an dieser Stelle der Ring  $\mathbb{Z}_m$  definiert:

**Definition 1.2.1** (Der Ring  $\mathbb{Z}_m$  der Reste modulo  $m$ ).

1. Der Ring  $\mathbb{Z}_m$  mit  $m \in \mathbb{N}$  und  $m > 2$  ist definiert als die Menge  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$
2. Zu je zwei Elementen  $a, b \in \mathbb{Z}_m$  existiert eindeutig in  $\mathbb{Z}_m$ 
  - (a) Eine Summe  $a + b \pmod{m}$
  - (b) Ein Produkt  $a \cdot b \pmod{m}$

## 1.3 Die Verschiebe- oder Cäsar-Chiffre

Die Cäsar-Chiffre ist das vielleicht bekannteste historische Verschlüsselungsverfahren, es wird von Paar und Pelzl auf Seiten 18-19 eingeführt (2010). Bei der Cäsar-Chiffre handelt es sich um eine spezielle Form der Buchstabensubstitution. Jedes Zeichen im Klartext wird zur Verschlüsselung um einen bestimmten Wert im Alphabet verschoben. Um die Cäsar-Chiffre mathematisch zu beschreiben, muss das zu Grunde liegende Alphabet enkodiert werden. Eine Methode ist die fortlaufend Nummerierung der Buchstaben. Das so kodierte lateinische Alphabet ist in Tabelle 1.1 zu sehen.

Tabelle 1.1: Enkodierung des lateinischen Alphabets

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Würde ein Buchstabe zu weit verschoben, wird von vorne begonnen. Sowohl Klartext- als auch Geheimtextbuchstaben sind somit Teil des Rings  $\mathbb{Z}_{26}$ . Die Ver- und Entschlüsselung kann nun folgendermaßen ausgedrückt werden:

**Definition 1.3.1** (Cäsar-Chiffre). Es seien  $x, y, k \in \mathbb{Z}_{26}$ . Dann gilt:

**Verschlüsselung:**  $y = e_k(x) \equiv x + k \pmod{26}$

**Entschlüsselung:**  $x = d_k(y) \equiv y - k \pmod{26}$

Das Verschlüsselungsverfahren funktioniert.

*Beweis.* Die Entschlüsselung der Verschlüsselung ergibt den Klartext.

Zu zeigen:  $d_k(e_k(x)) = x$ .

$$d_k(e_k(y)) = x \equiv x + k - k \equiv x \pmod{26}$$

□

Beispiel 1.3.1. Es sei  $k = 9$  und der Klartext:

$$\text{ATTACK} = x_1, x_2, \dots, x_6 = 0, 19, 19, 0, 2, 10$$

Der Geheimtext wird wie folgt berechnet:

$$y_1, y_2, \dots, y_6 = 9, 2, 2, 9, 11, 19 = \text{JCCJLT}$$

△

Wie zu erwarten ist die Cäsar-Chiffre natürlich nicht sonderlich sicher. Es gibt nur 26 verschiedene Schlüssel (wobei  $k = 0$  den Klartext nicht verändert), welche schnell alle ausprobiert werden können. Zusätzlich haben Klar- und Geheimtext die selben statistischen Eigenschaften. Klartextbuchstaben werden immer auf die selben Geheimtextbuchstaben abgebildet. Dies erlaubt es eine Häufigkeitsanalyse durchzuführen.

# Literaturverzeichnis

Barry, Mark (Juni 2004). *Cryptography in Home Entertainment*. Einsichtsname: 03.01.2021.

URL: <http://www.math.ucsd.edu/~crypto/Projects/MarkBarry/index.htm>.

Paar, Christof und Jan Pelzl (2010). *Understanding Cryptography*. Springer. ISBN: 978-3-642-04100-6.

Remmert, Reinhold und Peter Ullrich (2008). *Elementare Zahlentheorie*. 3. Aufl. Birkhäuser. ISBN: 978-3-7643-7730-4.