HOOFDSTUK 2

LOGIC, SWITCHES AND GATES

Logica, of toch een poging tot logica, is iets wat de mensheid al eeuwen probeert te gebruiken om bepaalde zaken te verklaren of te begrijpen. Dit gaat zover terug in de mensheid dat zelfs Aristoteles gebruik probeerde te maken van logica om het begrip ”waarheid” te verklaren. Hiervoor maakte hij gebruik van syllogisme. In syllogisme worden er twee premissen gebruikt waarvan men uitgaat dat deze juist zijn en van deze twee premissen wordt er een conclusie afgeleid:

```
Alle mensen zijn stervelingen
Ik ben een mens

Dus, ik ben een sterveling
```

Hoewel bovenstaand voorbeeld redelijk gemakkelijk is en niet echt betwistbaar, zijn er nog veel andere voorbeelden die veel moeilijker zijn en daardoor een conclusie geven die niet altijd duidelijk is.

Voor meer dan tweeduizend jaar hebben wiskundigen geprobeerd om de logica van Aristoteles om te zetten naar wiskundige formules door enkel gebruik te maken van de basissymbolen en operatoren. Niemand slaagde hier echter in tot George Boole hierin een duidelijke doorbraak had gemaakt, hetgeen uiteindelijk heeft geleid tot de Booleaanse algebra.

Deze vorm van algebra lijkt sterk op de gewone algebra. Zo wordt er onder andere ook gebruik gemaakt van operatoren (+ en -) en operanden onder de vorm van letters . Daarnaast gebruikt men bij Booleaans algebra ook dezelfde regels:

- Optellen en aftreken zijn commutatief (aan beide kanten van de bewerking mogen de symbolen omgewisseld worden).

$$A + B = B + A$$

$$A \times B = B \times A$$

- Optellen en vermenigvuldigen zijn associatief

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

- Vermenigvuldigen is distributief over optellen

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

Het grootte verschil met de gewone algebra die wij kennen, is dat deze altijd gebruik maakt van getallen. Boole daarentegen heeft algebra abstracter gemaakt door geen gebruik meer te maken van getallen, maar van 'classes' hetgeen niet meer is dan een verzameling van elementen/eigenschappen.

Om dit te verduidelijken, kijken we even naar volgend voorbeeld.

Katten kunnen zowel vrouwelijk als mannelijk zijn. Om het gemakkelijk te houden zullen we de klasse van katers voorstellen als een M en de vrouwelijke katten als een V. Verder kunnen we ook nog klassen maken over de kleur van de katten. Zo zouden we de klasse G kunnen maken voor gekleurde katten, Z voor zwarte katten, W voor witte katten en A voor andere kleuren (dus eigenlijk alle katten die niet in G, Z of W zitten). Als laatste kunnen we ook nog klassen maken over al dan niet gecastreerd te zijn. Daar nemen C als de klassen voor gecastreerde katten en N voor niet gecastreerde katten.

Voor we met deze klassen kunnen gaan werken in de booleaanse algebra, is het noodzakelijk om de operatoren te verduidelijk. Net zoals bij de gewone algebra, maakt de booleaanse algebra gebruik van $+$ en $\times$. Deze hebben echter een andere betekenis.

Het $+$ symbool in de booleaanse algebra betekent een verzameling van twee klassen. Een verzameling van twee klassen wil zeggen: alles van de eerste gecombineerd met alles van de twee klasse. Vb: $Z + W =$ de klasse van alle katten die zwart zijn OF wit.

Het $\times$ symbool betekent de doorsnede van beide klassen. Hiermee bedoelen we alles wat zowel in de eerste klasse EN de tweede klasse. Vb: $V \times G =$ de klasse van alle vrouwelijke gekleurde katten.

Als laatste zijn er nog twee symbolen waarvan we eerst de betekenis moeten kennen: 1 en 0. 1 betekent in de booleaanse algebra 'het universum', alles waar we over bezig zijn. Vb, 1 betekent de klasse van alle katten: $M + V = 1$. 1 kan ook gebruikt worden in combinatie met $-$. Dit om aan te geven dat we iets uitsluiten uit het universum. Vb, $1 - M$ is de klasse van alle katten uitgezonderd mannelijke katten. Daarnaast maken we ook nog gebruik van het symbool 0. Dit wil zeggen: een lege klasse.

Met al deze klassen, symbolen en operators, zijn we nu in staat om aan de hand van booleaanse algebra na te gaan of iets voldoet aan bepaalde criteria. Zo zouden we bijvoorbeeld naar een dierenwinkel kunnen stappen en daar vragen naar een kat die ofwel gecastreerd, wit of gekleurd is; ofwel vrouwelijk, gecastreerd en eender welke kleur buiten wit is; ofwel een zwarte kat. Dit zouden we dan in volgende formule kunnen gieten:

$$(M \times G \times (W + G)) + (V \times G \times (1 - W)) + Z$$

Deze formule zouden we ook in een meer verstaanbare taal kunnen omschrijven door de operatoren te vervangen:

- Het $+$ teken kunnen we vervangen door OR.
- Het $\times$ teken kunnen we vervangen door AND
- Het $1-$ kunnen we vervagen door NOT

Gebruikmakend van deze termen, kunnen we de formule ook zo noteren:

$$(M \text{ AND } G \text{ AND } (W \text{ OR } G)) \text{ OR } (V \text{ AND } G \text{ AND } (\text{NOT } W)) \text{ OR } Z$$

Met deze formule kunnen we dan een Boolenaanse test kunnen uitvoeren. Hierbij worden de letters vervangen door 0 of 1, waarbij 1 wil zeggen dat het bepaald criteria waar is en 0 wil zeggen dat een bepaald criteria niet waar is. De uitkomst kan ook alleen maar een 0 of een 1 zijn. Vb als we een niet-gecastreerde, gekleurde kater zien en deze waarde in de formule gieten krijgen we volgende vereenvoudigde formule

$$(1 \times 0 \times (0 + 1)) + (0 \times 0 \times (1 - 0)) + 0$$

We kunnen dit puur wiskundig gaan benaderen (en hoewel we hetzelfde resultaat zouden bekomen), maar volgens de booleaanse algebra moeten we hier een andere aanpak volgen. Hierbij moeten we de waarheidstabellen gebruiken van AND en OR

AND	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabel 2.1: Waarheidstabel AND

OR	0	1
0	0	1
1	1	1

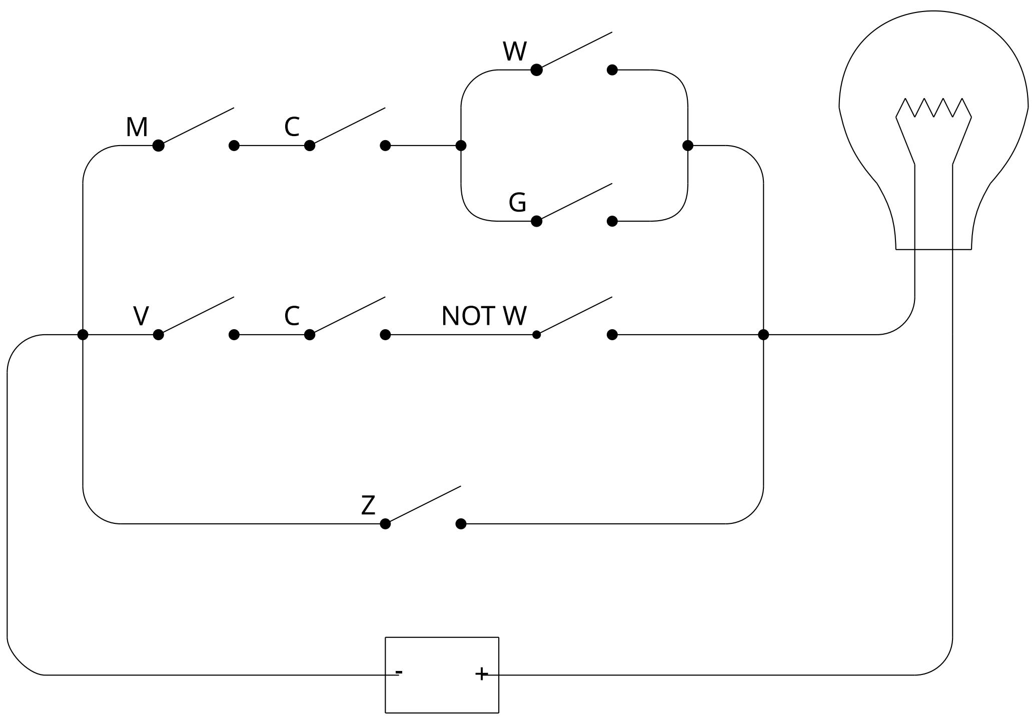
Tabel 2.2: Waarheidstabel OR

Gebruikmakend van deze tabellen kunnen we de Booleaanse test vereenvoudigen tot we een antwoord vinden op onze test:

$$\begin{aligned} x &= (1 \times 0 \times (0+1)) + (0 \times 0 \times (1-0)) + 0 \\ &= (1 \times 0 \times 1) + (0 \times 0 \times 1) + 0 \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hiermee is ook aan de hand van de booleaanse test duidelijk gemaakt dat de kat niet voldoet aan de voorwaarden die we voorop hadden gesteld.

Zulke formules kunnen al snel verwarrend worden, zeker wanneer deze formules al wat complexer beginnen worden (hoe meer klassen waar we rekening mee moeten houden, hoe groter en complexer de formule wordt). Nochtans is er een mogelijkheid om deze formule op een visuele manier voor te stellen waarin meteen duidelijk wordt wanneer deze booleaanse test al dan niet waar zal zijn. Daarvoor maken we gebruik van elektrische schakelingen. Hierbij maken we ondersheid tussen een seriële schakeling en een parallelle schakeling. Bij een seriële schakeling moeten beide schakelaars ingedrukt worden om de stroom door te laten. Bij een parallelle schakeling daarentegen volstaat het dat 1 van de schakelaars ingedrukt worden om de stroom door te laten. Met deze twee schakelingen kunnen we een AND (seriële schakeling) en een OR (parallelle schakeling) voorstellen. Met deze twee schakelingen kunnen we bovenstaande formule op deze manier voorstellen:



Op het eerste vlak lijkt het alsof dit maar weinig met computersystemen of informatica te maken heeft, maar niets is minder waar. Computersystemen zijn immers opgebouwd rond het slim gebruik van deze logische vergelijkingen onder de vorm van logische gates (transistoren). Deze hebben twee of meer waarden als input en geven hierdoor een output. Twee van deze gates hebben we al leren kennen namelijk AND, OR en NOT. Naast deze drie gates, zijn er nog twee andere gates die heel vaak gebruikt worden binnen computersystemen: NAND en XOR. Voorlopig volstaat het om enkel de waarheidstabel van deze gates te kennen, waardoor je ze ook zou kunnen gebruiken.

NAND	0	1
0	1	1
1	1	0

Tabel 2.3: Waarheidstabel NAND

XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 2.4: Waarheidstabel XOR