

Analysis

Grundlagen:

Binomische Formeln

- 1 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- 2 $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- 3 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Potenzengesetze

- 1 $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ und $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
- 2 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ und $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- 3 $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- 4 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- 5 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Logarithmengesetze

- 1 $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- 2 $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- 3 $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$
- 4 $\ln(x) = \log_e(x) \rightarrow \ln(e^x) = x$
- 5 $\text{ld}(x) = \log_2(x)$
- 6 $\lg(x) = \log_{10}(x)$

Lineare Transformationen:

Wir erhalten aus dem Graphen G_f der Funktion f den Graphen der Funktion g mit:

- 1 $g(x) = -f(x)$, indem man G_f an der x-Achse spiegelt
- 2 $g(x) = f(-x)$, indem man G_f an der y-Achse spiegelt
- 3 $g(x) = f(x) + a$ indem man G_f in Richtung der y-Achse um a verschiebt
- 4 $g(x) = f(x - a)$ indem man G_f in Richtung der x-Achse um a verschiebt
- 5 $g(x) = a \cdot f(x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der y-Achse mit dem Faktor a streckt bzw. staucht
- 6 $g(x) = f(a \cdot x)$ und $a > 0$, indem man G_f in Richtung der x-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ staucht bzw. streckt.

Ableitungen:

- 1 jede Ableitung ist mit der h -Methode nachweisbar

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 2 $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 0$
- 3 $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
- 4 $f(x) = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = c$
- 5 $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m, t \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = m$
- 6 $f(x) = a \cdot g(x)$ mit $a \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
- 7 $f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
- 8 $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q} \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- 9 $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- 10 $f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- 11 $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

$$\text{Eselsbrücke}^1: f'(x) = \frac{N \cdot AZ - Z \cdot AN}{N^2}$$

Ableitung spezieller Funktionen:

Trigonometrische Funktionen

- 1 $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- 2 $f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
- 3 $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 $\rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

e-Funktion

- 1 $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- 2 $f(x) = e^{h(x)} \rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)}$

ln-Funktion

- 1 $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Wurzel

- 1 $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 2 $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}}$

Anwendung der 1. Ableitung

- Zusammenhang Steigung m des Graphen G_f einer Funktion f an der Stelle $x_0 \in G_f$ mit der 1. Ableitung:

- 1 $f'(x_0) = m$
- 2 $\tan(\alpha) = m \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$

- Tangentengleichung y_T durch den Punkt $P(x_0|f(x_0)) \in G_f$
 $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Grenzwerte spezieller Funktionen:

- Ist $p(x)$ ein Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \rightarrow e$ -Funktion.
- Ist $p(x)$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0 \rightarrow \ln$ -Funktion.
- Ist $p(x)$ ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt $\lim_{x \rightarrow 0} (p(x) \cdot \ln(x)) = 0 \rightarrow \ln$ -Funktion.

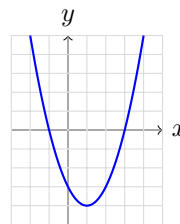
Funktionsklassen:

Lineare Funktionen

- Funktionsterm: $f(x) = m \cdot x + t$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$
 - 1 m - Steigung der Geraden
 - 2 t - y-Achsenabschnitt
- Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade
- Berechnung der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Berechnung des y-Achsenabschnittes $t \rightarrow$ die Steigung m und die Koordinaten eines Punktes $P(x_0|y_0)$ einsetzen und nach t auflösen

Quadratische Funktionen:

- allgemeine Form: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$

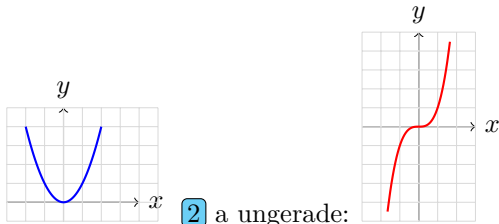


- Graph:
- Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ mit $S(x_s|y_s)$ den Koordinaten des Scheitelpunktes
- Faktorierte Form: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$ als Nullstellen der Funktion
- Nullstellen als Lösung der Gleichung
 $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet \rightarrow Scheitelpunkt ist Tiefpunkt und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet \rightarrow Scheitelpunkt ist Hochpunkt und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

¹N-Nenner, Z-Zähler, AZ - Ableitung Zähler, AN - Ableitung Nenner

Polynome:

- $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die restlichen $a_i \in \mathbb{R}$
- höchster Exponent legt den Grad des Polynoms fest \rightarrow hier n -ten Grades
- Beispielgraphen in Abhängigkeit des Grades:



1 a gerade:

3 n gerade und $a_n > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

4 n gerade und $a_n < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

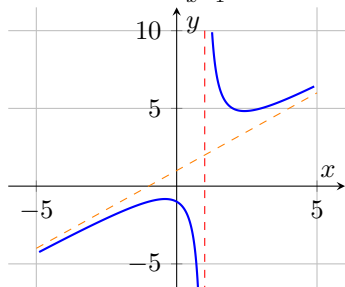
5 n ungerade und $a_n > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

6 n ungerade und $a_n < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

- ab Grad $n > 2$ kennen wir keine Lösungsformel zur Berechnung der Nullstellen² \rightarrow ausklammern bzw. Newton-Verfahren zur Näherung der Nullstellen

Gebrochen-rationale Funktionen

- $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_i\}$ mit $n(x_i) = 0$
- Definitionslücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms
- Nullstellen berechnen sich durch $0 = z(x)$ sind also die Nullstellen des Zählerpolynoms
- Graph $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$



Hinweis: Bei der Monotonie- und Krümmungsuntersuchung muss die Definitionslücke explizit betrachtet werden, an der Definitionslücke kann sich das Monotonie- und Krümmungsverhalten ändern

- Asymptoten: Die Art der Asymptote einer gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\max}$ hängt vom Grad der Polynome des Zählers als auch des Nenners ab³.

1 $z < n$: die x -Achse ist waagerechte Asymptote $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2 $z = n$: waagerechte Asymptote die parallel zur x -Achse verläuft $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

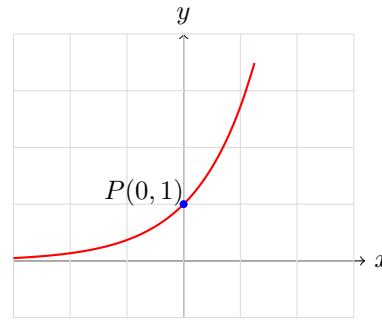
3 $z = n+1$: schräge Asymptote die direkt aus der Summenform ablesbar ist

Hinweis: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$
Gleichung der schrägen Asymptote

4 $z > n+1$: Näherungskurve

e-Funktion:

- $f(x) = e^x$
- Graph der Funktion $f(x) = e^x$



• Ableitung: $f'(x) = e^x$

• Grenzwerte:

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

• $f(x) > 0$: für alle $x \in \mathbb{R}$

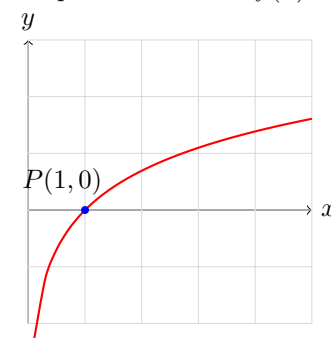
Hinweis: Die e -Funktion wächst schneller als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Hinweis: Eselsbrücke: e gewinnt!

- Bei der Kurvendiskussion wird die e -Funktion meistens als Produkt mit einer anderen Funktion betrachtet.⁴

ln-Funktion:

- $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
- Graph der Funktion $f(x) = \ln(x)$



• Ableitung $f'(x) = \frac{1}{x}$

• Grenzwerte:

1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

• **Hinweis:** Die \ln -Funktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$,

Hinweis: Eselsbrücke: \ln ist der Loser!

- Bei der Kurvendiskussion wird die \ln -Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.⁵

Wurzelfunktion:

- $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b} + c$ und $x \geq b$ ist eine Halbparabel und ergibt sich durch folgende lineare Transformationen aus der allgemeinen Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ wie folgt:

1 Verschiebung um b in x -Richtung

2 Strecken bzw. Stauchen mit dem Faktor a in y -Richtung

3 Verschiebung um c in y -Richtung

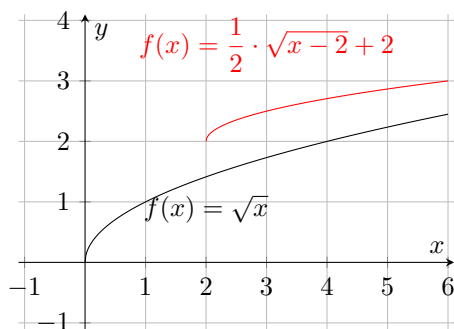
⁴ $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot h'(x) \cdot e^{h(x)}$

⁵ $f(x) = \ln(g(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

²Für $n = 2$ eist das Polynom eine Quadratischen Funktion

³ z -Grad des Zählers; n - Grad des Nenners

- Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 2$



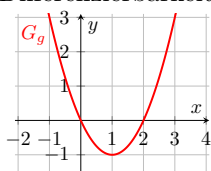
- Ableitung $f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \cdot \sqrt{g(x)}}$

allgemeine Sinusfunktion:

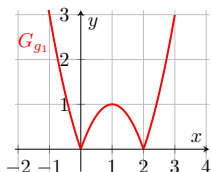
- $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$
 - Der Parameter a ändert die Amplitude, also die maximale Auslenkung der Kurve.
 - Der Parameter b streckt bzw. staucht die Kurve in Richtung der x -Achse. Durch den Faktor b wird damit die Periode p verändert $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$.
 - Der Parameter c verschiebt die Kurve in Richtung der x -Achse.
 - Der Parameter d verschiebt die Kurve in Richtung der y -Achse.
- Ableitung: $f'(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) \cdot b$
- Bei der Kurvendiskussion wird die \sin -Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.⁶

Betragsfunktionen:

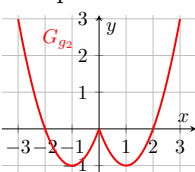
- Wird eine Funktion g linearen Transformationen in Form des Betrags unterworfen ergeben sich unterschiedliche Graphen. Diese Graphen haben allerdings gemeinsam, dass die Nicht-Differenzierbarkeit an bestimmten Stellen sich nicht ändert.



- $g_1(x) = |f(x)|$: Die Punkte mit negativen Funktionswerten werden an der x -Achse gespiegelt. Die Spiegelung erfolgt damit an den Nullstellen.

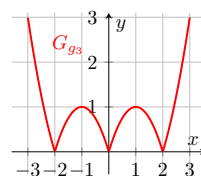


- $g_2(x) = f(|x|)$: Der im positive Teil der x -Achse liegende Graph wird an der y -Achse gespiegelt.



- $g_3(x) = |f(|x|)|$: Wird sowohl der Betrag der x -Werte als auch der Betrag der Funktionswerte gebildet, werden zunächst die Punkte mit positiven x -Werten an der y -Achse

gespiegelt um anschließend die Punkte mit negativen Funktionswerten an der x -Achse zu spiegeln.



- Betragsfunktionen sind an Knickstellen nicht differenzierbar \rightarrow Nachweis über die h -Methode.

Kurvendiskussion:

Bei der Kurvendiskussion werden Eigenschaften des Graphen G_f einer Funktion f analytisch untersucht

Untersuchung der Ausgangsfunktion:

- Untersuchung folgender Eigenschaften:
 - Definitionsbereich \rightarrow bei gebrochen-rationalen Funktion z.B. Berechnung der Definitionslücken
 - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen \rightarrow Nullstellen und Schnittpunkt mit der y -Achse
 - Symmetrie zum Ursprung bzw. zur y -Achse
 - Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs \rightarrow Grenzwerte und Verhalten an Definitionslücken
 - Asymptoten
- je nach Funktionsklasse sind die Rechnungen unterschiedlich

Monotonie:

- Ist die Funktion f im Intervall I differenzierbar dann ist G_f für

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \right\} \text{ streng monoton } \left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right.$$

- Hinweis:** Für die Existenz einer Extremstellen $x_0 \in G_f$ sind zwei Bedingungen notwendig:

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

- Die Art der einzelnen Extremstellen lässt sich leicht durch die Vorzeichenwechsel (VZW) der Ableitung an der Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ bestimmen.

- Hochpunkt (HoP) $HoP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von **positiv nach negativ** gibt.

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) < 0$

- Tiefpunkt (TiP) $TiP(x_0|f(x_0))$ genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von **negativ nach positiv** gibt.

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) > 0$

- Untersuchung der Monotonie und der Extremstellen

- Bestimmung der Nullstelle der 1. Ableitung
- Untersuchung der Monotonie mit Hilfe der Monotonietabelle
- Entscheidungen zu möglichen Extremstellen

- Monotonietabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstellen von $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$ festgelegt werden.

Hinweis: Beispiel mit zwei Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
G_f	smw	HoP	smf	TiP	smw

- wenn sich das Monotonieverhalten **nicht** ändert, liegt ein **Terrassenpunkt** vor

- Bei gebrochen-rationalen Funktionen **muss die Definitionslücke in der Monotonietabelle ebenfalls betrachtet werden.**

⁶ $f(x) = \sin(g(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

Krümmungsverhalten:

- Der Punkt, an dem sich die Krümmung des Graphen der Funktion f ändert, heißt Wendepunkt.
- Am Wendepunkt des Graphen liegt ein Extremwert der lokalen Änderungsrate vor.
- Ein Terrassenpunkt ist ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente.
- Zusammenhang der lokalen Änderungsrate und der Krümmung:
 - Ist die Funktion f im Intervall I zweimal stetig differenzierbar und ist für alle $x \in I$ der Funktionswert $f''(x)$ **positiv**, dann ist der Graph der Funktion f **linksgekrümmt**.
 - Ist die Funktion f im Intervall I zweimal stetig differenzierbar und ist für alle $x \in I$ der Funktionswert $f''(x)$ **negativ**, dann ist der Graph der Funktion f **rechtsgekrümmt**.
- Untersuchung der Krümmung und der Wendestellen
 - Bestimmung der Nullstelle der 2. Ableitung
 - Untersuchung der Krümmung mit Hilfe der Krümmungstabelle
 - Entscheidungen zu möglichen Wendestellen
- Ein Wendepunkt liegt nur vor, wenn sich das Krümmungsverhalten ändert.
- Krümmungstabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstelle von $f''(x_1) = 0$ festgelegt werden.

Hinweis: Beispiel mit einer Nullstellen:

x	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < \infty$
$f''(x)$	-	0	+
G_f	rechtsgekrümmt	Wendepunkt WP	linksgekrümmt

Graph:

- alle berechneten Punkte werden jetzt im Koordinatensystem markiert um dann einen Graphen zu skizzieren

Beispiel $f(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_{max}$

- Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
- Untersuchungen der Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{1}{16} \cdot (-x)^4 + \frac{1}{4} \cdot (-x)^3 = \frac{1}{16} \cdot x^4 - \frac{1}{4} \cdot x^3 \neq \pm f(x)$$
 Damit ist der Graph G_f weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 = \infty$$
- Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:
 - Schnittpunkt mit der y-Achse $\rightarrow f(0) = \frac{1}{16}0^4 + \frac{1}{4}0^3 = 0$
 - Schnittpunkte mit der x-Achse $\rightarrow 0 = \frac{1}{16}x^3(x+4)$
 $\rightarrow SP_{x_1} = SP_{x_2} = SP_{x_3}(0|0)$ und $SP_{x_4}(-4|0)$

- Monotonie des Graphen

1. Ableitung $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

2. Berechnung der Nullstellen der 1. Ableitung

3. $0 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = -3$

4. Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
G_f	smf	TiP(-3 - $\frac{27}{16}$)	smw	TP(0 0)	smw

- Krümmungsuntersuchung:

1. 2. Ableitung $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

2. Berechnung der Nullstellen der 2. Ableitung

3. $0 = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

4. Krümmungstabelle

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
G_f	linksgekr.	WP(-2 -1)	rechtsgekr.	WP(0 0)	linksgekr.

- Berechnung der Wendetangente am Punkt $P(-2|-1)$:

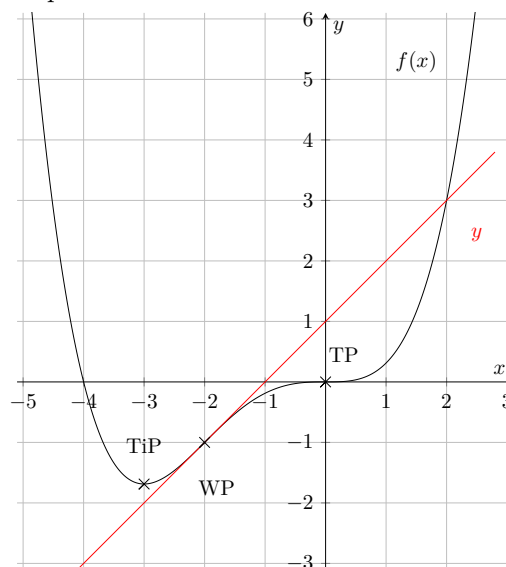
1. Steigung an der Wendestelle $x_0 = -2$ durch $f'(-2) = 1$

2. einsetzen in $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$\rightarrow y_T = 1 \cdot (x - (-2)) + (-1) = x + 1$

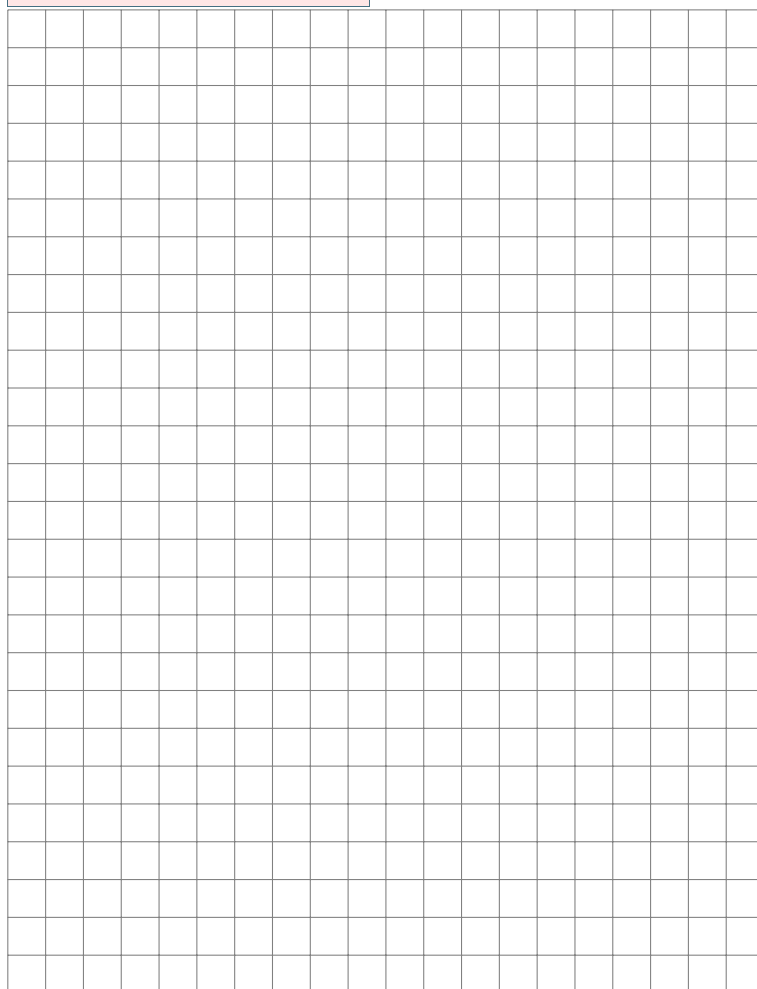
Wertemenge $W = [-\frac{27}{16} | \infty [$

- Graph:



Platz für eigene Notizen:

Notizen:



Analytische Geometrie

Vektoren

- Vektoren sind Pfeile im zwei - bzw. dreidimensionalen Raum
- Jeder Vektor ist ein Repräsentant unendlich vieler, gleich langer, gleich gerichteter und paralleler Pfeile