Übungsblatt 2
Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1. *Eigenschaften linearer Abbildungen*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie:

- die Determinante $\det(A)$,
- den Rang $\mathrm{rg}(A)$,
- den symmetrischen $\mathrm{sym}(A)$ und schiefsymmetrischen Anteil $\mathrm{skw}(A)$,
- die Spur $\mathrm{tr}(A)$,
- die Eigenwerte λ_i und zugehörigen Eigenvektoren u_i.

(b) Setzen Sie $a_{33} = 10$ und wiederholen Sie die obigen Schritte. Was beobachten Sie?

Aufgabe 2. *Vektor- und Matrixnormen*

(a) Erstellen Sie einen Zufallsvektor $x \in \mathbb{R}^5$. Berechnen Sie die Normen $\|x\|_1$,$\|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$, die wie folgt definiert sind:

$$\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^k \right)^{1/k} \qquad (k < \infty),$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,d} |x_i|.$$

Für die Normberechnung soll eine Funktion geschrieben werden. Halten Sie sich an die Vorlage `VectorNorm_vorlage.m`, die unter ILIAS zur Verfügung gestellt wird. Speichern Sie diese Datei unter dem Namen `VectorNorm.m` in Ihrem Arbeitsverzeichnis, um in Matlab den Befehl `VectorNorm` verwenden zu können.

(b) Die Norm einer Matrix A wird über die Vektornorm $\|\cdot\|$ induziert und ist durch

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\}$$

definiert. Für die Euklid'sche Norm ($\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$) gilt

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|_2\} = \sup \{|\lambda_i|\},$$

wobei λ_i die Eigenwerte von A bezeichnen. Die Konditionszahl κ_k einer Matrix A bezüglich $\|\cdot\|_k$ ist definiert über

$$\kappa_k = \|A\|_k \left\|A^{-1}\right\|_k .$$

Laden Sie die Datei 'matrix.dat' über ILIAS herunter und speichern Sie diese in Ihrem Arbeitsverzeichnis. Die in der Datei gespeicherte Matrix kann mit Hilfe des Kommandos `importdata` eingelesen werden. Ermitteln Sie die Konditionszahl der Matrix bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ mittels des Befehls `cond`.

Aufgabe 3. *Lösung linearer Gleichungssysteme*

(a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 1.2 & 3.4 & -0.1 \\ 0.075 & 1 & 0.39 & \sqrt{3} & 0 \\ 0.6 & \frac{2}{3} & -0.41 & 1 & 1.07 \\ -0.2 & -0.7 & 0.81 & 4 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0.9 \\ 1.42 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

unter Verwendung von Matlab-Befehlen

- durch Matrixinversion,
- über die LU-Zerlegung.

(b) Gegeben sei nun die tridiagonale Matrix T_n ($n \in \mathbb{N}$):

$$T_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Erweitern Sie die Vorlage `Tmatrix_vorlage.m` (ILIAS). Speichern Sie das fertige Programm unter `Tmatrix.m` in Ihrem Arbeitsverzeichnis.

- Berechnen Sie die Konditionszahl κ_2 für $n = 3,\ 10,\ 50,\ 500$. Was folgt daraus bei einer Rechengenauigkeit von $\approx 10^{-16}$ (das entspricht `double`-Precision auf bestimmten Maschinen)?

- Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $T_n x = b$ für beliebige rechte Seite $b \neq 0$ mit Hilfe des Thomas-Algorithmus.

[Testat 1] - Abgabe per Upload auf ILIAS bis zum 09.11.2017

Cholesky-Zerlegung.

Gegeben ist die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 5 & 3 & -1 & 2 \\ & & & 4 & 1.1 & 2.5 \\ & & \text{sym.} & & 2.4 & 1 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A positiv definit ist.

(b) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = y$. Verwenden Sie eine eigene Implementierung der Cholesky-Zerlegung (s. Vorlage).

Wenden Sie Ihre Routine an, um die Choleksy-Zerlegung von A zu berechnen, und lassen Sie die Matrix L ausgeben. Überprüfen Sie die Zerlegung, indem Sie die Frobenius-Norm (`norm(A,'fro')`) des Residuums $R = A - LL^\mathsf{T}$ auswerten und auf der Konsole ausgeben lassen.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = LL^T x = y$$

durch Vorwärts-Rückwärtseinsetzen:

- Bestimmen Sie z, so dass $Lz = y$ gilt. Starten Sie mit $z_1 = y_1/L_{1,1}$ und verwenden Sie die Rekursionsvorschrift $z_{n+1} = (y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} L_{n+1,i} z_i)/L_{n+1,n+1}$.

- Lösen Sie nun auf ähnliche Weise $L^T x = z$ durch Rückwärtseinsetzen (Start mit der Berechnung von x_N, umgekehrte Rekusion).

(d) Testen Sie Ihr Programm mit der rechten Seite $y = (1, -1, 5, 7, 6, -3)^\mathsf{T}$. Berechnen Sie das Residuum $r = Ax - y$, sowie $\|r\|_1$, $\|r\|_2$ und $\|r\|_\infty$.

Kontakt

Dipl.-Ing. Johannes Ruck johannes.ruck@kit.edu
M.Sc. Hannes Erdle hannes.erdle@kit.edu
Sprechstunde Do. 13:00-14:00 Uhr (Geb. 10.23, Raum 302.3)