RUMI ÜBB2

10:20

- Cholesky Zerlegung:

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{L}^T$$

$$x \mathbb{A} x = x \cdot \mathbb{L}\mathbb{L}^T x = (\mathbb{L}^T x)^T (\mathbb{L}^T x) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{A} \text{ muss p.d. sein}$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{L}^T \Rightarrow A_{ij} = L_{ik}L_{jk} \qquad \mathbb{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = L_{1k}L_{1k} = L_{11}L_{11} + L_{12}L_{12} + L_{13}L_{13}$$

$$\Rightarrow L_{11} = \sqrt{A_{11}}$$

$$A_{22} = L_{21}L_{21} + L_{22}L_{22} + L_{23}L_{23} = L_{21}L_{21} + L_{22}L_{22}$$

$$\Rightarrow L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{21}L_{21}}$$

$$A_{12} = L_{1k}L_{2k} = L_{11}L_{21} + L_{12}L_{22} + L_{13}L_{23}$$

$$\Rightarrow L_{21} = \frac{A_{12}}{L_{11}}$$

$$A_{32} = L_{3k}L_{2k} = L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} + L_{33}L_{23} = L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22}$$

$$\Rightarrow L_{32} = \frac{1}{L_{22}}(A_{32} - L_{31}L_{21}) \Rightarrow L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}}\left(A_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}L_{jk}\right)$$

- Lösen Gleichungssystem:

$$\mathbb{A}x = y \qquad \mathbb{L}\mathbb{L}^T x = y \Rightarrow \mathbb{L}z = y \Rightarrow L_{ij}z_j = y_i$$

$$\Rightarrow L_{11}z_1 = y_1 \Rightarrow z_1$$

$$L_{21}z_1 + L_{22}z_2 = y_2 \Rightarrow z_2$$

$$L_{31}z_1 + L_{32}z_2 + L_{33}z_3 = y_3 \Rightarrow z_i = \left(y_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}z_k\right)\frac{1}{L_{ii}}$$

$$\mathbb{L}^T x = z \Rightarrow L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 = z_1 \Rightarrow x_i = \left(z_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}x_k\right)$$

$$L_{21}x_1 + L_{22}x_2 = z_2$$

$$L_{31}x_1 = z_3$$

Thomas Algorithmus

- Motivation: Problemstellung mit dünnbesetzter tridiagonaler Matrix $\underline{T}^{n \times n}$ (eindimensionale Poissons-Gleichung, Spline Interpolation)

$$- \ \underline{T} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdot & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} i=1 \\ 1<i<n \\ i=n \end{array}$$

- Zu lösendes LGS

$$\underline{T}\,\underline{x} = \underline{r}$$

- Idee:

LU-Zerlegung der Matrix $\underline{T}$

$$\underline{T}\underline{x} = \underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x} = \underline{r}$$

- Beispiel für $n=3$, Standard LU-Zerlegung
- Normale LU-Zerlegung benötigt Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen sowie Berechnen von $\underline{L}$ und $\underline{U}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}}_{\underline{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}}_{\underline{r}} \quad \text{in} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}}_{\underline{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{U}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}}_{\underline{r}}$$

1

- Schritt 1) berechne $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{U}}$

Über Koeffizientenvergleich von $\underline{\underline{LU}}$ mit $\underline{\underline{T}}$ folgt:

$$\underline{\underline{LU}} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_1 & 0 \\ l_{12} & l_{12}u_1 + l_{22} & l_{22}u_2 \\ 0 & l_{23}u_1 + l_{23} & l_{33}u_2 \end{pmatrix} \quad l_{11} = b_1 \quad l_{12} = a_2 \quad l_{22} = b_2 - a_2\frac{c_1}{b_1} \quad u_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad u_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2\frac{c_1}{b_1}}$$

- Schritt 2) Löse $\underline{\underline{L}}\,\underline{p} = \underline{r}$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \underline{\underline{L}}\,\underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{x}}_{} = \underline{r} \rightarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{p} = \underline{r}$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad p_1 = \frac{r_1}{l_{11}} \quad p_2 = \frac{r_2 - l_{12}p_1}{l_{22}} = \frac{r_2 - a_2 p_1}{b_2 - a_2\frac{c_1}{b_1}} \quad \ldots$$

- Schritt 3) Löse $\underline{\underline{U}}\,\underline{x} = \underline{p}$ $\rightarrow$ $\underline{x}$ .....

- Idee Thomas-Algorithmus: Bringe $\underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \underline{r}$ in Form $\underline{\underline{U}}\,\underline{x} = \underline{p}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}}_{\underline{r}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

- Teile 1. Zeile von $\underline{\underline{T}}$ durch b_1

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{c_1}{b_1} & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{b_1} \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad u_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad p_1 = \frac{r_1}{b_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & b_2 - a_2 u_1 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ r_2 - a_2 p_1 \\ r_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c_2}{b_2 - a_2 u_1} \\ 0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \frac{r_2 - a_2 p_1}{b_2 - a_2 u_1} \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Aufgrund der tridiagonalen Struktur von T kann die Faktorisierung in L und das Vorwärtseinsetzen in einem Schritt durchgeführt werden

Schema für tridiagonale Matrix mit Dimension n

$\Rightarrow$ Zeile 1, $i=1$, $b_1 x_1 + c_1 x_2 = r_1 \;|:b_1$ $\longrightarrow$ $x_1 + \underbrace{\frac{c_1}{b_1}}_{u_1} x_2 = \underbrace{\frac{r_1}{b_1}}_{p_1}$

$$\begin{array}{c} i=1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \\ i=2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_i & b_i & c_i & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

- Zeile 2, $i=2$:

$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = r_2$ (I) $\qquad a_2 (x_1 + u_1 x_2) = a_2 p_2$ (II)

I − II

$$(b_2 - a_2 u_1) x_2 + c_2 x_3 = r_2 - a_2 p_1 \quad \Big| \; : (b_2 - a_2 u_1)$$

$$\to \quad x_2 + \underbrace{\frac{c_2}{b_2 - a_2 u_1}}_{u_2} x_3 = \frac{r_2 - a_2 p_1}{b_2 - a_2 u_1} := p_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_i & b_i & c_i & & 0 \\ 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \vdots & & \cdot & & \cdot & \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

- Wiederhole diesen Schritt für jede i-te Zeile bis $i = n-1$
- keine Summation über i !!!

$$u_i = \frac{c_i}{b_i - a_i u_{i-1}} \qquad p_i = \frac{r_i - a_i p_{i-1}}{b_i - a_i u_{i-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & 0 & & & \\ & & 1 & u_i & & & \\ & 0 & & 1 & \ddots & & \\ & & & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}$$

- Letzte Zeile für $i = n$ (eliminiere Term x_{n-1})

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = r_n \quad \text{I} \qquad\qquad a_n (x_{n-1} + u_{n-1} x_n) = a_n p_{n-1} \quad \text{II}$$

$$\text{I} - \text{II} \Rightarrow (b_n + a_n u_{n-1}) x_n = r_n - a_n p_{n-1} \quad \Rightarrow \quad x_n = \underbrace{\frac{r_n - a_n p_{n-1}}{(b_n + a_n u_{n-1})}}_{p_n}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & 0 & & & \\ & & 1 & u_i & & & \\ & 0 & & 1 & \ddots & & \\ & & & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{U}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{U}\, \underline{x} = \underline{p}$

- Zusammenfassen der Operationen zur Bestimmung von $\underline{U}$ und $\underline{p}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_1 = \dfrac{c_1}{b_1} & p_1 = \dfrac{r_1}{b_1} \\[2ex] u_i = \dfrac{c_i}{(b_i - a_i u_{i-1})} & p_i = \dfrac{r_i - a_i p_{i-1}}{(b_i - a_i u_{i-1})} \\[2ex] & p_n = \dfrac{r_n - a_n p_{n-1}}{b_n + a_n u_{n-1}} \end{array}}$$

- Schritt 2: Lösen von $\underline{U}\, \underline{x} = \underline{p}$ nach x_i durch Rückwärtseinsetzen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{für } i = n & x_n = p_n \\ \text{für } 1 < i < n & x_i = p_i - u_i x_{i+1} \\ \text{für } i = 1 & x_1 = p_1 - u_1 x_2 \end{array}}$$

- Anmerkung zur Matlab-Implementierung

- In die Funktion $\underline{x}$ = ThomasAlgorithmus($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$) wird nicht die komplette Matrix $\underline{\underline{T}}$ sondern die Diagonaleinträge $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots a_n)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$ und $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots c_n)$ als Vektoren übergeben. $\underline{b}$ ist hierbei der Vektor der Diagonaleinträge der Matrix, $\underline{a}$ beinhaltet die linken, unteren und $\underline{c}$ die rechten, oberen Diagonaleinträge. $\underline{d}$ ist der Vektor der rechten Seite des LGS.

- Induzierte Matrixnorm

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_V}{\|\underline{x}\|_V} = \sup_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_V$$ ⇒ größtmöglich Streckung bei Abbildung auf Einheitsvektor

$$\underline{\underline{B}} = \lambda_i \underline{n}_i \underline{n}_i^T \quad \in \text{sym}, \lambda_i \geq 0$$

- Spektralnorm / 2-Norm

$$\|\underline{\underline{A}}\|_2 = \sup_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|_2 = \sup_{\|\underline{x}\|=1} (\underline{\underline{A}}\underline{x} \cdot \underline{\underline{A}}\underline{x}) = \sup_{\|\underline{x}\|=1} (\underline{x} \cdot \underbrace{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{B}}}\, \underline{x}) = \sup_{\|\underline{x}\|=1} (\underline{x} \cdot \underline{\underline{B}}\, \underline{x}) \geq 0$$

$$= \sup_{\|\underline{x}\|=1} (\underline{x} \cdot \underline{n}_i\, \underline{n}_i^T \underline{x}\, \lambda_i)^{1/2} \leq \sqrt{\lambda_{max}}$$

- Konditionszahl: $\frac{\|\underline{\underline{A}}\|_k}{\|\underline{\underline{A}}^{-1}\|_k}$ z.B. für die Spektralnorm folgt $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

  - Einfluss von Störung auf Ergebnis der Berechnung ⇒ große Konditionszahlen vermeiden ⇒ Vorkonditionierung des Gleichungssystems