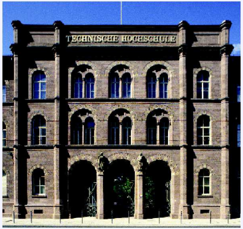
Übung zum Fach Rechnerunterstütze Mechanik I

J. Ruck, H. Erdle, T.-A. Langhoff, T. Böhlke

Chair for Continuum Mechanics
Institute of Engineering Mechanics
Department of Mechanical Engineering
Karlsruhe Institute of Technology (KIT)

WS 2017/2018



Karlsruher Institut für Technologie

Ü6/Ü7: Differentialoperatoren

Themen der 6. und 7. Übung

- Numerisches Differenzieren ortsabhängiger Funktionen (2d): Finite Differenzen Methode (FDM) für die Operatoren

$$\partial_x \bullet,\ \partial_y \bullet,\ \mathrm{grad} \bullet,\ \mathrm{div} \bullet$$

- Lösung der stationären Wärmegleichung mit der FDM
- Darstellung der Lösung

Idee

Taylorreihen-Entwicklung

$$
\begin{aligned}
f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \delta x \partial_x f(x,y) + \delta y \partial_y f(x,y) \\
+ O(\delta x \delta y, \delta x^2, \delta y^2)
\end{aligned}
$$

Im Folgenden gilt $(i, j \in \{1, \dots, N+1\})$

$$
(x_i, y_j) = ((i-1)h, (j-1)h) \qquad \text{(Gitterparameter } h = 1/N)
$$

Eine solche Unterteilung wird als **äquidistantes Gitter** bezeichnet.
Approximation der partiellen Ableitung durch den Differenzenquotienten

$$
\begin{aligned}
& f(x+\delta x, y) = f(x,y) + \delta x \partial_x f(x,y) + O(\delta x^2) \\
\Rightarrow \quad & \partial_x f(x,y) \approx \frac{f(x+\delta x, y) - f(x,y)}{\delta x}, \\
& f(x, y+\delta y) = f(x,y) + \delta y \partial_y f(x,y) + O(\delta y^2) \\
\Rightarrow \quad & \partial_y f(x,y) \approx \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y},
\end{aligned}
$$

Für äquidistante Gitter

Definition $f_{(i,j)} = f(x_i, y_j)$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} \partial_x f_{(i,j)} \\ \partial_y f_{(i,j)} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} f_{(i+1,j)} - f_{(i,j)} \\ f_{(i,j+1)} - f_{(i,j)} \end{pmatrix}$$

Übergang auf vektorwertige Schreibweise $(i, j \in \{1, \ldots, N+1\})$

$$f_{(i,j)} \to \hat{f}_{I_{i,j}}, \quad I_{i,j} = i + (j-1)(N+1), \quad \hat{f} \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$$

Motivation: Übergang auf lineare Gleichungssysteme möglich

Matrizenschreibweise für Differentiation:

$$\left(\partial_x \hat{f}\right)_{I_{i,j}} = \partial_x f(x_i, y_j) = \frac{1}{h}\left(e_{I_{i+1,j}} - e_{I_{i,j}}\right)^{\mathsf{T}} \hat{f},$$

$$\left(\partial_y \hat{f}\right)_{I_{i,j}} = \partial_y f(x_i, y_j) = \partial_y \hat{f} \cdot e_{I_{i,j}} = \frac{1}{h}\left(e_{I_{i,j+1}} - e_{I_{i,j}}\right)^{\mathsf{T}} \hat{f}$$

Darstellung in Matrizenform

Achtung: An den Rändern bei $i, j = 1$ und $i, j = N + 1$ nicht gültig!

Randwerte:

$$\partial_x \hat{f}_{I_{i,j}} = \frac{1}{h} \left(e_{I_{i,j}} - e_{I_{i-1,j}} \right)^{\mathsf{T}} \hat{f} \qquad (i = N + 1),$$

$$\partial_y \hat{f}_{I_{i,j}} = \frac{1}{h} \left(e_{I_{i,j}} - e_{I_{i,j-1}} \right)^{\mathsf{T}} \hat{f} \qquad (j = N + 1)$$

Matrizenschreibweise

$$D_x = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \frac{1}{h} e_{I_{i,j}} \left(e_{I_{i+1,j}} - e_{I_{i,j}} \right)^{\mathsf{T}} \right\} \qquad \text{('innere' Punkte)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N+1} \left\{ \frac{1}{h} e_{I_{N+1,j}} \left(e_{I_{N+1,j}} - e_{I_{N,j}} \right)^{\mathsf{T}} \right\} \qquad \text{(Rand-Punkte),}$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{1}{h} e_{I_{i,j}} \left(e_{I_{i,j+1}} - e_{I_{i,j}} \right)^{\mathsf{T}} \right\} \qquad \text{('innere' Punkte)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \frac{1}{h} e_{I_{i,N+1}} \left(e_{I_{i,N+1}} - e_{I_{i,N}} \right)^{\mathsf{T}} \right\} \qquad \text{(Rand-Punkte)}$$

Beispiel

$N = 2$, $h = 1$: (d.h. 3 Knoten in jeder Koordinatenrichtung, $\Omega = [0,2] \times [0,2]$)

$$D_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_y = \begin{pmatrix} -1 & & & 1 & & & & & \\ & -1 & & & 1 & & & & \\ & & -1 & & & 1 & & & \\ & & & -1 & & & 1 & & \\ & & & & -1 & & & 1 & \\ & & & & & -1 & & & 1 \\ & & & -1 & & & 1 & & \\ & & & & -1 & & & 1 & \\ & & & & & -1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Matrizen sind *nicht* regulär (z.B. 2. & 3. Zeile von D_x)

Rechnerunterstütze Mechanik I

J. Ruck, H. Erdle, T.-A. Langhoff, T. Böhlke

Berechnung weiterer Differentialoperatoren

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(f(x,y)) &= \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) \\
\Rightarrow \quad D_{\nabla\cdot} \hat{f} &= (D_x + D_y)\hat{f}, \\
\operatorname{grad}(f(x,y)) &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y), & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad D_{\nabla} \hat{f} &= \begin{pmatrix} D_x \hat{f}, & D_y \hat{f} \end{pmatrix}, \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(x,y))) &= \partial^2_{x^2} f(x,y) + \partial^2_{y^2} f(x,y) \\
\Rightarrow \quad D_{\nabla\cdot\nabla} \hat{f} &= (D_x D_x + D_y D_y)\hat{f}
\end{aligned}
$$

Verbesserung der Konsistenzordnung

Analog zum 1d Fall (4. Übung): Anwendung der Mittelpunktregel mit

$$I_{i,j} = i + (j-1)(N+1) \qquad (i,j = 1,\dots,N+1)$$

ergibt:

$$\partial_x \hat{f}_{I_{i,j}} = \frac{\hat{f}_{I_{i+1,j}} - \hat{f}_{I_{i-1,j}}}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

$$\partial_y \hat{f}_{i,j} = \frac{\hat{f}_{I_{i,j+1}} - \hat{f}_{I_{i,j-1}}}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$

Aufgabe: Implementierung in Matrizenform

Achtung: Mittelpunktregel am Rand nicht möglich (vgl. 1d)

Rechnerunterstütze Mechanik I

J. Ruck, H. Erdle, T.-A. Langhoff, T. Böhlke

Lösung der Wärmegleichung

Wärmegleichung

(E: innere Energie, $\boldsymbol{v}$: Geschwindigkeitsfeld,
p, s: Produktions-/Zufuhrterm, κ: Wärmeleitkoeffizitenz)

$$\dot{E} + \operatorname{div}(E\boldsymbol{v}) = p + s + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}) = p + s - \kappa \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\theta))$$

Annahmen: $p = s = 0, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, E = \varrho c\theta, \dot{\varrho} = \dot{c} = 0$

$$\varrho c\dot{\theta} = -\kappa \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\theta)) = -\kappa\Delta\theta$$

Stationärer Zustand $\rightarrow \dot{\theta} = 0$

$$\Delta\theta = 0 \qquad \text{(Poisson-Problem)}$$

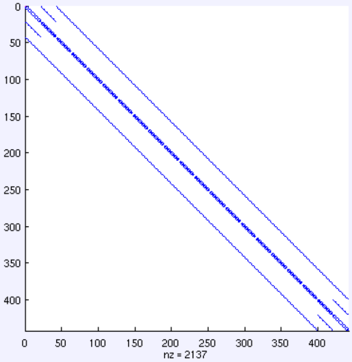
Randbedingungen

$$\theta = \theta_0(x) = a(\sin(\omega x) + \sin(\omega y)) \qquad (\omega > 0, x \in \partial\Omega)$$

Ergebnisse

Eigenschaften der Systemmatrizen

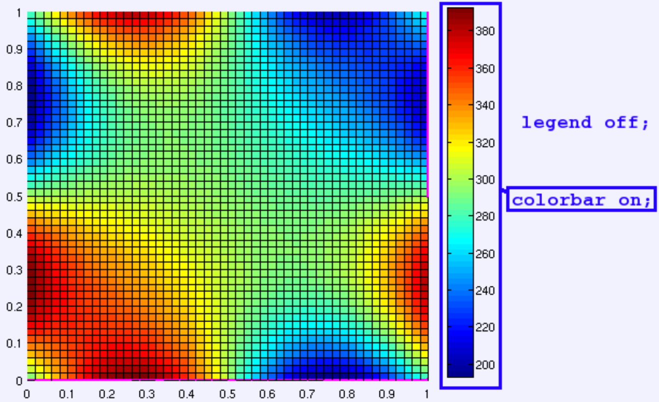
- Ohne Randbedinungen: `LAPLACE` ist nicht symmetrisch
- Nach Einbindung der Randdaten: `LMOD` ist spd



Ergebnisse

Eigenschaften der Systemmatrizen

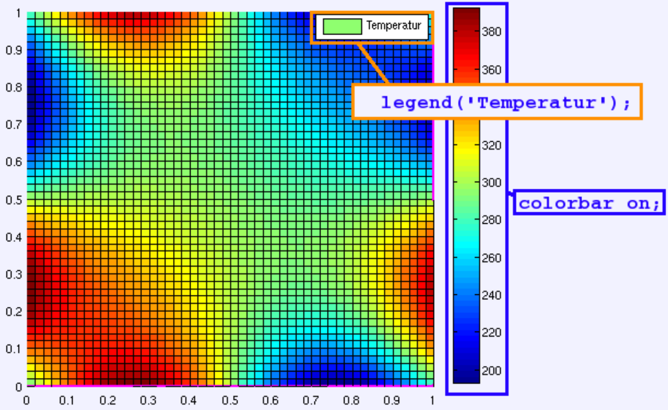
- Ohne Randbedinungen: `LAPLACE` ist nicht symmetrisch
- Nach Einbindung der Randdaten: `LMOD` ist spd



Ergebnisse

Eigenschaften der Systemmatrizen

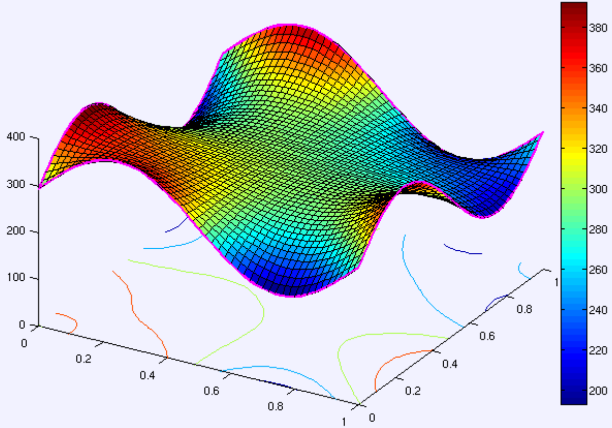
- Ohne Randbedinungen: `LAPLACE` ist nicht symmetrisch
- Nach Einbindung der Randdaten: `LMOD` ist spd



Ergebnisse

Eigenschaften der Systemmatrizen

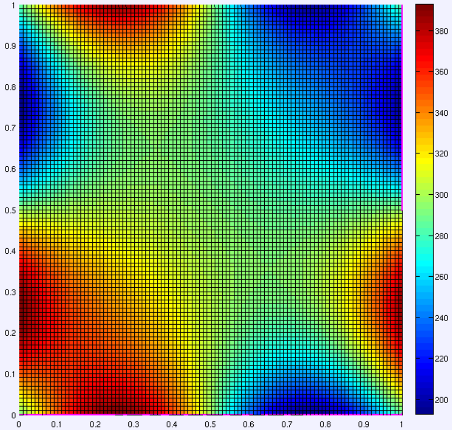
- Ohne Randbedinungen: `LAPLACE` ist nicht symmetrisch
- Nach Einbindung der Randdaten: `LMOD` ist spd



Ergebnisse

Eigenschaften der Systemmatrizen

- Ohne Randbedinungen: `LAPLACE` ist nicht symmetrisch
- Nach Einbindung der Randdaten: `LMOD` ist spd



Ausblick

[Ü7] Vektor-Matrix-Notationen für symmetrische Tensoren:
- Hooke'sches Gesetz in Vektor-Matrixform
- Eigenwerte und Eigenprojektoren von Tensoren 4.Stufe
- Rotation des Elastizitätstensors

[Ü8] Numerische Integration:
- Newton-Cotes-Quadratur
- Gauss-Christoffel-Quadratur [Testat 2]

[Ü9] Ansatzfunktionen für Finite Elemente:
- Lineare und quadratische Ansatzfunktionen (1d)
- Schwache Formulierung des elastischen Randwertproblems

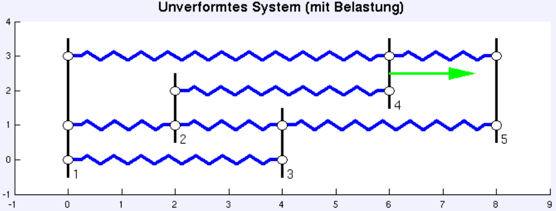
[Ü10] Matrix-Verschiebungsmethode (1d Feder-Systeme)

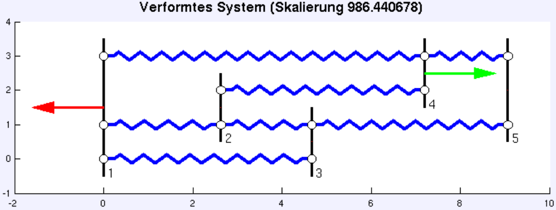
[Ü11] Matrix-Verschiebungsmethode (2d Stabwerke)

[Ü12] Finite Elemente 1d (lineare Ansatzfunktionen) [Testat 3]

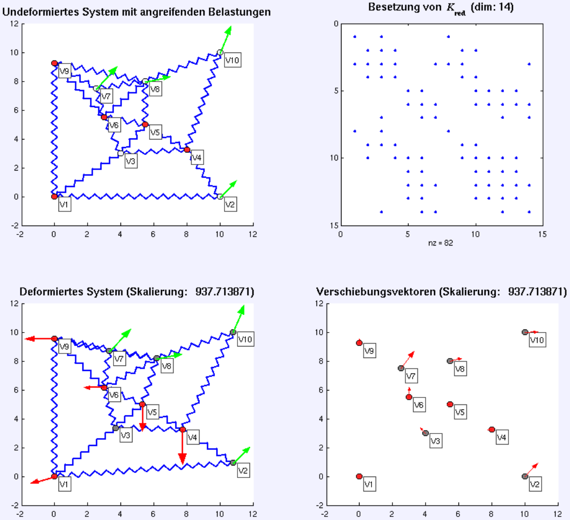
[Ü13] Finite Elemente 1d (quadratische Ansatzfunktionen)

'Teaser'


Unverformtes System (mit Belastung)
1
2
3
4
5


Verformtes System (Skalierung 986.440678)
1
2
3
4
5

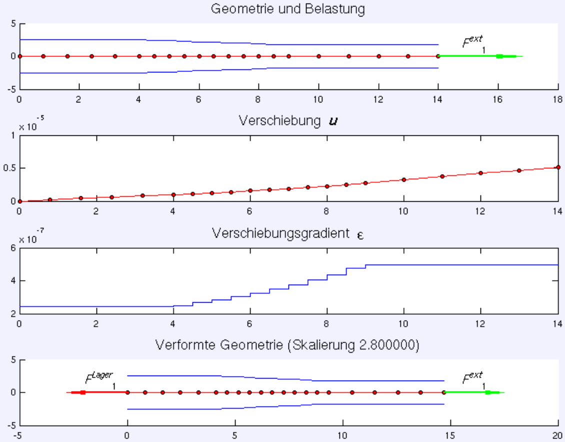
'Teaser'


Undeformiertes System mit angreifenden Belastungen
V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9
V10
Besetzung von K_{red} (dim: 14)
nz = 82
Deformiertes System (Skalierung: 937.713871)
Verschiebungsvektoren (Skalierung: 937.713871)

Rechnerunterstütze Mechanik I

J. Ruck, H. Erdle, T.-A. Langhoff, T. Böhlke

'Teaser'



Rechnerunterstütze Mechanik I

J. Ruck, H. Erdle, T.-A. Langhoff, T. Böhlke

'Teaser'