Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Грехова Евгения Вениаминовна
Группа	Рк6-63б
Тип задания	Лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Интерполяция Лагранжа и кусочная интерполяция

Студент ___________ Грехова Е. В.

Преподавател ___________Соколов А.П

Оценка ________________________

Москва 2020г.

Оглавление

Задание

Даны функция

$$f(x) = e^{-}x^2$$

где $x \in$ [-5;5], и функция ошибок

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

Требуется:
1. Разработать функцию l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes, в точке x.
2.Написать функцию L(x, x_nodes, y_nodes), которая возвращает значение интерполяционного полинома Лагранжа, заданного на узлах с абсциссами x_nodes и ординатами y_nodes, в точке x.
3. Провести следующий анализ:
(a) Для равномерно расположенных узлов в интервале $x \in [-5; 5]$ вывести на экран одновременно графики $f(x)$ и полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для нескольких различных количеств узлов, обозначаемых N. Опишите, что наблюдается при увеличении количества узлов N?
(b) Для каждого N = 4, 5, ... , 20 рассчитайте расстояние между $f(x)$ и ∞ $L(x)$ в лебеговом пространстве L .
(c) Используя формулу для остаточного члена интерполяции, аналитически оценить верхнюю границу зависимости погрешности интерполяции от N . Вывести на экран сравнение полученного результата с зависимостью расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в ∞лебеговом пространстве L от N. Как соотносятся друг с другом полученные аналитическая и численная оценки погрешности аппроксимации?
4. Повторить пункт 3 для случая оптимально расположенных узлов и для случая кусочно-линейной интерполяции.
5. Вывести на едином графике зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в ∞ лебеговом пространстве L от N для трех случаев интерполяции. Как влияет расположение узлов на погрешность аппроксимации? Какое расположение узлов и для каких N дает более точную интерполяцию? Как влияет использование локальной или глобальной интерполяции на точность интерполяции?
6. Найти приближенное значение функции ошибок erf(x) для x = 2 , используя кусочно-линейную интерполяцию для $f(x)$ для N = 3, 5, 7, 9, и сравнить полученные значения. Дополнительно требуется представить аналитическое

выражение для интеграла от кусочно-линейного интерполянта, используемого для аппроксимации $\mathrm{erf}(x)$. Опишите, где применяется функция ошибок.

Цель лабораторной работы

Цель работы - исследовать случаи интерполяции Лагранжа; рассмотреть влияние количества узлов на точность интерполяции.

Выполненные задачи

1. Поиск базисного полинома Лагранжа.
2. Поиск значения интерполяционного полинома Лагранжа.
3. Анализ интерполяции Лагранжа при равномерном распределении узлов.
4. Анализ интерполяции Лагранжа при оптимальном расположении узлов.
5. Анализ кусочно-линейной интерполяции.
6. Сравнение зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L для трех случаев интерполяции.
7. Исследование функции ошибок.

Для выполнения лабораторной работы использовался язык Python и его библиотеки NumPy и Matplotlib.

1.Разработка функции l_i(i, x, x_nodes), которая возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа

Функция l_i(i, x, x_nodes) возвращает значение i-ого базисного полинома Лагранжа, на узлах со значением абсцисс x_nodes , в x. Код функции на Python:

```
def l_i(i, x, x_nodes):
    n = len(x_nodes)
    polynom = 1
    for j in range(n):
        if i != j:
            polynom *= (x - x_nodes[j]) / (x_nodes[i] - x_nodes[j])
    return polynom
```

2.Разработка функции для поиска итерполяционного полинома Лагранжа

Функция L(x, x_nodes, y_nodes) возвращает значение i-го базисного полинома Лагранжа, на узлах со значением абсцисс x_nodes и ординат y_nodes, в точке x. Код функции на Python:

```
def L(x, x_nodes, y_nodes):
    n = len(x_nodes)
    L_x = 0
    for i in range(n):
        L_x += y_nodes[i] * l_i(i, x, x_nodes)
    return L_x
```

3. Анализ интерполяции Лагранжа при равномерном распределении узлов

Был проведен анализ интерполяции Лагранжа для случая равномерно расположенных узлах. Была получена зависимость численной и аналитической погрешностей в зависимости от числа узлов интерполяции.

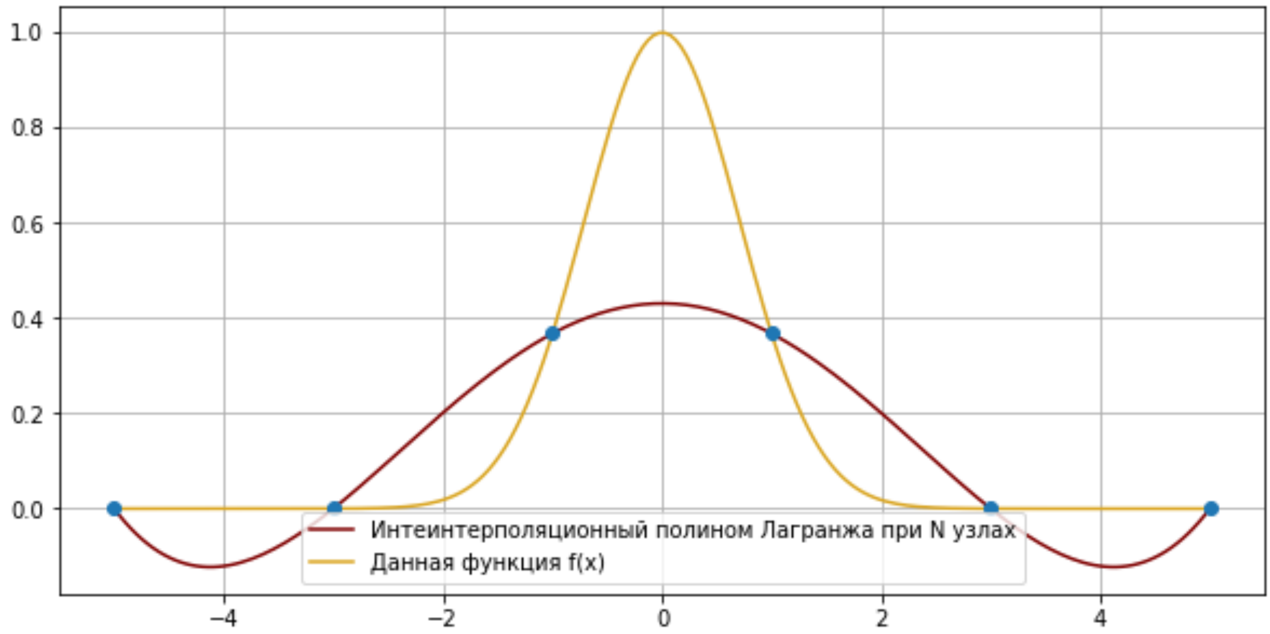

Рис. 1. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 4 узлах

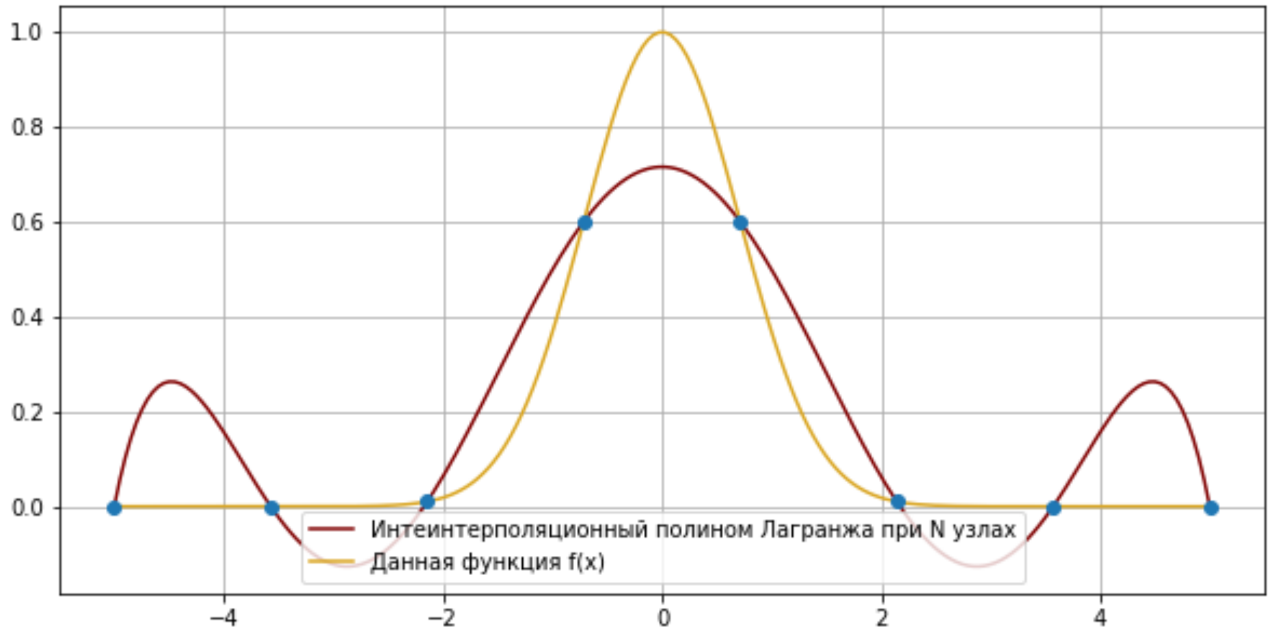

Рис. 2. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 8 узлах

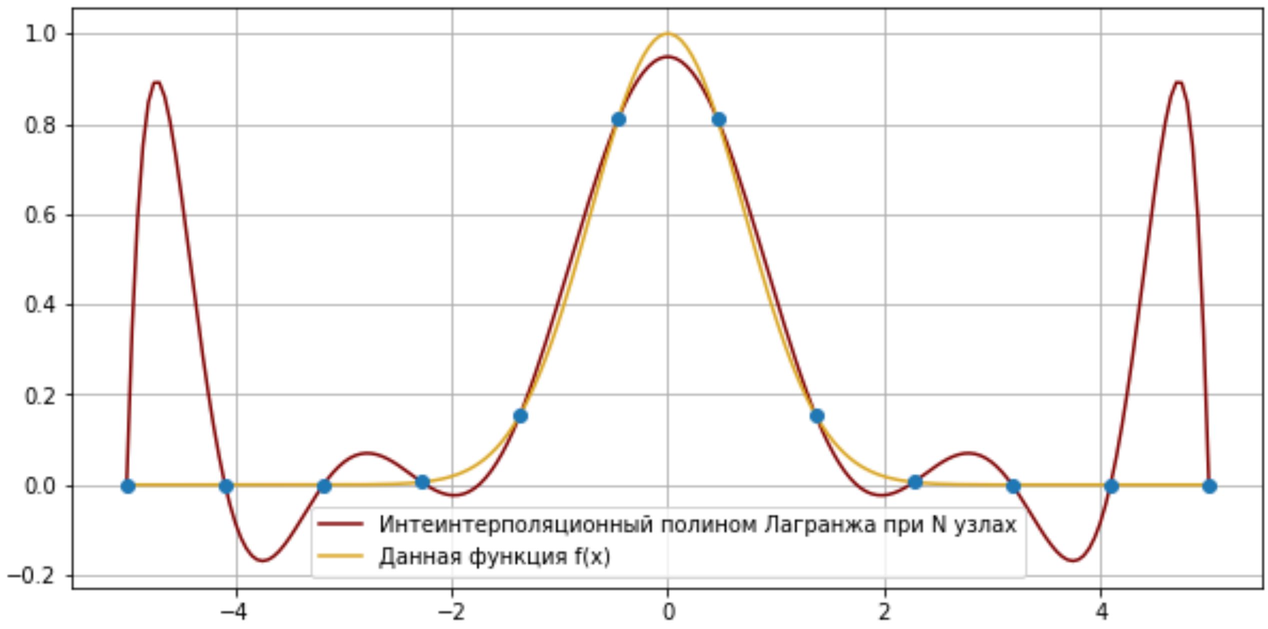

Рис. 3. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 12 узлах

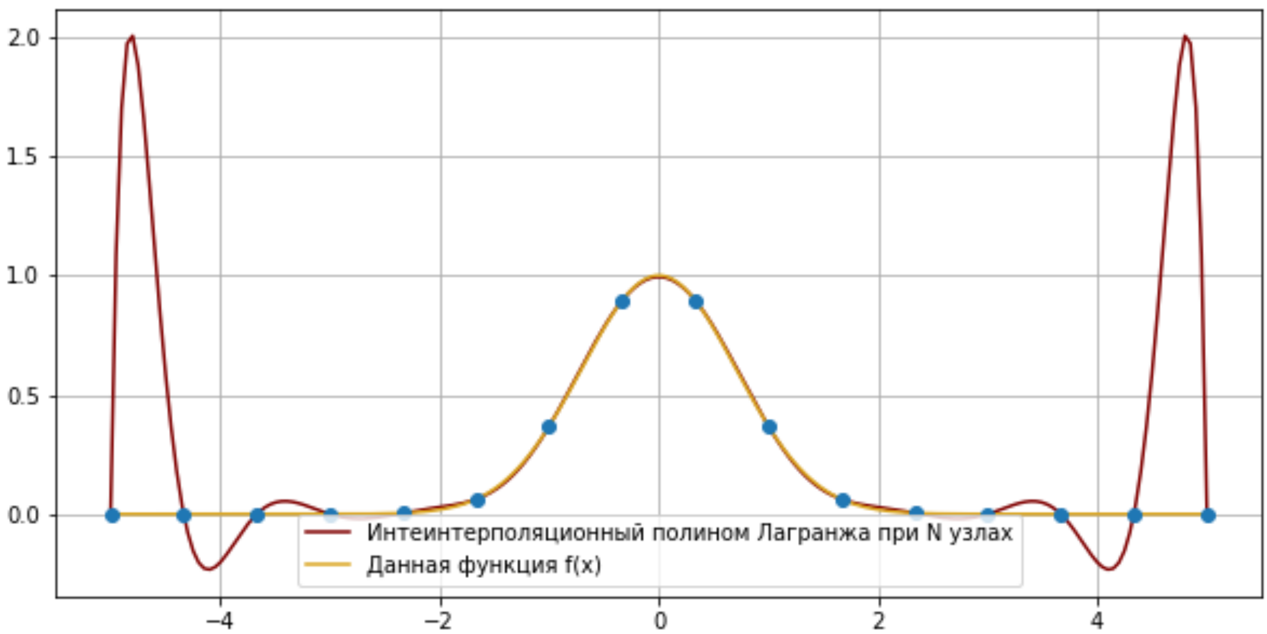

Рис. 4. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 16 узлах

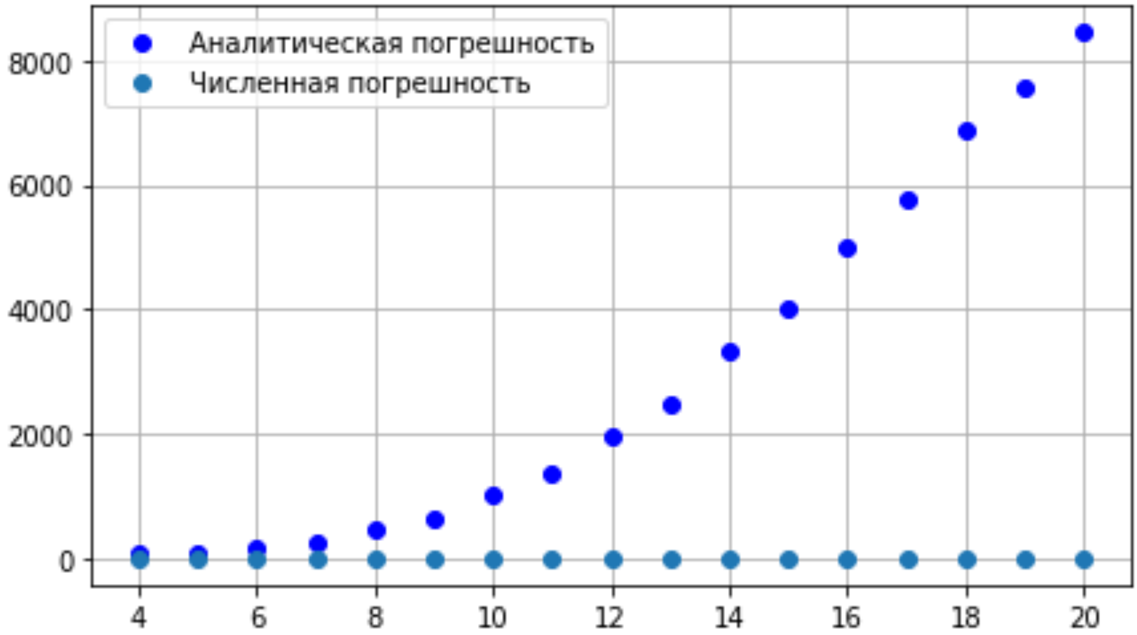

Рис. 5. Сравнения численной и аналитической погрешности

На рис. 5 мы видим большое значение аналитической погрешности, что можно обосновать тем, что происходит поиск максимума на всем отрезке интерполирования, а ближе к концам отрезка появляются осцилляции, которые и вносят такой большой вклад в результаты вычислений.

4. Анализ интерполяции Лагранжа при оптимальном расположении узлов

Для узлов в интервале $x \in [-5; 5]$ построены графики $f(x)$ и для полученного интерполяционного полинома $L(x)$ для чебышевских узлов.

Рис. 6. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 6 узлах

Рис. 7. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 8 узлах

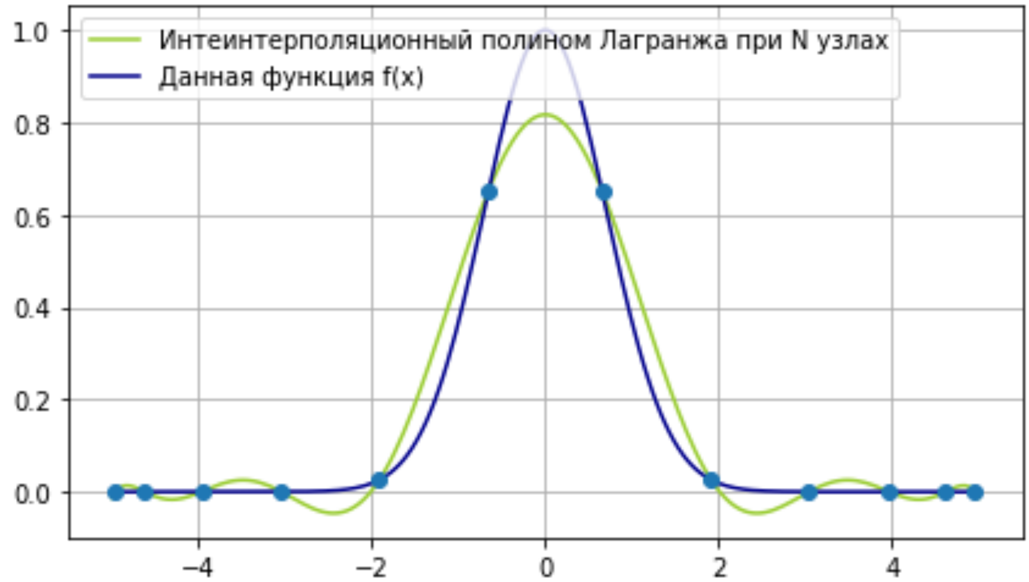

Рис. 8. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 12 узлах

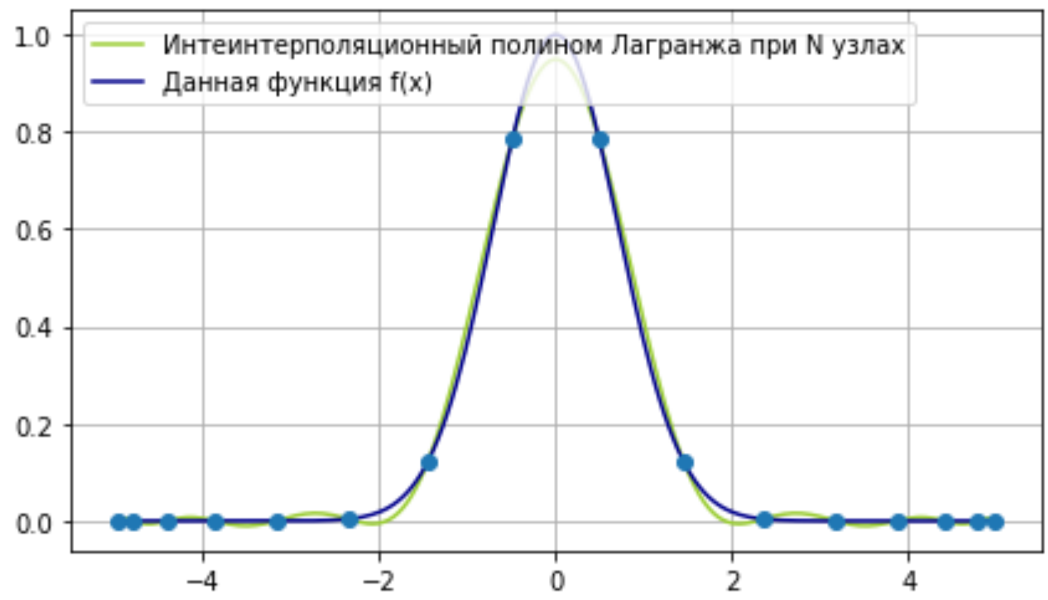

Рис. 9. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 16 узлах

Из рис 6-9 можем заметить, что при увеличения количества узлов на границах отрезка, осцилляций не возникает, как в случае интерполяции с равномерным распределением узлов. И при увеличении количества узлов увеличивается точность интерполяции.

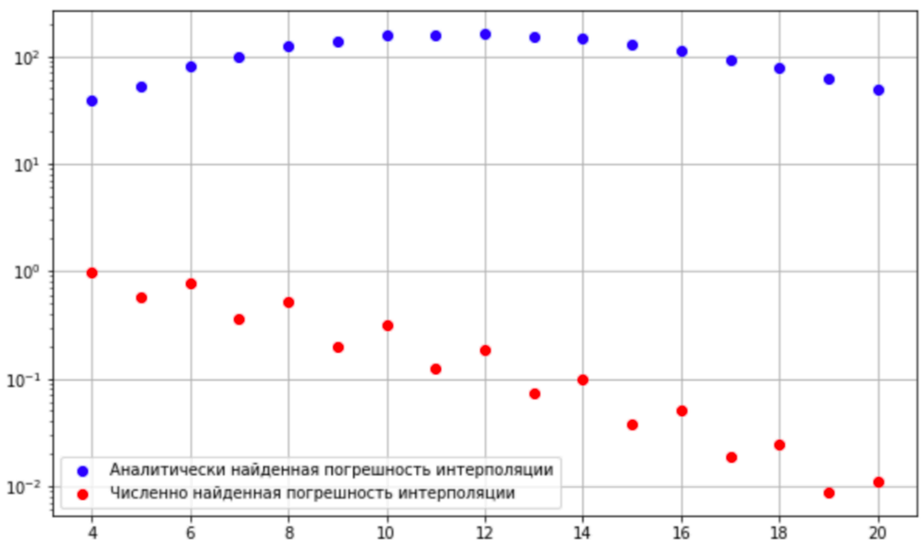

Рис. 10. График сравнения численной и аналитической погрешности интерполяции при оптимально расположенных узлах.

Для каждого $N = 4, 5, \ldots, 20$ было рассчитано расстояние между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L по формуле (5).

На на рис. 10 показаны результаты расчетов аналитической оценки остаточного члена интерполяции и зависимость расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L .

Из рис 10 видим разбиение численной погрешности интерполяции для четного и нечетного количества узлов.

Обратим внимание, что погрешность при аналитической оценки интерполяции для оптимально расположенных узлах значительно меньше, чем при равномерно распределенных узлах, но велика относительно численного метода.

5. Анализ кусочно-линейной интерполяции

Приведен график $f(x)$ и полученной кусочно-линейной интерполяции для нескольких различных количеств узлов.

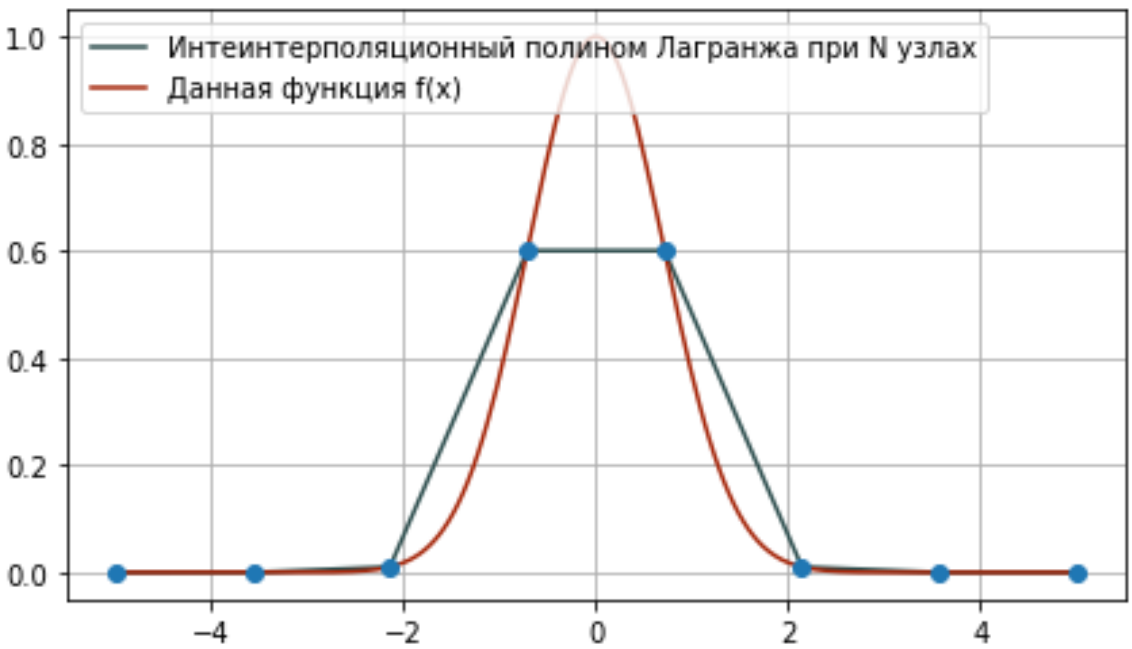

Рис. 11. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 8 узлах

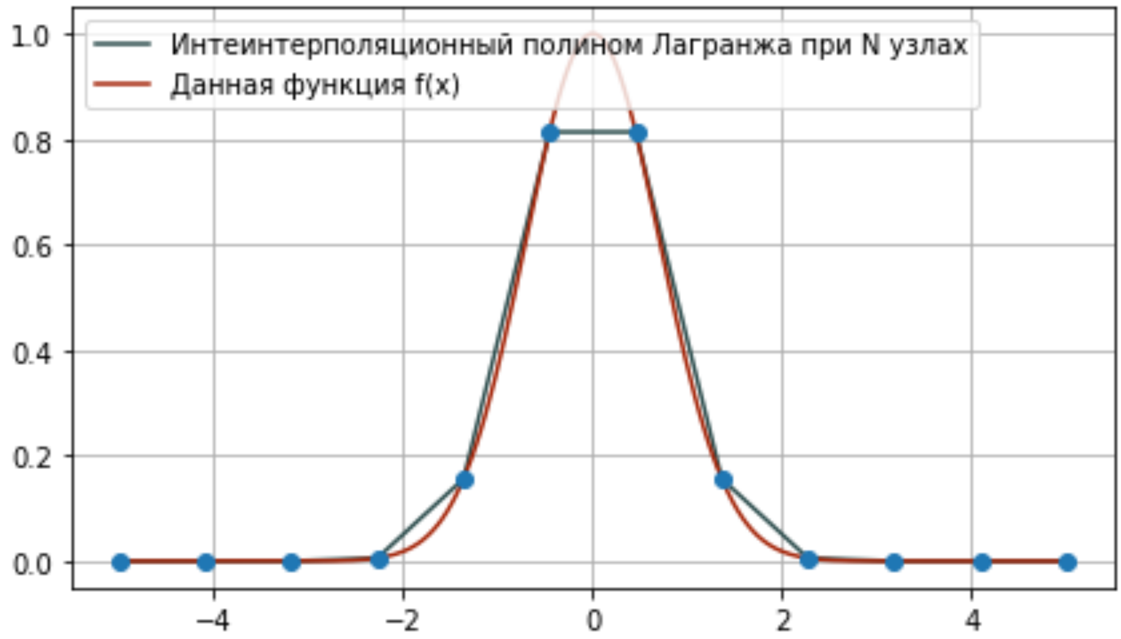

Рис. 12. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 12 узлах

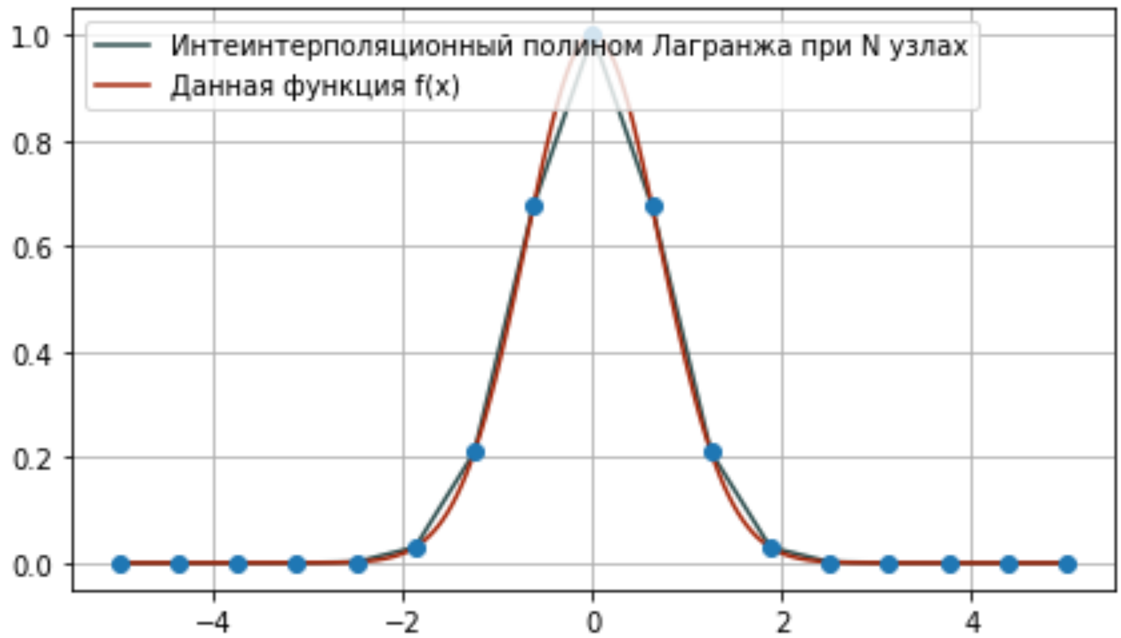

Рис. 13. Интерполяционный полином Лагранжа и исследуемая функция при 17 узлах

В случае увеличения количества узлов N кусочно-линейная интерполяция более точно аппроксимирует функцию f(x).

Для каждого $N = 4, 5, \ldots , 20$ был расчет расстояния между $f(x)$ и функцией кусочно-линейной интерполяции в L.

Результаты расчетов аналитической оценки остаточного члена интерполяции и зависимость расстояния между $f(x)$ и аппроксимирующей функцией в лебеговом пространстве L показаны на рис 14.

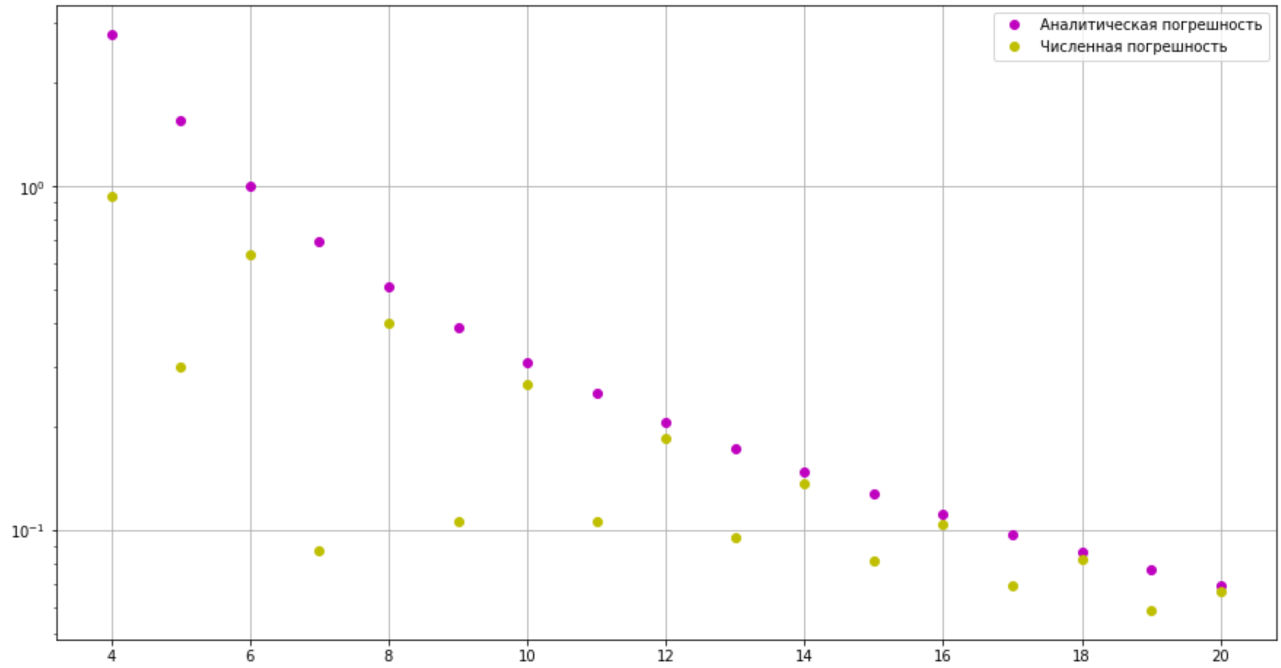

Рис. 14. График сравнения аналитической и численно найденной погрешностей

6. Сравнение зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L^∞ для 3-х случаев интерполяции

На рис. 11 представлены зависимости расстояния между $f(x)$ и $L(x)$ в лебеговом пространстве L для нескольких случаев интерполяции.

На графике видно, что при увеличении количества узлов наиболее точной является интерполяция Лагранжа при оптимальном расположении узлов. Расстояние между функциями $f(x)$ и $L(x)$ при интерполяции для равномерно распределенных узлов возрастает при увеличении количества узлов.

Для интерполяции при равномерно распределенных узлах более точные результаты дает четное количество узлов; при оптимально распределенных узлах и для кусочно-линейной интерполяции дает нечетное количество узлов.

Выбирая для аппроксимации функцию, стоит использовать оптимальное расположение узлов для максимально точных результатов. Местную интерполяцию лучше выбирать для аппроксимации при небольшом количестве узлов; при увеличенном количестве узлов точность больше у глобальной интерполяции Лагранжа при оптимально распределенных узлах.

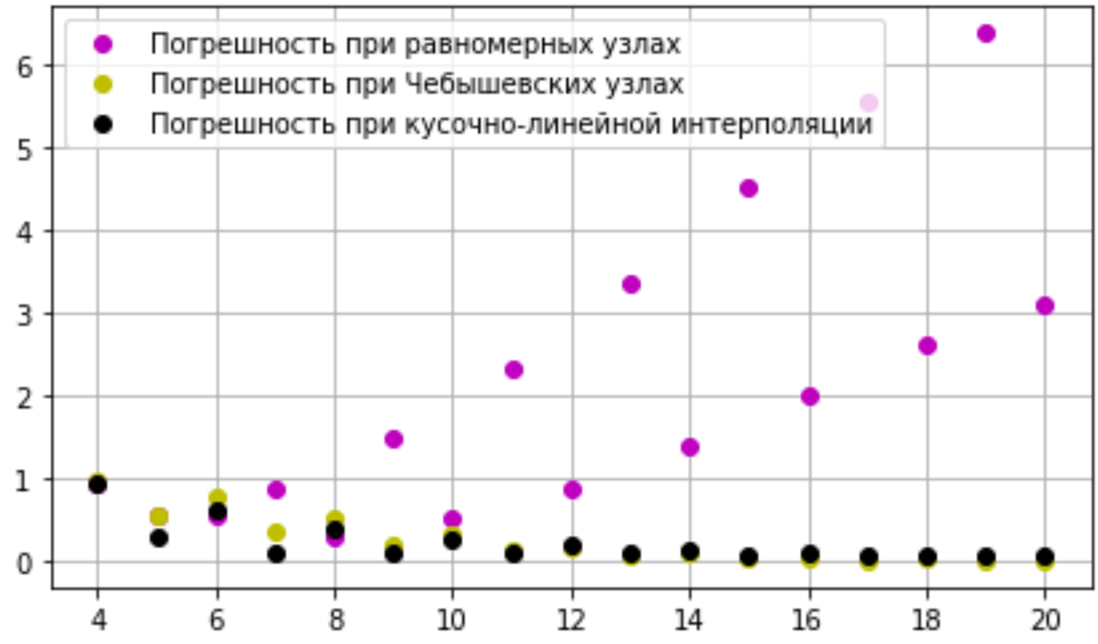

Рис. 15. Зависимости расстояния между f(x) и L(x) в L_∞ для 3х случаев интерполяции

7. Исследование функции ошибок

В процессе выполнения лабораторной работы было найдено приближенное значение функции ошибок для $x = 2$. При вычислениях использовалась кусочно-линейная интерполяция для $N = 3, 5, 7, 9$.

Функция ошибок была разработана на языке Python:

```
x_start = 3

Number_of_points = 4

n_st = 2

int_Nods = [0] * Number_of_points

for i in range(Number_of_points):

   int_Nods[i] = x_start + i * n_st
```

Через цикл

```
"for i in range(Number_of_points):
   print('Количество точек:',int_Nods[i],'Значение функции ошибок:’,erf(int_Nods[i]))"
```

получим приближенные значения функции ошибок:

Количество точек: 3 Значение функции ошибок: 1.1490461524496047

Количество точек: 5 Значение функции ошибок: 0.9896305736453971

Количество точек: 7 Значение функции ошибок: 0.9924858486302132

Количество точек: 9 Значение функции ошибок: 0.9936717209022357

Функция ошибок применяется в решении некоторых дифференциальных уравнениях. Важным моментом является факт, что при увеличении узлов интерполяции погрешность уменьшается, а точность вычислений увеличивается.

Заключение

При выполнении лабораторной работы были изучены три случая интерполяции: интерполяция Лагранжа при равномерно распределенных узлах, при оптимально распределенных узлах и кусочно-линейная интерполяция.

В интерполяции Лагранжа при равномерно распределенных узлах при приближении к граничным узлам отрезка существует паразитные осцилляции – отклонения амплитуды базисных полиномов, это дает погрешность аппроксимации.

Эту проблему при глобальной интерполяции можно решить выбором оптимального расположения интерполяционных узлов, которые имеют название - чебышевские узлы.

При кусочно-линейной интерполяции достигаются относительно точные результаты аппроксимации. С помощью кусочно-линейной интерполяции было рассчитано значение функции ошибок erf(x) для различного количества узлов: чем больше узлов, тем выше точность.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по вычислительной математике. [Электронный ресурс] // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования), МГТУ им. Баумана.