Kurvendiskussion rationaler Funktionen

Beachte: Durch die Form der Funktion ist es möglich, dass man Eigenschaften direkt ablesen kann.

i) Summenform: schräge Asymptote

Bsp: $f(x) = \underbrace{3x+1}_{} + \frac{5}{x+1}$

$y = 3x+1$ => Gleichung der schrägen Asymptote

ii) Bruchform: waagerechte bzw. senkrechte Asymptoten

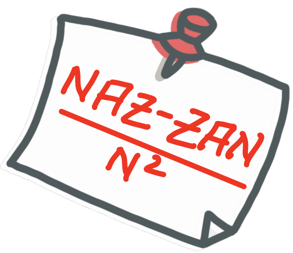
Bsp: siehe Untersuchung Grad des Zähler und Grad des Nenners

iii) faktorisierte Form: Nullstellen der Funktion

Bsp: $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x+3}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\}$ Nullstellen von $f(x)$

Ableitung rat. Funktionen



Die Ableitung erfolgt über die Quotientenregel oder über die Kettenregel

Bsp: $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 4}$

$f'(x) = \frac{(3x^2-4)\cdot(6x^2-8x+2) - (2x^3-4x^2+2x-1)(6x)}{(3x^2-4)^2}$ } hier würden jetzt Vereinfachungen folgen

$$f(x) = \frac{3}{2x^3-2x+1} = 3\cdot(2x^3-2x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = -3\cdot(2x^3-2x+1)^{-2}\cdot(6x^2-2)$$
$$= \frac{-3\cdot(6x^2-2)}{(2x^3-2x+1)^2}$$

Kurvendiskussion am Beispiel

$$f(x) = x - 4 + \frac{5}{x+2} \qquad g(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$$

1. Zeige, dass beide Terme äquivalent sind.

DON'T FORGET

Hier gibt es zwei Möglichkeiten

1) $f(x) \Rightarrow g(x)$

$$f(x) = x-4+\frac{5}{x+2} = \underbrace{\frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x+2}}_{\text{mit }(x+2)\text{ erweitert}} + \frac{5}{x+2}$$

$$= \underbrace{\frac{x^2+2x-4x-8}{x+2} + \frac{5}{x+2} = \frac{x^2-2x-8+5}{x+2}}_{\text{ausmultipliziert und zusammengefasst}}$$

$$= \frac{x^2-2x-3}{x+2} = g(x)$$

2) $g(x) \Rightarrow f(x)$ Polynomdivision

$$g(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$$

$$
\begin{array}{l}
= (x^2-2x-3):(x+2) = x-4+\dfrac{5}{x+2} = f(x) \\
\underline{-(x^2+2x)} \\
\quad -4x-3 \\
\quad \underline{-(-4x-8)} \\
\qquad 5
\end{array}
$$

!

2. maximaler Definitionsbereich

$\Rightarrow$ Nullstellen des Nennerpolynoms dürfen nicht in D_f enthalten sein

$\Downarrow$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

REMINDER

3. Nullstellen ⇒ Die Nullstellen einer rat. Funktion sind die NS des Zählerpolynoms

REMINDER

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$$

$$0 = \frac{x^2-2x-3}{x+2}$$

$$0 = x^2-2x-3$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

$$x_{0_1} = \underline{\underline{3}} \qquad x_{0_2} = \underline{\underline{-1}}$$

4. Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

BSD: Zu den Rändern des Definitionsbereichs gehören auch die Definitionslücken

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{x-4}_{\to \infty} + \underbrace{\frac{5}{x+2}}_{\to 0}$$

$$= \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x-4}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{5}{x+2}}_{\to 0}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x-4 + \underbrace{\frac{5}{x+2}}_{\to -\infty}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x-4 + \underbrace{\frac{5}{x+2}}_{\to \infty}$$

$$= \infty$$

$x=-2$ ist damit eine Polstelle / Unendlichkeitsstelle

5. Asymptoten

$$f(x) = \underbrace{x-4} + \frac{5}{x+2}$$

$y = x-4$ als Gleichung der schrägen Asymptote direkt ablesbar

$x = -2$ senkrechte Asymptote => folgt aus Polstelle

waagerechte Asymptote ex. nicht aufgrund der Struktur

Nachweis schräge Asymptote

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - y = 0$ muß gelten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - y = \lim_{x\to\infty} x - 4 + \frac{5}{x+2} - (x-4)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x - 4 + \frac{5}{x+2} - x + 4$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x+2} = 0 \qquad \left(\frac{5}{x+2} \to 0\right)$$

$\Downarrow$ $y = x-4$ ist Asy.

Der Abstand der beiden Fkt wird immer kleiner und geht gegen Null => Eigenschaft Asy.

6. Ableitungen

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(2x-2) - (x^2-2x-3)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 4x - 4 - x^2 + 2x + 3}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2}$$

=> äquivalent kann man auch die Summenform ableiten

$$f''(x) = \frac{(x+2)^{\cancel{2}\,1} \cdot (2x+4) - (x^2+4x-1) \cdot 2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(x+2)(2x+4) - 2(x^2+4x-1)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+2}{(x+2)^3} = \frac{10}{(x+2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(x+2)^3 \cdot 0 - 10 \cdot 3 \cdot (x+3)^2 \cdot 1}{(x+2)^6}$$

$$= \frac{-30 \cdot \cancel{(x+3)^2}}{(x+2)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{-30}{(x+2)^4}$$

7. Monotonie und Extrema

$$f'(x) = 0$$

$$0 = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

$$0 = x^2+4x-1$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \underline{\underline{-2 \pm \sqrt{5}}}$$

$$x_{E_1} = -2-\sqrt{5}$$

$$x_{E_2} = -2+\sqrt{5}$$

x	$-\infty < x < -2-\sqrt{5}$	$x=-2-\sqrt{5}$	$-2-\sqrt{5} < x < -2$	$x=-2$	$-2 < x < -2+\sqrt{5}$	$x=-2+\sqrt{5}$	$-2+\sqrt{5} < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	−	↯	−	0	+
G_f	smw	HoP	smf		smf	TiP	smw

$$\left.\begin{array}{l} HoP(-2-\sqrt{5} \mid -6-2\sqrt{5}) \\ TiP(-2+\sqrt{5} \mid -6+2\sqrt{5}) \end{array}\right\}$$ Koordinaten erhält man durch einsetzen in f(x)

8. Krümmungsverhalten

$f''(x) = 0$

$0 = \dfrac{10}{(x+2)^3}$

$0 = 10$ $\Rightarrow$ falsche Aussage

$\Downarrow$ Krümmungsverhalten ändert sich nur an der Polstelle

$f''(x) < 0$ für alle $x < -2$

$\Rightarrow$ negativ : rechtsgekrümmt

$f''(x) > 0$ für alle $x > -2$

$\Rightarrow$ positiv : linksgekrümmt

Intervalle: $I_1 =]-\infty; -2[$ rechtsge.

$I_2 =]-2; \infty[$ linksge.

Es ex. kein Wendepunkt!

Zeichnung: