

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Двумерный метод конечных разностей во временной области

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{j}_m$$

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

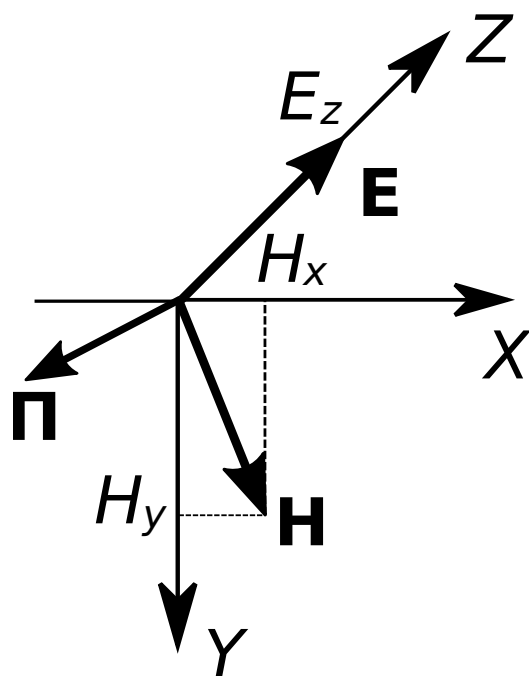
$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Виды поляризации для двумерного случая

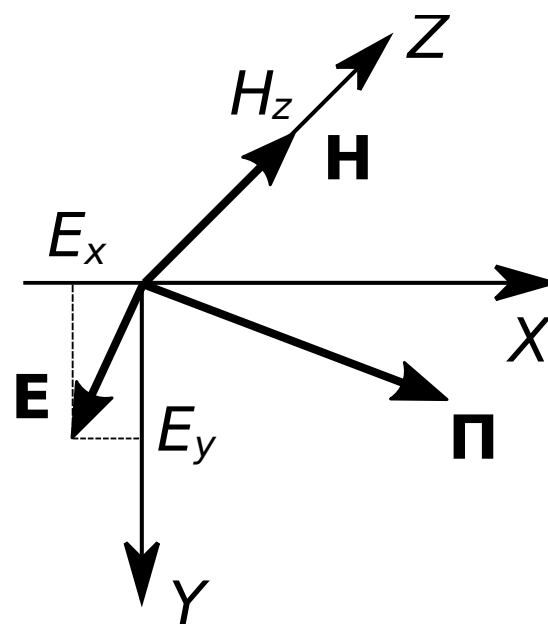
TM^z

Transverse Magnetic



TE^z

Transverse Electric

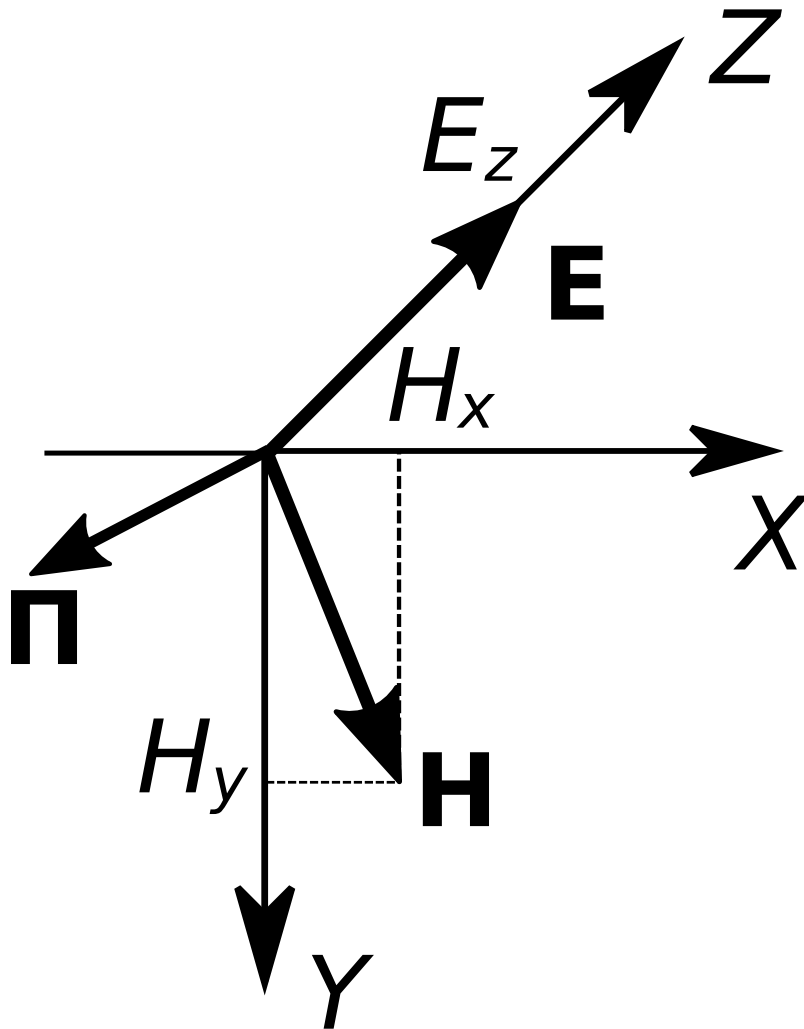


Виды мод электромагнитной волны

- ТМ — Transverse magnetic — Поперечно-магнитная волна. Нет магнитной составляющей в указанном направлении (Е-волна).
- ТЕ — Transverse electric — Поперечно-электрическая волна. нет электрической составляющей в указанном направлении (Н-волна).
- ТЕМ — Transverse electromagnetic — Поперечно-электромагнитная волна. нет электрической и магнитной составляющих в указанном направлении.
- Гибридные — есть и электрическая, и магнитная составляющие в указанном направлении.

**Двумерный метод конечных
разностей во временной области
для поляризации TM^z**

Поляризация ТМ^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_z
- H_x
- H_y

Метод FDTD для поляризации TM^z . Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

12

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$H_x(x, y, t) = H_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_x^q[m, n]$$

$$H_y(x, y, t) = H_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_y^q[m, n]$$

$$E_z(x, y, t) = E_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_z^q[m, n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

14

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки
 $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{2} - \\
 & -\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n]}{\Delta_y}
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$:

$$H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_x^{q-1/2}[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \left(E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n] \right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1, n] - E_z^q[m, n] \right)$$

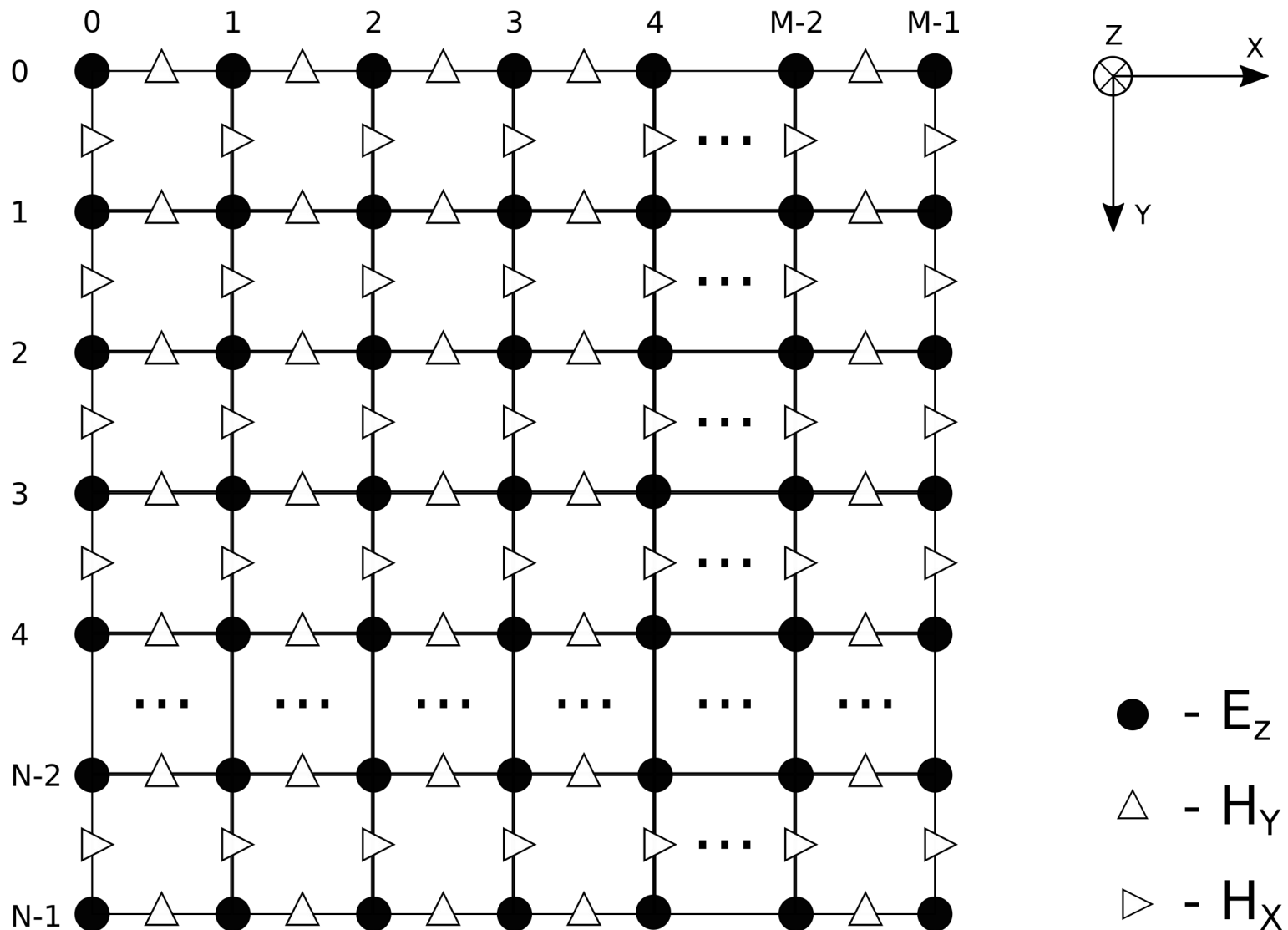
Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

17

Подобным образом выражаем $E_z^{q+1}[m, n]$ из закона Ампера:

$$\begin{aligned} E_z^{q+1}[m, n] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m, n] + \\ & + \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \{ H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] - H_y^{q+1/2}[m-1/2, n] \} - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \{ H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] - H_x^{q+1/2}[m, n-1/2] \} \right) \end{aligned}$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TM^z



Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты E_z — $M \times N$
- Размер массива для компоненты H_x — $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты H_y — $(M - 1) \times N$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

$$Hx[m, n] = Chxh[m, n] * Hx[m, n] - \\ Chxe[m, n] * (Ez[m, n + 1] - Ez[m, n])$$

$$Hy[m, n] = Chyh[m, n] * Hy[m, n] + \\ Chye[m, n] * (Ez[m + 1, n] - Ez[m, n])$$

$$Ez[m, n] = Ceze[m, n] * Ez[m, n] + \\ Cezh[m, n] * (Hy[m, n] - Hy[m - 1, n]) - \\ (Hx[m, n] - Hx[m, n - 1])$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{\max} \Delta_t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{\max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\min} \mu_{\min}}}$$

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{\max} \Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (1, 2, 3)

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для N -мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$, то

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{2}}{\Delta} \leq 1$$

Критерий стабильности для N -мерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{N}}{\Delta} \leq 1$$

или

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$C_{dtds} = \frac{v \Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

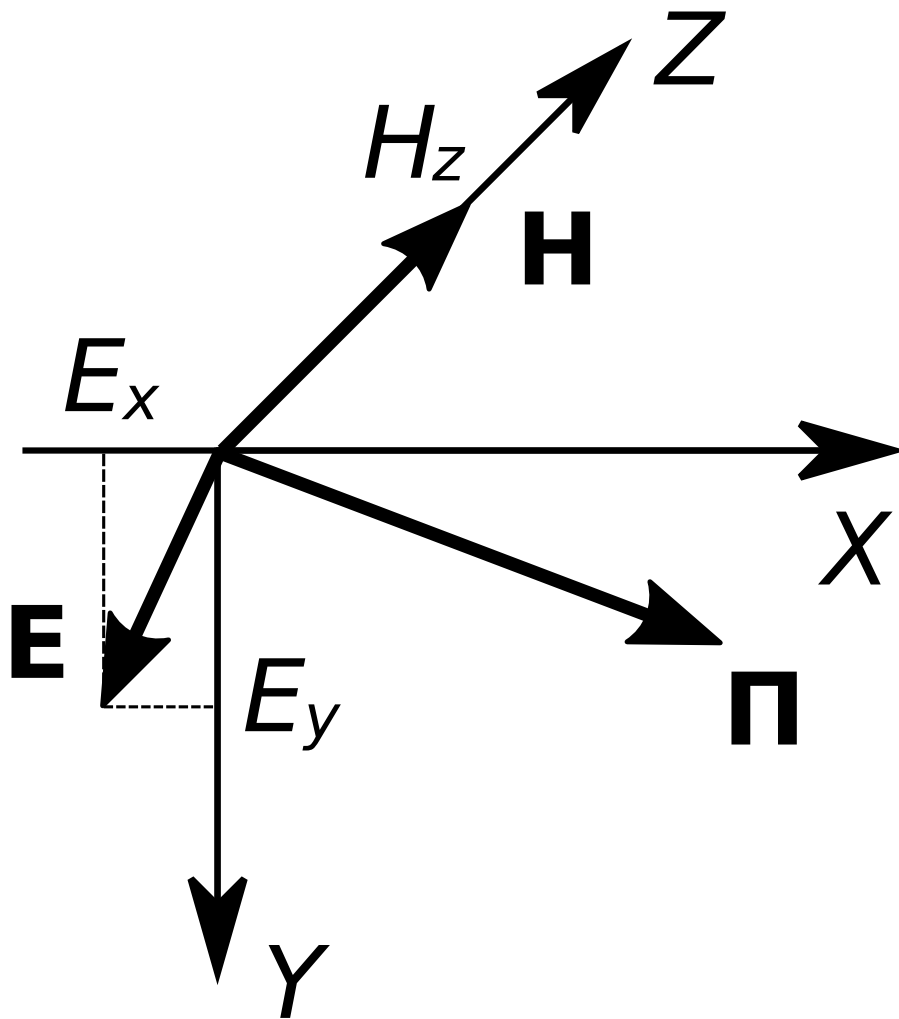
$$\Delta_t \leq \frac{\Delta}{c \sqrt{2}}$$

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Источник цилиндрической волны.**

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Источник плоской волны.**

**Двумерный метод конечных
разностей во временной области
для поляризации TE^z**

Поляризация TE^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_x
- E_y
- H_z

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$E_x(x, y, t) = E_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_x^q[m, n]$$

$$E_y(x, y, t) = E_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_y^q[m, n]$$

$$H_z(x, y, t) = H_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_z^q[m, n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная схема

$$\begin{aligned}
 H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_z^{q-1/2}[m+1/2, n+1/2] - \\
 & - \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \{ E_y^q[m+1, n+1/2] - E_y^q[m, n+1/2] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \{ E_x^q[m+1/2, n+1] - E_x^q[m+1/2, n] \} \right)
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_x^q[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \left(H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m+1/2, n-1/2] \right)$$

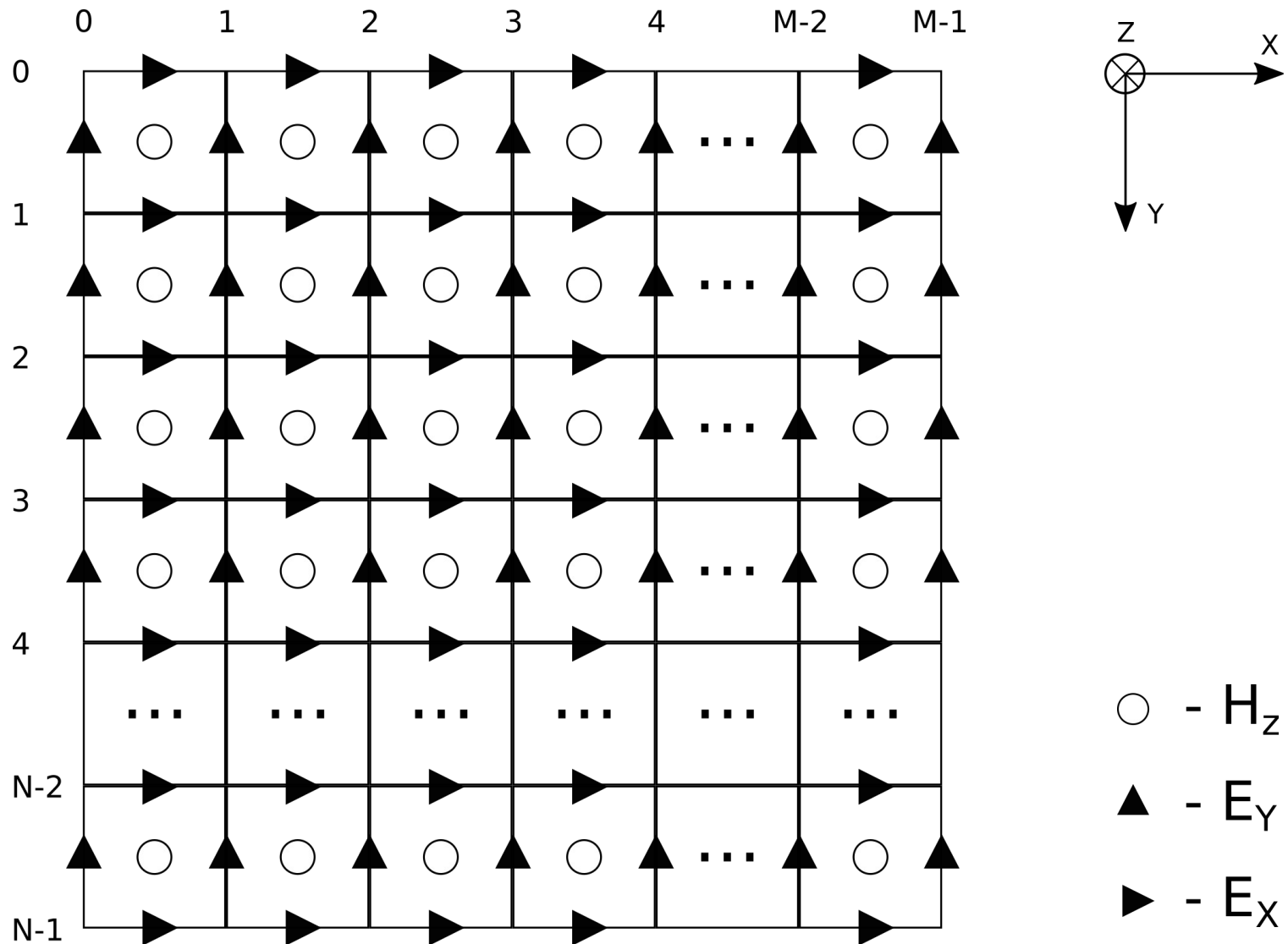
Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_y^q[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m-1/2, n+1/2] \right)$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TE^z

38



Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_z[m, n] = & Chzh[m, n] * H_z[m, n] + \\ & Chze[m, n] * ((Ex[m, n + 1] - Ex[m, n] - \\ & (Ey[m + 1, n] - Ey[m, n]))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ex[m, n] = & Cexe[m, n] * Ex[m, n] + \\ & Cexh[m, n] * (H_z[m, n] - H_z[m, n - 1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ey[m, n] = & Ceye[m, n] * Ey[m, n] - \\ & Ceyh[m, n] * (H_z[m, n] - H_z[m - 1, n]) \end{aligned}$$

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TE^z .
Источник цилиндрической волны.**

Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций

