Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Метод полного поля / рассеянного поля (Total-Field / Scattered-Field, TFSF)

Метод
Total-Field / Scattered-Field

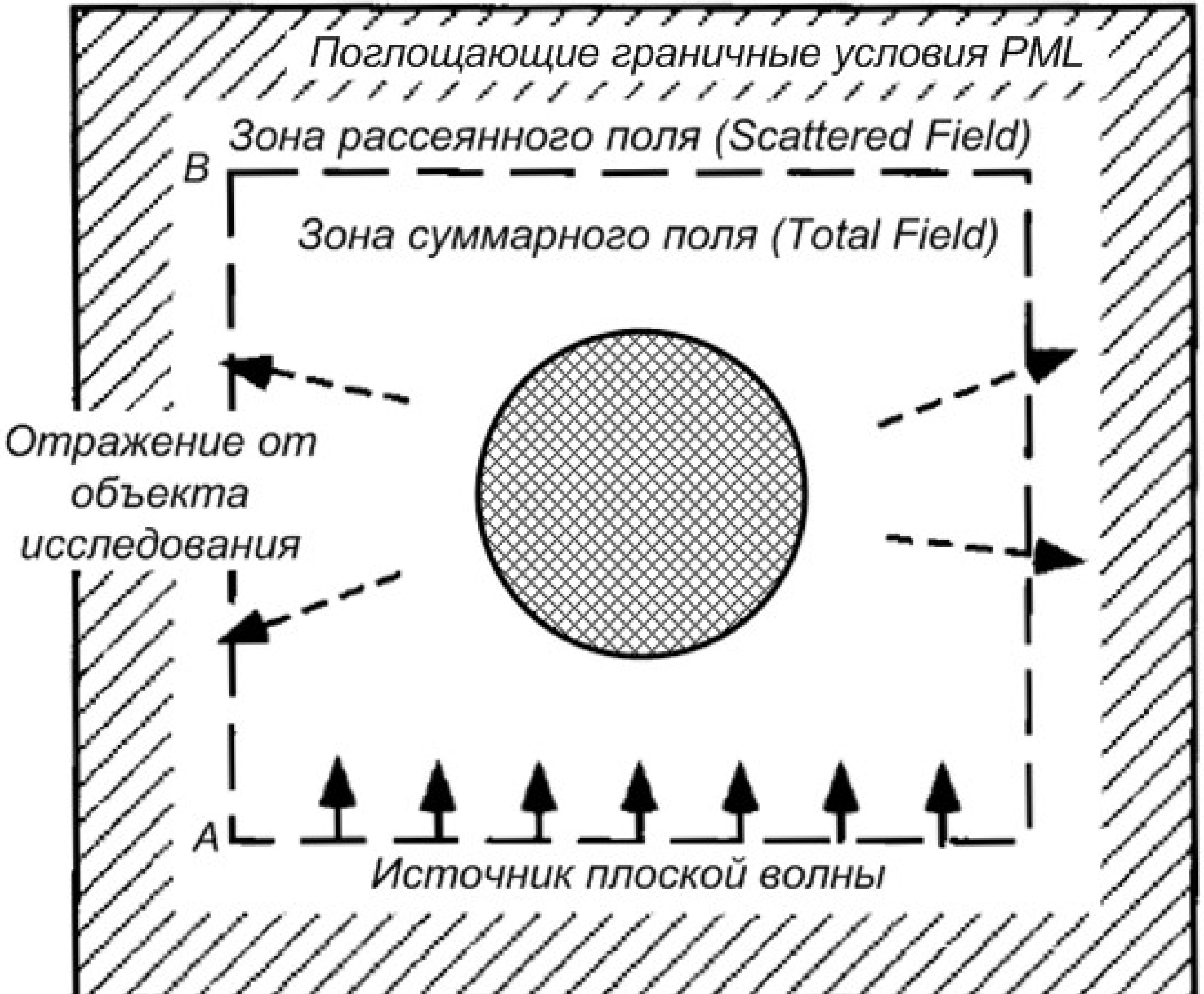
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}$, $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ могут быть рассчитаны аналитически в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}$, $\mathbf{H}_{\text{расс}}$ изначально не известны. Рассчитываются с помощью метода FDTD.

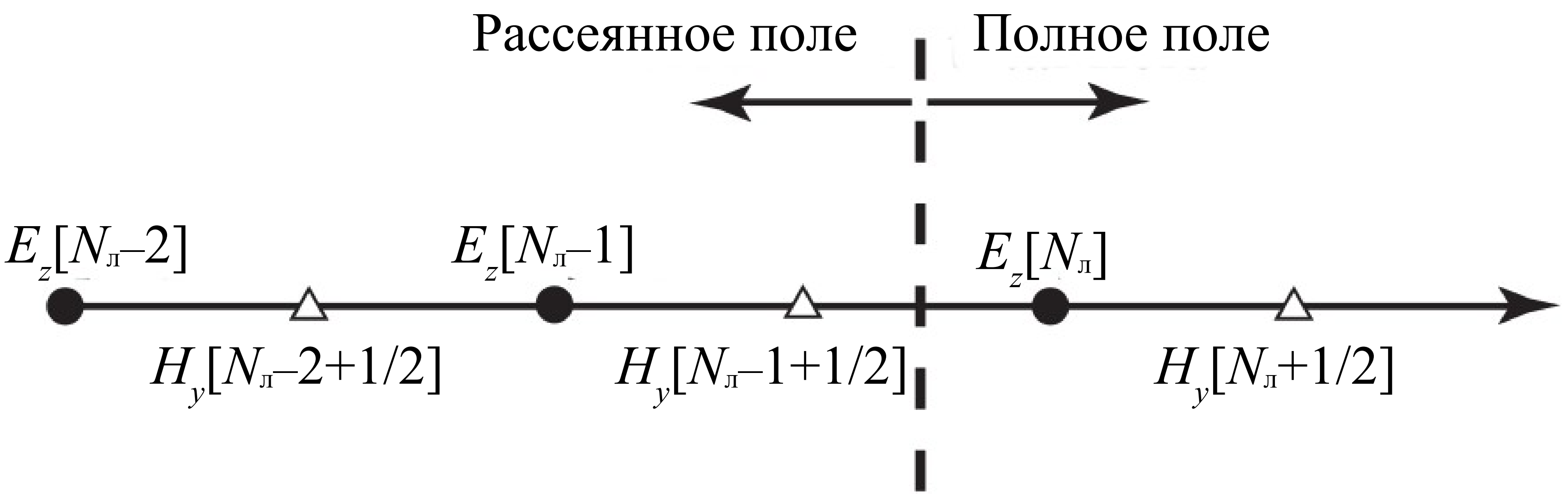
Метод Total-Field / Scattered-Field



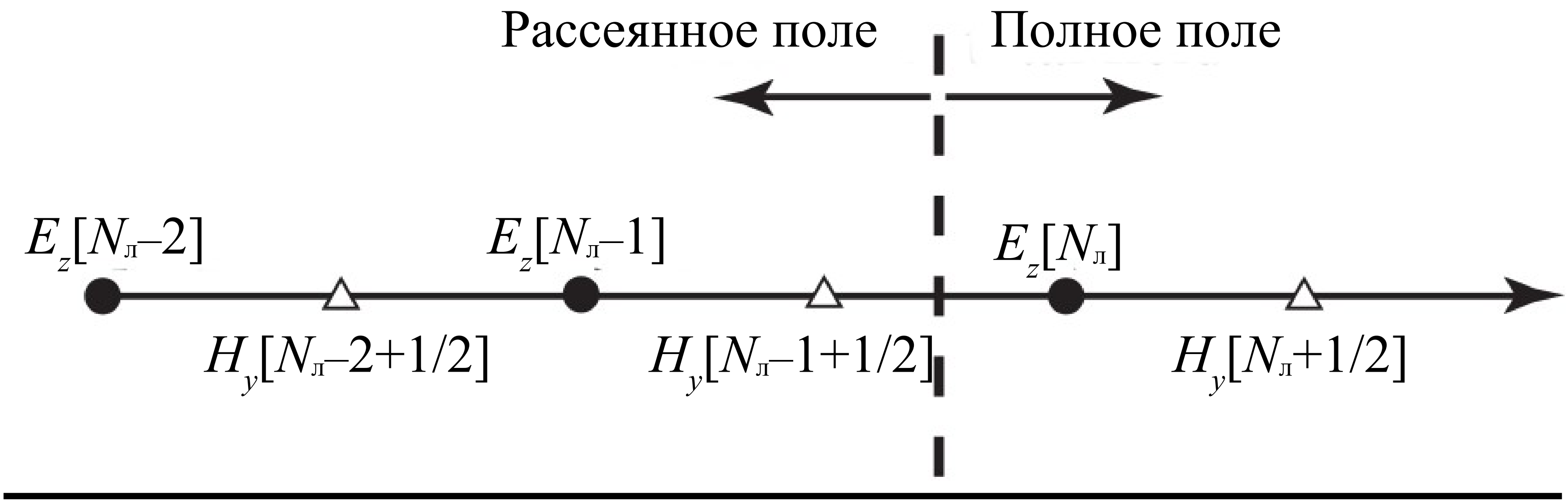
Метод Total-Field / Scattered-Field. Левая граница

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Метод Total-Field / Scattered-Field. Левая граница



$H_y[N_л - 1 + 1/2] = H_y[N_л - 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N_л]$ — первая ячейка в области полного поля.

Метод
Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области полного поля

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_л]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^{q}[N_л]}^{\text{полн.}} + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л+1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2]}^{\text{расс.}}\right)$$

Поле на левой границе
Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке $(N-1/2)\Delta x$

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^{q}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}+1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{\left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} + \overbrace{H_{y\ \text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{пад.}}\right\}}^{\text{полн.}}\right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_л]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^{q}[N_л]}^{\text{полн.}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л+1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{\left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2]}^{\text{расс.}} + \overbrace{\left(-\frac{1}{W}E_{z\ \text{пад}}^{q+1/2}[N_л-1/2]\right)}^{\text{пад.}}\right\}}^{\text{полн.}}\right)$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}+1/2] - H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]\right)$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\frac{1}{W}E_{z\,\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_л] = E_z^{q+1}[N_л] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W}E_{z\ пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N_л] = E_z^{q+1}[N_л] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}E_{z\ пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:

$$E_z^{q+1}[N_л] = E_z^{q+1}[N_л] + E_{z\ пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

проблема

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2]}^{\text{расс.}}=\overbrace{H_y^{q-1/2}[N_л-1/2]}^{\text{расс.}}+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{E_z^{q}[N_л]}^{\text{полн.}}-\overbrace{E_z^{q}[N_л-1]}^{\text{расс.}}\right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}}=\overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}}+$$

$$+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}}-\overbrace{E_{z\ \text{пад}}^q[N_{\text{л}}]}^{\text{пад.}}\right)}^{\text{расс.}}-\overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}-1]}^{\text{расс.}}\right)$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\,\mu_0\,\Delta_x}\left(E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}}-1]\right)$$

$$\boxed{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu\,\mu_0\,\Delta_x} E^q_{z\ \text{пад}}[N_{\text{л}}]}$$

или

$$\boxed{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{S_c}{W_0\,\mu} E^q_{z\ \text{пад}}[N_{\text{л}}]}$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_л - 1/2] + \frac{1}{W_0}\left(E_z^q[N_л] - E_z^q[N_л - 1]\right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] - \frac{1}{W_0} E_{z\ пад}^q[N_л]$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu\,\mu_0\,\Delta_x} E_{z\ \text{пад}}^{q}[N_{\text{л}}]$$

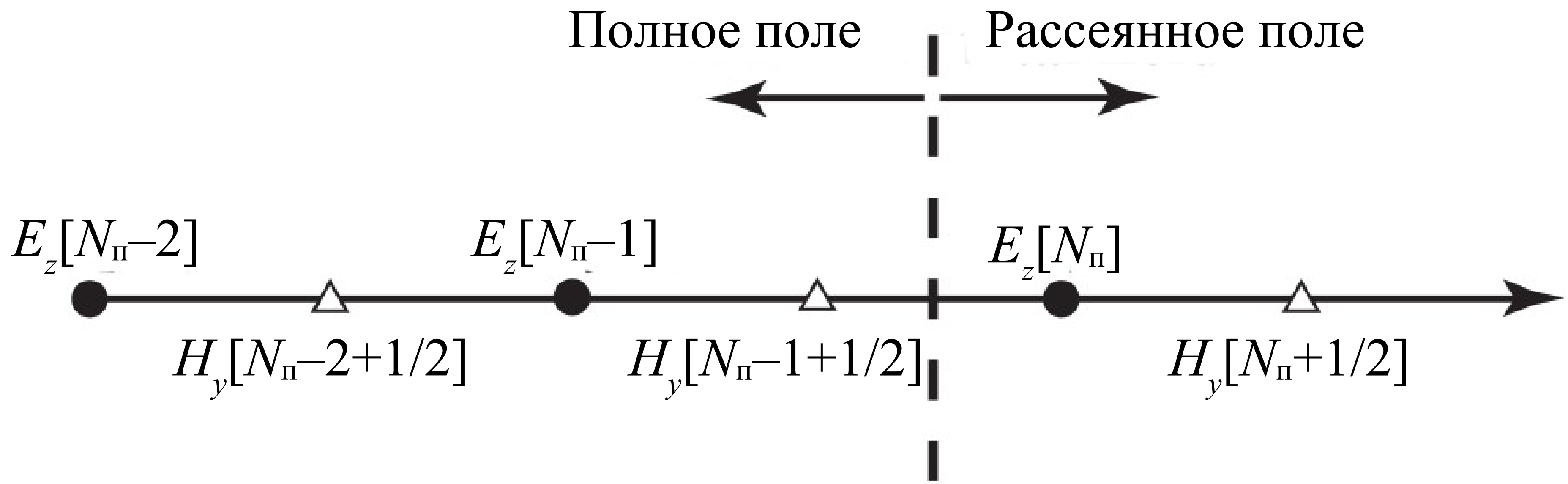
$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\frac{1}{W} E_{z\ \text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{S_c}{W_0\mu} E^q_{z\ \text{пад}}[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E^{q+1/2}_{z\ \text{пад}}[N_{\text{л}}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field. Правая граница



$H_y[N_\text{п} - 1 + 1/2] = H_y[N_\text{п} - 1/2]$ — последняя ячейка в области полного поля.

$E_z[N_\text{п}]$ — первая ячейка в области рассеянного поля.

Total-Field / Scattered-Field. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} E_{z\ \text{пад}}^{q}[N_\text{п}]$$

$$E_z^{q+1}[N_\text{п}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_\text{п}] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W} E_{z\ \text{пад}}^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{п}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{п}}-1/2]+\frac{S_c}{W_0\mu}E_{z\ \text{пад}}^{q}[N_{\text{п}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{п}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{п}}]-\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}E_{z\ \text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{п}}-1/2]$$

Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий E_z^{0}, $H_y^{1/2}$

Цикл по времени $q = [0...maxTime - 1]$:

Цикл по пространству $m = [0...maxSize - 2]$:

Расчет $H_y^{q+1/2}$

Ввод поля $H^{q}_{пад}[N_{л}]$

Ввод поля $H^{q}_{пад}[N_{п}]$

Цикл по пространству $m = [1...maxSize - 1]$:

Расчет E_z^{q+1}

Ввод поля $E^{q+1/2}_{пад}[N_{л}-1/2]$

Ввод поля $E^{q+1/2}_{пад}[N_{п}-1/2]$

Вывод результатов

Конец

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$ (для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}$$

Гауссов импульс

$$f(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2}$$

Гауссов импульс в дискретной форме

Делаем замену t на $t - x / v$

$$t-\frac{x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}=$$

$$=\left(q-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c\Delta_t}\right)\Delta_t=\left(q-\frac{m\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\right)\Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t-\frac{x}{c}=(q-m)\Delta_t$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_{z\ \text{пад}}^{q}[m] = A\cdot e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = A\cdot e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y\ \text{пад}}^{q}[m] = -\frac{A}{W}E_{z\ \text{пад}}^{q}[m] = -\frac{A}{W}e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

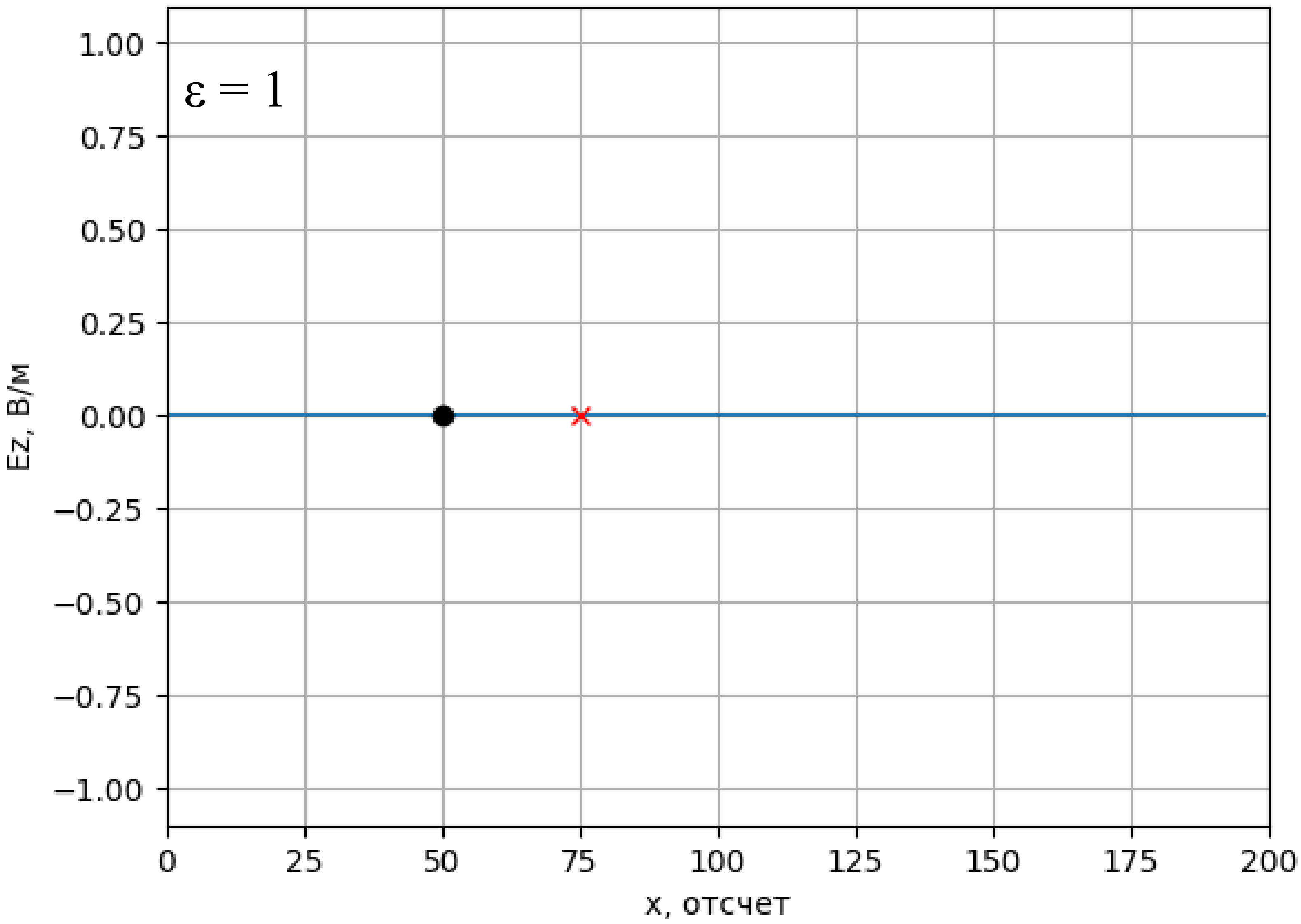
Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_{z\ \text{пад}}^{q}\left[m\right]=A\cdot e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t-d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2}=A\cdot e^{-\left(\frac{(q-m)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

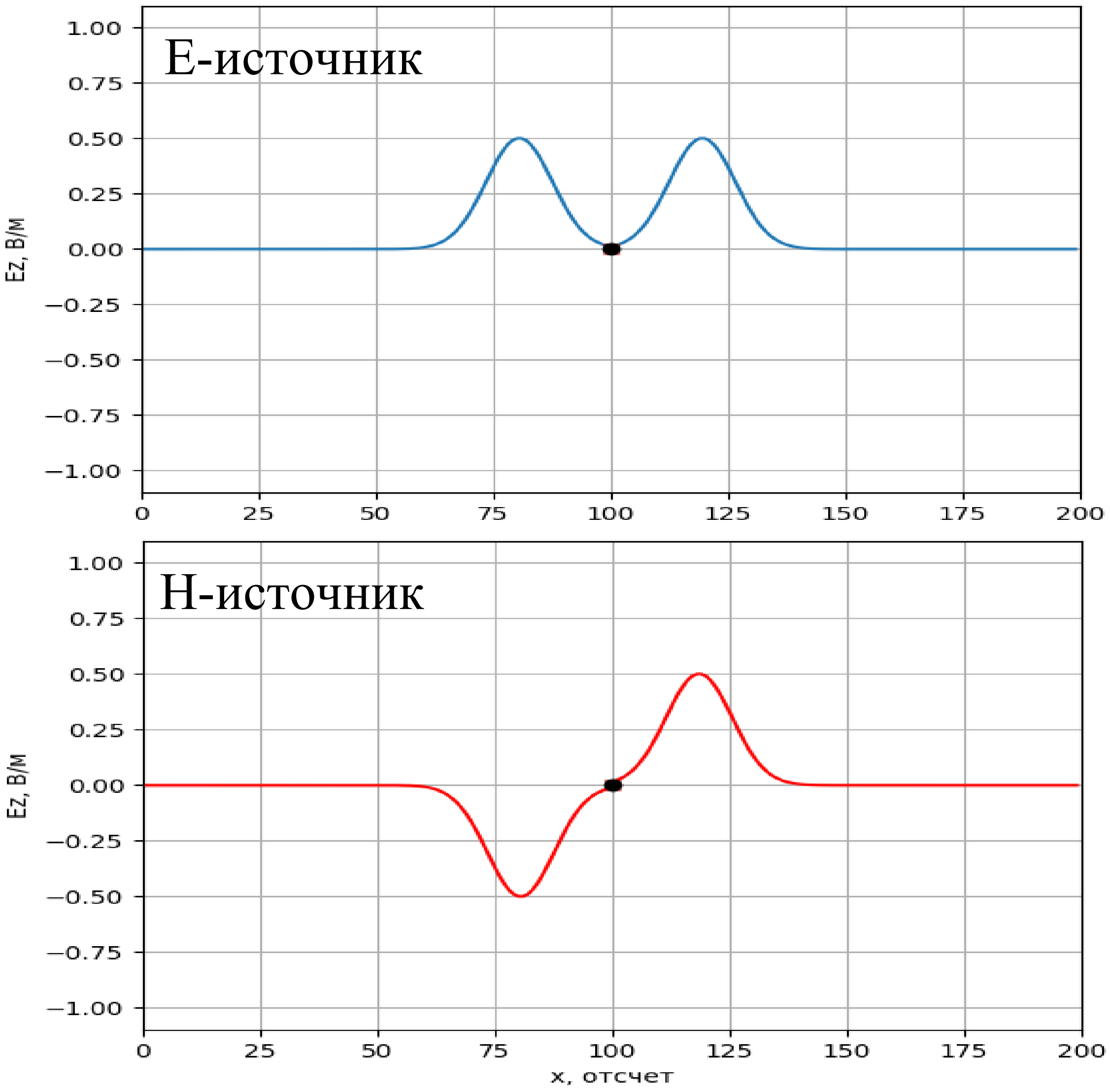
$$H_{y\ \text{пад}}^{q}\left[m\right]=-\frac{A}{W_0}E_{z\ \text{пад}}^{q}\left[m\right]=-\frac{A}{W_0}e^{-\left(\frac{(q-m)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

Демонстрация метода Total Field / Scattered Field

Демонстрация метода TFSF (fdtd_tfsf_gauss.py)



Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



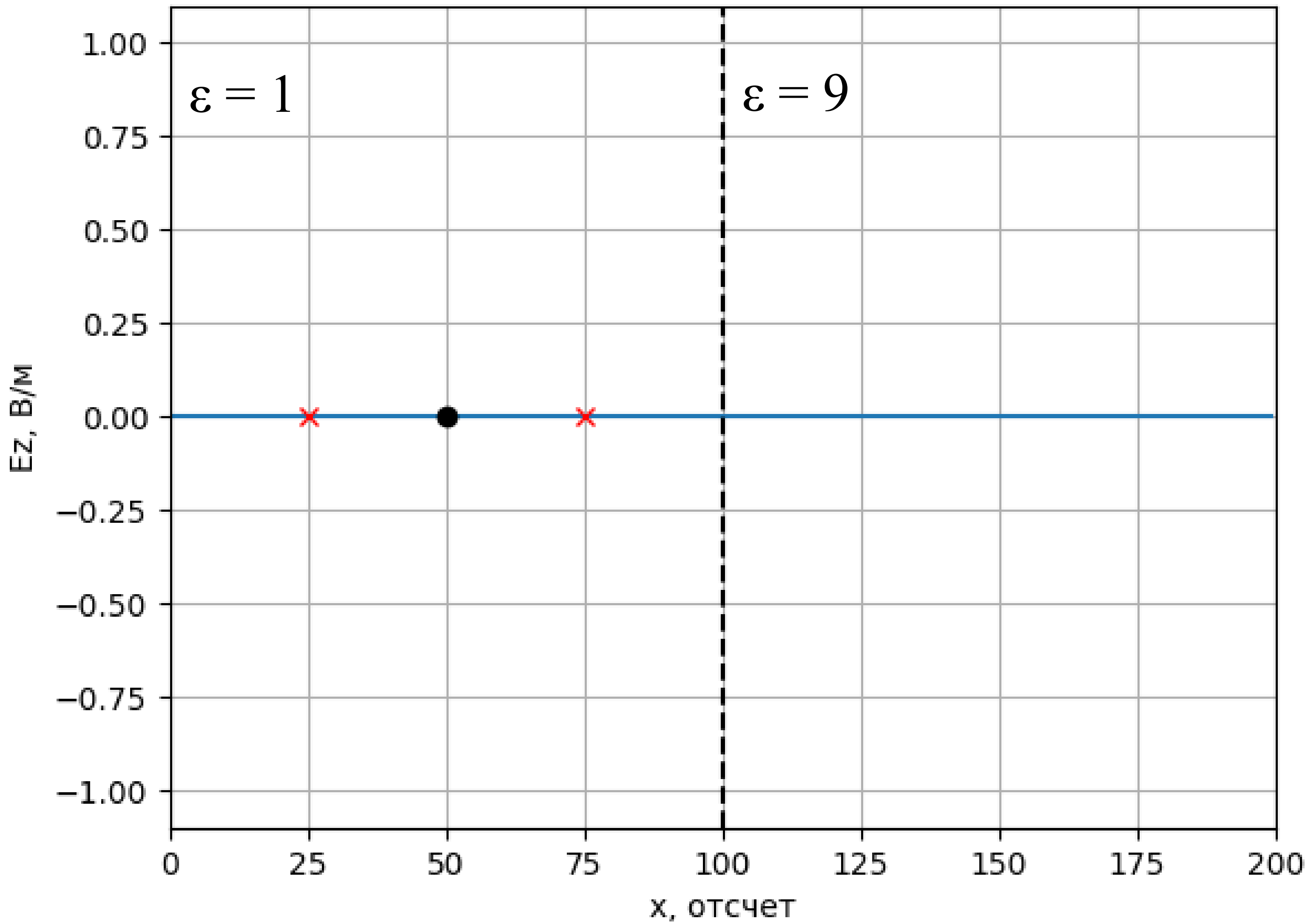
Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует N-й ячейке

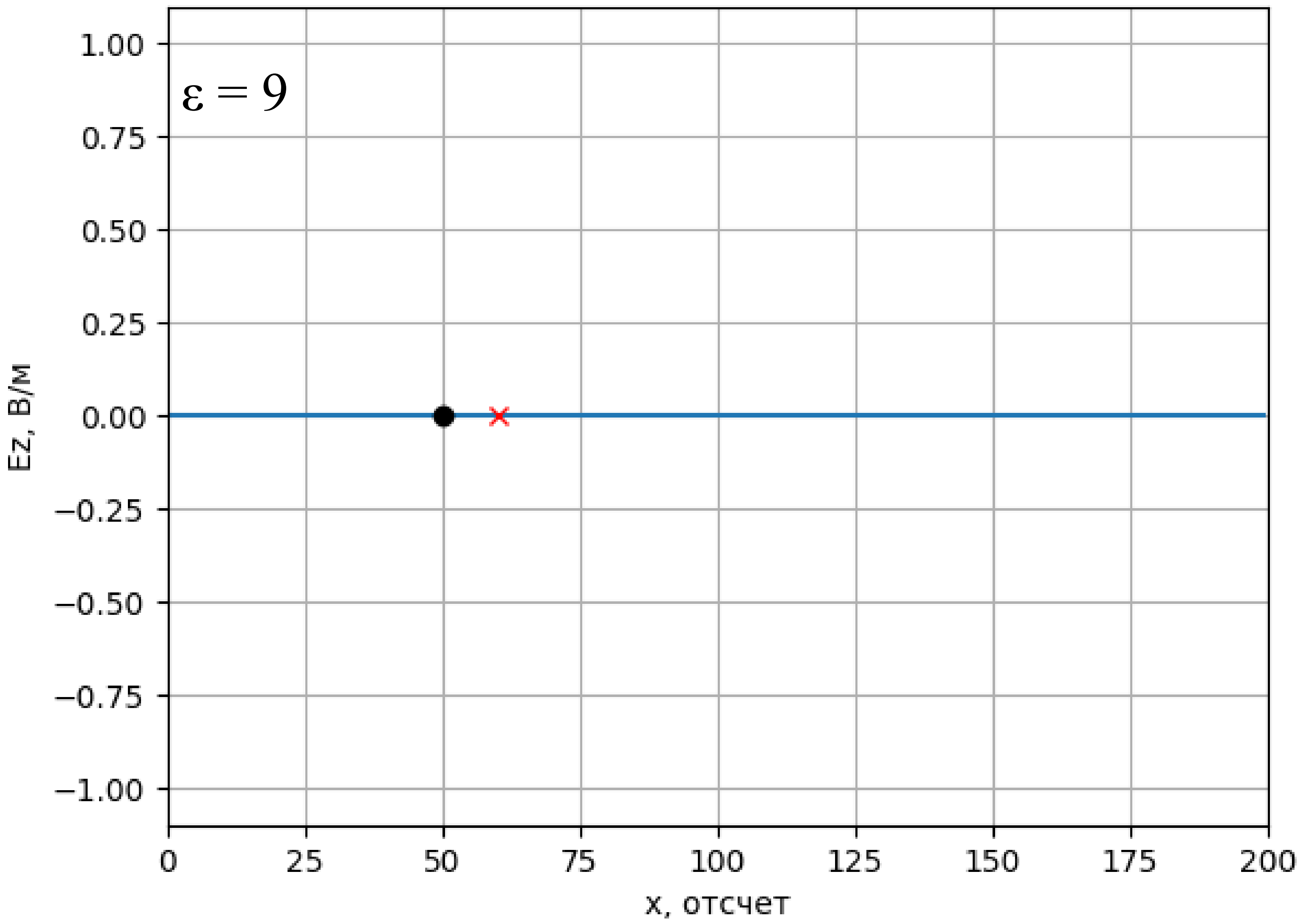
$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_{z.\text{пад}}^{q}[0]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[-1/2]$$

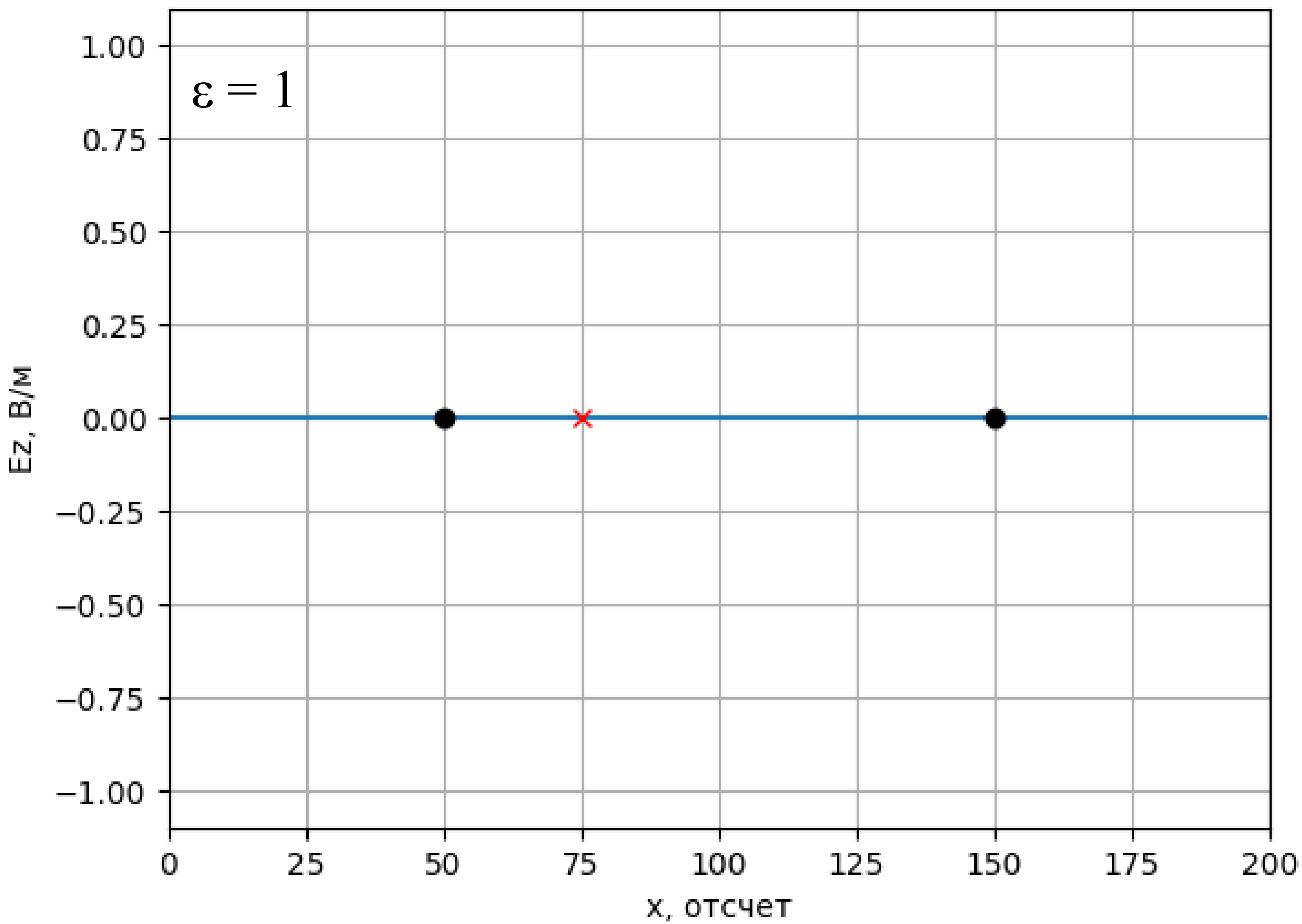
Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSF (fdtd_tfsf_heterogen.py)



Метод Total Field / Scattered Field с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd_tfsf_medium_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss_pec.py)