

Analysis

Grundlagen:

Binomische Formeln

- 1 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- 2 $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- 3 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Potenzengesetze

- 1 $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ und $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
- 2 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- 3 $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- 4 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- 5 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Logarithmengesetze

- 1 $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- 2 $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- 3 $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$
- 4 $\ln(x) = \log_e(x) \rightarrow \ln(e^x) = x$
- 5 $\lg(x) = \log_2(x)$
- 6 $\lg(x) = \log_{10}(x)$

Lineare Transformationen:

Wir erhalten aus dem Graphen G_f der Funktion f den Graphen der Funktion g mit:

- 1 $g(x) = -f(x)$, indem man G_f an der x-Achse spiegelt
- 2 $g(x) = f(-x)$, indem man G_f an der y-Achse spiegelt
- 3 $g(x) = f(x) + a$ indem man G_f in Richtung der y-Achse um a verschiebt
- 4 $g(x) = f(x - a)$ indem man G_f in Richtung der x-Achse um a verschiebt
- 5 $g(x) = a \cdot f(x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der y-Achse mit dem Faktor a streckt bzw. staucht
- 6 $g(x) = f(a \cdot x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ staucht bzw. streckt.

Ableitungen:

- 1 jede Ableitung ist mit der h -Methode nachweisbar

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 2 $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 0$
- 3 $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
- 4 $f(x) = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = c$
- 5 $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = m$
- 6 $f(x) = a \cdot g(x)$ mit $a \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
- 7 $f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
- 8 $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q} \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- 9 $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- 10 $f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- 11 $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Eselsbrücke¹: $f'(x) = \frac{N \cdot AZ - Z \cdot AN}{N^2}$

Ableitung spezieller Funktionen:

Trigonometrische Funktionen

- 1 $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- 2 $f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
- 3 $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 $\rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

e-Funktion

- 1 $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- 2 $f(x) = e^{h(x)} \rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)}$

ln-Funktion

1 $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Wurzel

1 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2 $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}}$

Anwendung der 1. Ableitung

- Zusammenhang Steigung m des Graphen G_f einer Funktion f an der Stelle $x_0 \in G_f$ mit der 1. Ableitung:

1 $f'(x_0) = m$

2 $\tan(\alpha) = m \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$

- Tangentengleichung y_T durch den Punkt $P(x_0|f(x_0)) \in G_f$
 $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Grenzwerte spezieller Funktionen:

- Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \rightarrow e$ -Funktion.
- Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0 \rightarrow \ln$ -Funktion.
- Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim_{x \rightarrow 0} (p(x) \cdot \ln(x)) = 0 \rightarrow \ln$ -Funktion.

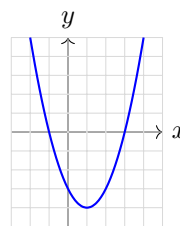
Funktionsklassen:

Lineare Funktionen

- Funktionsterm: $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$
1 m - Steigung der Geraden 2 t - y-Achsenabschnitt
- Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade
- Berechnung der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Berechnung des y-Achsenabschnittes $t \rightarrow$ die Steigung m und die Koordinaten eines Punktes $P(x_0|y_0)$ einsetzen und nach t auflösen

Quadratische Funktionen:

- allgemeine Form: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$

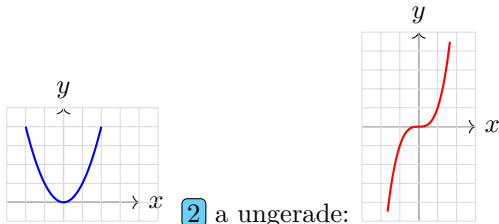


- Graph:
- Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s|y_s)$ den Koordinaten des Scheitelpunktes
- Faktorierte Form: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$ als Nullstellen der Funktion
- Nullstellen als Lösung der Gleichung
 $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet \rightarrow Scheitelpunkt ist Tiefpunkt und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet \rightarrow Scheitelpunkt ist Hochpunkt und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

¹N-Nenner, Z-Zähler, AZ - Ableitung Zähler, AN - Ableitung Nenner

Polynome:

- $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die restlichen $a_i \in \mathbb{R}$
- höchster Exponent legt den Grad des Polynoms fest \rightarrow hier n -ten Grades
- Beispielgraphen in Abhängigkeit des Grades:

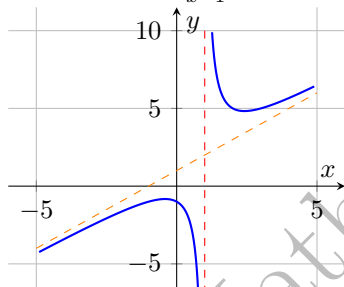


- 1 a gerade:
- 2 a ungerade:
- 3 n gerade und $a_n > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- 4 n gerade und $a_n < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$
- 5 n ungerade und $a_n > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- 6 n ungerade und $a_n < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

- ab Grad $n > 2$ kennen wir keine Lösungsformel zur Berechnung der Nullstellen² \rightarrow ausklammern bzw. Newton-Verfahren zur Näherung der Nullstellen

Gebrochen-rationale Funktionen

- $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_i\}$ mit $n(x_i) = 0$
- Definitionslücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms
- Nullstellen berechnen sich durch $0 = z(x)$ sind also die Nullstellen des Zählerpolynoms
- Graph $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$



Hinweis: Bei der Monotonie- und Krümmungsuntersuchung muss die Definitionslücke explizit betrachtet werden, an der Definitionslücke kann sich das Monotonie- und Krümmungsverhalten ändern

- Asymptoten: Die Art der Asymptote einer gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\max}$ hängt vom Grad der Polynome des Zählers als auch des Nenners ab³.

1 $z < n$: die x -Achse ist waagerechte Asymptote $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

2 $z = n$: waagerechte Asymptote die parallel zur x -Achse verläuft $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

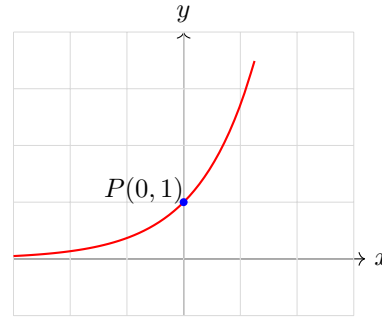
3 $z = n+1$: schräge Asymptote die direkt aus der Summenform ablesbar ist

Hinweis: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x-1}$
Gleichung der schrägen Asymptote

4 $z > n+1$: Näherungskurve

e-Funktion:

- $f(x) = e^x$
- Graph der Funktion $f(x) = e^x$



- Ableitung: $f'(x) = e^x$

- Grenzwerte:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- $f(x) > 0$: für alle $x \in \mathbb{R}$

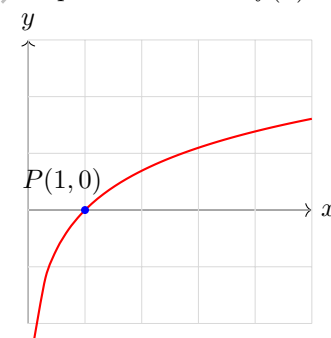
Hinweis: Die e -Funktion wächst schneller als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Eselsbrücke: e gewinnt!

- Bei der Kurvendiskussion wird die e -Funktion meistens als Produkt mit einer anderen Funktion betrachtet.⁴

ln-Funktion:

- $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
- Graph der Funktion $f(x) = \ln(x)$



- Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$

- Grenzwerte:

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- **Hinweis:** Die \ln -Funktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$,

Hinweis: Eselsbrücke: \ln ist der Loser!

- Bei der Kurvendiskussion wird die \ln -Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.⁵

Wurzelfunktion:

- $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b} + c$ und $x \geq b$ ist eine Halbparabel und ergibt sich durch folgende lineare Transformationen aus der allgemeinen Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ wie folgt:

1 Verschiebung um b in x -Richtung

2 Strecken bzw. Stauchen mit dem Faktor a in y -Richtung

3 Verschiebung um c in y -Richtung

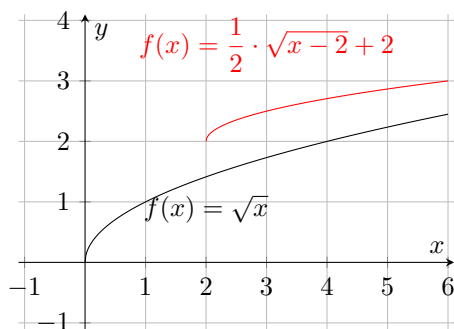
⁴ $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot h'(x) \cdot e^{h(x)}$

⁵ $f(x) = \ln(g(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

²Für $n = 2$ eist das Polynom eine Quadratischen Funktion

³ z -Grad des Zählers; n - Grad des Nenners

- Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 2$



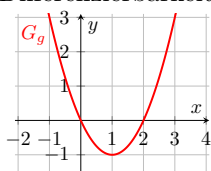
- Ableitung $f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \cdot \sqrt{g(x)}}$

allgemeine Sinusfunktion:

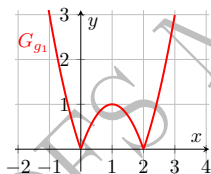
- $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$
 - Der Parameter a ändert die Amplitude, also die maximale Auslenkung der Kurve.
 - Der Parameter b streckt bzw. staucht die Kurve in Richtung der x -Achse. Durch den Faktor b wird damit die Periode p verändert $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$.
 - Der Parameter c verschiebt die Kurve in Richtung der x -Achse.
 - Der Parameter d verschiebt die Kurve in Richtung der y -Achse.
- Ableitung: $f'(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) \cdot b$
- Bei der Kurvendiskussion wird die \sin -Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.⁶

Betragsfunktionen:

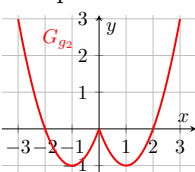
- Wird eine Funktion g linearen Transformationen in Form des Betrags unterworfen ergeben sich unterschiedliche Graphen. Diese Graphen haben allerdings gemeinsam, dass die Nicht-Differenzierbarkeit an bestimmten Stellen sich nicht ändert.



- $g_1(x) = |f(x)|$: Die Punkte mit negativen Funktionswerten werden an der x -Achse gespiegelt. Die Spiegelung erfolgt damit an den Nullstellen.

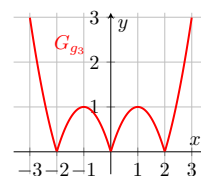


- $g_2(x) = f(|x|)$: Der im positive Teil der x -Achse liegende Graaph wird an der y -Achse gespiegelt.



- $g_3(x) = |f(|x|)|$: Wird sowohl der Betrag der x -Werte als auch der Betrag der Funktionswerte gebildet, werden zunächst die Punkte mit positiven x -Werten an der y -Achse

gespiegelt um anschließend die Punkte mit negativen Funktionswerten an der x -Achse zu spiegeln.



- Betragsfunktionen sind an Knickstellen nicht differenzierbar \rightarrow Nachweis über die h -Methode.

Kurvendiskussion:

Bei der Kurvendiskussion werden Eigenschaften des Graphen G_f einer Funktion f analytisch untersucht

Untersuchung der Ausgangsfunktion:

- Untersuchung folgender Eigenschaften:
 - Definitionsbereich \rightarrow bei gebrochen-rationalen Funktion z.B. Berechnung der Definitionslücken
 - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen \rightarrow Nullstellen und Schnittpunkt mit der y -Achse
 - Symmetrie zum Ursprung bzw. zur y -Achse
 - Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs \rightarrow Grenzwerte und Verhalten an Definitionslücken
 - Asymptoten
- je nach Funktionsklasse sind die Rechnungen unterschiedlich

Monotonie:

- Ist die Funktion f im Intervall I differenzierbar dann ist G_f für

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ streng monoton } \left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right.$$

- Hinweis:** Für die Existenz einer Extremstellen $x_0 \in G_f$ sind zwei Bedingungen notwendig:

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

- Die Art der einzelnen Extremstellen läßt sich leicht durch die Vorzeichenwechsel (VZW) der Ableitung an der Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ bestimmen.

- Hochpunkt (HoP) $HoP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von **positiv nach negativ** gibt.

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) < 0$

- Tiefpunkt (TiP) $TiP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von **negativ nach positiv** gibt.

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) > 0$

- Untersuchung der Monotonie und der Extremstellen

- Bestimmung der Nullstelle der 1. Ableitung
- Untersuchung der Monotonie mit Hilfe der Monotonietabelle
- Entscheidungen zu möglichen Extremstellen

- Monotonietabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstellen von $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$ festgelegt werden.

Hinweis: Beispiel mit zwei Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
G_f	smw	HoP	smf	TiP	smw

- wenn sich das Monotonieverhalten **nicht** ändert, liegt ein **Terrassenpunkt** vor

- Bei gebrochen-rationalen Funktionen **muss die Definitionslücke in der Monotonietabelle ebenfalls betrachtet werden.**

⁶ $f(x) = \sin(g(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

Analytische Geometrie

Elementargeometrische Grundlagen

- Flächeninhalt von ebenen Figuren
 - Dreieck $\rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
 - Parallelogramm $\rightarrow A_P = g \cdot h$
 - Trapez $\rightarrow A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ hierbei sind a und c die Längen der Parallelen
 - Drachenviereck $\rightarrow A_{\text{Drache}} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ hierbei sind e und f die Längen der Diagonalen
 - Kreis $\rightarrow A_K = \pi \cdot r^2$ und $U_K = 2 \cdot \pi \cdot r$ hierbei ist r der Radius des Kreises
- Volumen und Oberfläche von Körpern
 - Prisma $\rightarrow V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$
 - Pyramide $\rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$
 - Zylinder $\rightarrow V_{\text{Zylinder}} = A_G \cdot h$ und der Oberflächeninhalt eines geraden Zylinders $A_O = 2 \cdot A_G + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
 - Kegel $\rightarrow V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$ und der Oberflächeninhalt eines geraden Kegels $A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m$ mit m als Länge der Mantellinie
 - Kugel $\rightarrow V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ und der Oberflächeninhalt $A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Definition von Vektoren

- Vektoren sind Pfeile im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum
- Jeder Vektor ist ein Repräsentant unendlich vieler, gleich langer, gleich gerichteter und paralleler Pfeile
- Vektoren werden häufig durch kleine Buchstaben und einem Pfeil darüber gekennzeichnet \vec{a}
- Verläuft ein Repräsentant eines Vektors von einem Punkt z.B. P zu einem zweiten Punkt z.B. Q , so bezeichnet man alle Repräsentanten mit \overrightarrow{PQ} .
- Werden mehrere Vektoren addiert so werden die jeweiligen Repräsentanten aneinandergereiht und das Ergebnis nennt man dann Vektorkette.
- Ein Vektor im 2- bzw. 3-dim. Raum wird in der Spaltenschreibweise durch 2 bzw. 3 Koordinaten beschrieben
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
- Der Vektor $\overrightarrow{0A} = \vec{A}$ bezeichnet denjenigen Vektor, der im Ursprung 0 beginnt und im Punkt A endet. Er wird als **Ortsvektor** bezeichnet.

Spiegelungen an den Koordinatenebenen

Der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird gespiegelt an

- x_1x_2 -Ebene $\rightarrow P(p_1|p_2|-p_3)$ Vorzeichen der x_3 Koordinaten wird geändert
- x_1x_3 -Ebene $\rightarrow P(p_1|-p_2|p_3)$ Vorzeichen der x_2 Koordinaten wird geändert
- x_2x_3 -Ebene $\rightarrow P(-p_1|p_2|p_3)$ Vorzeichen der x_1 Koordinaten wird geändert

Spiegelung am Koordinatenursprung

Der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird am Punkt $P(0|0|0)$ gespiegelt

- $P(-p_1|-p_2|-p_3)$ bei allen Koordinaten ändern sich die Vorzeichen

Eigenschaften von Vektoren

- Vektoraddition
 - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
 - $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Nullvektor
 - $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
 - Der Vektor $\vec{0}$ hat die Länge 0
- Gegenvektor
 - Der Vektor $-\vec{a}$ ist der Gegenvektor zu \vec{a}
 - $-\vec{a}$ ist genauso lang wie \vec{a} und zu \vec{a} entgegengerichtet
- skalare Multiplikation
 - $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$
 - Die skalare Multiplikation vervielfacht den Vektor durch den Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Der Vektor $\lambda \cdot \vec{a}$ ist $|\lambda|$ -mal so lang wie der Vektor \vec{a}
 - Für $\lambda > 0$ hat er die gleiche Richtung wie \vec{a}
 - Für $\lambda < 0$ hat er die entgegengesetzte Richtung wie \vec{a}
- Rechengesetze
 - Assoziativgesetz: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
 - Distributivgesetz:
$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

Rechnungen mit Vektoren

- Der Verbindungsvektor \overrightarrow{PQ}
$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

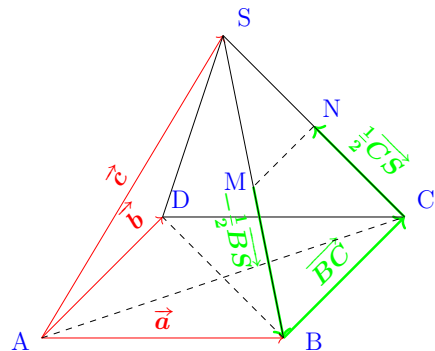
Hinweis: "Spitze minus Hacke"
- Summe von Vektoren $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
- Der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB}
$$\rightarrow \vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$
 bestimmt
- Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$
$$\rightarrow \vec{S}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{3} (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$
- Schwerpunkt einer Pyramide $ABCS$
$$\rightarrow \vec{S}_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{4} (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{S})$$

Zusammenhang der Schwerpunkte

	Berechnung	Teilverhältnis
Schwerpunkt einer Strecke	$\vec{S}_{AB} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$	1:1
Schwerpunkt eines Dreiecks	$\vec{S}_{ABC} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$	1:2
Schwerpunkt einer Pyramide	$\vec{S}_{ABCD} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$	1:3

⁷hierbei ist A_G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe

Beispiel für Vektorketten



Der Vektor \overrightarrow{MN} wird mithilfe der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ausgedrückt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS} \\ &= -\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

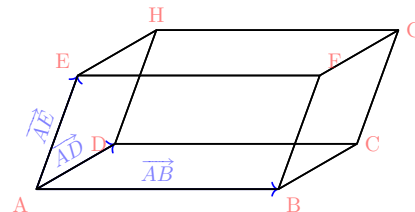
Damit folgt, dass die Mittellinie \overrightarrow{MN} parallel, gleichgerichtet aber nur halb so lang wie der Vektor \vec{b} ist.

Operationen mit Vektoren

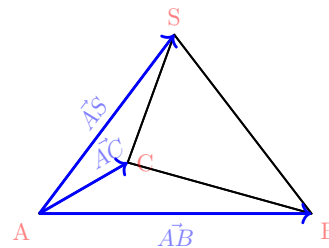
- Länge eines Vektors $\rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Skalare Multiplikation $\rightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
- Skalarprodukt $\rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R}$
- Vektorprodukt mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$
 $\rightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$
- Spatprodukt \rightarrow Verknüpfung von Vektorprodukt und Skalarprodukt
 $\textcircled{1} d = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \in \mathbb{R}$

Eigenschaften der Operationen

- Länge
 $\textcircled{1} |\vec{A}| \rightarrow$ Abstand des Punktes A vom Ursprung
 $\textcircled{2} |\vec{PQ}| \rightarrow$ Abstand der beiden Punkte P und Q
- skalare Multiplikation
 $\textcircled{1} \lambda \vec{a} \rightarrow$ Längenänderung von \vec{a}
 $\textcircled{2} \vec{a}^* = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \rightarrow |\vec{a}^*| = 1$
- Skalarprodukt
 $\textcircled{1} \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \leadsto \vec{a} \perp \vec{b}$
 $\textcircled{2}$ Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b}
 $\rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leadsto \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$
- Vektorprodukt
 $\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$
 $\textcircled{2} \vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$
 $\textcircled{3}$ Flächeninhalt $\triangle ABC \rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$
 $\textcircled{4}$ Flächeninhalt Parallelogramm $\rightarrow A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Spatprodukt \rightarrow bestimmt ein Volumen
 $\textcircled{1}$ Volumen eines Spates $\rightarrow V_{\text{Spat}} = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \circ \vec{AE}|$



- $\textcircled{2}$ Volumen einer dreiseitigen Pyramide
 $\rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \left| \frac{1}{6} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS} \right|$

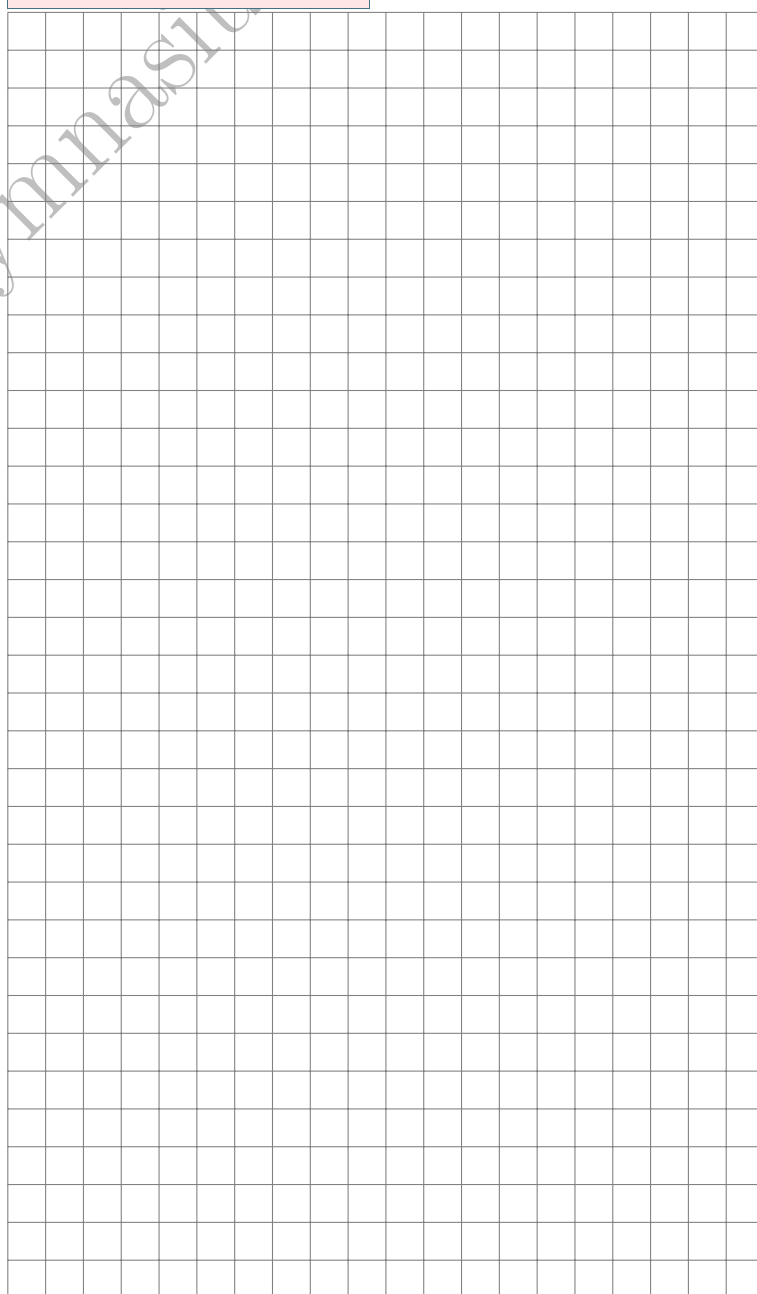


Kugelgleichung

- Kugel um den Ursprung mit Radius r
 $\rightarrow (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = r^2$
- Kugel um $M(m_1|m_2|m_3)$ mit Radius r
 $\rightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Platz für eigene Notizen:

Notizen:



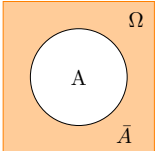
Stochastik

Ereignisalgebra

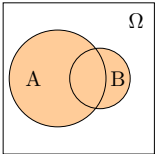
- Ein Ereignis A ist eine Teilmenge des Ergebnisraums Ω
- Ein Ereignis A tritt ein, wenn das Versuchsergebnis ω in A enthalten ist, es gilt also $\omega \in A$
- Alle Elemente von Ω die nicht zum Ereignis A gehören, fasst man unter dem Namen Gegenereignis \bar{A} zusammen, es gilt $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn gilt $A \cap B = \{ \}$.

Venn-Diagramme

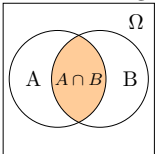
- Gegenereignis \bar{A} : "nicht A ", Ereignis A tritt nicht ein



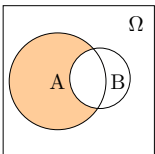
- Vereinigungsmenge $A \cup B$: "A oder B", Mindestens eines der beiden Ereignisse tritt ein



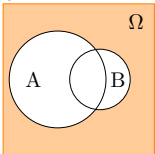
- Schnittmenge $A \cap B$: "A und B", Beide Ereignisse treten ein



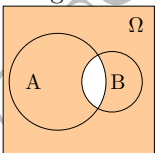
- "A und nicht B" $A \cap \bar{B}$: Es tritt genau das Ereignis A ein



- "nicht A und nicht B" $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$: Weder A noch B tritt ein



- "nicht A oder nicht B" $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$: Höchstens eines der Ereignisse tritt ein



Laplace-Wahrscheinlichkeiten

- Alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind gleich wahrscheinlich
- Beispiel: 1 drehen eines Glücksrads mit gleich großen Sektoren 2 "normaler" Würfel 3 Wurf mit einer "normalen" Münze
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist gleich der Anzahl der Elemente von A dividiert durch die Anzahl der Elemente von Ω

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

- $|A|$ entspricht der Mächtigkeit von A
- $|\Omega|$ entspricht der Mächtigkeit von Ω

Axiomatischer Aufbau der Stochastik

Eine Funktion P , die jedem Ereignis A eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Axiom I: $P(A) \geq 0$
- Axiom II: $P(\Omega) = 1$
- Axiom III: $A \cap B = \{ \} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ wenn die Schnittmenge zweier Ereignisse leer ist, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier Ereignisse $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eigenschaften

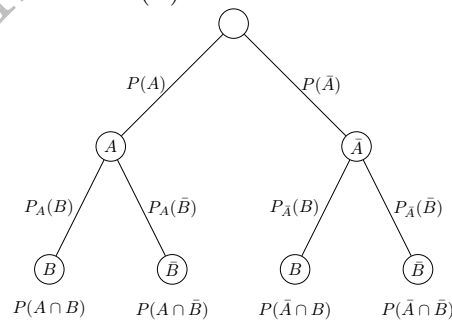
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\{ \}) = 0$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$ mit $A \subseteq \Omega$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ist das Ereignis A eingetreten, dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten eines Ereignisses B gleich

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Folgt aus der Anwendung der Pfadregeln.



Nach der ersten Pfadregel berechnet sich die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ durch das Produkt der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten. Es gilt damit also $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ und daraus folgt die Beziehung: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Andernfalls nennt man diese **stochastisch abhängig**.

Kombinatorik

- Permutation als Anordnung von n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge $\rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Unterscheidungsmöglichkeiten in einem Urnenexperimentes: Man zieht aus einer Menge mit n Elementen k -Elemente heraus

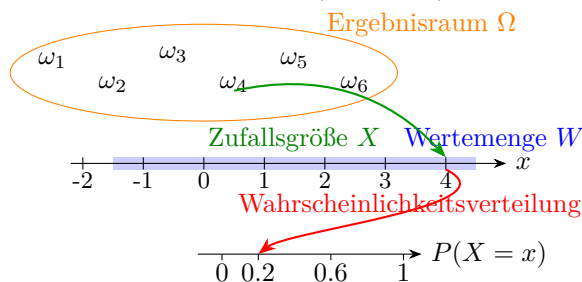
	Mit Reihenfolge	Ohne Reihenfolge
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

- Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch $\rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Besondere Werte des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{n} = 1$

Zufallsgrößen

- Eine Funktion X , die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl x zuordnet, heißt **Zufallsgröße**⁸ X .
- Jeder Wert x einer ZG X tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ auf. Die Funktion, die jedem Wert x einer ZG X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der ZG X .
- Als Beispiel ist hier $P(X = 4) = 0,2$ dargestellt.



Erwartungswert und Varianz

- Eine ZG nimmt die Werte x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$ an. Dann heißt der zu erwartende Mittelwert $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$
 $= x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$
Erwartungswert von X . **Hinweis:** Der Erwartungswert μ ist häufig **kein** Wert, den die ZG annimmt.
- Eine ZG mit $E(X) = \mu$ nehme die Werte x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$ an. Dann heißt die mittlere quadratische Abweichung von μ **Varianz** von X :
 $Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
 $= (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$
- Die Standardabweichung σ einer ZG X bestimmt sich durch $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Hypergeometrische Verteilung

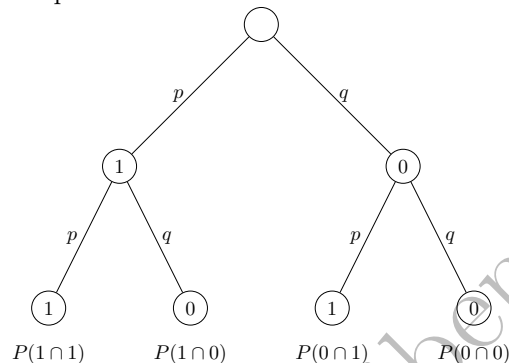
- Als Anwendung der Kombinatorik mit den Einschränkungen **ziehen ohne zurücklegen** und **ohne Beachtung der Reihenfolge**
- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Objekte ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus n verschiedenen Objekten auszuwählen.
- Aus einer Urne mit N Kugeln, wovon S schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die ZG X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße
 $P(X = k) = \frac{\binom{S}{k} \cdot \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit $k \leq n$ und $k \leq S$
- Beispiel: ① $N = 200$, $S = 10$, $n = 180$ und $k = 9$
 ② $P(X = 9) = \frac{\binom{10}{9} \cdot \binom{190}{171}}{\binom{200}{180}} \approx 39,74\%$

Binomialverteilung

Bernoulli-Kette

- Ein ZG mit nur zwei möglichen Ergebnissen nennt man Bernoulli-Experiment \rightarrow Treffer "1" bzw. Niete "0"
- Trefferwahrscheinlichkeit p

- Nietenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$
- Wird ein Bernoulli-Experiment n -mal unabhängig durchgeführt, spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der **Länge n** .
- Die Trefferwahrscheinlichkeit p bleibt dabei konstant \rightarrow ziehen ohne zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge
- Beispiel mit zwei Stufen



Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ω in einer Bernoulli-Kette \rightarrow Wahrscheinlichkeit entlang eines Astes
 $P_p^n(\omega) = \underbrace{p^k}_{\text{Trefferwahrscheinlichkeit}} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{Nietenwahrscheinlichkeit}}$
- Wahrscheinlichkeit für **genau k** Treffer beträgt
 $P_p^n(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anzahl der Pfade mit } k \text{ Treffern}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- Mindestens ein Treffer
 $P_p^n(X \geq 1) = 1 - P_p^n(X = 0) = 1 - q^n$
- Anwendung der Wahrscheinlichkeiten \rightarrow 3m-Aufgaben

① Mindest-Trefferwahrscheinlichkeit p bei gegebenem n

$$\begin{aligned} P_p^5(X \geq 1) &\geq 0,9 \\ 1 - P_p^5(X = 0) &\geq 0,9 \\ 1 - (1-p)^5 &\geq 0,9 \\ p &\geq \sqrt[5]{0,1} \end{aligned}$$

② Mindest-Anzahl an Versuchen n bei gegebenem p

$$\begin{aligned} P_{0,6}^n(X \geq 1) &\geq 0,999 \\ 1 - P_{0,6}^n(X = 0) &\geq 0,999 \\ 1 - (0,4)^n &\geq 0,9 \\ n &\geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)} \end{aligned}$$

Erwartungswert und Varianz

- Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Binomialverteilung
 ① $B(n, p) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$
 ② kumulative Verteilung:
 $F_p^n(k) = P_p^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P_p^n(X = i)$
 $= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$ mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $Var(X) = n \cdot p \cdot q$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

⁸Zufallsgröße \rightarrow ZG