Übungsblatt 8
Elastizitätstheorie

Aufgabe 1. *Konstitutivgesetze für die lineare Elastizität*
Das Hooke'sche Gesetz lautet in spannungsexpliziter Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}],$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ den Cauchy'schen Spannungstensor, $\mathbb{C}$ den Materialsteifigkeitstensor und $\boldsymbol{\varepsilon}$ den Verzerrungstensor bezeichnen. Aus der Drehimpulsbilanz folgt die Symmetrie von $\boldsymbol{\sigma}$. Der Tensor besitzt also nur 6 unabhängige Komponenten. Gleiches gilt für $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}) + \operatorname{grad}(\boldsymbol{u})^{\mathsf{T}}\right)$. Aus diesem Grund können Spannungen und Dehnungen durch sechsdimensionale Vektoren identifizert werden. Häufig wird die *nichtnormierte Voigt-Notation**

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^{\mathsf{T}},$$
$$\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^{\mathsf{T}}$$

verwendet (u.A. in dem kommerziellen Finite Elemente Programm `ABAQUS`, **ACHTUNG:** in ABAQUS wird geänderte Indexreihenfolge, d.h. bspw. $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^{\mathsf{T}}$ verwendet). Der Materialsteifigkeitstensor $\mathbb{C} = C_{ijkl}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l$ kann bezüglich dieser Konvention als symmetrische 6×6-Matrix dargestellt werden:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & & \text{sym.} & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten der Matrix C sind abhängig vom Materialtyp, das heißt von der materiellen Symmetrie. Das Hooke'sche Gesetz hat in Vektor-Matrix Schreibweise mit der eingeführten Notation folgende Form:

$$\sigma = C\varepsilon.$$

*Es wird bei Vektoren und Matrizen auf den Fettdruck verzichtet, damit der Text möglichst nahe am Matlab-Quelltext orientiert ist. Tensoren werden jedoch in der üblichen Art und Weise gesetzt.

Alternativ dazu lässt sich die *normierte Voigt-Notation* einführen. Für diese gilt:

$$\hat{\sigma} = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sqrt{2}\sigma_{23}, \sqrt{2}\sigma_{13}, \sqrt{2}\sigma_{12}\right), \quad \hat{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \sqrt{2}\varepsilon_{12}\right),$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ & & \text{sym.} & & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ & & & & & 2C_{1212} \end{pmatrix}.$$

Vorteilhaft an dieser Darstellung ist die Eigenschaft, dass das Skalarprodukt für Tensoren mit dem Standard-Skalarprodukt der entsprechenden Tensoren übereinstimmt. In der normierten Voigt-Notation gilt

$$\hat{\sigma} = \hat{C}\hat{\varepsilon}.$$

(a) Schreiben Sie eine Routine `StressStrain(C, E)`, die für gegebene Materialsteifigkeit (`C`) die Spannungen als lineare Funktion der Dehnungen (`E`) berechnet. Verwenden Sie die nicht-normierte Voigt-Notation.

(b) Der Deviator eines Tensors $\boldsymbol{A}$ ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{dev}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \tfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}.$$

Der Deviator des Spannungstensors spielt bei der Betrachtung metallischer Werkstoffe eine besondere Rolle. Über den Deviator wird die *von Mises Vergleichsspannung* definiert:

$$\sigma_{\mathrm{vM}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|_F\,,$$

wobei $\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}$ die Frobeniusnorm für Tensoren ist. Schreiben Sie eine Routine `SigmaMises(S)`, welche die *von Mises Vergleichsspannung* für gegebene Spannung (`S`) berechnet.

ACHTUNG: Beachten Sie die Definition des Skalarproduktes für Tensoren in Vektornotation (s. *Anhang*).

(c) Schreiben Sie drei Subroutinen, die die Steifigkeitsmatrizen für

- isotrope Materialien `CISO(K, G)`,

- kubische Materialien `CCUBIC(C1111, C1122, C2323)` und

- transversal isotrope Materialien `CTISO(C1111, C3333, C2323, C1122, C1133)` definieren (s. *Hinweise*).

(d) Berechnen Sie mit Matlab die Eigenwerte der Steifigkeitstensoren (s. *Anhang*) für die drei verschiedenen Materialien. Wie viele verschiedene Eigenwerte gibt es jeweils? Geben Sie die *Spektralzerlegung*

$$C = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \, P_i, \quad \hat{C} = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \, \hat{P}_i$$

des Steifigkeitstensors für die drei Fälle an. Mit P_i wird hierbei der *Eigenprojektor* zum Eigenwert λ_i und mit N_λ die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte bezeichnet. Nutzen Sie die Vorlage `SpectralDecomposition_vorlage` und gehen Sie wie folgt vor:

- Transformieren Sie C in die normierte Voigtnotation $\rightarrow \hat{C}$ (s. *Anhang*);
- Berechnen Sie mit `eig` die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\hat{\varepsilon}_i$ von $\hat{C}$;
- Berechnen Sie die Projektoren in normierter Voigt-Notation über

$$\hat{P}_i = \sum_{j:\, \lambda_j = \lambda_i} \hat{\varepsilon}_j \hat{\varepsilon}_j^{\mathsf{T}}.$$

  ACHTUNG: Die Eigenvektoren $\hat{\varepsilon}_i$ müssen vor diesem Schritt orthogonalisiert und normiert werden. Verwenden Sie die Matlab-Vorlage und beachten Sie die darin enthaltene Dokumentation der einzelnen Schritte.
- Transformieren Sie die Eigenprojektoren zurück in die nicht-normierte Voigt-Notation.

Testen Sie die *Spektralzerlegung*, indem Sie C über

$$C = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i P_i$$

rekonstruieren, und das Ergebnis mit der ursprünglichen Steifigkeitsmatrix vergleichen.

(e) Variieren Sie die Werkstoffkennwerte der verschiedenen Materialgesetze und beobachten Sie die Eigenprojektoren. Sind die Projektoren bei isotropen/kubischen/transversal isotropen Materialien von den Werkstoffkennwerten abhängig?
Hinweis: Um den i-ten Projektor in der Matlab-Konsole auszugeben verwenden Sie folgenden Befehl:
`A=zeros(6,6); A=squeeze(P(i,:,:))`

Hinweise: Im Falle isotroper materieller Symmetrie gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, \boldsymbol{I} + 2G \operatorname{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Daraus kann die Form der zugehörigen Steifigkeitsmatrix abgeleitet werden:

$$C = \begin{pmatrix} K+\frac{4G}{3} & K-\frac{2G}{3} & K-\frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2G}{3} & K+\frac{4G}{3} & K-\frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2G}{3} & K-\frac{2G}{3} & K+\frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & G & 0 \\ & & & & & G \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} K+\frac{4G}{3} & K-\frac{2G}{3} & K-\frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2G}{3} & K+\frac{4G}{3} & K-\frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K-\frac{2G}{3} & K-\frac{2G}{3} & K+\frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2G & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & 2G & 0 \\ & & & & & 2G \end{pmatrix}.$$

Im Fall kubischer Symmetrie gilt

$$C = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{C2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{C2323} & 0 \\ & & & & & C_{C2323} \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{C2323} & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & 2C_{C2323} & 0 \\ & & & & & 2C_{C2323} \end{pmatrix}.$$

Zur Beschreibung der transversalen Isotropie sind 5 Materialparameter notwendig:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & (C_{1111} - C_{1122})/2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & 2C_{2323} & 0 \\ & & & & & (C_{1111} - C_{1122}) \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe

Hinweis: Im folgenden gelte die Einstein'sche Summationskonvention, das heißt über doppelte Indizes wird summiert.

Schreiben Sie eine Routine, die eine gegebene Steifigkeitsmatrix in ein anderes Koordinatensystem transformiert. Dafür sei ein eigentlich orthogonaler Tensor $\boldsymbol{Q} = Q_{ij}\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ gegeben, der die Rotation des Referenzsystems beschreibt. Es gilt folgende Beziehung zwischen den Basisvektoren $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ des rotierten Referenzsystems und den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$ des Bezugssystems:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = Q_{ij}\boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{e}_i = Q_{ji}\tilde{\boldsymbol{e}}_j.$$

Wir betrachten nun euklidische Systeme mit der Standardbasis $\{\boldsymbol{e}_i\}$ und können $\boldsymbol{Q}$ als Rotationsmatrix Q verwenden. Eine Möglichkeit zur Beschreibung dieser Rotation ist durch die drei Euler-Winkel $(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ möglich. Bei Anwendung der zxz-Konvention (erst Rotation um z-Achse mit Winkel φ_1, dann Φ um x-Achse im rotierten System und noch einmal um die rotierte z-Achse mit Winkel φ_2) ergibt sich (mit $c_{\varphi_1} = \cos\varphi_1, s_{\varphi_1} = \sin\varphi_1, \ldots$)

$$Q = \begin{pmatrix} c_{\varphi_1}c_{\varphi_2} - c_\Phi s_{\varphi_1}s_{\varphi_2} & -c_{\varphi_2}s_{\varphi_1} - c_{\varphi_1}c_\Phi s_{\varphi_2} & s_\Phi s_{\varphi_2} \\ c_\Phi c_{\varphi_2}s_{\varphi_1} + c_{\varphi_1}s_{\varphi_2} & c_{\varphi_1}c_\Phi c_{\varphi_2} - s_{\varphi_1}s_{\varphi_2} & -c_{\varphi_2}s_\Phi \\ s_{\varphi_1}s_\Phi & c_{\varphi_1}s_\Phi & c_\Phi \end{pmatrix}.$$

Die Orthonormalbasis für die normierte Voigt-Notation lautet

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{B}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2),$$

$$\boldsymbol{B}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1), \qquad \boldsymbol{B}_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1).$$

Analog lassen sich die Basisvektoren im gedrehten System darstellen, z.B.

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_1 = \tilde{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_1.$$

Die Steifigkeit eines Materials im gedrehten System ist

$$\mathbb{C} = \tilde{C}_{\alpha\beta}\tilde{\boldsymbol{B}}_\alpha \otimes \tilde{\boldsymbol{B}}_\beta,$$

wobei mit $\tilde{C}_{\alpha\beta}$ die Komponenten der Steifigkeitsmatrix (in normierter Voigt-Notation) im Material mit Referenzorientierung bezeichnet werden. Diese entspricht i.A. der Ausrichtung, in der das originale Material getestet wurde. Alternativ lässt sich die Steifigkeit im aktuellen Bezugssystem aber auch als

$$\mathbb{C} = C_{\alpha\beta}\boldsymbol{B}_\alpha \otimes \boldsymbol{B}_\beta$$

darstellen. Es folgt sofort

$$C_{\alpha\beta} = \tilde{C}_{\gamma\delta}(\tilde{\boldsymbol{B}}_\gamma \cdot \boldsymbol{B}_\alpha)(\tilde{\boldsymbol{B}}_\delta \cdot \boldsymbol{B}_\beta).$$

Für eine vereinfachte Darstellung wird zunächst die 6×6-Matrix R mit Komponenten

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{\boldsymbol{B}}_\alpha \cdot \boldsymbol{B}_\beta$$

definiert. Damit lassen sich die Komponenten C_{ij} im aktuellen System darstellen

$$C_{\alpha\beta} = R_{\gamma\alpha}\tilde{C}_{\gamma\delta}R_{\delta\beta}.$$

Schreiben Sie eine Subroutine, die als Eingabeparameter eine Steifigkeitsmatrix in der ABAQUS-Notation und die drei Eulerwinkel besitzt. Als Ausgabe soll die rotierte Steifigkeitsmatrix (in ABAQUS-artiger Notation) zurückgegeben werden. Nutzen Sie die hierzu du Vorlage `RotateStiffness_vorlage`.

Hinweis: Nutzen Sie die Transformationsvorschriften der folgenden Seiten um eine Matrix R_{ABQ} auf R abzuleiten, so dass folgender Zusammenhang gilt

$$C_{\mathrm{ABQ}} = R_{\mathrm{ABQ}}^{\mathsf{T}}\tilde{C}_{\mathrm{ABQ}}R_{\mathrm{ABQ}}.$$

Anhang: Operationen auf Tensoren in verschiedenen Notierungen

Im folgenden gelte für *Tensoren zweiter Stufe*

$$\bullet_\varepsilon \rightarrow \text{ Tensor in Dehnungsartiger Notation (z.B. } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ in ABAQUS),}$$
$$\bullet_\sigma \rightarrow \text{ Tensor in Spannungsartiger Notation (z.B. } \boldsymbol{\sigma} \text{ in ABAQUS),}$$
$$\hat{\bullet} \rightarrow \text{ Tensor in normierter Voigt-Notation.}$$

Tensoren vierter Stufe seien als Matrizen in ABAQUS-Notation (s.o.) angegeben. Das Symbol $\hat{\bullet}$ zeigt bei Tensoren vierter Stufe an, dass der Tensor in der normierten Voigt-Notation angegeben ist. Im Folgenden seien A, B Tensoren in den verschiedenen Vektornotationen, C ein Tensor vierter Stufe (ABAQUS Notation) und $\hat{C}$ sein Pendant in der normierten Voigt-Notation.

Operationen

- Skalarprodukt

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (A_\varepsilon)^\mathsf{T} B_\sigma = (A_\sigma)^\mathsf{T} B_\varepsilon = \left(\hat{A}\right)^\mathsf{T} \hat{B}$$

- Umrechnung (mit: $D_\alpha = \operatorname{diag}(1, 1, 1, \alpha, \alpha, \alpha)$)

$$\begin{aligned} \hat{A} &= D_{\sqrt{2}/2} A_\varepsilon = D_{\sqrt{2}} A_\sigma, \\ A_\varepsilon &= D_2 A_\sigma = D_{\sqrt{2}} \hat{A}, \\ A_\sigma &= D_{1/2} A_\varepsilon = D_{\sqrt{2}/2} \hat{A}, \\ C &= D_{\sqrt{2}/2} \hat{C} D_{\sqrt{2}/2}, \\ \hat{C} &= D_{\sqrt{2}} C D_{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- Eigenwert-Berechnung für Tensoren vierter Stufe:

$$\hat{C}\hat{\varepsilon} = D_{\sqrt{2}} C D_{\sqrt{2}} \hat{\varepsilon} = \lambda \hat{\varepsilon}.$$

Anmerkung: Zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren sollten Sie **immer** die normierte Voigt-Notation verwenden. Es ist ansonsten nicht ohne weiteres möglich aus den berechneten Eigenvektoren die zugehörigen Eigentensoren zu bestimmen, da die Abbildung von einer Basis auf eine andere erfolgt. Die Eigenwert-Berechnung für Tensoren vierter Stufe in ABAQUS-Notation ist zwar grundsätzlich möglich, aber **problematisch und fehlerträchtig**.

Kontakt

Dipl.-Ing. Johannes Ruck johannes.ruck@kit.edu
M.Sc. Hannes Erdle hannes.erdle@kit.edu
Sprechstunde Do. 13:00-14:00 Uhr (Geb. 10.23, Raum 302.3)