

**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

**«Метод конечных разностей
во временной области (FDTD)»**

Численная дисперсия

Численная дисперсия

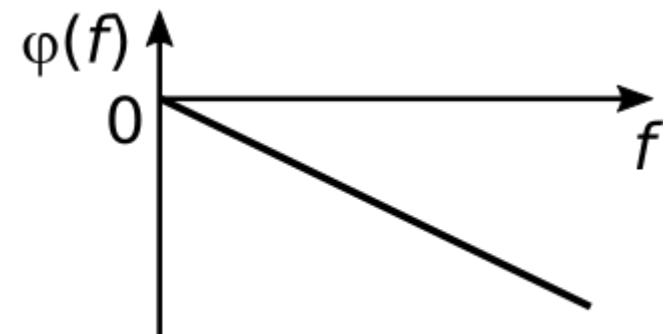
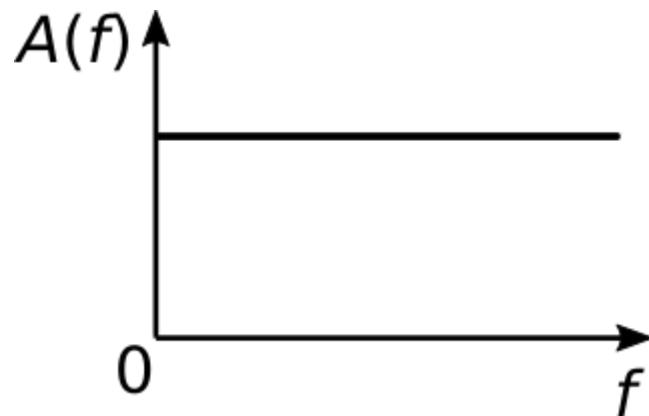
Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от частоты.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}$$

Область пространства как фильтр



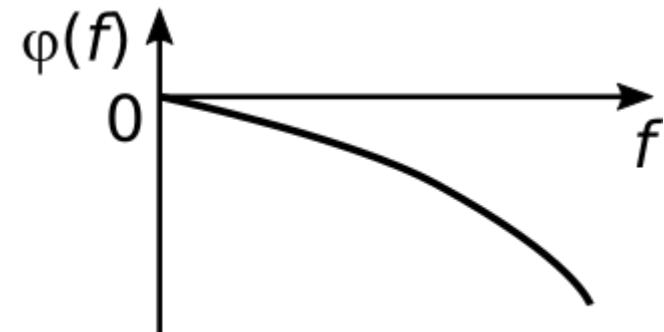
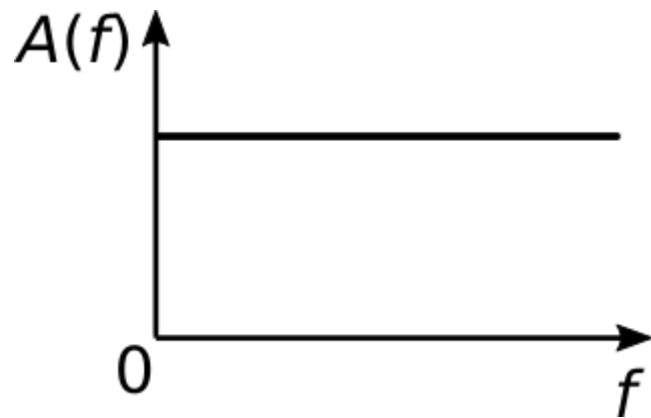
Параметры фильтра без дисперсии



Область пространства как фильтр



Параметры фильтра с дисперсией



Волновое уравнение в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, x_0 < \xi < x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора
вблизи точки x_0 со смещением δ справа и слева

$$x = x_0 + \delta \quad x - x_0 = \delta$$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$x = x_0 - \delta \quad x - x_0 = -\delta$$

$$f(x_0 - \delta) = f(x_0) - \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots$$

Расчет второй производной в дискретном виде

Сложим выражения для $f(x + \delta)$ и $f(x - \delta)$

$$f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) = 2f(x_0) + \frac{2}{2!} \delta^2 f'''(x_0) + O(\delta^4)$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) - 2f(x_0)}{\delta^2} + O(\delta^2)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right|_{m,q} = \frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right|_{m,q} = \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}$$

Подставляем выражения для вторых производных
в волновое уравнение

$$\frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2} - \frac{1}{v^2} \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2} = 0$$

Выражаем $E_z^{q+1}[m]$

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} (E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2E_z^q[m]) - E_z^{q-1}[m] + 2E_z^q[m]$$

Пусть E_z^q — плоская волна с гармоническим колебанием

$$E_z^q[m] = e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)}$$

$\dot{\tilde{k}} = k' - j k''$ — комплексное волновое число
в дискретном пространстве

Подставляем $E_z^q[m]$ в выражение с предыдущего слайда

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2E_z^q[m] \right) - E_z^{q-1}[m] + 2E_z^q[m]$$



$$\begin{aligned}
e^{j(\omega(q+1)\Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)} &= \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left[e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}}(m+1) \Delta_x)} + \right. \\
&\quad \left. + e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}}(m-1) \Delta_x)} - 2e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)} \right] - \\
&\quad - e^{j(\omega(q-1)\Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)} + 2e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)}
\end{aligned}$$

Делим обе части выражения на $e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)}$

$$e^{j\omega \Delta_t} = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(e^{-j\dot{\tilde{k}} \Delta_x} + e^{j\dot{\tilde{k}} \Delta_x} - 2 \right) - e^{-j\omega \Delta_t} + 2$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t} + e^{-j\omega\Delta_t}}{2} = \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\frac{e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} + e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}}{2} - 1 \right) + 1$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t} + e^{-j\omega\Delta_t}}{2} = \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\frac{e^{-j\tilde{k}\Delta_x} + e^{j\tilde{k}\Delta_x}}{2} - 1 \right) + 1$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

$$\cos(\omega \Delta_t) = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\cos(\dot{\tilde{k}} \Delta_x) - 1 \right) + 1$$

Комплексное волновое число в дискретном пространстве

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right)$$

$k = \frac{\omega}{v}$ — волновое число при отсутствии численной дисперсии

Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

Используем разложение функции $\cos(u)$ в ряд Маклорена:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n u^{(2n)}}{(2n)!}$$

Для малого u будем считать, что

$$\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2!}$$

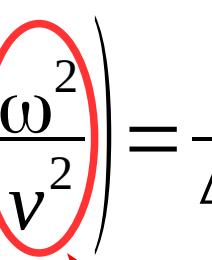
Частный случай:

$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 \left(1 - \frac{(\omega \Delta_t)^2}{2} - 1 \right) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(1 - \frac{(\Delta_x)^2}{2} \frac{\omega^2}{v^2} \right) = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(1 - \frac{1}{2} (k \Delta_x)^2 \right)$$



Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

Для малого Δ_x :

$$1 - \frac{(k \Delta_x)^2}{2} \approx \cos(k \Delta_x)$$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos(\cos(k \Delta_x)) = k$$

Нет численной дисперсии

Частный случай: «Магический» шаг по времени

Если

$$\Delta_t = \frac{\Delta_x}{v}$$

или

$$v \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = 1$$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos (\cos(\omega \Delta_t) - 1 + 1) = \frac{\omega \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{\omega}{v} = k$$

Нет численной дисперсии

Численная дисперсия

$$\frac{\tilde{v}}{v} = \frac{\pi \sqrt{\epsilon \mu}}{N_\lambda \arcsin\left(\frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)}$$

\tilde{v} – скорость распространения волны в дискретном пространстве

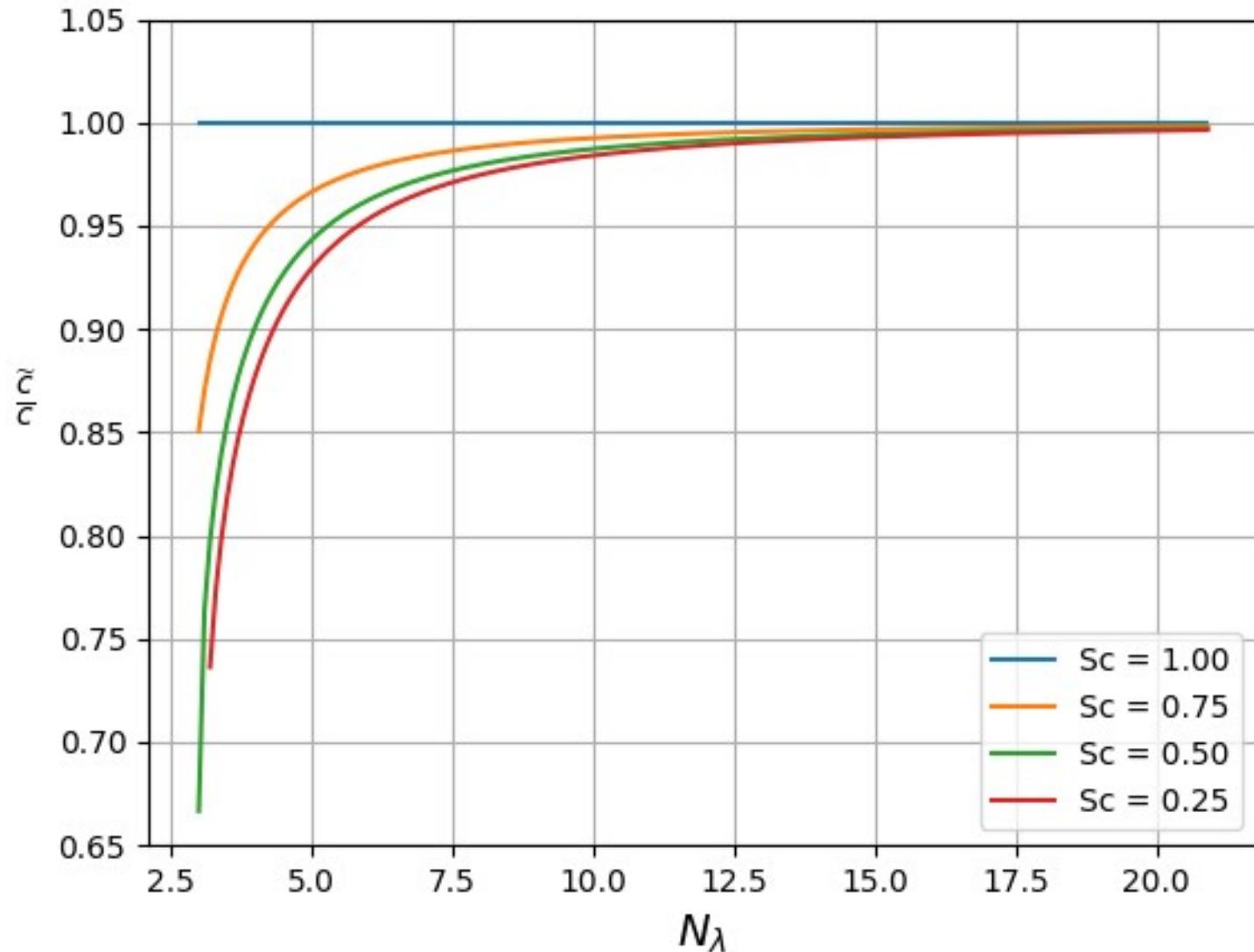
N_λ – количество ячеек сетки на длину волны

Если $S_c = 1$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$

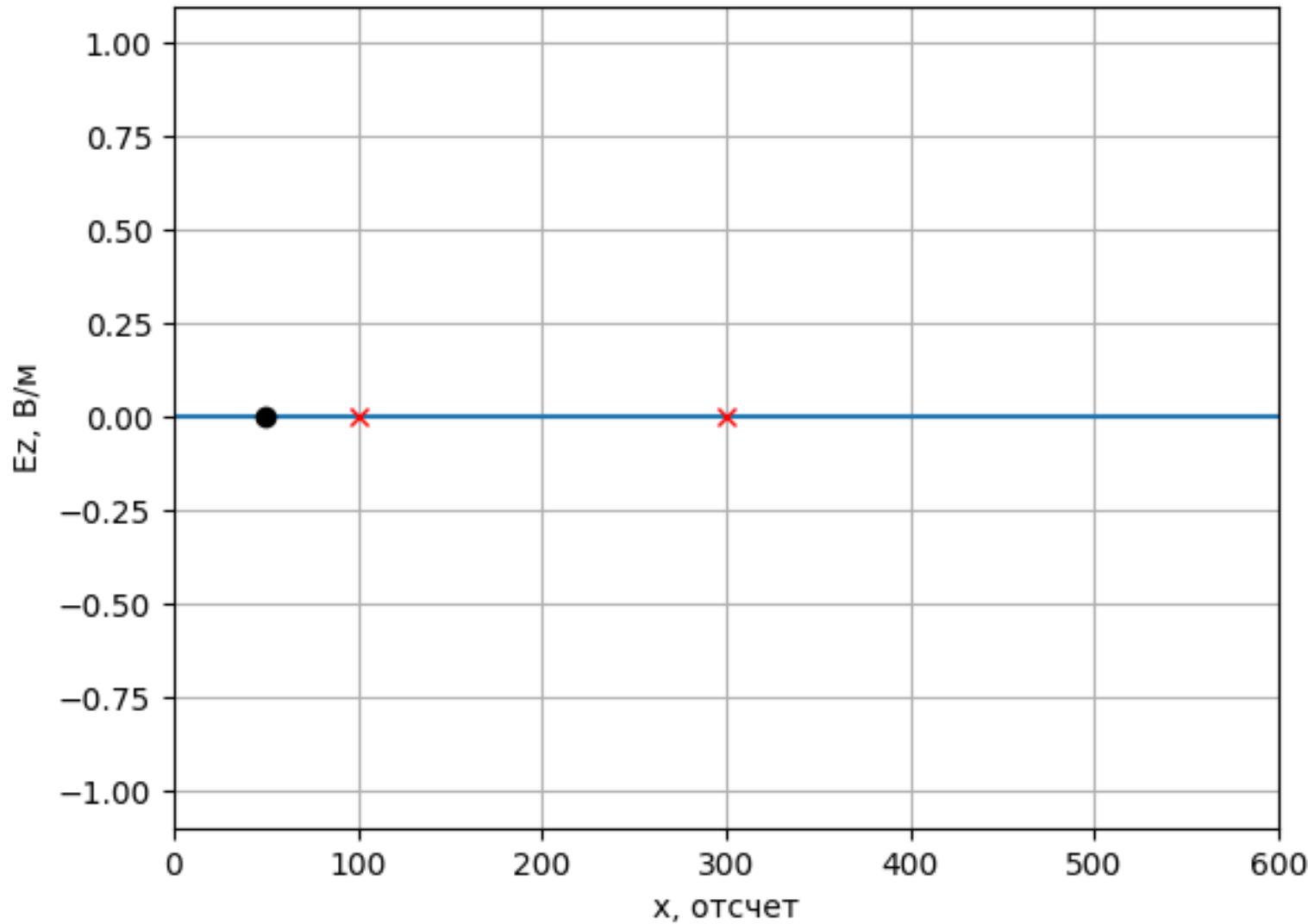
$$\frac{\tilde{v}}{v} = \frac{\pi}{N_\lambda \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{N_\lambda}\right)\right)} = \frac{\pi N_\lambda}{N_\lambda \pi} = 1$$

Нет численной дисперсии

Анализ численной дисперсии (dispersion.py)



Анализ численной дисперсии (fdtd dispersion vacuum.py)



Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd dispersion.py)

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\omega d}{\Delta_\phi} = \frac{\omega N_d \Delta_x}{\Delta_\phi}$$

d — расстояние между датчиками, м

N_d — расстояние между датчиками, отсчет

Δ_ϕ — разность фаз на круговой частоте ω , рад

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n \Delta f = \frac{2\pi n}{N_s \Delta t}$$

n — номер отсчета в спектре сигнала

N_s — количество отсчетов в зарегистрированном сигнале

Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd dispersion.py)

$$v_\phi(n) = \frac{2\pi N_d \Delta_x}{N_s \Delta_t \Delta_\phi} n = \frac{2\pi N_d c}{N_s \Delta_\phi S_c} n$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков

$$\mu = 1$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

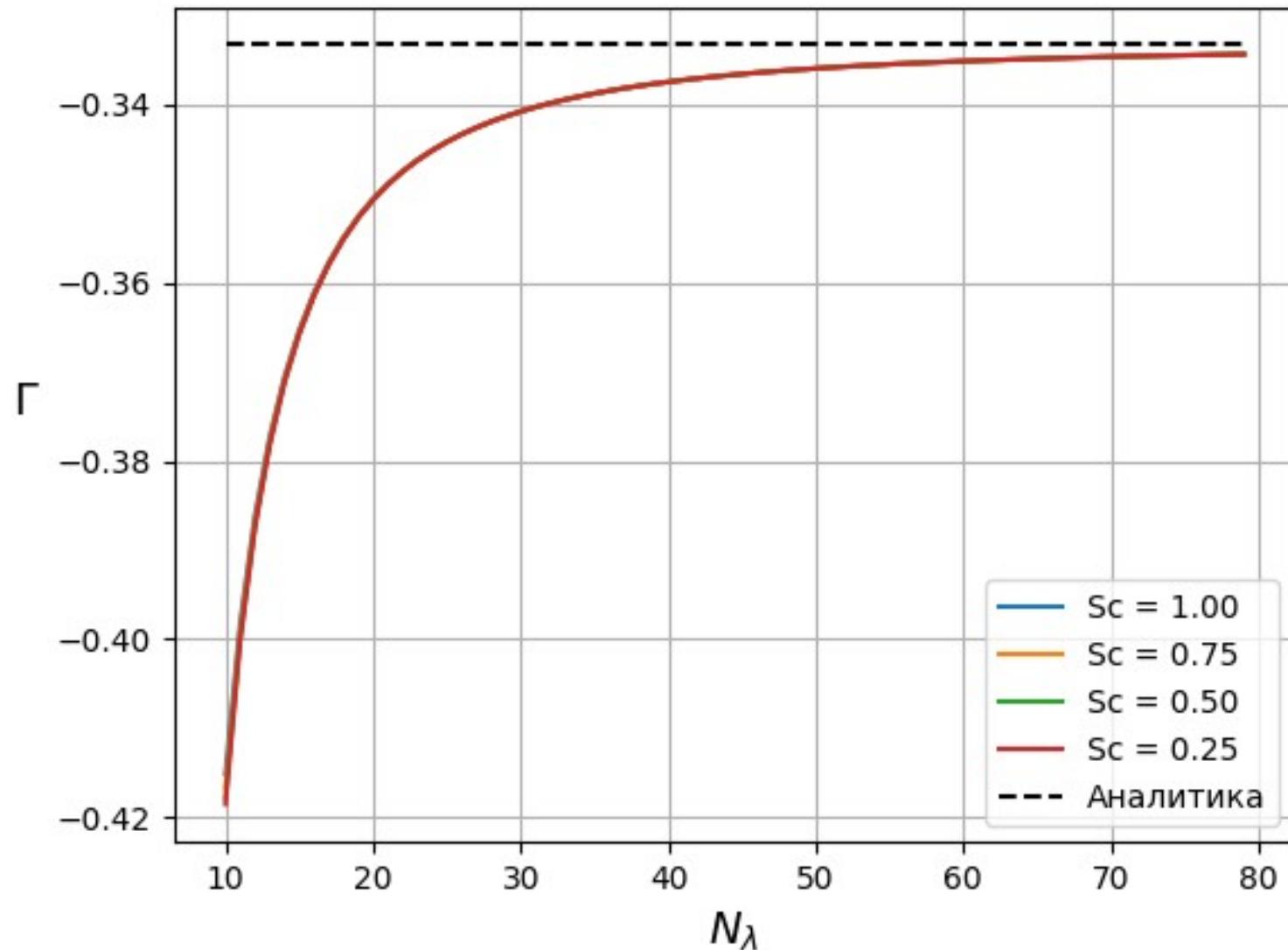
$$\left| \begin{array}{l} \tilde{T} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \\ \tilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \end{array} \right.$$

где

$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

Коэффициент отражения в дискретном пространстве (reflection_error.py)

32



Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] =$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \underline{\Delta_x[m+1/2]}} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \underline{\Delta_x[m]}} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2])$$

Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] =$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} \underline{S_c[m+1/2]}$$

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} \underline{S_c[m]}$$

Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$\nu \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

$$\frac{S'_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \leq 1$$

$$S'_c \leq \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd_heterogen_sc.py)

36

