Analysis

Grundlagen:

- Binomische Formeln
  1 $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
  2 $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
  3 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- Potenzengesetze
  1 $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ und $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
  2 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
  3 $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
  4 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
  5 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

- Logarithmengesetze
  1 $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
  2 $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$
  3 $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$
  4 $\ln(x) = \log_e(x) \longrightarrow \ln(e^x) = x$
  5 $\mathrm{ld}(x) = \log_2(x)$
  6 $\lg(x) = \log_{10}(x)$

Lineare Transformationen:

Wir erhalten aus dem Graphen G_f der Funktion f den Graphen der Funktion g mit:
1 $g(x) = -f(x)$, indem man G_f an der x–Achse spiegelt
2 $g(x) = f(-x)$, indem man G_f an der y–Achse spiegelt
3 $g(x) = f(x) + a$ indem man G_f in Richtung der y–Achse um a verschiebt
4 $g(x) = f(x-a)$ indem man G_f in Richtung der x–Achse um a verschiebt
5 $g(x) = a \cdot f(x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der y–Achse mit dem Faktor a streckt bzw. staucht
6 $g(x) = f(a \cdot x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der x–Achse mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ staucht bzw. streckt.

Ableitungen:

1 jede Ableitung ist mit der $h-$Methode nachweisbar

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2 $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = 0$
3 $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$
4 $f(x) = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = c$
5 $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = m$
6 $f(x) = a \cdot g(x)$ mit $a \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
7 $f(x) = g(x) \pm h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
8 $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q} \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
9 $f(x) = g(x) \cdot h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
10 $f(x) = g(h(x)) \longrightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
11 $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Eselsbrücke[1] : $f'(x) = \dfrac{N \cdot AZ - Z \cdot AN}{N^2}$

Ableitung spezieller Funktionen:

- Trigonometrische Funktionen
  1 $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$
  2 $f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$
  3 $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  $\longrightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^2} = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

- e-Funktion
  1 $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$
  2 $f(x) = e^{h(x)} \longrightarrow f'(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)}$

- ln-Funktion
  1 $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

- Wurzel
  1 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
  2 $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n-1]{x}}$

Anwendung der 1. Ableitung

- Zusammenhang Steigung m des Graphen G_f einer Funktion f an der Stelle $x_0 \in G_f$ mit der 1. Ableitung:
  1 $f'(x_0) = m$
  2 $\tan(\alpha) = m \longrightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$

- Gleichung der Tangente y_T durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$
  $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Grenzwerte spezieller Funktionen:

- Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \longrightarrow e-$Funktion.

- Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0 \longrightarrow ln-$Funktion.

- Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden , so gilt $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (p(x) \cdot \ln(x)) = 0 \longrightarrow ln-$Funktion.

Funktionsklassen:

Lineare Funktionen

- Funktionsterm: $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$
  1 m – Steigung der Geraden 2 t – y-Achsenabschnitt

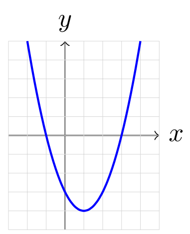
- Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade

- Berechnung der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Berechnung des y-Achsenabschnittes t $\longrightarrow$ die Steigung m und die Koordinaten eines Punktes $P(x_0|y_0)$ einsetzen und nach t auflösen

Quadratische Funktionen:

- allgemeine Form:$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$

- Graph:


- Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s|y_s)$ den Koordinaten des Scheitelpunktes

- Faktorisierte Form: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$ als Nullstellen der Funktion

- Nullstellen als Lösung der Gleichung
  $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \longrightarrow x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

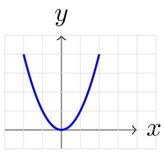
- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet $\longrightarrow$ Scheitelpunkt ist Tiefpunkt und es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

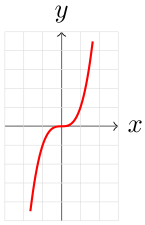
- Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet $\longrightarrow$ Scheitelpunkt ist Hochpunkt und es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

[1] N-Nenner, Z-Zähler, AZ - Ableitung Zähler, AN - Ableitung Nenner

Polynome:

- $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die restlichen $a_i \in \mathbb{R}$
- höchster Exponent legt den Grad des Polynoms fest $\longrightarrow$ hier $n-$ten Grades
- Beispielgraphen in Abhängigkeit des Grades:

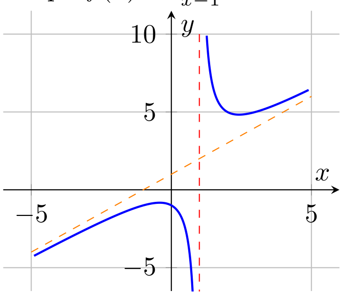




1 a gerade: 2 a ungerade:
3 n gerade und $a_n > 0 \longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$
4 n gerade und $a_n < 0 \longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$
5 n ungerade und $a_n > 0 \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
6 n ungerade und $a_n < 0 \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
- ab Grad $n > 2$ kennen wir keine Lösungsformel zur Berechnung der Nullstellen[2] $\longrightarrow$ ausklammern bzw. Newton-Verfahren zur Näherung der Nullstellen

Gebrochen-rationale Funktionen

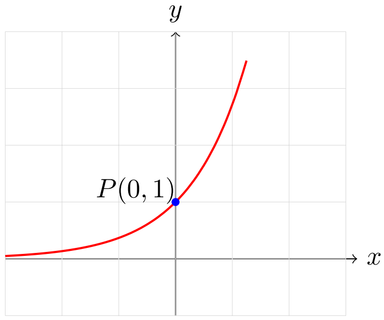
- $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_i\}$ mit $n(x_i) = 0$
- Definitionslücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms
- Nullstellen berechnen sich durch $0 = z(x)$ sind also die Nullstellen des Zählerpolynoms
- Graph $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$



Hinweis: Bei der Monotonie- und Krümmungsuntersuchung muss die Definitionslücke explizit betrachtet werden, an der Definitionslücke kann sich das Monotonie- und Krümmungsverhalten ändern
- Asymptoten: Die Art der Asymptote einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\max}$ hängt vom Grad der Polynome des Zählers als auch des Nenners ab[3].
1 z < n: die $x-$Achse ist waagerechte Asymptote $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0$
2 z = n: waagerechte Asymptote die parallel zur x-Achse verläuft $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$
3 z = n+1: schräge Asymptote die direkt aus der Summenform ablesbar ist
4 z > n +1: Näherungskurve

$e-$Funktion:

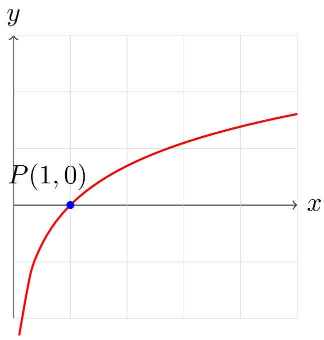
- $f(x) = e^x$
- Graph der Funktion $f(x) = e^x$



- Ableitung: $f'(x) = e^x$
- Grenzwerte:
1 $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0$
2 $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$
- $f(x) > 0$: für alle $x \in \mathbb{R}$ Hinweis: Die $e-$Funktion wächst schneller als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
- Bei der Kurvendiskussion wird die $e-$Funktion meistens als Produkt mit einer anderen Funktion betrachtet.[4]

$ln-$Funktion:

- $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
- Graph der Funktion $f(x) = \ln(x)$



- Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$
- Grenzwerte:
1 $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
2 $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$
- Hinweis: Die $ln-$Funktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
- Bei der Kurvendiskussion wird die $ln-$Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.[5]

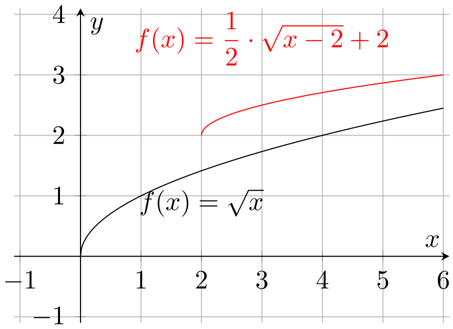
Wurzelfunktion:

- $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b} + c$ und $x \geq b$ ist eine Halbparabel und ergibt sich durch folgende lineare Transformationen aus der allgemeinen Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ wie folgt:
1 Verschiebung um b in x-Richtung
2 Strecken bzw. Stauchen mit dem Faktor a in y-Richtung
3 Verschiebung um c in y-Richtung

[2] Für $n = 2$ eist das Polynom eine Quadratischen Funktion
[3] z-Grad des Zählers; n - Grad des Nenners

[4] $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} \longrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot h'(x) \cdot e^{h(x)}$
[5] $f(x) = \ln(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

- Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2}+2$



- Ableitung $f(x) = \sqrt{g(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \cdot \sqrt{g(x)}}$

allgemeine Sinusfunktion:

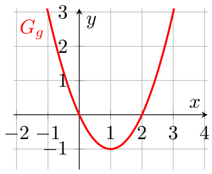
- $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$
1 Der Parameter a ändert die Amplitute, also die maximale Auslenkung der Kurve.
2 Der Parameter b streckt bzw. staucht die Kurve in Richtung der x-Achse. Durch den Faktor b wird damit die Periode p verändert $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$.
3 Der Parameter c verschiebt die Kurve in Richtung der x-Achse.
4 Der Parameter d verschiebt die Kurve in Richtung der y-Achse.

- Ableitung: $f'(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x-c)) \cdot b$

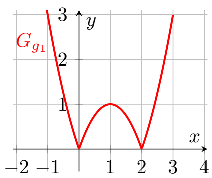
- Bei der Kurvendiskussion wird die sin −Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.[6]

Betragsfunktionen:

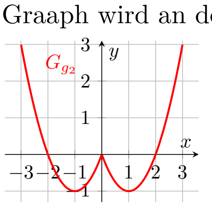
- Wird eine Funktion g linaren Transformationnen in Form des Betrags unterworfen ergeben sich unterschiedliche Graphen. Diese Graphen haben allerdings gemeinsam, dass die Nicht-Differenzierbarkeit an bestimmten Stellen sich nicht ändert.



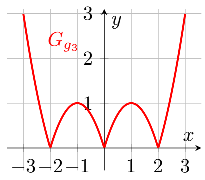
- $g_1(x) = |f(x)|$: Die Punkte mit negativen Funktionswerten werden an der $x-Achse$ gespiegelt. Die Spiegelung erfolgt damit an den Nullstellen.



- $g_2(x) = f(|x|)$: Der im positive Teil der $x-Achse$ liegende Graaph wird an der $y-Achse$ gespiegelt.



- $g_3(x) = |f(|x|)|$: Wird sowohl der Betrag der $x-Werte$ als auch der Betrag der Funktionswerte gebildet, werden zunächst die Punkte mit positiven $x-$Werten an der $y-$Achse gespiegelt um anschließend die Punkte mit negativen Funktionswerten an der $x-$Achse zu spiegeln.



- Betragsfunktionen sind an Knickstellen nicht differenzierbar $\longrightarrow$ Nachweis über die $h-$Methode.

Kurvendiskussion: Bei der Kurvendiskussion werden Eigenschaften des Graphen G_f einer Funktion f analytisch untersucht

Untersuchung der Ausgangsfunktion:

- Untersuchung folgender Eigenschaften:
1 Definitionsbereich $\longrightarrow$ bei gebrochen-rationalen Funktion z.B. Berechnung der Definitionslücken
2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $\longrightarrow$ Nullstellen und Schnittpunkt mit der $y-$Achse
3 Symmetrie zum Ursprung bzw. zur $y-$Achse
4 Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs $\longrightarrow$ Grenzwerte und Verhalten an Definitionslücken
5 Asymptoten

- je nach Funktionsklasse sind die Rechnungen unterschiedlich

Monotonie:

- Ist die Funktion f im Intervall I differenzierbar dann ist G_f für
$$\left.\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{streng monoton} \quad \left\{\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}\right.$$

- Hinweis: Für die Existenz einer Extremstellen $x_0 \in G_f$ sind zwei Bedingungen notwendig:
1 $f'(x_0) = 0$
2 $f''(x_0) \neq 0$

- Die Art der einzelnen Extremstellen läßt sich leicht durch die Vorzeichenwechsel (VZW) der Ableitung an der Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ bestimmen.
  - Hochpunkt (HoP) $HoP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von positiv nach negativ gibt.
  1 $f'(x_0) = 0$
  2 $f''(x_0) < 0$
  - Tiefpunkt (TiP) $TiP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von negativ nach positiv gibt.
  1 $f'(x_0) = 0$
  2 $f''(x_0) > 0$

- Untersuchung der Monotonie und der Extremstellen
1 Bestimmung der Nullstelle der 1. Ableitung
2 Untersuchung der Monotonie mit Hilfe der Monotonietabelle
3 Entscheidungen zu möglichen Extremstellen

- Monotonietabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstellen von $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$ festgelegt werden.
Hinweis: Beispiel mit zwei Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
G_f	smw	HoP	smf	TiP	smw

Krümmungsverhalten:

- Der Punkt, an dem sich die Krümmung des Graphen der Funktion f ändert, heißt Wendepunkt.

- Am Wendepunkt des Graphen liegt ein Extremwert der lokalen Änderungsrate vor.

[6] $f(x) = \sin(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

- Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente.

- Zusammenhang der lokalen Änderungsrate und der Krümmung:
  $\boxed{1}$ Ist die Funktion f im Intervall I zweimal stetig differenzierbar und ist für alle $x \in I$ der Funktionswert $f''(x)$ positiv, dann ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.
  $\boxed{2}$ Ist die Funktion f im Intervall I zweimal stetig differenzierbar und ist für alle $x \in I$ der Funktionswert $f''(x)$ negativ, dann ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.

- Untersuchung der Krümmung und der Wendestellen
  $\boxed{1}$ Bestimmung der Nullstelle der 2. Ableitung
  $\boxed{2}$ Untersuchung der Krümmung mit Hilfe der Krümmungstabelle
  $\boxed{3}$ Entscheidungen zu möglichen Wendestellen

- Ein Wendepunkt liegt nur vor, wenn sich das Krümmungsverhalten ändert.

- Krümmungstabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstelle von $f''(x_1) = 0$ festgelegt werden.
  Hinweis: Beispiel mit einer Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < \infty$
$f''(x)$	-	0	+
G_f	rechtsgekrümmt	Wendepunkt WP	linksgekrümmt

Graph:

- alle berechneten Punkte werden jetzt im Koordinatensystem markiert um dann einen Graphen zu skizzieren

Beispiel $f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$

- Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

- Untersuchungen der Symmetrie:
  $f(-x) = \frac{1}{16} \cdot (-x)^4 + \frac{1}{4} \cdot (-x)^3 = \frac{1}{16} \cdot x^4 - \frac{1}{4} \cdot x^3 \neq \pm f(x)$
  Damit ist der Graph G_f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.

- Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 = \infty$$

- Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:
  $\boxed{1}$ Schnittpunkt mit der y-Achse $\longrightarrow f(0) = \frac{1}{16}0^4 + \frac{1}{4}0^3 = 0$
  $\boxed{2}$ Schnittpunkte mit der x-Achse $\longrightarrow 0 = \frac{1}{16}x^3(x+4)$
  $\longrightarrow SP_{x_1} = SP_{x_2} = SP_{x_3}(0|0)$ und $SP_{x_4}(-4|0)$

- Monotonie des Graphen
  $\boxed{1}$ 1. Ableitung $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
  $\boxed{2}$ Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung
  $\boxed{3}$ $0 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \longrightarrow x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = -3$
  $\boxed{4}$ Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
G_f	smf	$TiP(-3\vert-\frac{27}{16})$	smw	$TP(0\vert0)$	smw

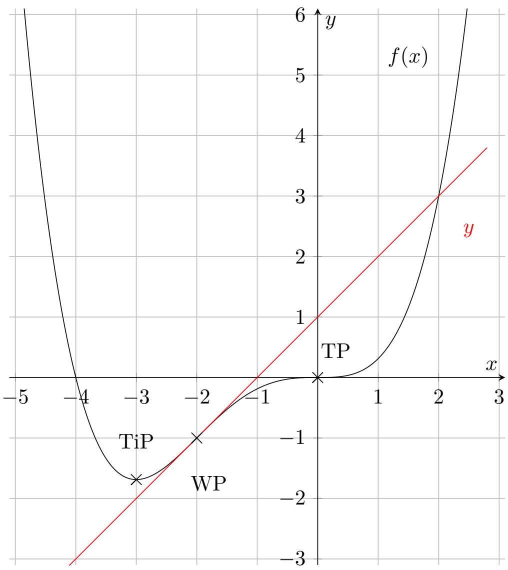
- Krümmungsuntersuchung:
  $\boxed{1}$ 2. Ableitung $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$
  $\boxed{2}$ Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung
  $\boxed{3}$ $0 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \longrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$
  $\boxed{4}$ Krümmungstabelle

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
G_f	linksgekr.	$WP(-2\vert-1)$	rechtsgekr.	$WP(0\vert0)$	linksgekr.

- Berechnung der Wendetangente am Punkt $P(-2|-1)$:
  $\boxed{1}$ Steigung an der Wendestelle $x_0 = -2$ durch $f'(-2) = 1$
  $\boxed{2}$ einsetzen in $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
  $\longrightarrow y_T = 1 \cdot (x - (-2)) + (-1) = x + 1$

- Wertemenge $\mathbb{W} = [-\frac{27}{16} \mid \infty [$

- Graph:



Platz für eigene Notizen: Notizen: