Die allgemeine Exponentialfunktion

Def: Jede Funktion f mit $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, heißt Exponentialfunktion.

Eigenschaften:

1) Der Graph jeder Exponentialfunktion schneidet die y-Achse im Punkt $S(0|1)$

2) Fallunterscheidung:

$a > 1$: die Funktionswerte wachsen für zunehmende Werte von x } exp. Wachstum

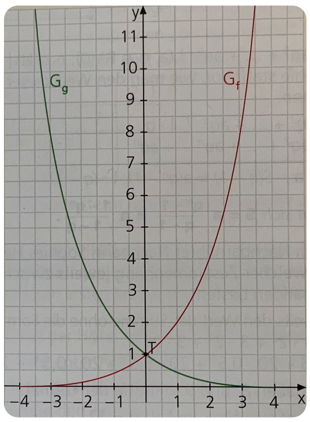
$0 < a < 1$: die Funktionswerte fallen für zunehmende Werte von x } exp. Abnahme

$\Rightarrow$ der Wert 0 wird nicht erreicht $\left[\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0 \right]$

3) Die Wertemenge der Exponentialfkt ist $\mathbb{R}^+$: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$

4) Der Graph jeder Exponentialfkt. hat mit der x-Achse keinen Punkt gemeinsam, kommt ihr aber bel. nahe:

die x-Achse ist horizontale Asymptote



5) Die Graphen der beiden Fkt. f_a mit $f_a(x) = a^x$ und g_a mit $g_a(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sind sym. zueinander bzgl. der y-Achse.

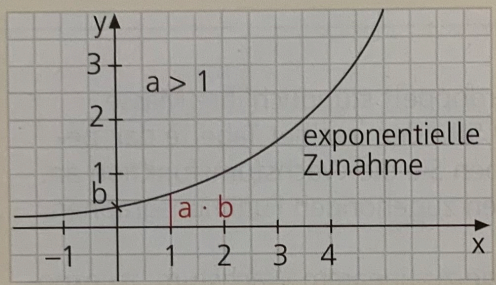
Anwendung:

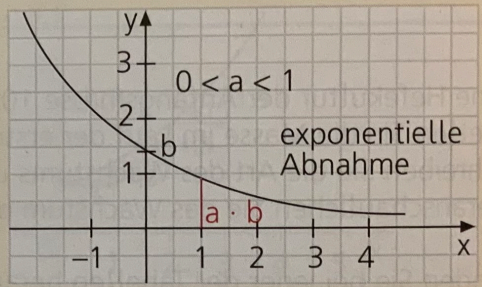
Vermehrt sich ein (positiver) Bestand in gleichen Zeitspannen immer um den gleichen Prozentsatz p%, so spricht man von **exponentieller Zunahme** (exponentiellem Wachstum) mit dem

Wachstumsfaktor $\mathbf{a = 1 + \frac{p}{100}}$.

Bei einer Abnahme mit konstanter prozentualer Abnahmerate p% spricht man von **exponentieller Abnahme** (exponentiellem Zerfall) mit dem

Abnahmefaktor $\mathbf{a = 1 - \frac{p}{100}}$.





Exponentielle Zunahme
Nimmt die Größe x um 1 zu, so nimmt die (positive) Größe y stets mit dem gleichen positiven Faktor a **zu**:
$\mathbf{y = b \cdot a^x;\ a > 1}$

Exponentielle Abnahme
Nimmt die Größe x um 1 zu, so nimmt die (positive) Größe y stets mit dem gleichen positiven Faktor a **ab**:
$\mathbf{y = b \cdot a^x;\ 0 < a < 1}$

a: Wachstumsfaktor bzw. Abnahmefaktor; b: Anfangsbestand für x = 0

Der Logarithmus:

Umkehrfunktion Potenzfkt

Def: Die Lösung der Gleichung $b^x = p$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $p \in \mathbb{R}^+$ über der Grundmenge $\mathbb{G}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ entspricht

$$x = \log_b(p)$$

Der Logarithmus ist damit derjenige Exponent, mit dem man b potenzieren muss, um p zu erhalten.

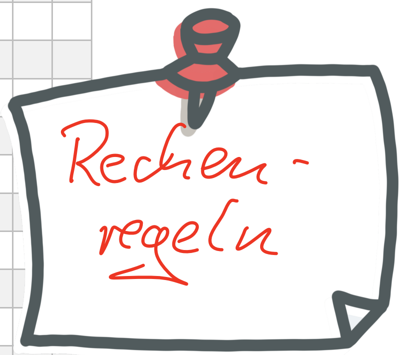
Beispiele:
$5^x = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_5(10)$
$10^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{10}(5)$

Allgemeine Aussagen:

1) $\log_b(b^x) = x \log_b(b) = x$
2) $b^{\log_b y} = y$

$\Big\}$ $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}^+$

Rechenregeln für Logarithmen



BSD: Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln:

es gilt: $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $p, q \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$

1) Logarithmus eines Produktes

$$\log_b(pq) = \log_b(p) + \log_b(q)$$

2) Logarithmus eines Quotienten

$$\log_b\left(\frac{p}{q}\right) = \log_b(p) - \log_b(q)$$

3) Logarithmus einer Potenz

$$\log_b(p^r) = r \cdot \log_b(p)$$

4) Wechsel der Basis

$$\log_a(p) = \frac{\log_b(p)}{\log_b(a)}$$

Sonderfälle:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \log_b(1) = 0 \\ 2)\ \log_b(b) = 1 \end{array}\right\} b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Schreibweisen:

$$\left.\begin{array}{l} \log_{10}(b) = \lg(b)\ [= \log(b)] \\ \log_2(b) = \mathrm{ld}(b) \\ \log_e(b) = \ln(b) \end{array}\right\} b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$