Zusammenfassung und Anwendung

Def: Funktionen mit einem Term der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \; a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$$

und $a_n \neq 0$

nennt man ganzrationale Funktionen vom Grad n bzw. Polynome vom Grad n.

Untersuchung von Funktionen

1) Berechnung der Nullstellen und Umformung in die faktorisierte Form
$f(x) = a(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$

i) ab $n=3$ gibt es keine einfach anwendbare Lösungsformel mehr

ii) Vielfachheit der Nullstellen
$\Rightarrow$ in der faktorisierten Form gibt der Exponent die Vielfachheit an
gerade Vielfachheit $\Rightarrow$ kein VZW
ungerade Vielfachheit $\Rightarrow$ VZW

2) Bestimmung der Vorzeichen der Funktionswerte

x	$-\infty < x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	...	$x_n < x < \infty$
$(x-x_1)$	+	−		−
$(x-x_2)$	−	+		−
$(x-x_n)$	+	−		+
$f(x)$	−	−		+

Bsp!

3) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Der Summand mit dem höchsten Exponenten bestimmt das Grenzwertverhalten des Graphen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

1. Fall: Exponent ungerade und $a_n > 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2. Fall Exponent ungerade und $a_n < 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

3. Fall Exponent gerade und $a_n > 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

4. Fall Exponent gerade und $a_n < 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

4) Anwendung der Ergebnisse um den Graphen zu zeichnen

i) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen markieren

ii) Bereiche streichen in denen der Graph nicht verläuft

iii) Grenzwerte berücksichtigen

Bsp: $f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 - x + 12$

1. Nullstellen

$x_1 = 2$

$x_2 = -\frac{3}{2}$

$x_3 = 4$

siehe Polynomdivision

$f(x) = (x + \frac{3}{2})(x-2)(x-4)$

2. Vorzeichen der Funktionswerte

	$-\infty < x < -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < \infty$
$(x + \frac{3}{2})$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

3. Grenzwerte

$f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 - x + 12$

$n = 3 \;\Rightarrow$ ungerade

$a_3 = 1 > 0$

Fall 1

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ Die Funktionswerte und damit der Graph der Funktion kommt aus $-\infty$ und geht für wachsende Werte von x gegen ∞

4) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1{,}5 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \text{x-Achse}$$

$$y = 12 \;\} \text{ y-Achse} \qquad f(0) = 12$$