

# Analysis

## Grundlagen:

### Binomische Formeln

- 1  $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- 2  $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- 3  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

### Potenzengesetze

- 1  $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$  und  $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
- 2  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$  und  $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
- 3  $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- 4  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- 5  $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

### Logarithmengesetze

- 1  $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- 2  $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- 3  $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$
- 4  $\ln(x) = \log_e(x) \rightarrow \ln(e^x) = x$
- 5  $\lg(x) = \log_2(x)$
- 6  $\lg(x) = \log_{10}(x)$

## Lineare Transformationen:

Wir erhalten aus dem Graphen  $G_f$  der Funktion  $f$  den Graphen der Funktion  $g$  mit:

- 1  $g(x) = -f(x)$ , indem man  $G_f$  an der x-Achse spiegelt
- 2  $g(x) = f(-x)$ , indem man  $G_f$  an der y-Achse spiegelt
- 3  $g(x) = f(x) + a$  indem man  $G_f$  in Richtung der y-Achse um  $a$  verschiebt
- 4  $g(x) = f(x - a)$  indem man  $G_f$  in Richtung der x-Achse um  $a$  verschiebt
- 5  $g(x) = a \cdot f(x)$  und  $a > 0$ , indem man  $G_f$  in Richtung der y-Achse mit dem Faktor  $a$  streckt bzw. staucht
- 6  $g(x) = f(a \cdot x)$  und  $a > 0$ , indem man  $G_f$  in Richtung der x-Achse mit dem Faktor  $\frac{1}{a}$  staucht bzw. streckt.

## Ableitungen:

- 1 jede Ableitung ist mit der  $h$ -Methode nachweisbar

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 2  $f(x) = c$  mit  $c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = 0$
- 3  $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
- 4  $f(x) = c \cdot x$  mit  $c \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = c$
- 5  $f(x) = m \cdot x + t$  mit  $m, t \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = m$
- 6  $f(x) = a \cdot g(x)$  mit  $a \in \mathbb{R} \rightarrow f'(x) = a \cdot g'(x)$
- 7  $f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
- 8  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{Q} \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- 9  $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- 10  $f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
- 11  $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Eselsbrücke<sup>1</sup>:  $f'(x) = \frac{N \cdot AZ - Z \cdot AN}{N^2}$

## Ableitung spezieller Funktionen:

### Trigonometrische Funktionen

- 1  $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
- 2  $f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
- 3  $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$   
 $\rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

### e-Funktion

- 1  $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- 2  $f(x) = e^{h(x)} \rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)}$

### ln-Funktion

1  $f(x) = \ln(x)$  mit  $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

### Wurzel

1  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
2  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}}$

## Anwendung der 1. Ableitung

- Zusammenhang Steigung  $m$  des Graphen  $G_f$  einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 \in G_f$  mit der 1. Ableitung:

1  $f'(x_0) = m$   
2  $\tan(\alpha) = m \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(m)$

- Tangentengleichung  $y_T$  durch den Punkt  $P(x_0|f(x_0)) \in G_f$   
 $y_T = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

## Grenzwerte spezieller Funktionen:

- Ist  $p(x)$  ein Polynom, so gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \rightarrow e$ -Funktion.
- Ist  $p(x)$  ein nicht konstantes Polynom, so gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = 0 \rightarrow \ln$ -Funktion.
- Ist  $p(x)$  ein Polynom ohne konstanten Summanden, so gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} (p(x) \cdot \ln(x)) = 0 \rightarrow \ln$ -Funktion.

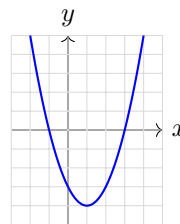
## Funktionsklassen:

### Lineare Funktionen

- Funktionsterm:  $f(x) = m \cdot x + t$  mit  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $t \in \mathbb{R}$   
1  $m$  - Steigung der Geraden 2  $t$  - y-Achsenabschnitt
- Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade
- Berechnung der Steigung  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Berechnung des y-Achsenabschnittes  $t \rightarrow$  die Steigung  $m$  und die Koordinaten eines Punktes  $P(x_0|y_0)$  einsetzen und nach  $t$  auflösen

## Quadratische Funktionen:

- allgemeine Form:  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $b, c \in \mathbb{R}$

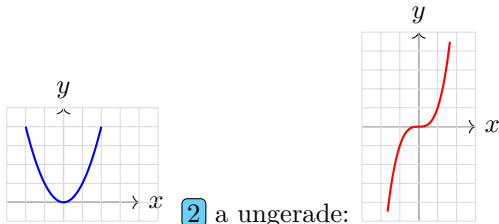


- Graph:
- Scheitelpunktform:  $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$  mit  $S(x_s|y_s)$  den Koordinaten des Scheitelpunktes
- Faktorierte Form:  $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$  mit  $f(x_1) = 0$  und  $f(x_2) = 0$  als Nullstellen der Funktion
- Nullstellen als Lösung der Gleichung  
 $0 = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
- Für  $a > 0$  ist die Parabel nach oben geöffnet  $\rightarrow$  Scheitelpunkt ist Tiefpunkt und es gilt  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- Für  $a < 0$  ist die Parabel nach unten geöffnet  $\rightarrow$  Scheitelpunkt ist Hochpunkt und es gilt  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$

<sup>1</sup>N-Nenner, Z-Zähler, AZ - Ableitung Zähler, AN - Ableitung Nenner

## Polynome:

- $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und die restlichen  $a_i \in \mathbb{R}$
- höchster Exponent legt den Grad des Polynoms fest  $\rightarrow$  hier  $n$ -ten Grades
- Beispielgraphen in Abhängigkeit des Grades:

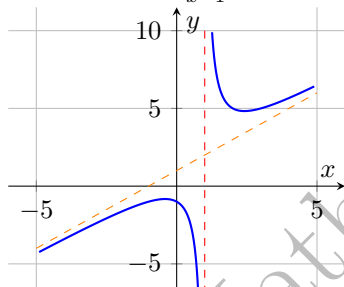


- 1 a gerade:
- 2 a ungerade:
- 3  $n$  gerade und  $a_n > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- 4  $n$  gerade und  $a_n < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$
- 5  $n$  ungerade und  $a_n > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- 6  $n$  ungerade und  $a_n < 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

- ab Grad  $n > 2$  kennen wir keine Lösungsformel zur Berechnung der Nullstellen<sup>2</sup>  $\rightarrow$  ausklammern bzw. Newton-Verfahren zur Näherung der Nullstellen

## Gebrochen-rationale Funktionen

- $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$  und  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_i\}$  mit  $n(x_i) = 0$
- Definitionslücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms
- Nullstellen berechnen sich durch  $0 = z(x)$  sind also die Nullstellen des Zählerpolynoms
- Graph  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$



**Hinweis:** Bei der Monotonie- und Krümmungsuntersuchung muss die Definitionslücke explizit betrachtet werden, an der Definitionslücke kann sich das Monotonie- und Krümmungsverhalten ändern

- Asymptoten: Die Art der Asymptote einer gebrochen-rationale Funktion  $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$  mit  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\max}$  hängt vom Grad der Polynome des Zählers als auch des Nenners ab<sup>3</sup>.

1  $z < n$ : die  $x$ -Achse ist waagerechte Asymptote  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2  $z = n$ : waagerechte Asymptote die parallel zur  $x$ -Achse verläuft  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$

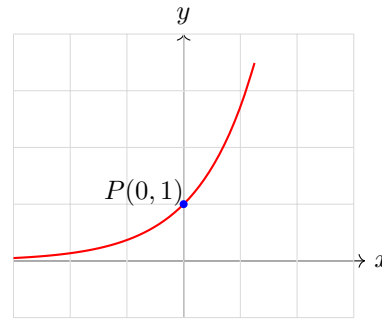
3  $z = n+1$ : schräge Asymptote die direkt aus der Summenform ablesbar ist

**Hinweis:**  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x-1}$   
Gleichung der schrägen Asymptote

4  $z > n+1$ : Näherungskurve

## e-Funktion:

- $f(x) = e^x$
- Graph der Funktion  $f(x) = e^x$



- Ableitung:  $f'(x) = e^x$

- Grenzwerte:

1  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- $f(x) > 0$ : für alle  $x \in \mathbb{R}$

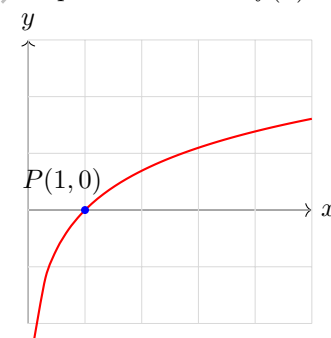
**Hinweis:** Die  $e$ -Funktion wächst schneller als jede Potenzfunktion  $g(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$

**Hinweis:** Eselsbrücke:  $e$  gewinnt!

- Bei der Kurvendiskussion wird die  $e$ -Funktion meistens als Produkt mit einer anderen Funktion betrachtet.<sup>4</sup>

## ln-Funktion:

- $f(x) = \ln(x)$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$
- Graph der Funktion  $f(x) = \ln(x)$



- Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{x}$

- Grenzwerte:

1  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- **Hinweis:** Die  $\ln$ -Funktion wächst langsamer als jede Potenzfunktion  $g(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,

**Hinweis:** Eselsbrücke:  $\ln$  ist der **Loser**!

- Bei der Kurvendiskussion wird die  $\ln$ -Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.<sup>5</sup>

## Wurzelfunktion:

- $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b} + c$  und  $x \geq b$  ist eine Halbparabel und ergibt sich durch folgende lineare Transformationen aus der allgemeinen Wurzelfunktion  $g(x) = \sqrt{x}$  wie folgt:

1 Verschiebung um  $b$  in  $x$ -Richtung

2 Strecken bzw. Stauchen mit dem Faktor  $a$  in  $y$ -Richtung

3 Verschiebung um  $c$  in  $y$ -Richtung

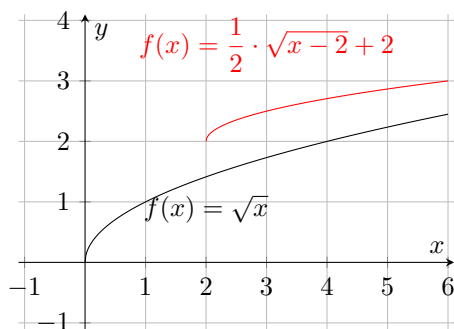
<sup>4</sup>  $f(x) = g(x) \cdot e^{h(x)} \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{h(x)} + g(x) \cdot h'(x) \cdot e^{h(x)}$

<sup>5</sup>  $f(x) = \ln(g(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

<sup>2</sup>Für  $n = 2$  eist das Polynom eine Quadratischen Funktion

<sup>3</sup> $z$ -Grad des Zählers;  $n$  - Grad des Nenners

- Graph der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + 2$



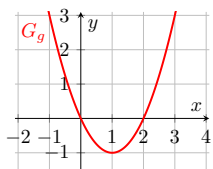
- Ableitung  $f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \cdot \sqrt{g(x)}}$

### allgemeine Sinusfunktion:

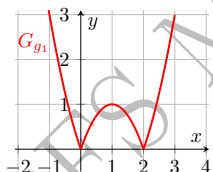
- $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $b, c, d \in \mathbb{R}$ 
  - Der Parameter  $a$  ändert die Amplitude, also die maximale Auslenkung der Kurve.
  - Der Parameter  $b$  streckt bzw. staucht die Kurve in Richtung der  $x$ -Achse. Durch den Faktor  $b$  wird damit die Periode  $p$  verändert  $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$ .
  - Der Parameter  $c$  verschiebt die Kurve in Richtung der  $x$ -Achse.
  - Der Parameter  $d$  verschiebt die Kurve in Richtung der  $y$ -Achse.
- Ableitung:  $f'(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) \cdot b$
- Bei der Kurvendiskussion wird die  $\sin$ -Funktion meistens in Kombination mit einer anderen Funktion betrachtet.<sup>6</sup>

### Betragsfunktionen:

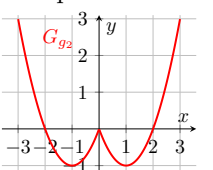
- Wird eine Funktion  $g$  linearen Transformationen in Form des Betrags unterworfen ergeben sich unterschiedliche Graphen. Diese Graphen haben allerdings gemeinsam, dass die Nicht-Differenzierbarkeit an bestimmten Stellen sich nicht ändert.



- $g_1(x) = |f(x)|$ : Die Punkte mit negativen Funktionswerten werden an der  $x$ -Achse gespiegelt. Die Spiegelung erfolgt damit an den Nullstellen.

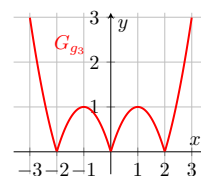


- $g_2(x) = f(|x|)$ : Der im positive Teil der  $x$ -Achse liegende Graaph wird an der  $y$ -Achse gespiegelt.



- $g_3(x) = |f(|x|)|$ : Wird sowohl der Betrag der  $x$ -Werte als auch der Betrag der Funktionswerte gebildet, werden zunächst die Punkte mit positiven  $x$ -Werten an der  $y$ -Achse

gespiegelt um anschließend die Punkte mit negativen Funktionswerten an der  $x$ -Achse zu spiegeln.



- Betragsfunktionen sind an Knickstellen nicht differenzierbar  $\rightarrow$  Nachweis über die  $h$ -Methode.

### Kurvendiskussion:

Bei der Kurvendiskussion werden Eigenschaften des Graphen  $G_f$  einer Funktion  $f$  analytisch untersucht

### Untersuchung der Ausgangsfunktion:

- Untersuchung folgender Eigenschaften:
  - Definitionsbereich  $\rightarrow$  bei gebrochen-rationalen Funktion z.B. Berechnung der Definitionslücken
  - Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen  $\rightarrow$  Nullstellen und Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse
  - Symmetrie zum Ursprung bzw. zur  $y$ -Achse
  - Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs  $\rightarrow$  Grenzwerte und Verhalten an Definitionslücken
  - Asymptoten
- je nach Funktionsklasse sind die Rechnungen unterschiedlich

### Monotonie:

- Ist die Funktion  $f$  im Intervall  $I$  differenzierbar dann ist  $G_f$  für

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \right\} \text{streng monoton} \left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right.$$

- Hinweis:** Für die Existenz einer Extremstellen  $x_0 \in G_f$  sind zwei Bedingungen notwendig:

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

- Die Art der einzelnen Extremstellen lässt sich leicht durch die Vorzeichenwechsel (VZW) der Ableitung an der Stelle  $x_0$  mit  $f'(x_0) = 0$  bestimmen.

- Hochpunkt (HoP)  $HoP(x_0|f(x_0))$  genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von **positiv nach negativ** gibt.

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) < 0$

- Tiefpunkt (TiP)  $TiP(x_0|f(x_0))$  genau dann, wenn es einen VZW der Ableitung von **negativ nach positiv** gibt.

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) > 0$

- Untersuchung der Monotonie und der Extremstellen

- Bestimmung der Nullstelle der 1. Ableitung
- Untersuchung der Monotonie mit Hilfe der Monotonietabelle
- Entscheidungen zu möglichen Extremstellen

- Monotonietabelle: Eintragung der Intervalle die durch die Nullstellen von  $f'(x_1) = 0$  und  $f'(x_2) = 0$  festgelegt werden.

**Hinweis:** Beispiel mit zwei Nullstellen:

$x$	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < \infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$G_f$	smw	HoP	smf	TiP	smw

- wenn sich das Monotonieverhalten **nicht** ändert, liegt ein **Terassenpunkt** vor

- Bei gebrochen-rationalen Funktionen **muss die Definitionslücke in der Monotonietabelle ebenfalls betrachtet werden.**

<sup>6</sup>  $f(x) = \sin(g(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$



# Analytische Geometrie

## Elementargeometrische Grundlagen

- Flächeninhalt von ebenen Figuren
  - Dreieck  $\rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
  - Parallelogramm  $\rightarrow A_P = g \cdot h$
  - Trapez  $\rightarrow A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$  hierbei sind  $a$  und  $c$  die Längen der Parallelen
  - Drachenviereck  $\rightarrow A_{\text{Drache}} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$  hierbei sind  $e$  und  $f$  die Längen der Diagonalen
  - Kreis  $\rightarrow A_K = \pi \cdot r^2$  und  $U_K = 2 \cdot \pi \cdot r$  hierbei ist  $r$  der Radius des Kreises
- Volumen und Oberfläche von Körpern
  - Prisma  $\rightarrow V_{\text{Prisma}} = A_G \cdot h$
  - Pyramide  $\rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$
  - Zylinder  $\rightarrow V_{\text{Zylinder}} = A_G \cdot h$  und der Oberflächeninhalt eines geraden Zylinders  $A_O = 2 \cdot A_G + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
  - Kegel  $\rightarrow V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$  und der Oberflächeninhalt eines geraden Kegels  $A_O = A_G + \pi \cdot r \cdot m$  mit  $m$  als Länge der Mantellinie
  - Kugel  $\rightarrow V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$  und der Oberflächeninhalt  $A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

## Definition von Vektoren

- Vektoren sind Pfeile im zwei - bzw. dreidimensionalen Raum
- Jeder Vektor ist ein Repräsentant unendlich vieler, gleich langer, gleich gerichteter und paralleler Pfeile
- Vektoren werden häufig durch kleine Buchstaben und einem Pfeil darüber gekennzeichnet  $\vec{a}$
- Verläuft ein Repräsentant eines Vektors von einem Punkt z.B.  $P$  zu einem zweiten Punkt z.B.  $Q$ , so bezeichnet man alle Repräsentanten mit  $\overrightarrow{PQ}$ .
- Werden mehrere Vektoren addiert so werden die jeweiligen Repräsentanten aneinandergereiht und das Ergebnis nennt man dann Vektorkette.
- Ein Vektor im 2- bzw. 3-dim. Raum wird in der Spaltenschreibweise durch 2 bzw. 3 Koordinaten beschrieben
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
- Der Vektor  $\overrightarrow{0A} = \vec{a}$  bezeichnet denjenigen Vektor, der im Ursprung  $0$  beginnt und im Punkt  $A$  endet. Er wird als **Ortsvektor** bezeichnet.

## Spiegelungen an den Koordinatenebenen

Der Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  wird gespiegelt an

- $x_1x_2$ -Ebene  $\rightarrow P(p_1|p_2|-p_3)$  Vorzeichen der  $x_3$  Koordinaten wird geändert
- $x_1x_3$ -Ebene  $\rightarrow P(p_1|-p_2|p_3)$  Vorzeichen der  $x_2$  Koordinaten wird geändert
- $x_2x_3$ -Ebene  $\rightarrow P(-p_1|p_2|p_3)$  Vorzeichen der  $x_1$  Koordinaten wird geändert

## Spiegelung am Koordinatenursprung

Der Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  wird am Punkt  $P(0|0|0)$  gespiegelt

<sup>7</sup>hierbei ist  $A_G$  der Flächeninhalt der Grundfläche und  $h$  die Höhe

- $P(-p_1|-p_2|-p_3)$  bei allen Koordinaten ändern sich die Vorzeichen

## Eigenschaften von Vektoren

- Vektoraddition
  - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
  - $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Nullvektor
  - $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
  - Der Vektor  $\vec{0}$  hat die Länge 0
- Gegenvektor
  - Der Vektor  $-\vec{a}$  ist der Gegenvektor zu  $\vec{a}$
  - $-\vec{a}$  ist genauso lang wie  $\vec{a}$  und zu  $\vec{a}$  entgegengerichtet
- skalare Multiplikation
  - $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$
  - Die skalare Multiplikation vervielfacht den Vektor durch den Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$
  - Der Vektor  $\lambda \cdot \vec{a}$  ist  $|\lambda|$ -mal so lang wie der Vektor  $\vec{a}$
  - Für  $\lambda > 0$  hat er die gleiche Richtung wie  $\vec{a}$
  - Für  $\lambda < 0$  hat er die entgegengesetzte Richtung wie  $\vec{a}$
- Rechengesetze
  - Assoziativgesetz:  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
  - Distributivgesetz:
$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

## Rechnungen mit Vektoren

- Der Verbindungsvektor  $\overrightarrow{PQ}$ 
$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

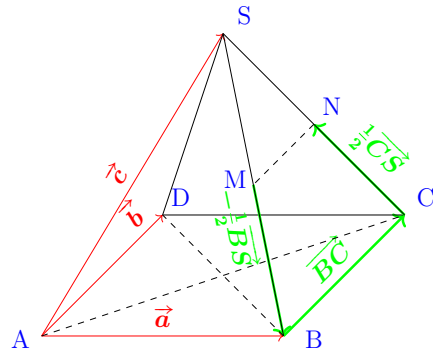
**Hinweis:** "Spitze minus Hacke"
- Summe von Vektoren  $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
- Der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ 
$$\rightarrow \vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$
 bestimmt
- Schwerpunkt des Dreiecks  $\triangle ABC$ 
$$\rightarrow \vec{S}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{3} (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$
- Schwerpunkt einer Pyramide  $ABCS$ 
$$\rightarrow \vec{S}_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{4} (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{S})$$

## Zusammenhang der Schwerpunkte

	Berechnung	Teilverhältnis
Schwerpunkt einer Strecke	$\vec{S}_{AB} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$	1:1
Schwerpunkt eines Dreiecks	$\vec{S}_{ABC} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$	1:2
Schwerpunkt einer Pyramide	$\vec{S}_{ABCD} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$	1:3



## Beispiel für Vektorketten



Der Vektor  $\overrightarrow{MN}$  wird mithilfe der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  ausgedrückt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS} \\ &= -\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

Damit folgt, dass die Mittellinie  $\overrightarrow{MN}$  parallel, gleichgerichtet aber nur halb so lang wie der Vektor  $\vec{b}$  ist.

## Operationen mit Vektoren

- Länge eines Vektors  $\rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Skalare Multiplikation  $\rightarrow \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
- Skalarprodukt  $\rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R}$
- Vektorprodukt mit  $\vec{a} \neq \vec{0}$  und  $\vec{b} \neq \vec{0}$   

$$\rightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$
- Spatprodukt  $\rightarrow$  Verknüpfung von Vektorprodukt und Skalarprodukt  

$$\textcircled{1} d = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \in \mathbb{R}$$

## Eigenschaften der Operationen

- Länge  

$$\textcircled{1} |\vec{A}| \rightarrow \text{Abstand des Punktes } A \text{ vom Ursprung}$$

$$\textcircled{2} |\vec{PQ}| \rightarrow \text{Abstand der beiden Punkte } P \text{ und } Q$$
- skalare Multiplikation  

$$\textcircled{1} \lambda \vec{a} \rightarrow \text{Längenänderung von } \vec{a}$$

$$\textcircled{2} \vec{a}^* = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \rightarrow |\vec{a}^*| = 1$$
- Skalarprodukt  

$$\textcircled{1} \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \leadsto \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\textcircled{2} \text{Winkel zwischen zwei Vektoren } \vec{a} \text{ und } \vec{b}$$

$$\rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leadsto \varphi = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$
- Vektorprodukt  

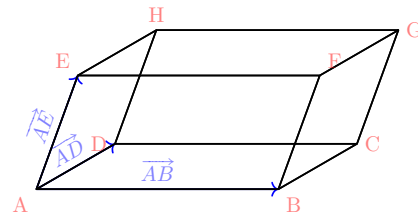
$$\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \perp \vec{c} \text{ und } \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\textcircled{3} \text{Flächeninhalt } \triangle ABC \rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

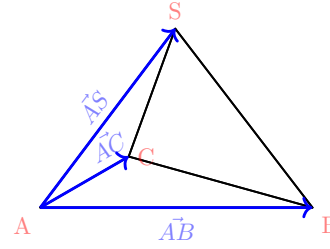
$$\textcircled{4} \text{Flächeninhalt Parallelogramm} \rightarrow A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$$
- Spatprodukt  $\rightarrow$  bestimmt ein Volumen  

$$\textcircled{1} \text{Volumen eines Spates} \rightarrow V_{\text{Spat}} = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \circ \vec{AE}|$$



- $\textcircled{2}$  Volumen einer dreiseitigen Pyramide  

$$\rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \left| \frac{1}{6} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AS} \right|$$



## Kugelgleichung

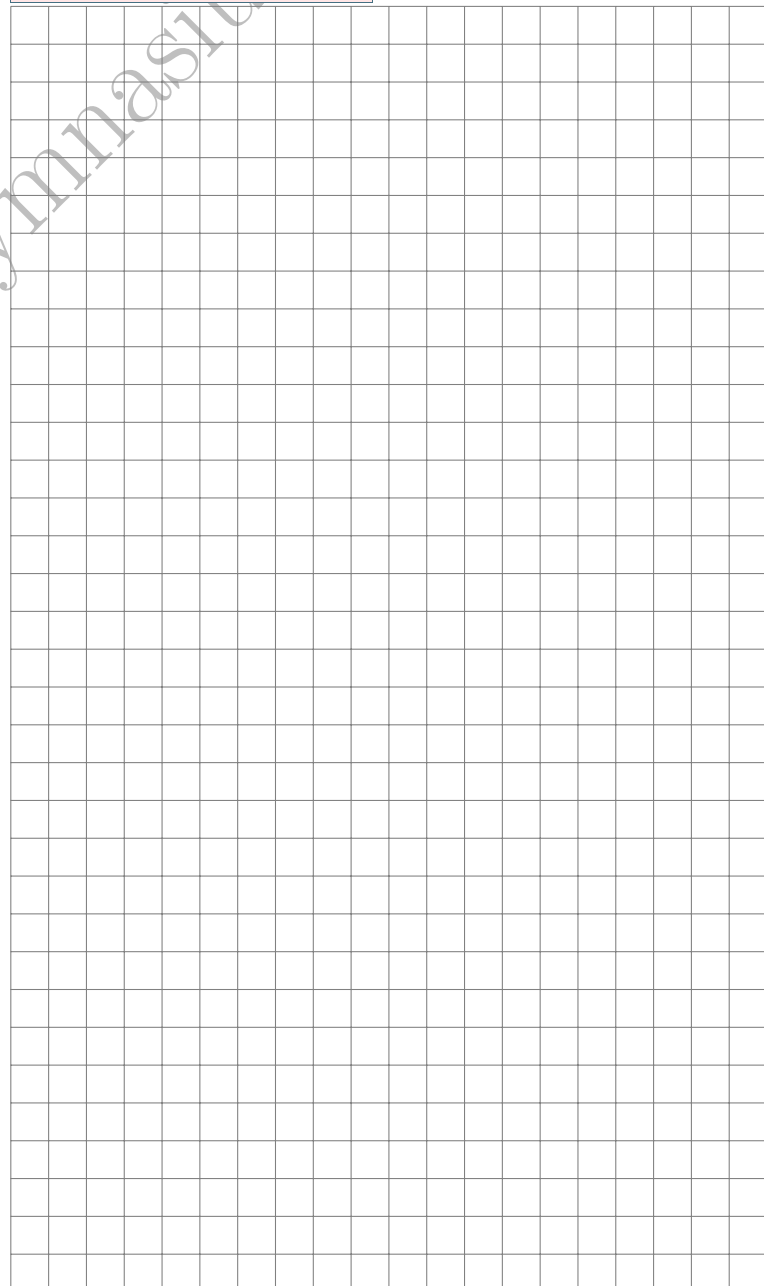
- Kugel um den Ursprung mit Radius  $r$   

$$\rightarrow (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = r^2$$
- Kugel um  $M(m_1|m_2|m_3)$  mit Radius  $r$   

$$\rightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

## Platz für eigene Notizen:

Notizen:



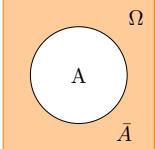
# Stochastik

## Ereignisalgebra

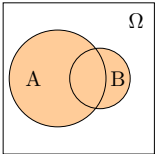
- Ein Ereignis  $A$  ist eine Teilmenge des Ergebnisraums  $\Omega$
- Ein Ereignis  $A$  tritt ein, wenn das Versuchsergebnis  $\omega$  in  $A$  enthalten ist, es gilt also  $\omega \in A$
- Alle Elemente von  $\Omega$  die nicht zum Ereignis  $A$  gehören, fasst man unter dem Namen Gegenereignis  $\bar{A}$  zusammen, es gilt  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen unvereinbar, wenn gilt  $A \cap B = \{ \}$ .

## Venn-Diagramme

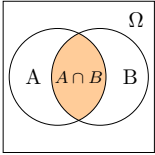
- Gegenereignis  $\bar{A}$ : "nicht  $A$ ", Ereignis  $A$  tritt nicht ein



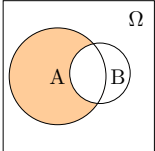
- Vereinigungsmenge  $A \cup B$ : "A oder B", Mindestens eines der beiden Ereignisse tritt ein



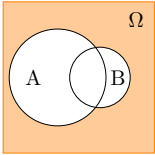
- Schnittmenge  $A \cap B$ : "A und B", Beide Ereignisse treten ein



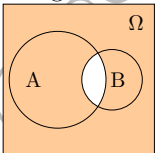
- "A und nicht B"  $A \cap \bar{B}$ : Es tritt genau das Ereignis A ein



- "nicht A und nicht B"  $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ : Weder A noch B tritt ein



- "nicht A oder nicht B"  $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ : Höchstens eines der Ereignisse tritt ein



## Laplace-Wahrscheinlichkeiten

- Alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind gleich wahrscheinlich
- Beispiel: 1 drehen eines Glücksrads mit gleich großen Sektoren 2 "normaler" Würfel 3 Wurf mit einer "normalen" Münze
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  ist gleich der Anzahl der Elemente von  $A$  dividiert durch die Anzahl der Elemente von  $\Omega$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

- $|A|$  entspricht der Mächtigkeit von  $A$
- $|\Omega|$  entspricht der Mächtigkeit von  $\Omega$

## Axiomatischer Aufbau der Stochastik

Eine Funktion  $P$ , die jedem Ereignis  $A$  eine reelle Zahl  $P(A)$  zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Axiom I:  $P(A) \geq 0$
- Axiom II:  $P(\Omega) = 1$
- Axiom III:  $A \cap B = \{ \} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  wenn die Schnittmenge zweier Ereignisse leer ist, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung zweier Ereignisse  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

## Eigenschaften

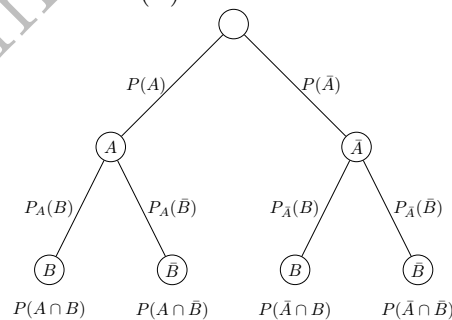
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\{ \}) = 0$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$  mit  $A \subseteq \Omega$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ist das Ereignis  $A$  eingetreten, dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten eines Ereignisses  $B$  gleich

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Folgt aus der Anwendung der Pfadregeln.



Nach der ersten Pfadregel berechnet sich die Wahrscheinlichkeit  $P(A \cap B)$  durch das Produkt der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten. Es gilt damit also  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$  und daraus folgt die Beziehung:  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

## Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **stochastisch unabhängig**, wenn  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  gilt. Andernfalls nennt man diese **stochastisch abhängig**.

## Kombinatorik

- Permutation als Anordnung von  $n$  Objekten in einer bestimmten Reihenfolge  $\rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- Unterscheidungsmöglichkeiten in einem Urnenexperimentes: Man zieht aus einer Menge mit  $n$  Elementen  $k$ -Elemente heraus

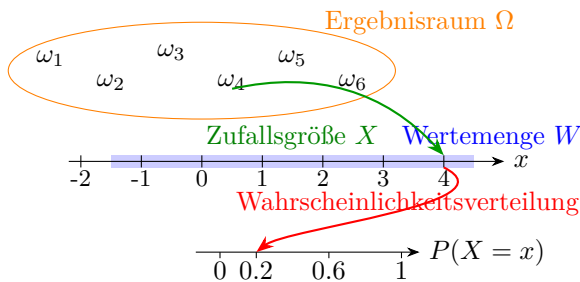
	Mit Reihenfolge	Ohne Reihenfolge
Mit Zurücklegen	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

- Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch  $\rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Besondere Werte des Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n$  und  $\binom{n}{n} = 1$

## Zufallsgrößen

- Eine Funktion  $X$ , die jedem Ergebnis  $\omega$  eines Ergebnisraumes  $\Omega$  eine reelle Zahl  $x$  zuordnet, heißt **Zufallsgröße**<sup>8</sup>  $X$ .
- Jeder Wert  $x$  einer ZG  $X$  tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit  $P(X = x)$  auf. Die Funktion, die jedem Wert  $x$  einer ZG  $X$  die Wahrscheinlichkeit  $P(X = x)$  zuordnet, heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der ZG  $X$ .
- Als Beispiel ist hier  $P(X = 4) = 0,2$  dargestellt.



## Erwartungswert und Varianz

- Eine ZG nimmt die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$  an. Dann heißt der zu erwartende Mittelwert  $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$   
 $= x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$   
**Erwartungswert** von  $X$ . **Hinweis:** Der Erwartungswert  $\mu$  ist häufig **kein** Wert, den die ZG annimmt.
- Eine ZG mit  $E(X) = \mu$  nehme die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$  an. Dann heißt die mittlere quadratische Abweichung von  $\mu$  **Varianz** von  $X$ :  
 $Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$   
 $= (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$
- Die Standardabweichung  $\sigma$  einer ZG  $X$  bestimmt sich durch  $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

## Hypergeometrische Verteilung

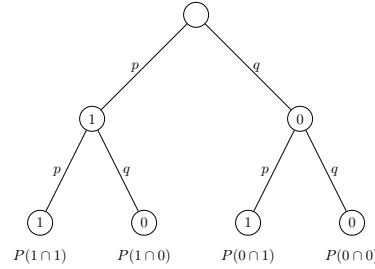
- Als Anwendung der Kombinatorik mit den Einschränkungen **ziehen ohne zurücklegen** und **ohne Beachtung der Reihenfolge**
- Es gibt  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten  $k$  Objekte ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus  $n$  verschiedenen Objekten auszuwählen.
- Aus einer Urne mit  $N$  Kugeln, wovon  $S$  schwarz sind, werden  $n$  Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die ZG  $X$  beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße  
 $P(X = k) = \frac{\binom{S}{k} \cdot \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$  mit  $k \leq n$  und  $k \leq S$
- Beispiel: ①  $N = 200$ ,  $S = 10$ ,  $n = 180$  und  $k = 9$   
 ②  $P(X = 9) = \frac{\binom{10}{9} \cdot \binom{190}{171}}{\binom{200}{180}} \approx 39,74\%$

## Binomialverteilung

### Bernoulli-Kette

- Ein ZG mit nur zwei möglichen Ergebnissen nennt man Bernoulli-Experiment  $\rightarrow$  Treffer "1" bzw. Nieter "0"
- Trefferwahrscheinlichkeit  $p$

- Nietenwahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$
- Wird ein Bernoulli-Experiment  $n$ -mal unabhängig durchgeführt, spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der **Länge  $n$** .
- Die Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  bleibt dabei konstant  $\rightarrow$  ziehen ohne zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge
- Beispiel mit zwei Stufen



## Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses  $\omega$  in einer Bernoulli-Kette  $\rightarrow$  Wahrscheinlichkeit entlang eines Astes  
 $P_p^n(\omega) = \underbrace{p^k}_{\text{Trefferwahrscheinlichkeit}} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{Nietenwahrscheinlichkeit}}$
- Wahrscheinlichkeit für **genau  $k$**  Treffer beträgt  
 $P_p^n(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anzahl der Pfade mit } k \text{ Treffern}} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- Mindestens ein Treffer  
 $P_p^n(X \geq 1) = 1 - P_p^n(X = 0) = 1 - q^n$
- Anwendung der Wahrscheinlichkeiten  $\rightarrow$  3m- Aufgaben  
 ① Mindest-Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  bei gegebenem  $n$   
 $P_p^n(X \geq 1) \geq 0,9$   
 $1 - P_p^n(X = 0) \geq 0,9$   
 $1 - (1-p)^5 \geq 0,9$   
 $p \geq \sqrt[5]{0,1}$   
 ② Mindest-Anzahl an Versuchen  $n$  bei gegebenem  $p$   
 $P_{0,6}^n(X \geq 1) \geq 0,999$   
 $1 - P_{0,6}^n(X = 0) \geq 0,999$   
 $1 - (0,4)^n \geq 0,999$   
 $n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)}$

## Erwartungswert und Varianz

- Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Binomialverteilung ①  
 $B(n, p) = P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$  mit  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$
- ② kumulative Verteilung:  
 $F_p^n(k) = P_p^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P_p^n(X = i)$   
 $= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$  mit  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$
- Erwartungswert:  $E(X) = n \cdot p$
- Varianz:  $Var(X) = n \cdot p \cdot q$
- Standardabweichung:  $\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

## Hypothesentest

- Zwei sich ausschließende Hypothesen werden betrachtet  
 ① Nullhypothese  $H_0$  ② Gegenhypothese  $H_1$

<sup>8</sup>Zufallsgröße  $\rightarrow$  ZG



- Anzahl der Treffer einer **Stichprobe** mit festgelegter Länge bildet die **Testgröße**
- Wertebereich der Testgröße wird in den **kritischen Bereich**  $K$  (**Ablehnungsbereich**) und den **nichtkritischen Bereich**  $\bar{K}$  (**Annahmebereich**) zerlegt
- liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in  $K$ , dann wird  $H_0$  verworfen, ansonsten wird  $H_0$  nicht verworfen (**Entscheidungsregel**).

- Fehler beim Testen von Hypothesen

Entscheidung	$H_0$ ist wahr.	$H_0$ ist falsch.
$H_0$ wird abgelehnt.	Fehler erster Art	Richtige Entscheidung
$H_0$ wird nicht abgelehnt.	Richtige Entscheidung	Fehler zweiter Art

1 Fehler erster Art:  $H_0$  wird verworfen, obwohl sie wahr ist.

2 Fehler zweiter Art:  $H_0$  wird beibehalten, obwohl sie falsch ist.

3 Durch eine Veränderung der Entscheidungsregel kann man nur die Wahrscheinlichkeit des Fehlers der einen Art auf Kosten der Wahrscheinlichkeit des Fehlers der anderen Art verringern.

4 Durch eine Erhöhung des Stichprobenumfangs können bei einem Test die Fehler 1. und 2. Art verringert werden. Allerdings ist eine solche Erhöhung in der Praxis auch mit erhöhten Kosten verbunden.

**Platz für eigene Notizen:**

Notizen: