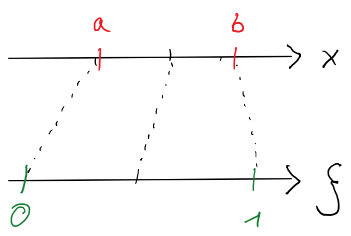
allgemeine Problemstellung: Berechnung des Integrals $I = f(x)\,dx$

Ansatz:

- Überführung des Intervalls (a, b) auf Referenzintervall $(0, 1)$



$x(\xi) = (a+b) + (b-a)\,\xi$

$\hookrightarrow x(-1) = a \;, \quad x(1) = b \;, \quad x(\tfrac{1}{2}) = \frac{a+b}{2}$

$\frac{dx}{d\xi} = (b-a)$

$$\Rightarrow \quad I = f(x)\,dx = (b-a) \quad f(x(\xi))\,d\xi$$

- Interpolationspolynom $P(\xi) \approx f(x(\xi))$

Stützstellen

$N+1$ Stützstellen $\Rightarrow P(\xi) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i p_i(\xi) \;; \quad p_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$

Lagrangesche Interpolationspolynom

$$\Rightarrow P(\xi_j) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i p_i(\xi_j) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j \overset{!}{=} \underbrace{f(x(\xi_j))}_{\hat{f}_j}$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \sum_{i=0}^{N} \hat{f}_i \underbrace{\int_0^1 \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}\, d\xi}_{:= \lambda_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = (b-a) \sum_{i=0}^{N} \hat{f}_i \lambda_i}$$

Quadraturverfahren durch Stützstellen ξ_i und Gewichte λ_i eindeutig bestimmt.

$\boxed{\text{Mit } N+1 \text{ Stützstellen wird Polynom von Grad } N \text{ exakt integriert.}}$

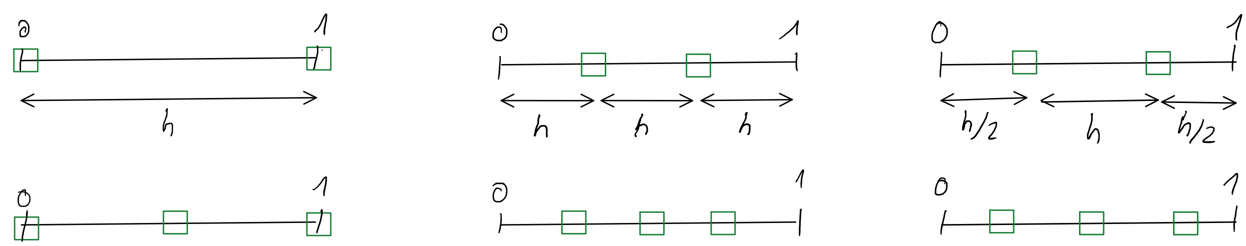
Newton-Cotes-Quadratur

Idee:
- Wahl von äquidistanten Stützstellen ξ_i
- Gewichte über Lagrange Interpolationspolynome $\lambda_i = \int_0^1 p_i(\xi)\, d\xi$

geschlossener Typ | offener Typ | Maclaurin

$N = 1$

$N = 2$



$h = \frac{1}{N} \rightsquigarrow \xi_i = \frac{i}{N}$ | $h = \frac{1}{N+2} \rightsquigarrow \xi_i = \frac{i+1}{N+2}$ | $h = \frac{1}{N+1} \rightsquigarrow \xi_i = \frac{i + 1/2}{N+1}$

Gauß-Quadratur

Idee: Optimalität der Polynomordnung $\Rightarrow$ Polynom von Grad $2N+1$ exakt integrierbar

$\Rightarrow$ Stützstellen ergeben sich als Nullstellen der Legendre Polynome

$$L_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - x)^n$$

Orthogonalität auf Intervall $[0,1] \Rightarrow \int_0^1 L_i(x) L_j(x)\, dx = \delta_{ij}$

- Berechnung über Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren
- Gewichte analog zu NC über Lagrange-Interpolationspolynome

⊕ optimale Integrationsordnung
⊕ Gewichte immer positiv
⊕ Stützstellen im Innern des Intervalls

Beispielhaft: erste drei Legendre Polynome in Maple

```
> b1 := unapply((sqrt(2*1+1)/(1!))*diff((x^2-x)^1,x),x);
  b2 := unapply((sqrt(2*2+1)/(2!))*diff(diff((x^2-x)^2,x),x),x);
  b3 := unapply((sqrt(2*3+1)/(3!))*diff(diff(diff((x^2-x)^3,x),x),x),x);
```

$$b1 := x \to \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$b2 := x \to \frac{1}{2}\sqrt{5}\left(2\,(2x-1)^2 + 4x^2 - 4x\right)$$

$$b3 := x \to \frac{1}{6}\sqrt{7}\left(6\,(2x-1)^3 + 36\left(x^2-x\right)(2x-1)\right)$$

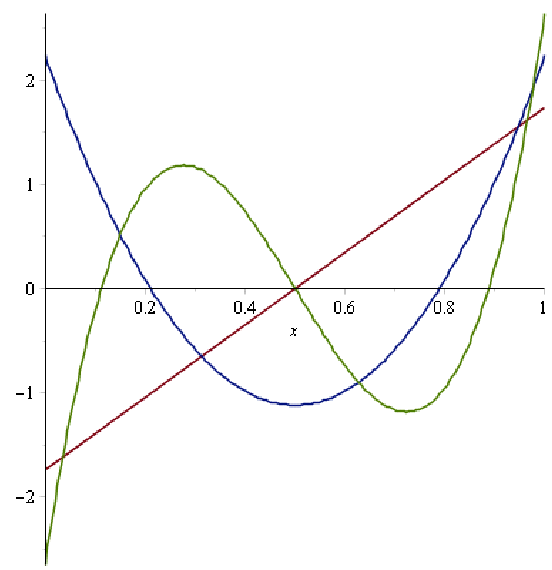
```
> int(b1(x)*b2(x),x=0..1); int(b1(x)*b3(x),x=0..1); int(b2(x)*b3(x),x=0..1);
```

$$0$$
$$0$$
$$0$$

```
> int(b1(x)*b1(x),x=0..1); int(b2(x)*b2(x),x=0..1); int(b3(x)*b3(x),x=0..1);
```

$$1$$
$$1$$
$$1$$

```
> plot([b1(x),b2(x),b3(x)],x=0..1);
```




```
> s[1] = solve(b1(x)=0,x); s[2] = solve(b2(x)=0,x); s[3] = solve(b3(x)=0,x);
```

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$$

$$s_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{15}, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{15}\right)$$

```
>
```