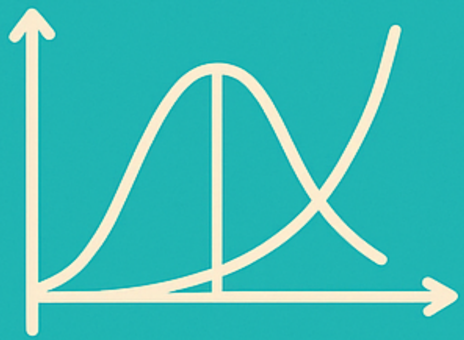
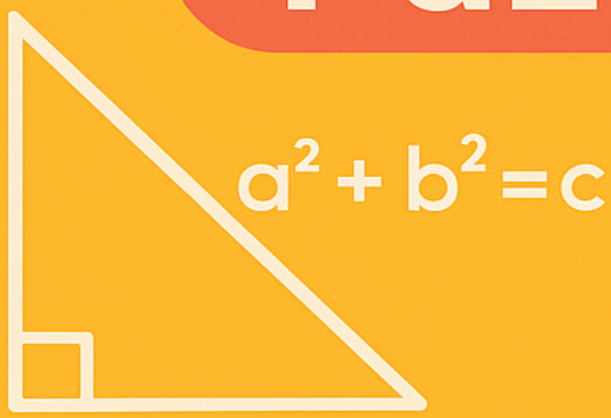


Wissensspeicher Mathematik

PuLSt 12



Gymnasium Bayern

Analysis

Grundlagen:

- Binomische Formeln
  1 $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$
  2 $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$
  3 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- Potenzengesetze
  1 $a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$ und $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
  2 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
  3 $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$
  4 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
  5 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

- Logarithmengesetze
  1 $\log_a(b\cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
  2 $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c)$
  3 $\log_a(b^r) = r\cdot \log_a(b)$
  4 $\ln(x) = \log_e(x) \longrightarrow \ln(e^x) = x$
  5 $\mathrm{ld}(x) = \log_2(x)$
  6 $\lg(x) = \log_{10}(x)$

Lineare Transformationen:

Wir erhalten aus dem Graphen G_f der Funktion f den Graphen der Funktion g mit:
1 $g(x) = -f(x)$, indem man G_f an der x–Achse spiegelt
2 $g(x) = f(-x)$, indem man G_f an der y–Achse spiegelt
3 $g(x) = f(x) + a$ indem man G_f in Richtung der y–Achse um a verschiebt
4 $g(x) = f(x-a)$ indem man G_f in Richtung der x–Achse um a verschiebt
5 $g(x) = a\cdot f(x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der y–Achse mit dem Faktor a streckt bzw. staucht
6 $g(x) = f(a\cdot x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der x–Achse mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ staucht bzw. streckt.

Ableitungen:

1 jede Ableitung ist mit der $h-$Methode nachweisbar

$$f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2 $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = 0$
3 $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$
4 $f(x) = c\cdot x$ mit $c\in\mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = c$
5 $f(x) = m\cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = m$
6 $f(x) = a\cdot g(x)$ mit $a\in\mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = a\cdot g'(x)$
7 $f(x) = g(x) \pm h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
8 $f(x) = x^n$ mit $n\in\mathbb{Q} \longrightarrow f'(x) = n\cdot x^{n-1}$
9 $f(x) = g(x)\cdot h(x) \longrightarrow f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$
10 $f(x) = g(h(x)) \longrightarrow f'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x)$
11 $f(x) = \dfrac{z(x)}{n(x)} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{n(x)\cdot z'(x) - z(x)\cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Eselsbrücke[1] : $f'(x) = \dfrac{N\cdot AZ - Z\cdot AN}{N^2}$

Ableitung spezieller Funktionen:

- Trigonometrische Funktionen
  1 $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$
  2 $f(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$
  3 $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
  $\longrightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

- e-Funktion
  1 $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$
  2 $f(x) = e^{h(x)} \longrightarrow f'(x) = h'(x)\cdot e^{h(x)}$

- ln-Funktion
  1 $f(x) = \ln(x)$ mit $x\in\mathbb{R}^+ \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

- Wurzel
  1 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac12} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac12} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
  2 $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac1n} \longrightarrow f'(x) = \frac1n \cdot x^{\frac1n - 1} = \frac{1}{n\cdot \sqrt[n-1]{x}}$

Anwendung der 1. Ableitung

- Zusammenhang Steigung m des Graphen G_f einer Funktion f an der Stelle $x_0 \in G_f$ mit der 1. Ableitung:
  1 $f'(x_0) = m$
  2 $\tan(\alpha) = m \longrightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$

- Tangentengleichung y_T durch den Punkt $P(x_0|f(x_0)) \in G_f$
  $y_T = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

- Newton-Verfahren $\longrightarrow$ Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen
  1 Startwert $x_0 \longrightarrow$ je näher an der NS desto besser
  2 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Grenzwerte spezieller Funktionen:

- Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \longrightarrow e-$Funktion.

- Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0 \longrightarrow ln-$Funktion.

- Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden , so gilt $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(p(x)\cdot\ln(x)) = 0 \longrightarrow ln-$Funktion.

Funktionsklassen:

Lineare Funktionen

- Funktionsterm: $f(x) = m\cdot x + t$ mit $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $t\in\mathbb{R}$
  1 m – Steigung der Geraden 2 t – y-Achsenabschnitt

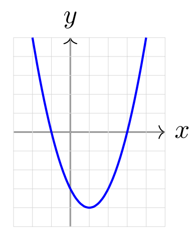
- Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade

- Berechnung der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- Berechnung des y-Achsenabschnittes t $\longrightarrow$ die Steigung m und die Koordinaten eines Punktes $P(x_0|y_0)$ einsetzen und nach t auflösen

Quadratische Funktionen:

- allgemeine Form: $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ mit $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b, c\in\mathbb{R}$

- Graph: 

- Scheitelpunktform: $f(x) = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s|y_s)$ den Koordinaten des Scheitelpunktes

- Faktorisierte Form: $f(x) = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$ als Nullstellen der Funktion

- Nullstellen als Lösung der Gleichung
  $0 = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \longrightarrow x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

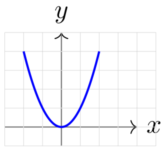
- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet $\longrightarrow$ Scheitelpunkt ist Tiefpunkt und es gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

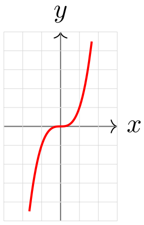
[1]N-Nenner, Z-Zähler, AZ - Ableitung Zähler, AN - Ableitung Nenner

- Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet $\longrightarrow$ Scheitelpunkt ist Hochpunkt und es gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

Polynome:

- $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots a_1 \cdot x + a_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die restlichen $a_i \in \mathbb{R}$
- höchster Exponent legt den Grad des Polynoms fest $\longrightarrow$ hier $n-$ten Grades
- Beispielgraphen in Abhängigkeit des Grades:

1 a gerade: 

2 a ungerade: 

3 n gerade und $a_n > 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

4 n gerade und $a_n < 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

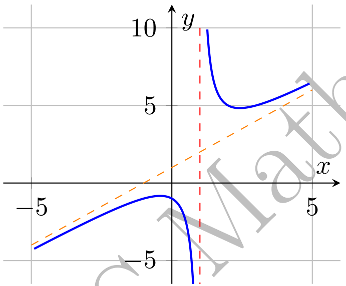
5 n ungerade und $a_n > 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

6 n ungerade und $a_n < 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

- ab Grad $n > 2$ kennen wir keine Lösungsformel zur Berechnung der Nullstellen[2] $\longrightarrow$ ausklammern bzw. Newton-Verfahren zur Näherung der Nullstellen

Gebrochen-rationale Funktionen

- $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_i\}$ mit $n(x_i) = 0$
- Definitionslücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms
- Nullstellen berechnen sich durch $0 = z(x)$ sind also die Nullstellen des Zählerpolynoms
- Graph $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$



Hinweis: Bei der Monotonie- und Krümmungsuntersuchung muss die Definitionslücke explizit betrachtet werden, an der Definitionslücke kann sich das Monotonie- und Krümmungsverhalten ändern

- Asymptoten: Die Art der Asymptote einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\max}$ hängt vom Grad der Polynome des Zählers als auch des Nenners ab[3].

1 z < n: die $x-$Achse ist waagerechte Asymptote $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0$

2 z = n: waagerechte Asymptote die parallel zur x-Achse verläuft $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

3 z = n+1: schräge Asymptote die direkt aus der Summenform ablesbar ist

Hinweis: $f(x) = \underbrace{x+1}_{\text{Gleichung der schrägen Asymptote}} + \frac{2}{x-1}$

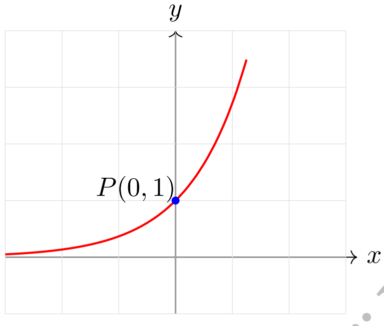
4 z > n +1: Näherungskurve

[2] Für $n = 2$ eist das Polynom eine Quadratischen Funktion

[3] z-Grad des Zählers; n - Grad des Nenners

$e-$Funktion:

- $f(x) = e^x$
- Graph der Funktion $f(x) = e^x$



- Ableitung: $f'(x) = e^x$
- Grenzwerte:

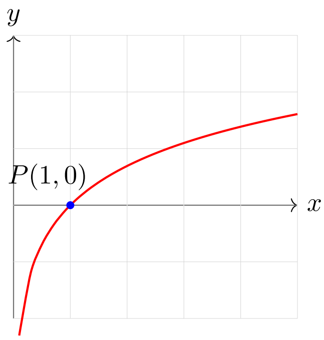
1 $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0$

2 $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$

- $f(x) > 0$: für alle $x \in \mathbb{R}$
Hinweis: Die $e-$Funktion wächst schneller als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
Hinweis: Eselsbrücke: e gewinnt!
- Bei der Kurvendiskussion wird die $e-$Funktion meistens als Produkt mit einer anderen Funktion betrachtet.[4]

$ln-$Funktion:

- $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
- Graph der Funktion $f(x) = \ln(x)$



- Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$
- Grenzwerte:

1 $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2 $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$

- Hinweis: Die $ln-$Funktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$,
Hinweis: Eselsbrücke: ln ist der Loser!
- Bei der Kurvendiskussion wird die $ln-$Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.[5]

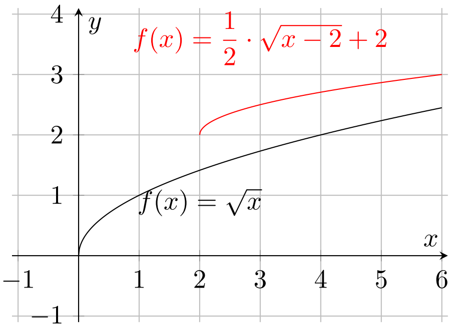
[4] $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} \longrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot h'(x) \cdot e^{h(x)}$

[5] $f(x) = \ln(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Wurzelfunktion:

- $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b} + c$ und $x \geq b$ ist eine Halbparabel und ergibt sich durch folgende lineare Transformationen aus der allgemeinen Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ wie folgt:
  1 Verschiebung um b in x-Richtung
  2 Strecken bzw. Stauchen mit dem Faktor a in y-Richtung
  3 Verschiebung um c in y-Richtung

- Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 2$



- Ableitung $f(x) = \sqrt{g(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \cdot \sqrt{g(x)}}$

allgemeine Sinusfunktion:

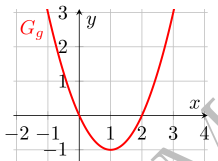
- $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$
  1 Der Parameter a ändert die Amplitute, also die maximale Auslenkung der Kurve.
  2 Der Parameter b streckt bzw. staucht die Kurve in Richtung der x-Achse. Durch den Faktor b wird damit die Periode p verändert $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$.
  3 Der Parameter c verschiebt die Kurve in Richtung der x-Achse.
  4 Der Parameter d verschiebt die Kurve in Richtung der y-Achse.

- Ableitung: $f'(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) \cdot b$

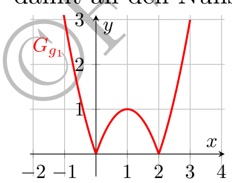
- Bei der Kurvendiskussion wird die $\sin -$Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.[6]

Betragsfunktionen:

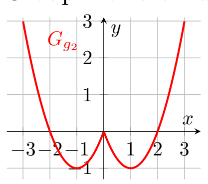
- Wird eine Funktion g linaren Transformationnen in Form des Betrags unterworfen ergeben sich unterschiedliche Graphen. Diese Graphen haben allerdings gemeinsam, dass die Nicht-Differenzierbarkeit an bestimmten Stellen sich nicht ändert.



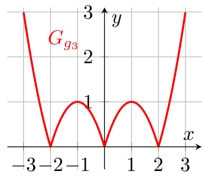
- $g_1(x) = |f(x)|$: Die Punkte mit negativen Funktionswerten werden an der $x - Achse$ gespiegelt. Die Spiegelung erfolgt damit an den Nullstellen.



- $g_2(x) = f(|x|)$: Der im positive Teil der $x - Achse$ liegende Graaph wird an der $y - Achse$ gespiegelt.



- $g_3(x) = |f(|x|)|$: Wird sowohl der Betrag der $x - Werte$ als auch der Betrag der Funktionswerte gebildet, werden zunächst die Punkte mit positiven $x-$Werten an der $y-$Achse gespiegelt um anschließend die Punkte mit negativen Funktionswerten an der $x-$Achse zu spiegeln.



- Betragsfunktionen sind an Knickstellen nicht differenzierbar $\longrightarrow$ Nachweis über die $h-$Methode.

Kurvendiskussion:

Bei der Kurvendiskussion werden Eigenschaften des Graphen G_f einer Funktion f analytisch untersucht

Untersuchung der Ausgangsfunktion:

- Untersuchung folgender Eigenschaften:
  1 Definitionsbereich $\longrightarrow$ bei gebrochen-rationalen Funktion z.B. Berechnung der Definitionslücken
  2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen $\longrightarrow$ Nullstellen und Schnittpunkt mit der $y-$Achse
  3 Symmetrie zum Ursprung bzw. zur $y-$Achse
  4 Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs $\longrightarrow$ Grenzwerte und Verhalten an Definitionslücken
  5 Asymptoten

- je nach Funktionsklasse sind die Rechnungen unterschiedlich

Monotonie:

- Ist die Funktion f im Intervall I differenzierbar dann ist G_f für

$$\left.\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{streng monoton} \quad \left\{\begin{matrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{matrix}\right.$$

- Hinweis: Für die Existenz einer Extremstellen $x_0 \in G_f$ sind zwei Bedingungen notwendig:
  1 $f'(x_0) = 0$
  2 $f''(x_0) \neq 0$

- Die Art der einzelnen Extremstellen läßt sich leicht durch die Vorzeichenwechsel (VZW) der Ableitung an der Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ bestimmen.
  - Hochpunkt (HoP) $HoP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von positiv nach negativ gibt.
    1 $f'(x_0) = 0$
    2 $f''(x_0) < 0$
  - Tiefpunkt (TiP) $TiP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von negativ nach positiv gibt.
    1 $f'(x_0) = 0$
    2 $f''(x_0) > 0$

- Untersuchung der Monotonie und der Extremstellen
  1 Bestimmung der Nullstelle der 1. Ableitung
  2 Untersuchung der Monotonie mit Hilfe der Monotonietabelle
  3 Entscheidungen zu möglichen Extremstellen

- Monotonietabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstellen von $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$ festgelegt werden.
  Hinweis: Beispiel mit zwei Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
G_f	smw	HoP	smf	TiP	smw

- wenn sich das Monotonieverhalten nicht ändert, liegt ein Terrassenpunkt vor

[6] $f(x) = \sin(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

- Bei gebrochen-rationalen Funktionen muss die Definitionslücke in der Monotonietabelle ebenfalls betrachtet werden.

Krümmungsverhalten:

- Der Punkt, an dem sich die Krümmung des Graphen der Funktion f ändert, heißt Wendepunkt.
- Am Wendepunkt des Graphen liegt ein Extremwert der lokalen Änderungsrate vor.
- Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente.
- Zusammenhang der lokalen Änderungsrate und der Krümmung:
  1 Ist die Funktion f im Intervall I zweimal stetig differenzierbar und ist für alle $x \in I$ der Funktionswert $f''(x)$ positiv, dann ist der Graph der Funktion f linksgekrümmt.
  2 Ist die Funktion f im Intervall I zweimal stetig differenzierbar und ist für alle $x \in I$ der Funktionswert $f''(x)$ negativ, dann ist der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt.
- Untersuchung der Krümmung und der Wendestellen
  1 Bestimmung der Nullstelle der 2. Ableitung
  2 Untersuchung der Krümmung mit Hilfe der Krümmungstabelle
  3 Entscheidungen zu möglichen Wendestellen
- Ein Wendepunkt liegt nur vor, wenn sich das Krümmungsverhalten ändert.
- Krümmungstabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstelle von $f''(x_1) = 0$ festgelegt werden.
  Hinweis: Beispiel mit einer Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < \infty$
$f''(x)$	-	0	+
G_f	rechtsgekrümmt	Wendepunkt WP	linksgekrümmt

Graph:

- alle berechneten Punkte werden jetzt im Koordinatensystem markiert um dann einen Graphen zu skizzieren

Beispiel $f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$

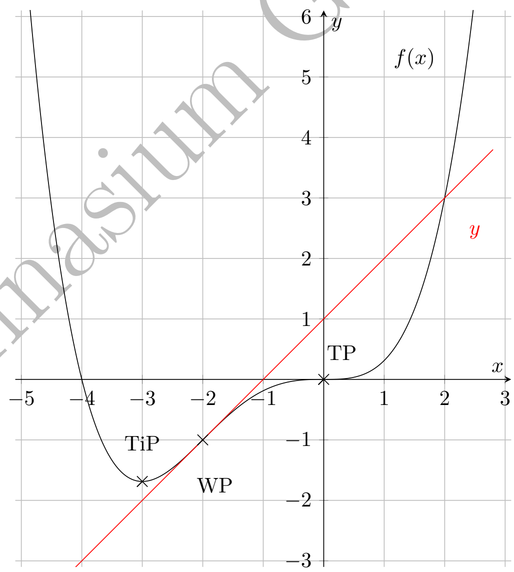
- Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
- Untersuchungen der Symmetrie:
  $f(-x) = \frac{1}{16} \cdot (-x)^4 + \frac{1}{4} \cdot (-x)^3 = \frac{1}{16} \cdot x^4 - \frac{1}{4} \cdot x^3 \neq \pm f(x)$
  Damit ist der Graph G_f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs
  $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 = \infty$$
  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 = \infty$$
- Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:
  1 Schnittpunkt mit der y-Achse $\longrightarrow f(0) = \frac{1}{16}0^4 + \frac{1}{4}0^3 = 0$
  2 Schnittpunkte mit der x-Achse $\longrightarrow 0 = \frac{1}{16}x^3(x+4)$
  $\longrightarrow SP_{x_1} = SP_{x_2} = SP_{x_3}(0|0)$ und $SP_{x_4}(-4|0)$
- Monotonie des Graphen
  1 1. Ableitung $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$
  2 Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung
  3 $0 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \longrightarrow x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = -3$
  4 Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
G_f	smf	$TiP(-3\mid -\frac{27}{16})$	smw	$TP(0\mid 0)$	smw

- Krümmungsuntersuchung:
  1 2. Ableitung $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$
  2 Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung
  3 $0 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \longrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$
  4 Krümmungstabelle

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
G_f	linksgekr.	$WP(-2\mid -1)$	rechtsgekr.	$WP(0\mid 0)$	linksgekr.

- Berechnung der Wendetangente am Punkt $P(-2|-1)$:
  1 Steigung an der Wendestelle $x_0 = -2$ durch $f'(-2) = 1$
  2 einsetzen in $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
  $\longrightarrow y_T = 1 \cdot (x - (-2)) + (-1) = x + 1$
- Wertemenge $\mathbb{W} = [-\frac{27}{16} \mid \infty[$
- Graph:



Platz für eigene Notizen: Notizen:

Analytische Geometrie

Elementargeometrische Grundlagen

- Flächeninhalt von ebenen Figuren
  $\boxed{1}$ Dreieck $\longrightarrow A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
  $\boxed{2}$ Parallelogramm $\longrightarrow A_P = g \cdot h$
  $\boxed{3}$ Trapez $\longrightarrow A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ hierbei sind a und c die Längen der Parallelen
  $\boxed{4}$ Drachenviereck $\longrightarrow A_{\text{Drache}} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ hierbei sind e und fe die Längen der Diagonalen
  $\boxed{5}$ Kreis $\longrightarrow A_K = \pi \cdot r^2$ und $U_{\text{K}} = 2 \cdot \pi \cdot r$ hierbei ist r der Radius des Kreises

- Volumen und Oberfläche von Körpern[7]
  $\boxed{1}$ Prisma $\longrightarrow V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$
  $\boxed{2}$ Pyramide $\longrightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$
  $\boxed{3}$ Zylinder $\longrightarrow V_{\text{Zylinder}} = A_G \cdot h$ und der Oberflächeninhalt eines geraden Zylinders $A_O = 2 \cdot A_G + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
  $\boxed{4}$ Kegel $\longrightarrow V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$ und der Oberflächeninhalt eines geraden Kegels $A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m$ mit m als Länge der Mantellinie
  $\boxed{5}$ Kugel $\longrightarrow V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ und der Oberflächeninhalt $A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Definition von Vektoren

- Vektoren sind Pfeile im zwei - bzw. dreidimensionalen Raum

- Jeder Vektor ist ein Repräsentant unendlich vieler, gleich langer, gleich gerichteter und paralleler Pfeile

- Vektoren werden häufig durch kleine Buchstaben und einem Pfeil darüber gekennzeichnet $\vec{a}$

- Verläuft ein Repräsentant eines Vektors von einem Punkt z.B. P zu einem zweiten Punkt z.B. Q, so bezeichnet man alle Repräsentanten mit $\overrightarrow{PQ}$.

- Werden mehrere Vektoren addiert so werden die jeweiligen Repräsentanten aneinandergereiht und das Ergebnis nennt man dann Vektorkette.

- Ein Vektor im 2- bzw. 3-dim. Raum wird in der Spaltenschreibweise durch 2 bzw. 3 Koordinaten beschrieben
  $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Der Vektor $\overrightarrow{0A} = \vec{A}$ bezeichnet denjenigen Vektor, der im Ursprung 0 beginnt um im Punkt A endet. Er wird als Ortsvektor bezeichnet.

Spiegelungen an den Koordinatenebenen

Der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird gespiegelt an

- x_1x_2-Ebene $\longrightarrow P(p_1|p_2|-p_3)$ Vorzeichen der x_3 Koordinaten wird geändert

- x_1x_3-Ebene $\longrightarrow P(p_1|-p_2|p_3)$ Vorzeichen der x_2 Koordinaten wird geändert

- x_2x_3-Ebene $\longrightarrow P(-p_1|p_2|p_3)$ Vorzeichen der x_1 Koordinaten wird geändert

Spiegelung am Koordinatenursprung

Der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird am Punkt $P(0|0|0)$ gespiegelt

- $P(-p_1|-p_2|-p_3)$ bei allen Koordinaten ändern sich die Vorzeichen

[7] hierbei ist A_G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Höhe

Eigenschaften von Vektoren

- Vektoraddition
  $\boxed{1}$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  $\boxed{2}$ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

- Nullvektor
  $\boxed{1}$ $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ $\boxed{2}$ Der Vektor $\vec{0}$ hat die Länge 0

- Gegenvektor
  $\boxed{1}$ Der Vektor $-\vec{a}$ ist der Gegenvektor zu $\vec{a}$
  $\boxed{2}$ $-\vec{a}$ ist genauso lang wir $\vec{a}$ und zu $\vec{a}$ entgegengerichtet

- skalare Multiplikation
  $\boxed{1}$ $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$
  $\boxed{2}$ Die skalare Multiplikation vervielfacht den Vektor durch den skalar $\lambda \in \mathbb{R}$
  $\boxed{3}$ Der Vektor $\lambda \cdot \vec{a}$ ist $|\lambda|-$ mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$
  $\boxed{4}$ Für $\lambda > 0$ hat er die gleiche Richtung wie $\vec{a}$
  $\boxed{5}$ Für $\lambda < 0$ hat er die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$

- Rechengesetze
  $\boxed{1}$ Assoziativgesetz: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
  $\boxed{2}$ Distibutivgesetz:
  $\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$

Rechnungen mit Vektoren

- Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$
  $$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$
  Hinweis: "Spitze minus Hacke"

- Summe von Vektoren $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

- Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$
  $\longrightarrow \vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right)$ bestimmt

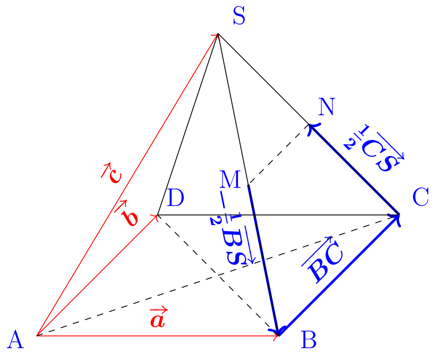
- Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$
  $\longrightarrow \vec{S}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{3}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$

- Schwerpunkt einer Pyramide $ABCS$
  $\longrightarrow \vec{S}_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{4}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{S}\right)$

Zusammenhang der Schwerpunkte

	Berechnung	Teilverhältnis
Schwerpunkt einer Strecke	$\vec{S}_{AB} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$	1:1
Schwerpunkt eines Dreiecks	$\vec{S}_{ABC} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$	1:2
Schwerpunkt einer Pyramide	$\vec{S}_{ABCD} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$	1:3

Beispiel für Vektorketten



Der Vektor $\overrightarrow{MN}$ wird mithilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ausgedrückt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) + \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

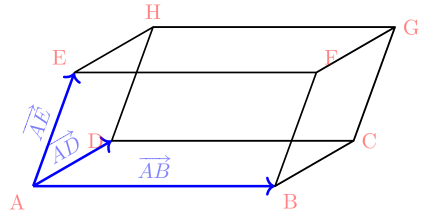
Damit folgt, das die Mittellinie $\overline{MN}$ parallel, gleichgerichtet aber nur halb so lang wie der Vektor $\vec{b}$ ist.

Operationen mit Vektoren

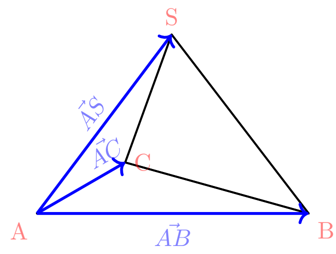
- Länge eines Vektors $\longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Skalare Multiplikation $\longrightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
- Skalarprodukt $\longrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R}$
- Vektorprodukt mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$
  $\longrightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$
- Spatprodukt $\longrightarrow$ Verknüpfung von Vektorprodukt und Skalarprodukt
  1 $d = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} \in \mathbb{R}$

Eigenschaften der Operationen

- Länge
  1 $|\vec{A}| \longrightarrow$ Abstand des Punktes A vom Urpsrung
  2 $|\overrightarrow{PQ}| \longrightarrow$ Abstand des beiden Punkte P und Q
- skalare Multiplikation
  1 $\lambda\vec{a} \longrightarrow$ Längenänderung von $\vec{a}$
  2 $\vec{a}^* = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \longrightarrow |\vec{a}^*| = 1$
- Skalarprodukt
  1 $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \curvearrowright \vec{a} \perp \vec{b}$
  2 Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  $\longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \curvearrowright \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$
- Vektorprodukt
  1 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$
  2 $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$
  3 Flächeninhalt $\triangle ABC \longrightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$
  4 Flächeninhalt Parallelogramm $\longrightarrow A_{\text{P}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Spatprodukt $\longrightarrow$ bestimmt ein Volumen
  1 Volumen eines Spates $\longrightarrow V_{\text{Spat}} = |\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AE}|$



2 Volumen einer dreiseitigen Pyramide
$\longrightarrow V_{\text{Pyramide}} = |\frac{1}{6} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}|$



Kugelgleichung

- Kugel um den Ursprung mit Radius r
  $\longrightarrow (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = r^2$
- Kugel um $M(m_1|m_2|m_3)$ mit Radius r
  $\longrightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Platz für eigene Notizen:

Notizen:

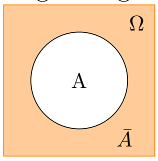
Stochastik

Ereignisalgebra

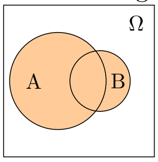
- Ein Ereignis A ist eine Teilmenge des Ergebnisraums Ω
- Ein Ereigni A tritt ein, wenn das Versuchsergebnis ω in A enthalten ist, es gilt also $\omega \in A$
- Alle Elemente von Ω sie nicht zum Ereignis A gehören, fasst man unter dem Namen Gegenereignis $\overline{A}$ zusammen, es gilt $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn gilt $A \cap B = \{\ \}$.

Venn-Diagramme

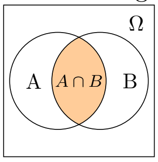
- Gegenereignis $\bar{A}$: "nicht A", Ereignis A tritt nicht ein



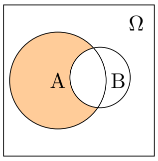
- Vereinigungsmenge $A \cup B$: "A oder B", Mindestens eines der beiden Ereignisse tritt ein



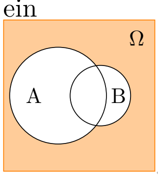
- Schnittmenge $A \cap B$: "A und B", Beide Ereignisse treten ein



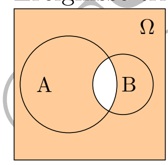
- "A und nicht B" $A \cap \overline{B}$: Es tritt genau das Ereignis A ein



- "nicht A und nicht B" $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$: Weder A noch B tritt ein



- "nicht A oder nicht B" $\bar{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$: Höchstens eines der Ereignisse tritt ein



Laplace-Wahrscheinlichkeiten

- Alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind gleich wahrscheinlich
- Beispiel: 1 drehen eines Glücksrads mit gleich großen Sektoren 2 "normaler" Würfel 3 Wurf mit einer "normalen" Münze
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist gleich der Anzahl der Elemente von A dividiert durch die Anzahl der Elemente von Ω
- $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$
- $|A|$ entspricht der Mächtigkeit von A
- $|\Omega|$ entspricht der Mächtigkeit von Ω

Axiomatischer Aufbau der Stochastik

Eine Funktion P, die jedem Ereignis A eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

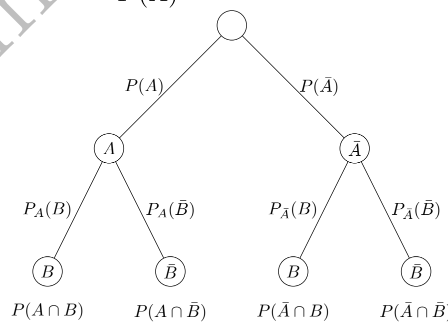
- Axiom I: $P(A) \geq 0$
- Axiom II: $P(\Omega) = 1$
- Axiom III: $A \cap B = \{\ \} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ wenn die Schnittmenge zweier Ereignisse leer ist, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier Ereignisse $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Eigenschaften

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\{\ \}) = 0$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$ mit $A \subseteq \Omega$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ist das Ereignis A eingetreten, dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses B gleich $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Folgt aus der Anwendung der Pfadregeln.



Nach der ersten Pfadregel berechnet sich die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ durch das Produkt der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten. Es gilt damit also $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ und daraus folgt die Beziehung: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Andernfalls nennt man diese stochastisch abhängig.

Kombinatorik

1 Permutation als Anordnung von n Objekten in einer bestimmten Reihenfolge $\longrightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

2 Unterscheidungsmöglichkeiten in einem Urnenexperimentes: Man zieht aus einer Menge mit n Elementen $k-$Elemente heraus

	Mit Reihenfolge	Ohne Reihenfolge
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

1 Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch $\longrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

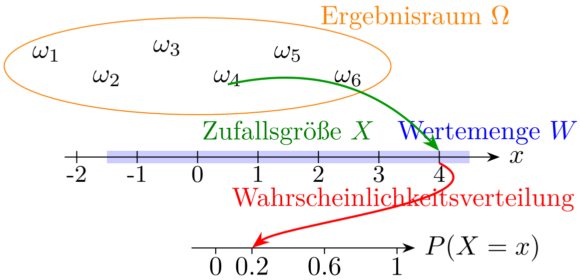
2 Besondere Werte des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{n} = 1$

Zufallsgrößen

- Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl x zuordnet, heißt Zufallsgröße[8] X.

- Jeder Wert x einer ZG X tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ auf. Die Funktion, die jedem Wert x einer ZG X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung der ZG X.

- Als Beispiel ist hier $P(X = 4) = 0,2$ dargestellt.



Erwartungswert und Varianz

- Eine ZG nimmt die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$ an. Dann heißt der zu erwartende Mittelwert
$\mu = E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$
$= x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$
Erwartungswert von X. Hinweis: Der Erwartungswert μ ist häufig kein Wert, den die ZG annimmt.

- Eine ZG mit $E(X) = \mu$ nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten
$P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$ an. Dann heißt die mittlere quadratische Abweichung von μ Varianz von X:
$Var(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
$= (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$

- Die Standardabweichung σ einer ZG X bestimmt sich durch $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Hypergeometrische Verteilung

- Als Anwendung der Kombinatorik mit den Einschränkungen ziehen ohne zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Objekte ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus n verschiedenen Objekten auszuwählen.

- Aus einer Urne mit N Kugeln, wovon S schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die ZG X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße
$P(X = k) = \frac{\binom{S}{k} \cdot \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ mit $k \leq n$ und $k \leq S$

- Beispiel: 1 $N = 200$, $S = 10$, $n = 180$ und $k = 9$
2 $P(X = 9) = \frac{\binom{10}{9} \cdot \binom{190}{171}}{\binom{200}{180}} \approx 39,74\%$

Binomialverteilung

Bernoulli-Kette

- Ein ZG mit nur zwei möglichen Ergebnissen nennt man Bernoulli-Experiment $\longrightarrow$ Treffer "1" bzw. Niete "0"

- Trefferwahrscheinlichkeit p

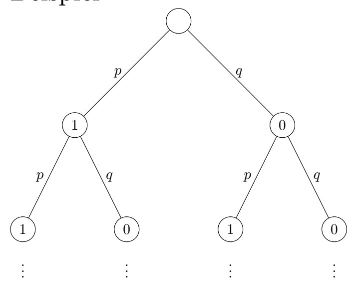
[8] Zufallsgröße $\longrightarrow$ ZG

- Nietenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$

- Wird ein Bernoulli-Experiment $n-$mal unabhängig durchgeführt, spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

- Die Trefferwahrscheinlichkeit p bleibt dabei konstant
$\longrightarrow$ ziehen ohne zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

- Beispiel



Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ω in einer Bernoulli-Kette $\longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit entlang eines Astes
$P_p^n(\omega) = \underbrace{p^k}_{\text{Trefferwahrscheinlichkeit}} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{Nietenwahrscheinlichkeit}}$

- Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer beträgt
$P_p^n(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anzahl der Pfade mit } k \text{ Treffern}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

- Mindestens ein Treffer
$P_p^n(X \geq 1) = 1 - P_p^n(X = 0) = 1 - q^n$

- Anwendung der Wahrscheinlichkeiten $\longrightarrow$ 3m$-$ Aufgaben
1 Mindest-Trefferwahrscheinlichkeit p bei gegebenem n

$$P_p^5(X \geq 1) \geq 0,9$$
$$1 - P_p^5(X = 0) \geq 0,9$$
$$1 - (1-p)^5 \geq 0,9$$
$$p \geq \sqrt[5]{0,1}$$

2 Mindest-Anzahl an Versuchen n bei gegebenem p

$$P_{0,6}^n(X \geq 1) \geq 0,999$$
$$1 - P_{0,6}^n(X = 0) \geq 0,999$$
$$1 - (0,4)^n \geq 0,999$$
$$n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)}$$

Erwartungswert und Varianz

- Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Binomialverteilung 1
$B(n,p) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ mit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$
2 kumulative Verteilung:
$F_p^n(k) = P_p^n(X \leq k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P_p^n(X = k)$
$= \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ mit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$

- Varianz: $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Hypothesentest

- Zwei sich ausschließende Hypothesen werden betrachtet
  1 Nullhypothese H_0 2 Gegenhypothese H_1

- Anzahl der Treffer einer Stichprobe mit festgelegter Länge bildet die Testgröße

- Wertebereich der Testgröße wird in den kritischen Bereich K (Ablehnungsbereich) und den nichtkritischen Bereich $\bar{K}$ (Annahmebereich) zerlegt

- liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in K, dann wird H_0 verworfen, ansonsten wird H_0 nicht verworfen (Entscheidungsregel).

- Fehler beim Testen von Hypothesen

Entscheidung	**H_0 ist wahr.**	**H_0 ist falsch.**
H_0 wird abgelehnt.	Fehler erster Art	Richtige Entscheidung
H_0 wird nicht abgelehnt.	Richtige Entscheidung	Fehler zweiter Art

1 Fehler erster Art: H_0 wird verworfen, obwohl sie wahr ist.
2 Fehler zweiter Art: H_0 wird beibehalten, obwohl sie falsch ist.
3 Durch eine Veränderung der Entscheidungsregel kann man nur die Wahrscheinlichkeit des Fehlers der einen Art auf Kosten der Wahrscheinlichkeit des Fehlers der anderen Art verringern.
4 Durch eine Erhöhung des Stichprobenumfangs können bei einem Test die Fehler 1. und 2. Art verringert werden. Allerdings ist eine solche Erhöhung in der Praxis auch mit erhöhten Kosten verbunden.

Platz für eigene Notizen: Notizen: