



Computer Systems

Logica en Gates

Logica

- Sinds ontstaan mensheid
- Aristoteles (384 – 322 v.Chr) probeerde “waarheid” te verklaren met logica.
 - Syllogisme:

“Alle mensen zijn stervelingen
Ik ben een mens

Dus, ik ben starveling”



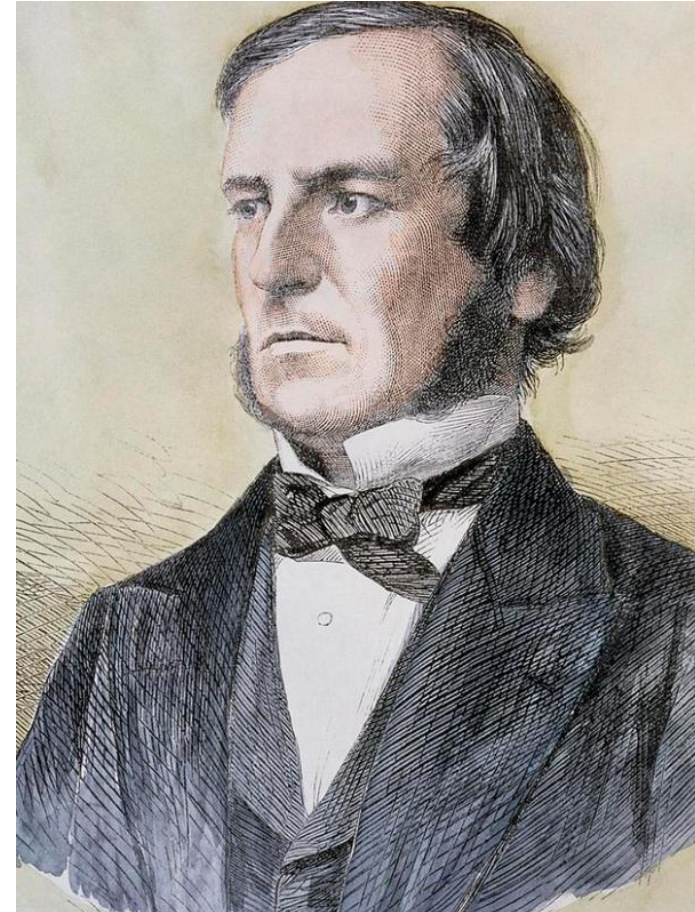
Geschiedenis

- Zoektocht van 2000 jaar:
 - Logica omzetten naar wiskunde
 - Voowaarden:
 - Alleen basissymbolen
 - Allen basis operatoren



George Boole

- 1815-1864
- Hoogleraar wiskunde
- 1854:
 - *“An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities”*
 - Grondlegging Booleans algebra
 - Basis van moderne computerlogica



Booleaanse algebra

- Veel overeenkomsten met gewone algebra:

- Basisoperatoren: +, -, x
- Operanden onder de vorm van letters
- Zelfde regels:
 - Optellen en vermenigvuldigen zijn commutatief

$$\begin{aligned}A + B &= B + A \\ A * B &= B * A\end{aligned}$$

- Optellen en vermenigvuldigen zijn associatief

$$\begin{aligned}A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A * (B + C) &= (A * B) * C\end{aligned}$$

- Vermenigvuldigen is distributief over optellen

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$$

Booleaans algebra

- Geen getallen, maar “classes”
 - Verzameling van elementen of eigenschappen
- Vb Katten:
 - Geslacht: M of V
 - Kleur:
 - G (gekleurd)
 - Z (zwart)
 - W (wit)
 - A (alle andere kleuren)
 - Gecastreerd
 - C (wel gecastreerd)
 - N (niet gecastreerd)



Booleaans algebra

- Operatoren
 - $+$, $*$, $-$
 - Volledig andere betekenis
- $+$
 - Verzameling van twee klassen
 - $\forall b: Z + W =$ de klasse van alle zwarte OF witte katten
- $*$
 - Doorsnede van twee klassen
 - $\forall b: V * G =$ de klasse van alle vrouwelijk gekleurde katten

Booleaanse algebra

- Symbolen 1 en 0
 - 1 = het universum
 - $\forall b \ 1 = \text{de klassen van alle katten: } M + V = 1$
 - 0 = een lege klasse
- —
 - Uitsluiting uit het universum
 - $\forall b \ 1 - M = \text{de klasse van alle katten uitgezonderd mannelijke katten}$

Booleaanse algebra

- Klaar voor Booleaanse algebra
- Criteria voldaan?
- $\forall b$
 - Op zoek naar kat die:
 - Wit of gekleurd en gecastreerd
 - Vrouwelijk, gecastreerd en eender welke kleur buiten wit
 - Zwarte kat
 - Booleaanse formule?



$$(M * G * (W + G)) + (V * G * (1 - W)) + Z$$

Booleaanse algebra

- Formule omvormen naar verstaanbare taal:
 - + vervangen door OR
 - - vervangen door AND
 - 1 – vervangen door NOT
- Formule?
 - **$(M \text{ AND } G \text{ AND } (W \text{ OR } G)) \text{ OR } (V \text{ AND } G \text{ AND } (\text{NOT } W)) \text{ OR } Z$**

Booleaanse algebra

- Booleaanse test:
 - Testen of criteria voldoen
 - Letters vervangen door 0 of 1
 - 1 = criteria voldaan
 - 0 = criteria niet voldoen
 - Vb:
 - Niet-gecastreerde, gekleurde kater => Zoeken we dit?
 - Formule?

$$(1 * 0 * (0 + 1)) + (0 * 0 * (1 - 0)) + 0$$

Booleaanse algebra

- Formule niet wiskundig oplossen!
- Gebruik maken van waarheidstabellen:

AND	0	1
0	0	0
1	0	1

OR	0	1
0	0	1
1	1	1

Booleaanse algebra

- Volgorde van bewerking steeds respecteren:
 1. Haakjes
 2. NOT
 3. AND
 4. OR

Booleaanse algebra

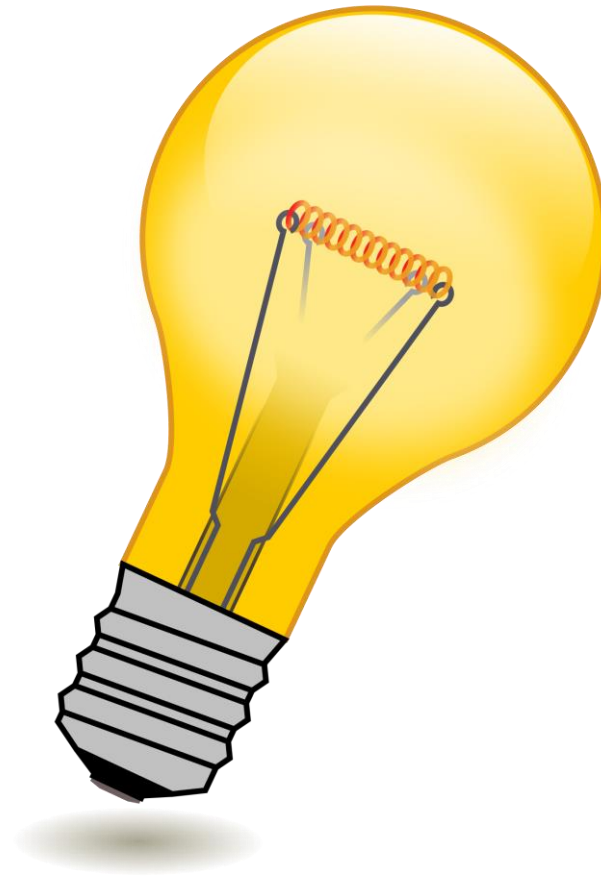
- Formule oplossen:

$$\begin{aligned}x &= (1 * 0 * (0 + 1) + (0 * 0 * (1 - 0))) + 0 \\&= (1 * 0 * 1) + (0 * 0 * 1) + 0 \\&= 0 + 0 + 0 \\&= 0\end{aligned}$$



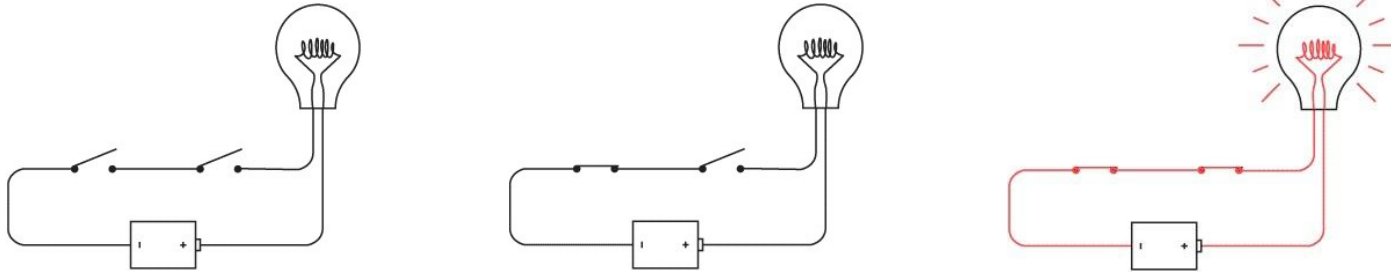
Booleaanse algebra

- Nadelen gebruik van formules:
 - Snel complex en verwarrend
 - Meer klassen en voorwaarden
- Oplossing?
 - Visueel maken
 - Elektrische schakelingen

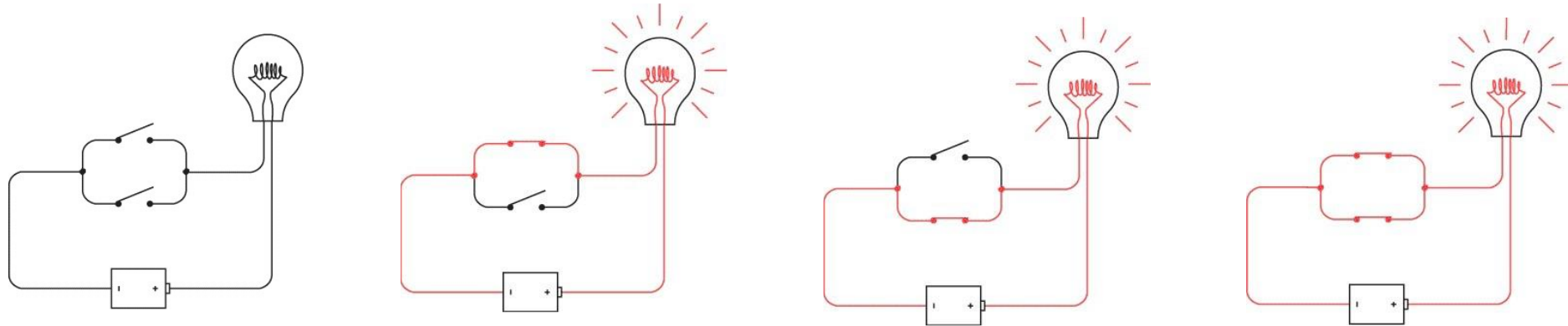


Booleaanse algebra

- AND (Seriële schakeling)

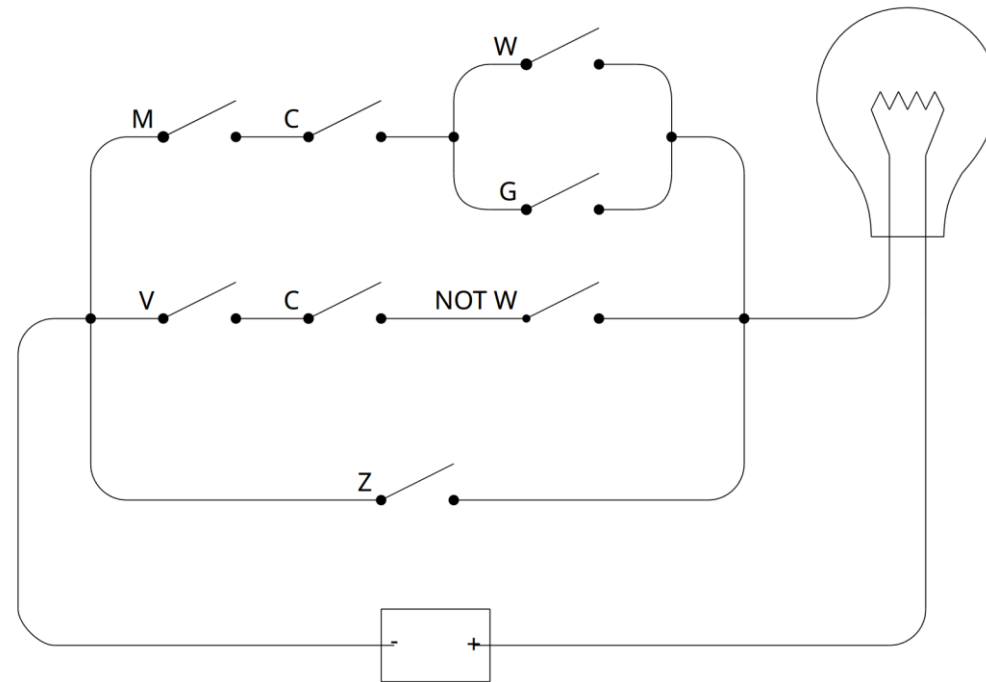


- OR (Parallele schakeling)



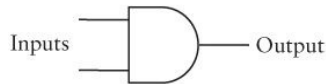
Booleaanse algebra

- Formule visueel maken met schakelingen?

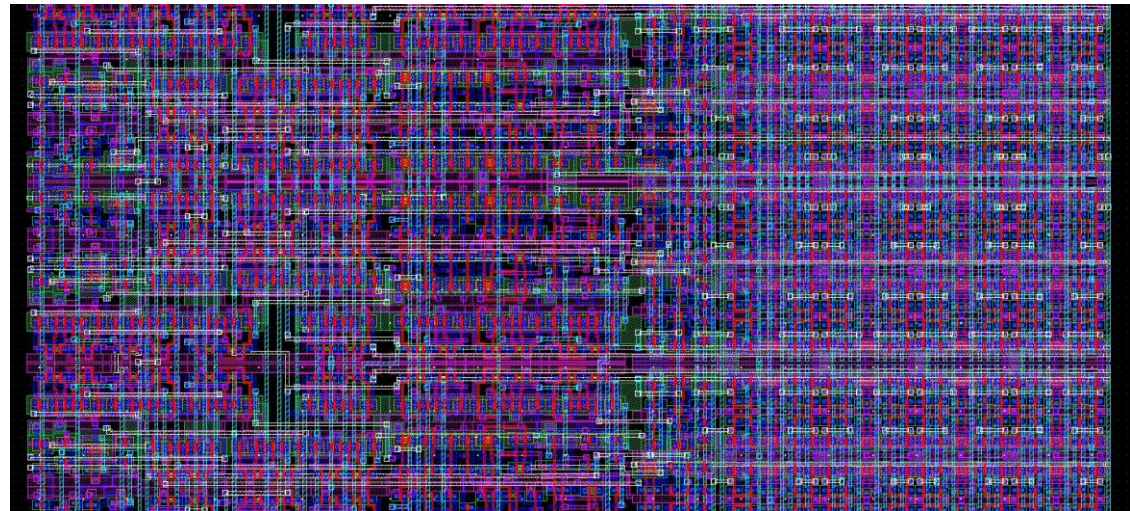


Booleaanse algebra

- Link computersystemen?
 - Basis van computersysteem
 - CPU opgebouwd uit logische gates (transistoren):
 - 2 of meerdere inputs
 - 1 output

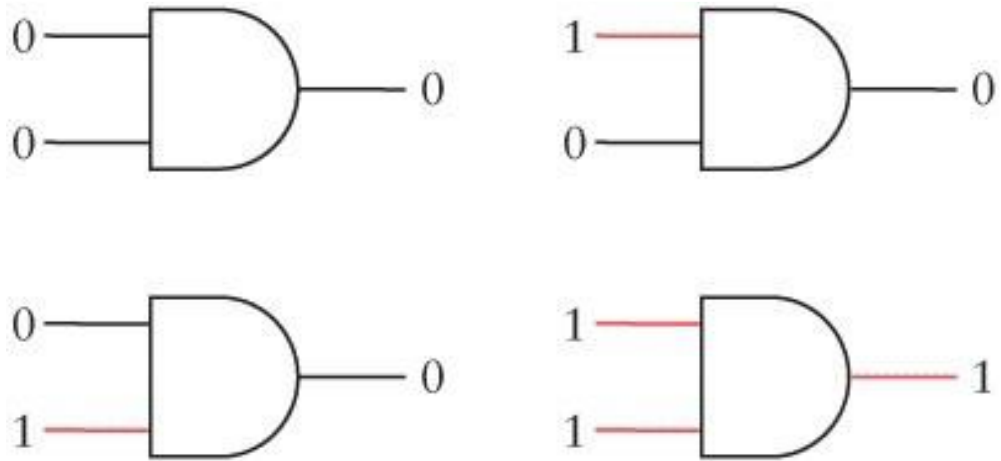


- 3 gates gekend: AND, OR, NOT

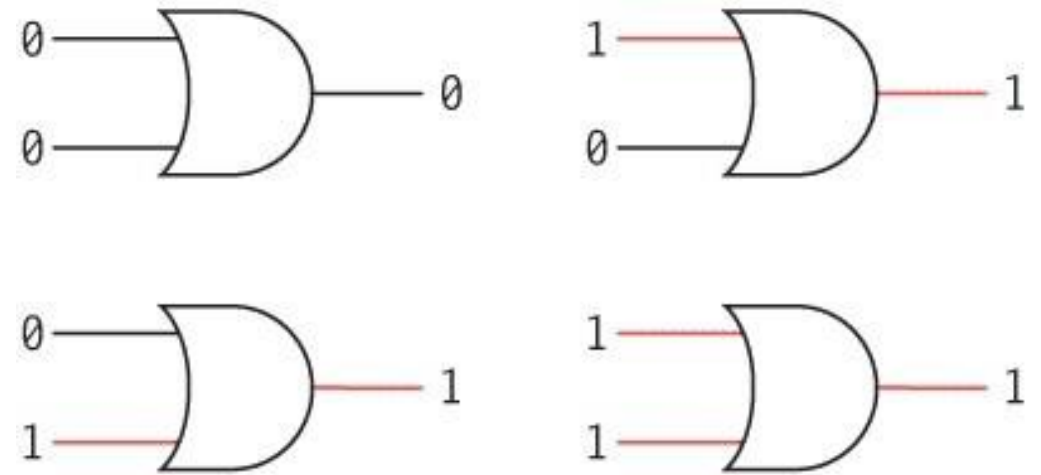


Boolaanse algebra

AND gate

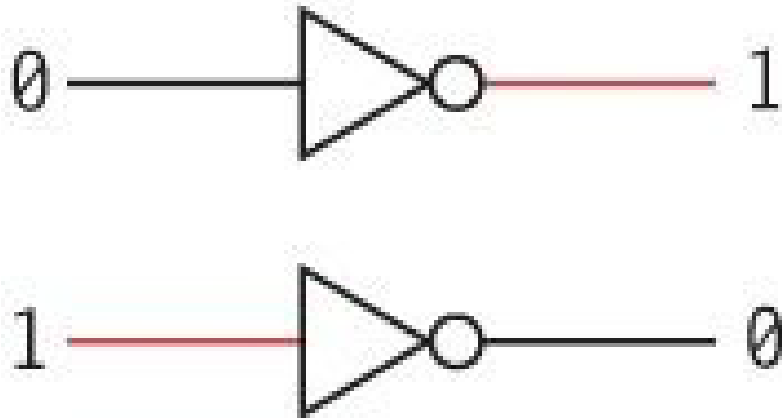


OR gate



Booleaanse algebra

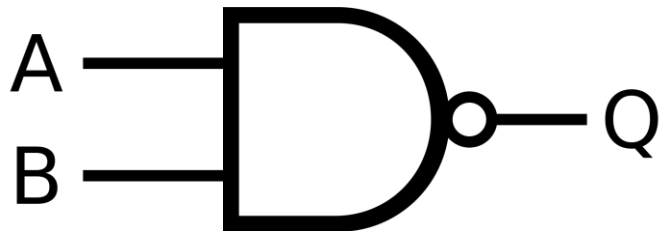
NOT Gate



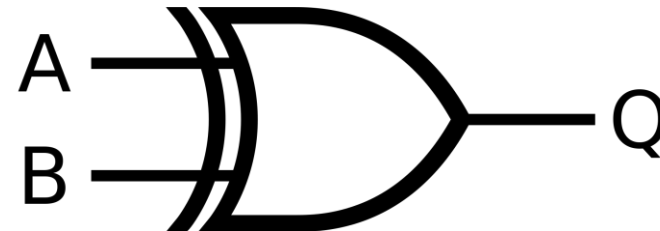
Booleaanse algebra

- AND, OR en NOT zijn niet enigste gates
- NAND en XOR ook veel gebruikt

NAND	0	1
0	1	1
1	1	0

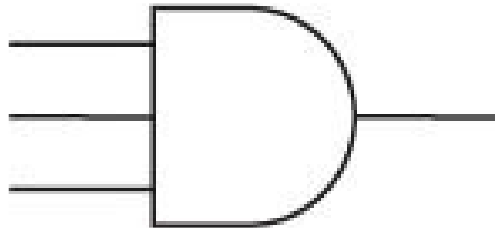


XOR	0	1
0	0	1
1	1	0



Booleaanse algebra

- Gates beperken zich niet tot 2 ingangen.
- Meerdere ingangen mogelijk:



Booleaanse algebra

- Ook waarheidstabellen kunnen meer dan 2 variabelen hebben.
- Opgave:
 - Probeer zelf de waarheidstabel op te stellen van AND en OR met eerst 3 inputs en daarna 4 inputs

Booleaanse algebra

- Waarheidstabellen
 - Eenvoudigste voorstelling van een booleaanse functie
 - Overzicht van alle mogelijke waarden
 - Uitkomst van booleaanse functie bij gebruik van waarden

x	y	z	S
0	0	0	F ₀
0	0	1	F ₁
0	1	0	F ₂
0	1	1	F ₃
1	0	0	F ₄
1	0	1	F ₅
1	1	0	F ₆
1	1	1	F ₇

Waarheidstabel

- Eerste regel leest:
 - $s = F_0$ als $x = 0, y = 0, z = 0$
- Alle volgende regels rij per rij overlopen

x	y	z	S
0	0	0	F_0
0	0	1	F_1
0	1	0	F_2
0	1	1	F_3
1	0	0	F_4
1	0	1	F_5
1	1	0	F_6
1	1	1	F_7

Waarheidstabel

- Wat zijn de resultaten in s gebruikmakende van volgende functie:

- $s = x * (y + \bar{z})$

x	y	z	S
0	0	0	F ₀
0	0	1	F ₁
0	1	0	F ₂
0	1	1	F ₃
1	0	0	F ₄
1	0	1	F ₅
1	1	0	F ₆
1	1	1	F ₇

Opgave

- Zet volgende formule om naar een schakeling met gates. (Tip, gebruik een programma zoals draw.io)

- $A + B + (C * A) + (B * \overline{C}) + \overline{D}$

Opgaven

- Gegeven volgende waarheidstabel en functies:
 - $x + (\overline{y} * z)$
 - $(y * x) + z$
 - $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$
- Vul de waarheidstabel aan

x	y	z	S
0	0	0	F ₀
0	0	1	F ₁
0	1	0	F ₂
0	1	1	F ₃
1	0	0	F ₄
1	0	1	F ₅
1	1	0	F ₆
1	1	1	F ₇