Zusatzblatt zur 2. Übung
Das Cholesky-Verfahren

Das Cholesky-Verfahren ist eine Methode zur Faktorisierung einer *symmetrisch positiv definiten Matrix* A in eine unter Dreiecksmatrix L. Es gilt dann

$$A = LL^{\mathsf{T}}.$$

Das Verfahren hat folgende Eigenschaften:

- Gegenüber der LU-Zerlegung für unsymmetrische Matrizen entsteht etwa der halbe Rechenaufwand.
- Der Speicherplatzbedarf ist geringer als bei der LU-Faktorisierung (wegen $U = L^{\mathsf{T}}$).
- Der Rechenaufwand für das Verfahren ist unabhängig von der Kondition der Matrix. Die Kondition ist ein entscheidender Einflussfaktor für alle iterativen Gleichungslöser.
- Das Cholesky-Verfahren kann (in modifizerter Form) verwendet werden, um iterative Gleichungslöser effizienter zu gestalten (Stichwort Vorkonditionierung).
- Ist die Faktorisierung einmal berechnet, so kann die Lösung des Gleichungssystems

  $$Ax = y$$

  durch Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bestimmt werden:

  – Löse zunächst $Lz = y$ mit einem temporären Lösungsvektor z durch Vörwärtseinsetzen. Dazu berechnet man $z_1 = y_1/L_{11}$ und dann durch Rekursion alle fehlenden Komponenten über

  $$z_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} z_j \right).$$

  – Anschließend löst man das Gleichungssystem $L^{\mathsf{T}} x = z$ durch Rückwärtseinsetzen. Hier startet man mit $x_N = z_N/L_{NN}$ und berechnet durch Rekursion

  $$x_i = \frac{1}{L_{ii}} \left(z_i - \sum_{j=i+1}^{N} L_{ji} x_j \right).$$

  Das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen kommt mit wenigen Rechenoperationen aus. Dadurch entsteht (fast) kein zusätzlicher Rechenaufwand, wenn mehrere rechte Seiten berücksichtigt werden sollen, da die Faktorisierung nur einmal berechnet werden muss.

Die Komponenten der Matrix L werden mit dem folgenden Algorithmus berechnet:

$i = 1, \ldots, N:$

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$$

$j = i + 1, \ldots, N:$

$$L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}} \left(A_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} L_{ik} \right)$$

Kontakt

Dipl.-Ing. Johannes Ruck johannes.ruck@kit.edu
M.Sc. Hannes Erdle hannes.erdle@kit.edu
Sprechstunde Do. 13:00-14:00 Uhr (Geb. 10.23, Raum 302.3)