Übungsblatt 6
Differentialoperatoren
Zweidimensionale Finite Differenzen Methode (FDM)

Hinweis: Verwenden Sie *unbedingt* dünnbesetzte Matrizen, um den Speicherbedarf zu reduzieren und die Rechenzeiten in einem vertretbaren Rahmen zu halten. Beachten Sie, dass die Koordinaten in den Betrachtungen als dimensionslos zu interpretieren sind.

Aufgabe 1. *Räumliche Differentiation (2D)*
In den vorangegangenen Übungen wurde die Ableitung von Funktionen in Abhängigkeit skalarer Variablen numerisch bestimmt. In dieser Übung werden zwei-dimensionale Beispiele zur Berechnung der partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten eingeführt.

Statt eines äquidistanten eindimensionalen Gitters sind wir nun auf eine äquidistante *zweidimensionale* Diskretisierung angewiesen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf ein Quadrat mit Kantenlänge 1.

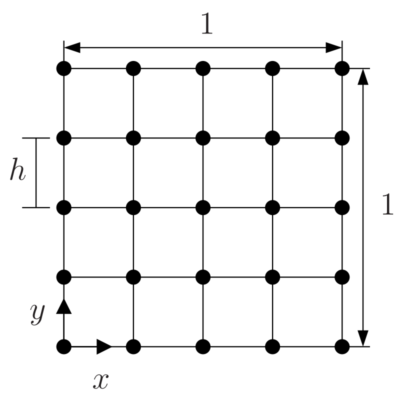

Abb. 1: 2D-Diskretisierung

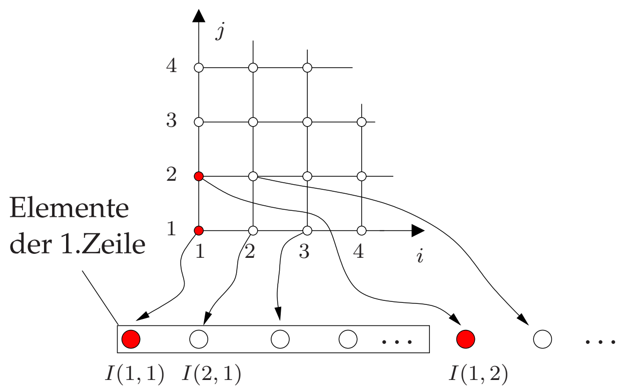

Abb. 2: Hilfestellung zur Indizierung zweidimensionaler Felder als eindimensionale Felder

(a) Erstellen Sie ein uniformes Gitter aus $(N+1)^2$ Punkten. Die x- und y-Koordinaten *aller* Punkte sollen als zwei Vektoren `x`, `y` abgelegt werden. Jedem Knoten des Gitters muss also eindeutig ein Eintrag in einem Vektor zugewiesen werden. Es erfolgt somit eine Umwandlung eines zweidimensionalen Felds in ein eindimensionales Feld. Dies wird erreicht, indem die Indexfunktion $I(i,j)$ eingeführt wird (s. Abb. 2). Mit $h = 1/N$ gilt dann für die Komponenten von `x` und `y`:

$$x_{I(i,j)} = (i-1)h, \qquad y_{I(i,j)} = (j-1)h \qquad (i,j = 1,\dots,N+1).$$

Stellen Sie die Knoten in Matlab grafisch dar. Verwenden Sie als Darstellungssymbol Kreise (s. Matlab-Hilfe).

(b) Berechnen Sie den diskreten Operator (die Matrix `DX`) zur Ableitung einer in Form von diskreten Werten vorliegenden Funktion nach der x-Koordinate. Die Funktionswerte $f(x_i, y_j)$ sollen in einem Vektor `f` an der Position $I(i,j)$ abgelegt sein. Die lineare Abbildung `DX`·`f` soll die Ableitung an den Knoten berechnen und als Ausgabe einen Vektor der Dimension $(N+1)^2$ liefern. Verwenden Sie - soweit möglich - die Mittelpunktregel. Wie lautet die Matrix für $N = 3$ (handschriftlich)? Ermitteln Sie ebenfalls die Matrix `DY`, die zur Ableitung nach der y-Koordinate verwendet werden soll.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von `DX` und `DY` das diskrete Gegenstück `DIFF` zum Differentialoperator

$$\mathrm{diff}\,(f(x,y)) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Visualisieren Sie die Struktur der Matrizen DX, DY und $DIFF$ für $N = 50$.

(d) Wie kann aus den bestehenden Matrizen `DX`, `DY` und `DIFF` der Laplace-Operator $\Delta(\bullet) = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,(\bullet))$ definiert werden? Fügen Sie den Operator zu Ihrem Programm hinzu.

(e) Gegeben sind folgende Funktionen:

- $f_1(x,y) = \exp(-xy)$,
- $f_2(x,y) = \cos(10xy)$.

Stellen Sie die exakte und die numerische Ableitung für die einzelnen Differentialoperatoren jeweils in einem 3D-Plot dar.
Was fällt (insbesondere bei f_2) für den Laplace-Operator auf? Was könnte dieses Verhalten auslösen und welche Schlussfolgerungen ergeben sich daraus für den Lösungsraum?

(f) Berechnen Sie folgende Fehlermaße für $N \in \{5, 10, 20, 40\}$: (h: Gitterweite)

- $E_{\partial_x} = h^2 \sum_{i,j=0}^{N} \left(\partial_x^{\text{exakt}} f(x_i, y_j) - \partial_x^{\text{num}} f(x_i, y_j)\right)^2$,
- $E_{\partial_y} = h^2 \sum_{i,j=0}^{N} \left(\partial_y^{\text{exakt}} f(x_i, y_j) - \partial_y^{\text{num}} f(x_i, y_j)\right)^2$,
- $E_{\text{diff}} = h^2 \sum_{i,j=0}^{N} \left(\text{diff}^{\text{exakt}} f(x_i, y_j) - \text{diff}^{\text{num}} f(x_i, y_j)\right)^2$.

(g) Wir nehmen nun an, dass der Diskretisierungsfehler folgendermaßen charakterisierbar ist:

$$E = ch^m.$$

Weiterhin soll die Konstante c unabhängig von h sein. Für verschiedene Gitterweiten (h_1, h_2) folgt dann für den Quotienten der beiden Fehlermaße:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}.$$

Werten Sie m für die verschiedenen Fehlermaße aus (f) und für $N > 5$ aus. Ist m unabhängig von h? Ist c von der betrachteten Funktion und vom Differentialoperator abhängig?

Kontakt

Dipl.-Ing. Johannes Ruck johannes.ruck@kit.edu
M.Sc. Hannes Erdle hannes.erdle@kit.edu
Sprechstunde Do. 13:00-14:00 Uhr (Geb. 10.23, Raum 302.3)