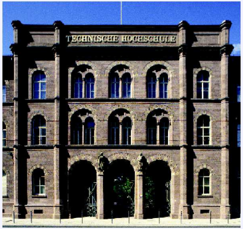
Übung zum Fach Rechnerunterstütze Mechanik I

J. Ruck, H. Erdle, T.-A. Langhoff, T. Böhlke

Chair for Continuum Mechanics
Institute of Engineering Mechanics
Department of Mechanical Engineering
Karlsruhe Institute of Technology (KIT)

WS 2017/2018



Karlsruher Institut für Technologie

Ü8: Elastizität

Themen der 8. Übung

- Vektornotationen für Tensoren 2. und 4. Stufe
  - Nichtnormierte Voigtnotation (z.B. für ABAQUS)
  - Normierte Voigt-Notation
- Hooke'sches Gesetz in Vektor-Matrix-Notation
- Vergleichsspannungsberechnung
- Spektralzerlegung der Steifigkeitsmatrix
- Rotation der Steifigkeitsmatrix

Nichtnormierte Voigtnotation

$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ sind symmetrisch $\rightarrow$ Nur 6 unabhängige Komponenten

Idee: Schreibe $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ als Vektoren mit 6 Komponenten

In nichtnormierter Voigt-Notation gilt:

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^{\mathsf{T}},$$
$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^{\mathsf{T}}$$

Achtung! Tensoren zweiter Stufe werden in zwei verschiedenen Notationen geschrieben. Dies hat rechnerische Gründe. Bei Operationen auf Tensoren ist dies jedoch **immer** zu berücksichtigen (potenzielle Fehlerquelle).

Unterscheidung (außer bei σ und ε):

$$\boldsymbol{A} \rightarrow A_\sigma = (A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{13}, A_{12})^{\mathsf{T}},$$
$$\boldsymbol{A} \rightarrow A_\varepsilon = (A_{11}, A_{22}, A_{33}, 2A_{23}, 2A_{13}, 2A_{12})^{\mathsf{T}}$$

Operatoren

- Definition: $D_\alpha = \operatorname{diag}(1, 1, 1, \alpha, \alpha, \alpha)$
- Skalarprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_\sigma^{\mathsf{T}} B_\varepsilon = A_\sigma^{\mathsf{T}} D_2 B_\sigma = A_\varepsilon^{\mathsf{T}} D_{1/2} B_\varepsilon$$

- Umrechnung zwischen den spannungs-/dehnungsartiger Notation

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= D_2 A_\sigma, \\ A_\sigma &= D_{1/2} A_\varepsilon \end{aligned}$$

- Norm eines Tensors zweiter Stufe (Frobenius-Norm)

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} = \sqrt{A_\sigma^{\mathsf{T}} D_2 A_\sigma} = \sqrt{A_\sigma^{\mathsf{T}} A_\varepsilon} = \sqrt{A_\varepsilon^{\mathsf{T}} D_{1/2} A_\varepsilon}$$

Matrix-Notation für Tensoren 4.Stufe

$\mathbb{C}$ besitzt Hauptsymmetrie und beide Nebensymmetrien:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijlk}$$

$\rightarrow$ Nur 21 unabhängige Komponenten

Idee: Schreibe $\mathbb{C}$ als 6×6 Matrix

In nichtnormierter Voigt-Notation gilt:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & & \text{sym.} & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich direkt

$$\sigma = C\varepsilon$$

ACHTUNG!

($\mathbb{A}, \mathbb{B}$ Tensoren vierter Stufe mit den gleichen Symmetrien wie $\mathbb{C}$)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathrm{tr}\mathbb{A}\mathbb{B}$$

Achtung: Nicht direkt auf die nicht-normierte Konvention übertragbar!
Damit gilt für die Norm:

$$\|\mathbb{A}\| = \sqrt{\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}}$$

ACHTUNG!

Im isotropen Fall gilt beispielsweise: $\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}' + 3K\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{I}$

Aber: $C_{1212} = G \neq 2G$, denn auf Grund der Symmetrieeigenschaften folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ \rightarrow\ \sigma_{12} &= C_{12kl}\varepsilon_{kl} \\ &= 0 + C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1221}\varepsilon_{12} = 2C_{1212}\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

Also gilt für die isotrope Steifigkeitsmatrix in der nichtnormierten Voigt-Notation

$$C = \begin{pmatrix} K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & G & 0 \\ & & & & & G \end{pmatrix}$$

Normierte Voigtnotation

Problem: Nichtnormierte Voigtnotation benötigt Zusatzinformation (Art der Notation)

Idee: Darstellung so wählen, dass das Tensorskalarprodukt dem Standard-SKP für Vektoren entspricht

$$\boldsymbol{A} \to \hat{A} = \left(A_{11}, A_{22}, A_{33}, \sqrt{2}A_{23}, \sqrt{2}A_{13}, \sqrt{2}A_{12}\right)^{\mathsf{T}}$$

Dann gilt:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \hat{A}^{\mathsf{T}}\hat{A},$$

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\hat{A}^{\mathsf{T}}\hat{A}} = \|\hat{A}\|_2$$

Vorteil: Die Notation für Spannungen und Dehnung erfolgt gleichermaßen; *Keine* Zusatzinformation

Matrix-Notation für Tensoren 4.Stufe (normierte Voigt-Notation)

Es gilt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ & & \text{sym.} & & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ & & & & & 2C_{1212} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}$$

Umrechnung $\longleftrightarrow$ nicht-normierten Voigtnotation

$$\hat{C} = D_{\sqrt{2}} C D_{\sqrt{2}},$$

$$C = D_{\sqrt{2}/2} \hat{C} D_{\sqrt{2}/2}$$

Skalarprodukt und Norm

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathrm{tr} \hat{A}\hat{B} = \mathrm{tr} A D_4 B,$$

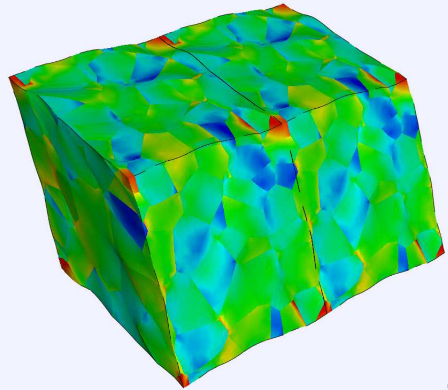
$$\|\mathbb{A}\| = \sqrt{\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}} = \sqrt{\mathrm{tr}\hat{A}\hat{A}} = \sqrt{\mathrm{tr} A D_4 A}$$

von Mises Vergleichsspannung σ_{vM}

Definition

$$\sigma_{\mathrm{vM}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| \text{ mit } \mathrm{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{I} \text{ (Spannungdeviator)}$$

Bedeutung vor allem in der Plastizität polykristalliner Metall



Spektralzerlegung

- $\mathbb{C}$ ist symmetrisch, positiv definit (spd)
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ sind die 6 Eigenwerte (EW) von $\mathbb{C}$
- $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_{N_\lambda}$ sind die *verschiedenen* EW von $\mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ ist spd $\rightarrow \lambda_i > 0 \ (i = 1, \ldots, 6)$
- $\mathbb{C}$ symmetrisch
  $\rightarrow$ Orthonormalbasis aus Eigentensoren $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ existiert
- $1 \leq N_\lambda \leq 6$
- $\mathbb{P}_i$ ist Eigenprojektor von $\mathbb{C}$ zum EW $\bar{\lambda}_i$ $(i = 1, \ldots, N_\lambda)$, d.h.:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j &= \mathbf{0} && (i \neq j) \\
(\mathbb{P}_i)^n &= \mathbb{P}_i && (n = 1, 2, \ldots) \\
\mathbb{P}_i &= \sum_{j:\, \lambda_j = \bar{\lambda}_i} \mathcal{E}_j \otimes \mathcal{E}_j \\
\mathbb{C} &= \sum_{i=1}^{N_\lambda} \bar{\lambda}_i \mathbb{P}_i && \textbf{(Spektraldarstellung)}
\end{aligned}
$$

Berechnung der Eigenprojektoren in Vektornotation

Gegeben: $\mathbb{C}$ in nichtnormierter Voigtnotation $\rightarrow C$
Gesucht: Spektraldarstellung $\bar{\lambda}_i, \mathbb{P}_i$

EW & Eigentensoren **immer** in normierter Voigtnotation berechnen

Algorithmus

- Transformation von C nach $\hat{C} = D_{\sqrt{2}} C D_{\sqrt{2}}$ (normierte Voigtnotation)
- Berechnung der 6 EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ und EV $v_1, \ldots, v_6$ mit `eig`
- Schrittweise Konstruktion der Eigenprojektoren
  1. Setze $i = 1$
  2. Wurde der EW λ_i (EV: v) schon in einem anderen Projektor $\hat{P}_j$ berücksichtigt?

  2. a) Ja: Berechne $w = \frac{v - \hat{P}_j v}{\|v - \hat{P}_j v\|}$, $\hat{P}_j = \hat{P}_j + w w^{\mathsf{T}}$. Gehe zu 3.

  2. b) Nein: $N_\lambda = N_\lambda + 1$, $\bar{\lambda}_{N_\lambda} = \lambda_i$, $v = \frac{v}{\|v\|}$, $\hat{P}_{N_\lambda} = v v^{\mathsf{T}}$

  3. Falls $i < 6$: $i = i + 1$; sonst: Fertig
- Rücktransformation: $P_i = D_{\sqrt{2}/2} \hat{P}_i D_{\sqrt{2}/2}$

Probe: Spektraldarstellung

Ergebnisverifikation

Berechne

$$C^* = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \bar{\lambda}_i P_i, \quad E = C^* - C, \quad e = \frac{\|E\|_F}{\|C\|_F}$$

Eigenschaften der Spektraldarstellung

- Nachgiebigkeits- und Steifigkeitstensor besitzen
  (a) reziproke Eigenwerte und
  (b) gleiche Eigenprojektoren

$$\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1} = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \frac{1}{\lambda_i} \mathbb{P}_i$$

- Eigenwerte sind rotationsinvariant (da skalarwertig)

Zusatzaufgabe: Rotation der Steifigkeitsmatrix

- Wird häufig benötigt, da Kristalle im Gefüge unterschiedliche Orientierungen aufweisen
- Verifikation der Rotationsroutine über die Eigenwerte möglich (rotationsinvariant)
- Rotation der lokalen Spannungen/Dehnungen kann notwendig sein, z.B. um Spannungen in einem Faser-Komposit in das lokale Koordinatensystem zu drehen
- Euler-Rotation mit Winkel $\varphi_1, \Phi, \varphi_2$