RUMI ÜB 3

- LU-Zerlegung mit Pivotisierung
- LU-Zerlegung ohne Pivotisierung

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{y} \rightarrow \underbrace{\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{x}}_{\underline{z}} = \underline{y} \qquad \underline{\underline{L}}\,\underline{z} = \underline{y} \qquad \underline{\underline{U}}\,\underline{x} = \underline{z}$

- Vorgehen:
  - 1) Zerlege Matrix $\underline{\underline{A}}$ in $\underline{\underline{L}}$ und $\underline{\underline{U}}$
    - Voraussetzung $\underline{\underline{A}}$ ist regulär $\leftrightarrow \det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Zerlegungsvorschrift

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) \quad j<i$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \geq i$$

$$l_{ii} = 1$$

Pseudo - Code

```
for i=1:N;
  for j=1:N
    if(j<i); lij = ... ;end
    if(j>=i); uij = ... ;end
  end
end
```

- Beispiel

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{L}}, \underline{\underline{U}} \stackrel{?}{=} \quad l_{11} = 1;\ u_{11} = 0;$$

$$l_{12} = \frac{2}{u_{11}} = \frac{2}{0}$$

$\rightarrow$ ungünstiger Diagonaleintrag verhindert Zerlegung

- Lösung: Tauschen von Spalten der Matrix $\underline{\underline{A}}$ mithilfe einer Permutationsmatrix $\underline{\underline{P}}$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{P}} \longleftrightarrow$ Spaltenvertauschung $\quad \underline{\underline{P}} \in \mathrm{Orth} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$

"Algorithmus"

setzte $LU = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}^T;\ \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow LU = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- Die Matrizen $\underline{\underline{L}}$ und $\underline{\underline{U}}$ werden nicht separat gespeichert

$\rightarrow$ Modifizieren der Zerlegungsvorschrift:

$$LU_{ij} = \frac{1}{LU_{jj}} \left(LU_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} LU_{ik} LU_{kj} \right) \quad j < i$$

$$LU_{ij} = LU_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} LU_{ik} LU_{kj} \quad j \geq i$$

$i=1; j=1;$ $u_{11} = 0$, Spaltenpermutation $\frac{\| LU_{ii} \|}{\| \max LU(i,:) \|} < tol$?

$LU_{ii} = 0 \longrightarrow$ Spaltenpermutation $\quad LU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$i=1; j=2;$ $LU_{12} = 0$ $\quad \underline{\underline{LU}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$i=2; j=1;$ $LU_{21} = \frac{1}{2}$ $\quad \underline{\underline{LU}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

$i=2; j=2;$ $LU_{22} = LU_{22} - LU_{21} LU_{12} = 3$ $\quad \underline{\underline{LU}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

$$\underset{\underline{L}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\underline{U}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \underset{\underline{P}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{\underline{LU}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \underset{\underline{P}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pseudo - Code

```
for i = 1: N;
  for j = 1: N
    if(j<i); LUij = ... ; end
    if (j>=i); LUij = ...; end

    " Spaltenvertauschung notwendig? "
  end
end
```

2) Lösen durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen:

· Vorwärtseinsetzen $z_i = \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\, y_j\right) / \frac{1}{L_{ii}}$

$\underline{\underline{L}}\,\underline{z} = \underline{y}$

for $i = 2:N$

$z(i) = (y(i) - l(i,1:i-1) * y(1:i-1)) / L_{ii}$

end

· Rückwärtseinsetzen $v_i = \left(z_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij} v_j\right) / u(i,i)$

$\underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{P}}\,\underline{x}}_{\underline{v}} = \underline{z}$

for $i = N:-1:2$

$v(i) = z(i) - u(i,i+1:N)\, v(i,i+1:N)) / (u(i,i)$

end

$\underline{x} = \underline{\underline{P}}^T \underline{v}$

· Gauss-Seidel-Verfahren, Idee

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{y} \quad \underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}})$

· Für Lösung muss $(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}})$ regulär sein $\rightarrow$ " $\underline{x} = (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}})^{-1} \underline{y}$ "

Diagonaldominanz + Konvergenz

$$
\begin{aligned}
(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{U}})^{-1} &= (\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{L}} + \mathbb{1} + \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{U}}))^{-1} \\
&= (\mathbb{1} + \underbrace{\underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{U}}}_{\underline{\underline{I}}})^{-1}\underline{\underline{D}}^{-1} \\
&= (\mathbb{1} - (-\underline{\underline{I}}))^{-1}\underline{\underline{D}}^{-1} \\
&\approx (\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-\underline{\underline{I}}^k))\,\underline{\underline{D}}^{-1} \qquad \|\underline{\underline{I}}\| < 1
\end{aligned}
$$

$\rightarrow \|\underline{\underline{D}}\| \uparrow$ Konvergenz besser

· Algorithmus (iterativ)

$(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}})\,\underline{x}^{n+1} = \underline{y} - \underline{\underline{U}}\,\underline{x}^n$ (Einfaches Lösen durch Vorwärtseinsetzen) $\Rightarrow$ sehr schnell

· Schritte:

1) Zerlegen von $\underline{\underline{A}}$ in $\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{U}}$ $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$

for $i = 1,n$; for $j = 1,i$; for $i = 1,n$; for $j = i+1:n$:

$(L+D)(i,j) = A_{ij}$ $U(i,j) = A_{ij}$

end; end; end; end;

2) Lösen des LGS $(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}})\,\underline{x}^{n+1} = \underbrace{\underline{y} - \underline{\underline{U}}\,\underline{x}^n}_{\underline{r}}$

· Vorwärtseinsetzen: $x_i^{n+1} = \left(r_i - \sum_{j=1}^{i-1} (L+D)_{ij}\, x_j\right) \frac{1}{(L+D)_{ii}}$

- Vorkonditionierung LGS
  - Iterative Lösungsverfahren stark abhängig von Konditionszahl der Matrix A
    → Vorkonditionieren des LGS über Konditionierungsmatrix $\underline{\underline{C}}$

$$\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{C}}\,\underline{y}$$

  - Im Idealfall ist $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$, in der Praxis ohne großen Aufwand nicht erreichbar → verschiedene Strategien zur Bestimmung von $\underline{\underline{C}}$

- Vorkonditionieren mit Gauß-Seidel:

$$\underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{D}}\right)^{-1}$$