

Zusammenfassung und Anwendung

Def: Funktionen mit einem Term der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R} \\ \text{und } a_n \neq 0$$

nennt man ganzrationale Funktionen vom Grad n bzw. Polynome vom Grad n .

Untersuchung von Funktionen

1) Berechnung der Nullstellen und Umformung in die faktorisierte Form
$$f(x) = a(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$$

i) ab $n=3$ gibt es keine einfach anwendbare Lösungsformel mehr

ii) Vielfachheit der Nullstellen

\Rightarrow in der faktorisierten Form gibt der Exponent die Vielfachheit an
gerade Vielfachheit \Rightarrow kein VZW
ungerade Vielfachheit \Rightarrow VZW

2) Bestimmung der Vorzeichen der Funktionswerte

x	$-\infty < x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	\dots	$x_n < x < \infty$
$(x-x_1)$	+	-		-
$(x-x_2)$	-	+		-
$(x-x_n)$	+	-		+
$f(x)$	-	-		+

} Bsp. !

3) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Der Summand mit dem höchsten Exponenten bestimmt das Grenzwertverhalten des Graphen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

1. Fall: Exponent ungerade und $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. Fall Exponent ungerade und $a_n < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

3. Fall Exponent gerade und $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

4. Fall Exponent gerade und $a_n < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$$

4) Anwendung der Ergebnisse um den Graphen zu zeichnen

- i) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen markieren
- ii) Bereiche streichen in denen der Graph nicht verläuft
- iii) Grenzwerte berücksichtigen

Bsp: $f(x) = x^3 - 4,5x^2 - x + 12$

1. Nullstellen

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$x_3 = 4$$

} siehe Polynomdivision

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2)(x - 4)$$

2. Vorzeichen der Funktionswerte

	$-\infty < x < -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < \infty$
$\left(x + \frac{3}{2}\right)$	-	+	+	+
$(x - 2)$	-	-	+	+
$(x - 4)$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

3. Grenzwerte

$$f(x) = x^3 - 4,5x^2 - x + 12$$

$$n = 3 \quad \vee \text{ ungerade}$$

$$a_3 = 1 > 0$$

} Fall 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

\Rightarrow Die Funktionswerte und damit der Graph der Funktion kommt aus $-\infty$ und geht für wachsende Werte von x gegen ∞

4) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

$$x_1 = -1,5$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 4$$

} x-Achse

$$y = 12$$

} y-Achse $f(0) = 12$

