

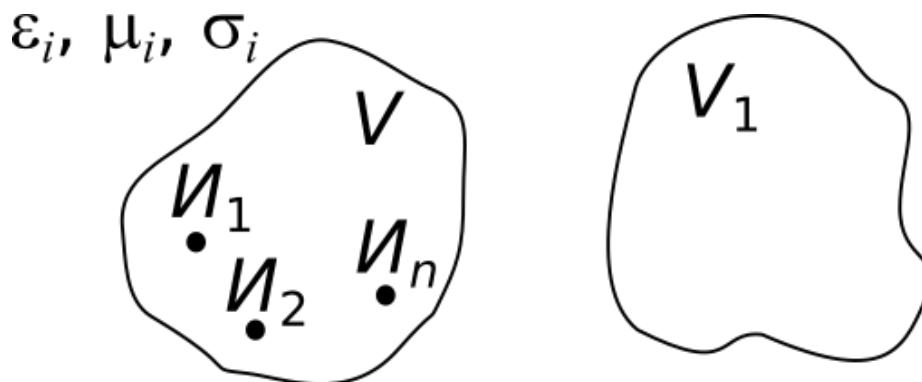
Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

Решение обратных задач
электродинамики.

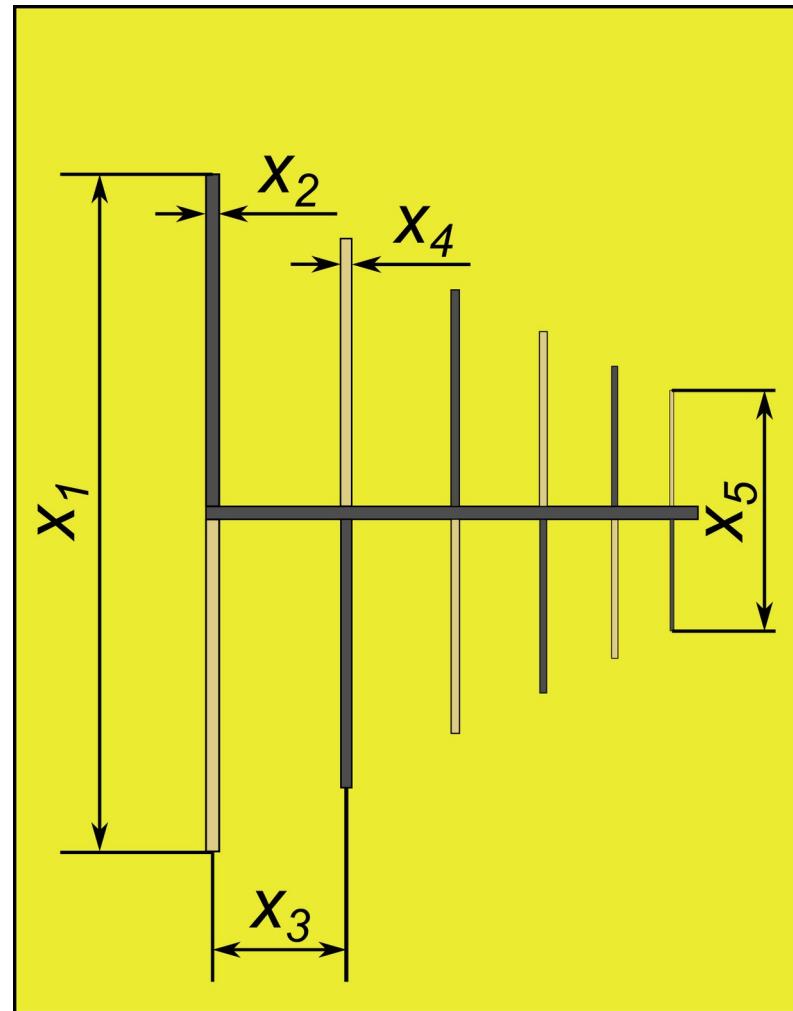
Алгоритмы глобальной
оптимизации

Обратная задача электродинамики

Обратная задача электродинамики (задача синтеза) —
определение параметров среды и (или) источников в
области V по известному распределению
электромагнитного поля в некоторой другой области V_1 ,
которая может не совпадать с V .



Параметрическая модель печатной вибраторной антенны



Целевая функция

$\Phi(\mathbf{X})$ — целевая функция

$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — параметры оптимизации

$$\Phi(\mathbf{X}) = \alpha_1 \cdot f_1(\mathbf{X}) + \alpha_2 \cdot f_2(\mathbf{X}) + \dots + \alpha_m \cdot f_m(\mathbf{X})$$

$f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X})$ — штрафные функции

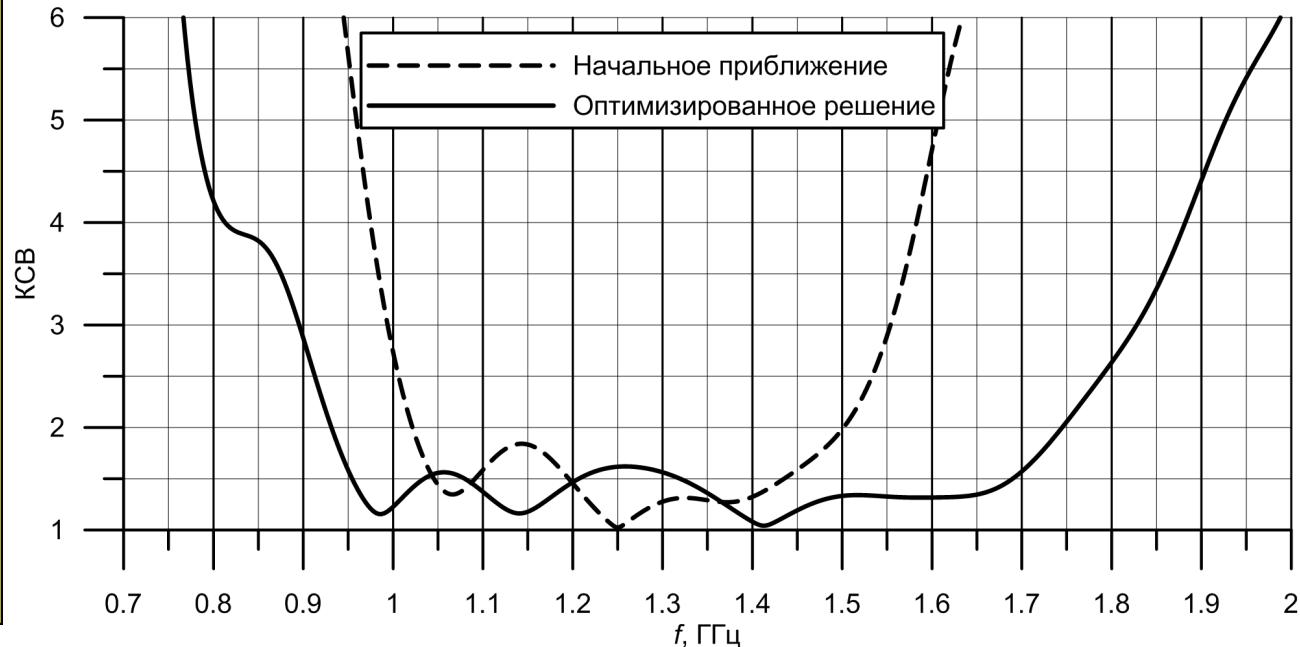
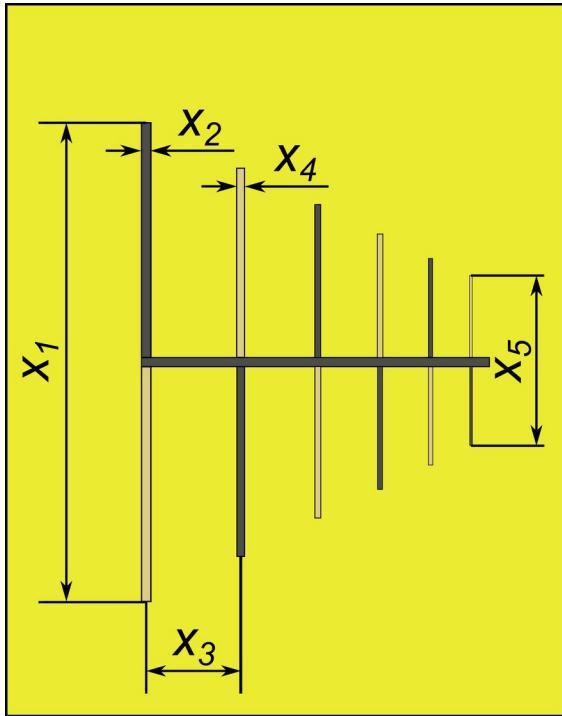
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — весовые коэффициенты

Оптимизация

Оптимизация — (от лат. *optimus* — наилучший) задача нахождения экстремума (максимума или минимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

Требуется найти такой $\tilde{\mathbf{X}}$, что $\Phi(\tilde{\mathbf{X}}) \rightarrow \min$

Оптимизация параметров антенны в с помощью генетического алгоритма

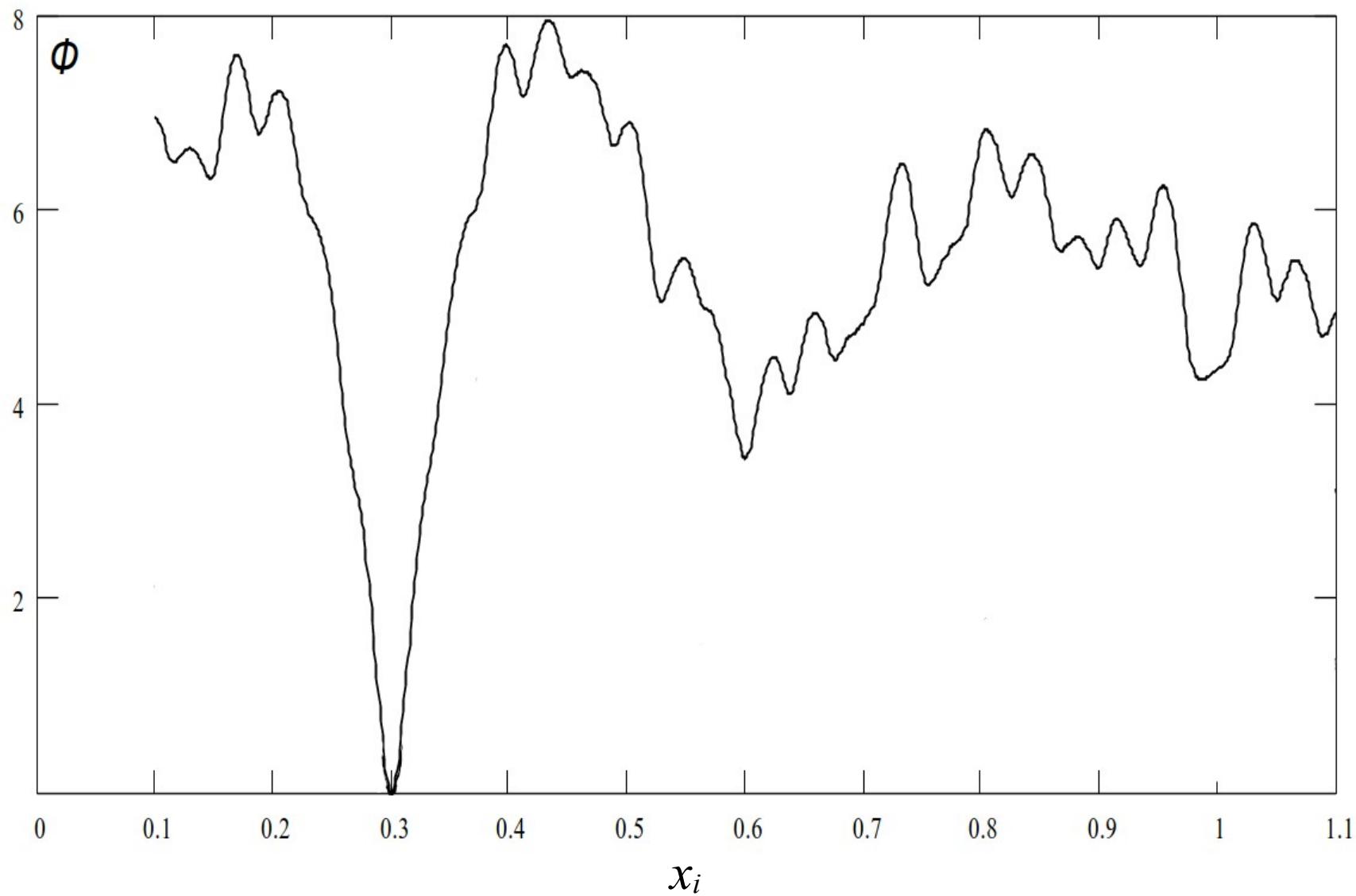


Параметры алгоритма:

Минимизация максимального КСВ в диапазоне частот 0.95 – 1.65 ГГц

$$\Phi(\mathbf{X}) = \max(KCB) \Big|_{f \in [f_{min}; f_{max}]}$$

Пример целевой функции



Метод градиентного спуска

Метод градиентного спуска

В случае поиска минимума $\Phi(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i - \lambda_i \cdot \nabla \Phi(\mathbf{X}_i)$$

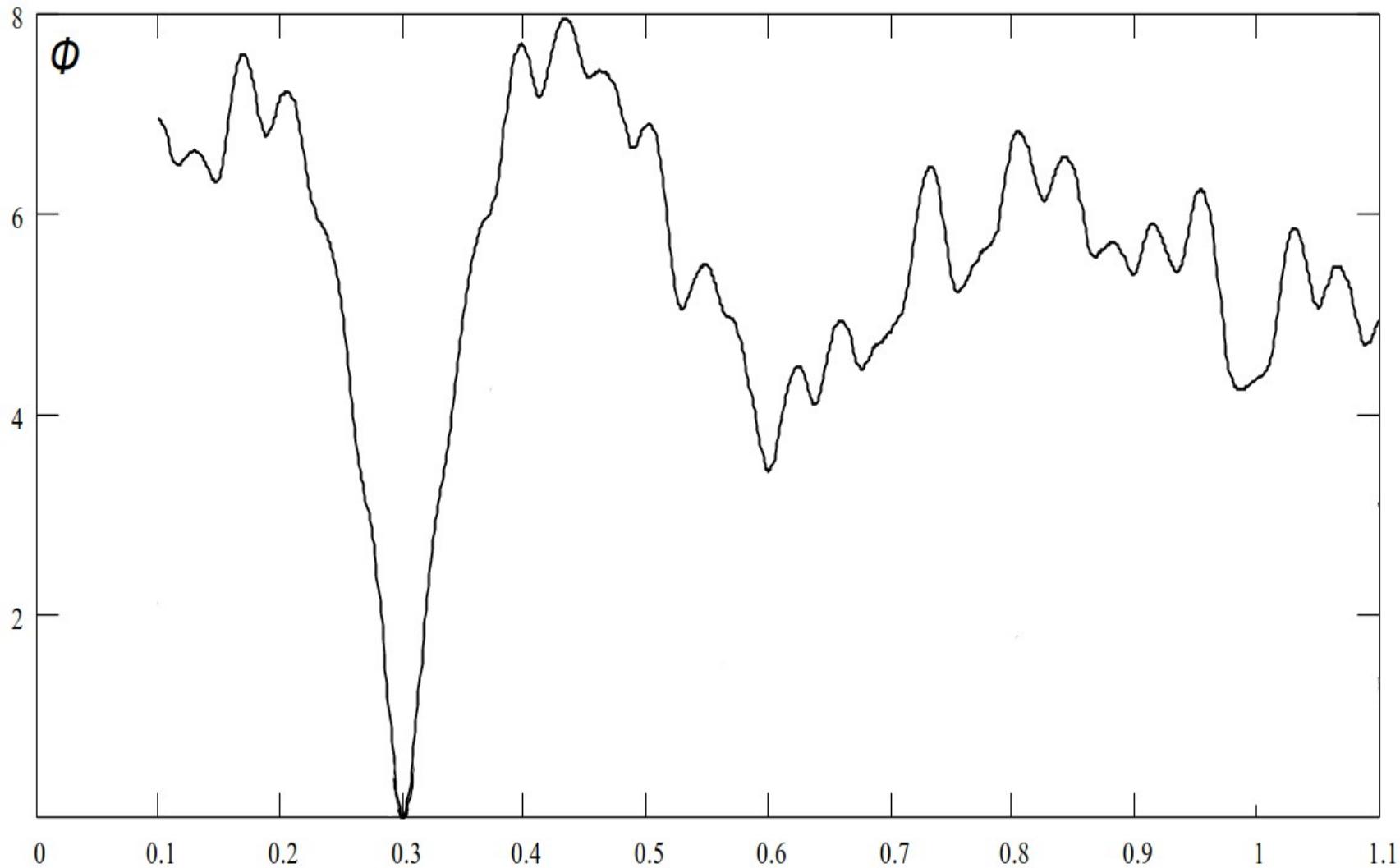
i – номер итерации;

λ_i задает скорость градиентного спуска.

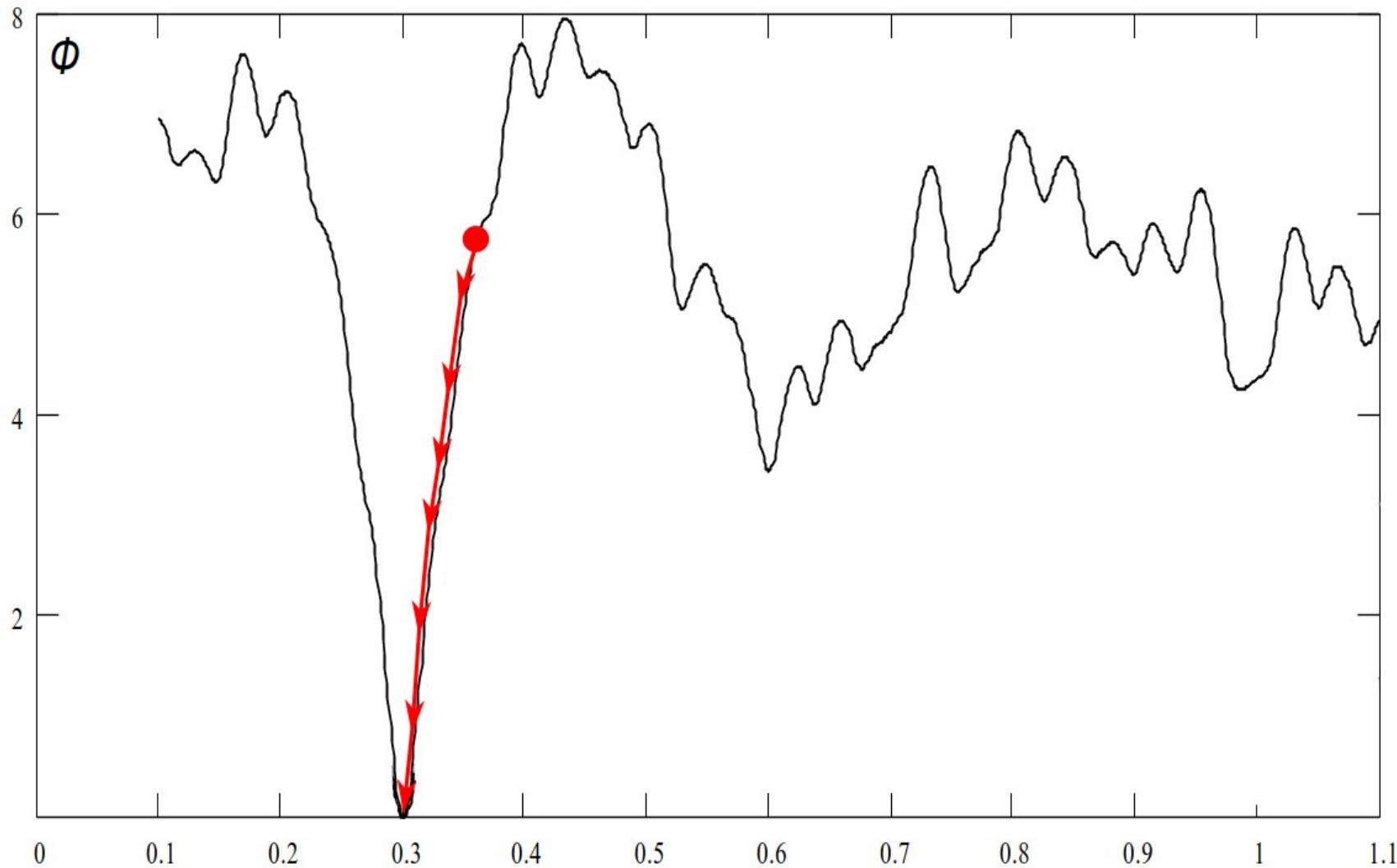
$$\nabla \Phi(\mathbf{X}) = \text{grad } \Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}) = \text{grad } \Phi(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right)$$

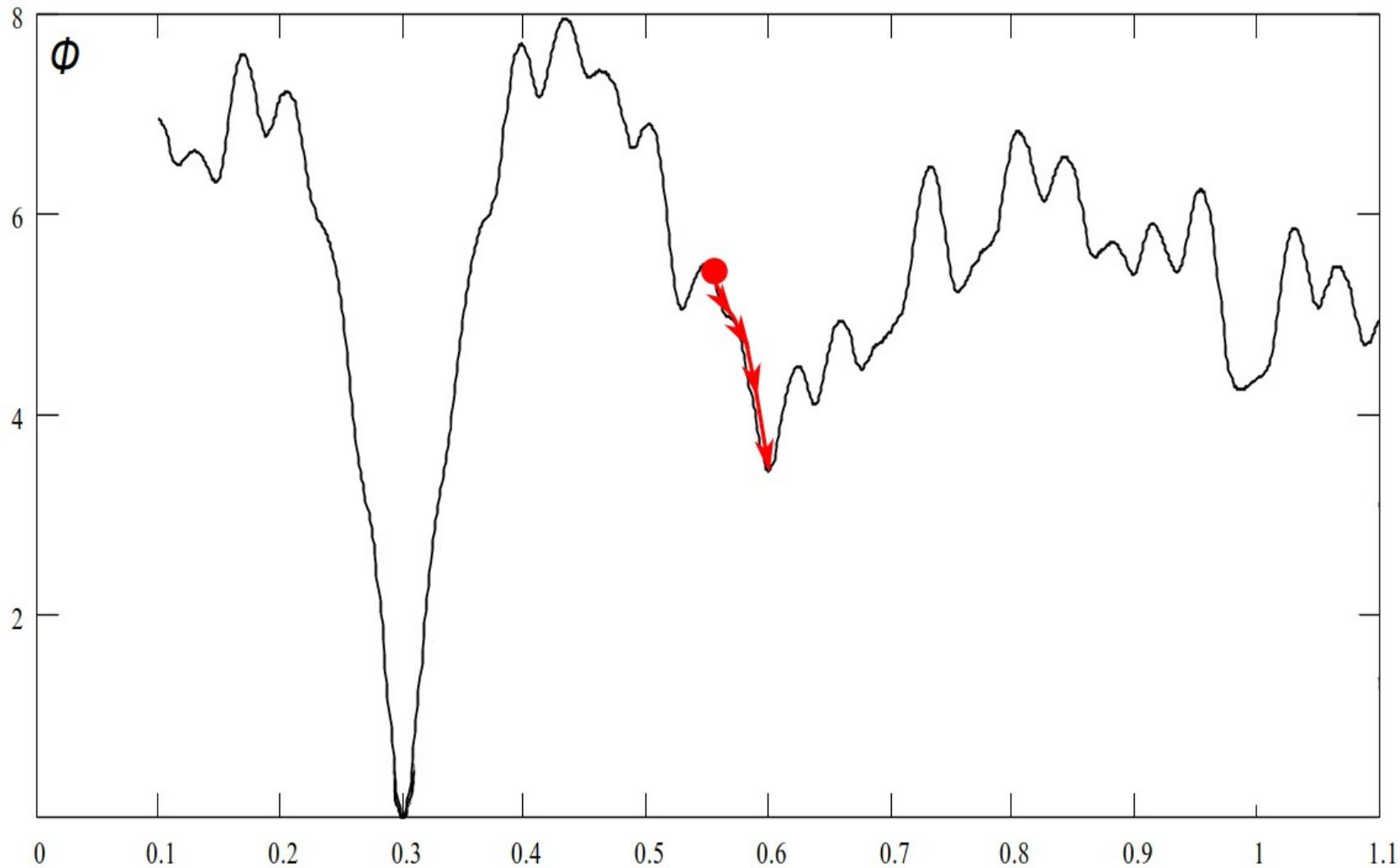
Пример целевой функции



Сходимость градиентного метода

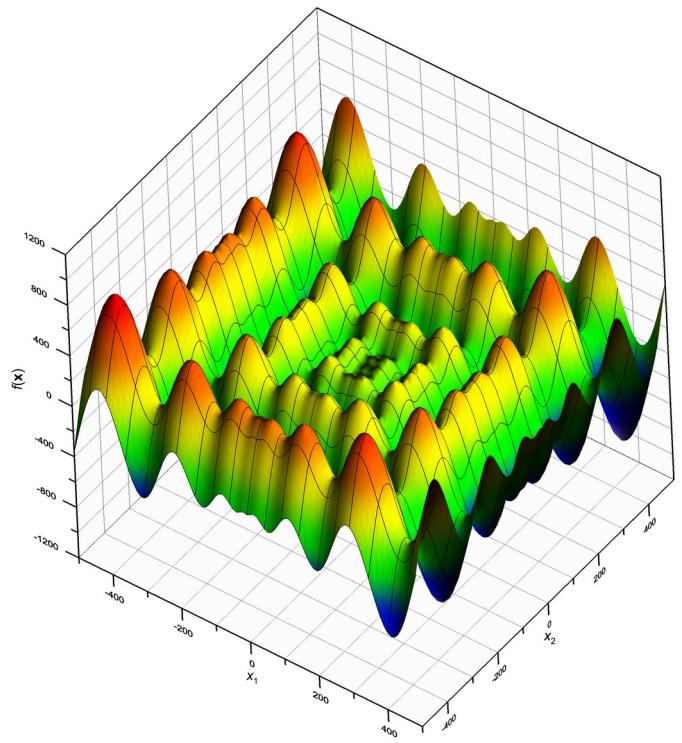
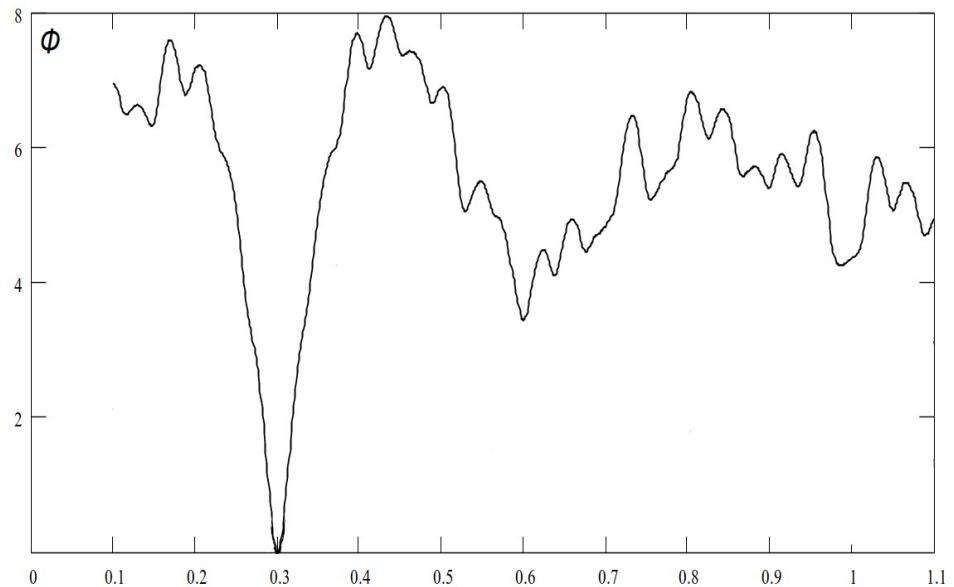


Сходимость градиентного метода



Алгоритмы глобальной оптимизации

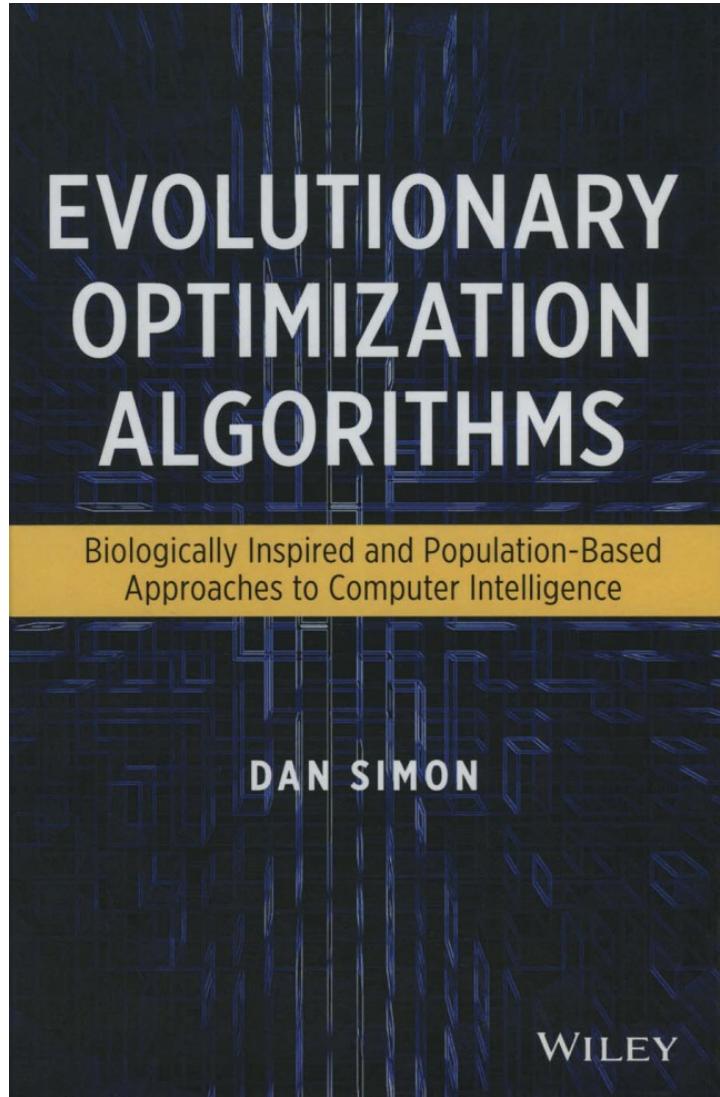
Задача оптимизации



Алгоритмы глобальной оптимизации

- Генетический алгоритм
- Метод Нелдера-Мида
- Алгоритм случайного поиска
- Алгоритм имитации отжига
- Алгоритм роя частиц
- Алгоритм пчел
- И многие другие

Литература



Генетический алгоритм

J. H. Holland. “Adaptation in natural and artificial systems”.

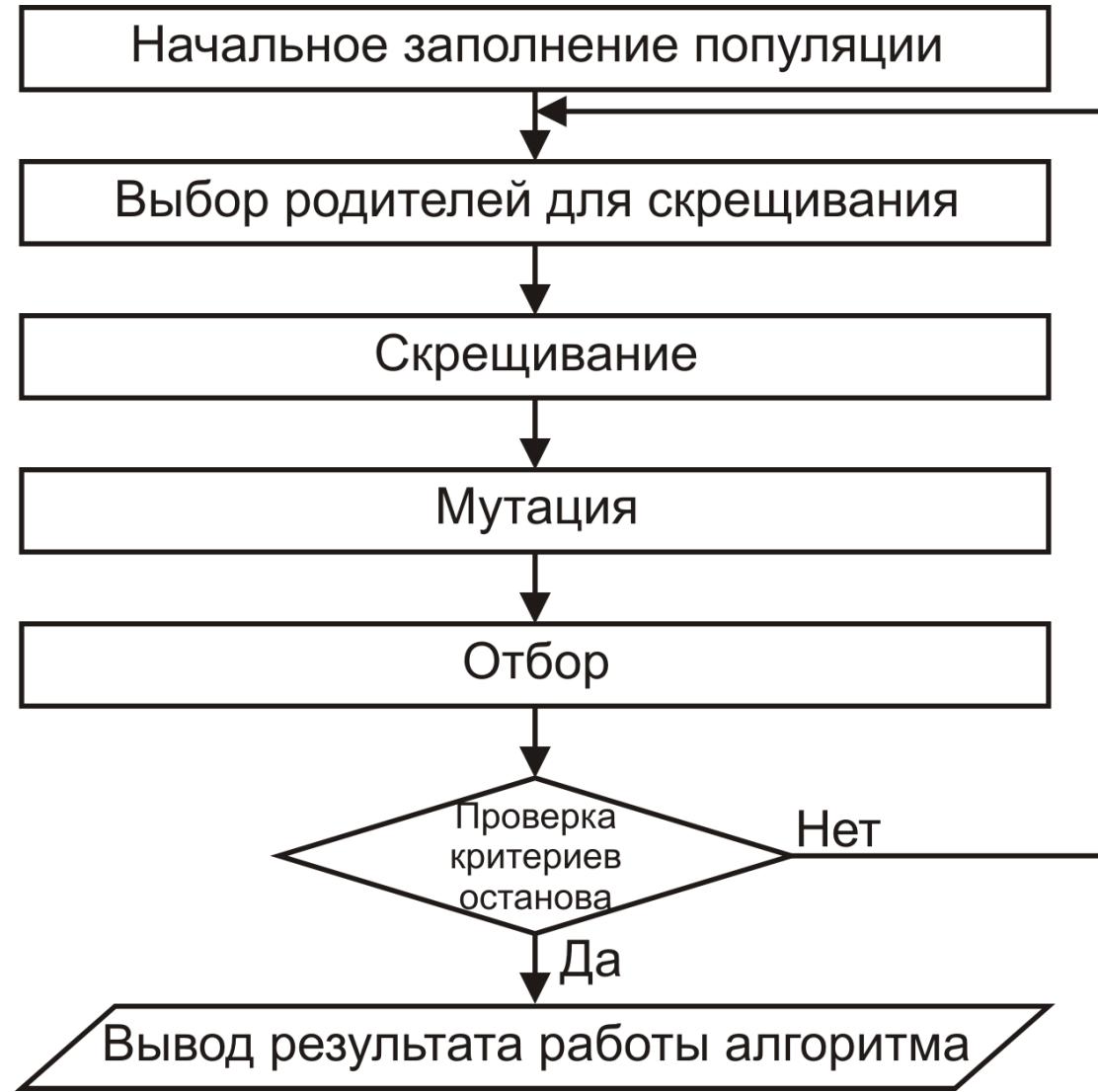
University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

Генетический алгоритм.

Основные понятия

- **Хромосома** – значение одного из искомых параметров.
- **Особь** – одно из возможных решений (набор хромосом).
- **Популяция** – набор решений (особей).
- **Функция приспособленности** – минимизируемая (целевая) функция.

Генетический алгоритм



Начальное заполнение популяции

- Случайное распределение особей.
- Равномерное распределение особей.

Параметр — количество особей в начальной популяции.

Выбор родителей для скрещивания

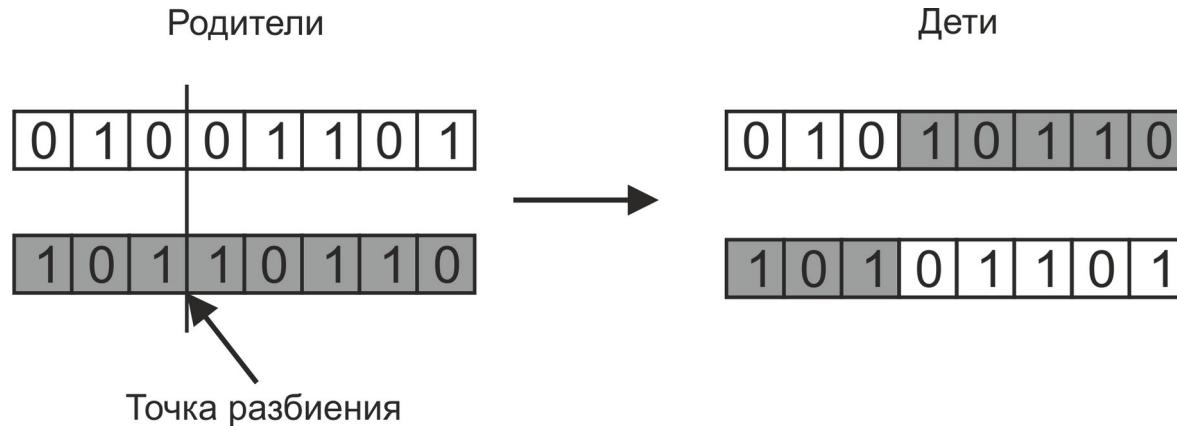
- Панмиксия - оба родителя выбираются случайно, каждая особь популяции имеет равные шансы быть выбранной.
- Инбридинг - первый родитель выбирается случайно, а второй выбирается такой, который **наиболее похож** на первого родителя.
- Аутбридинг - первый родитель выбирается случайно, а второй выбирается такой, который **наиболее не похож** на первого родителя.
- Метод турнира.
- Метод элиты.

Операторы скрещивания

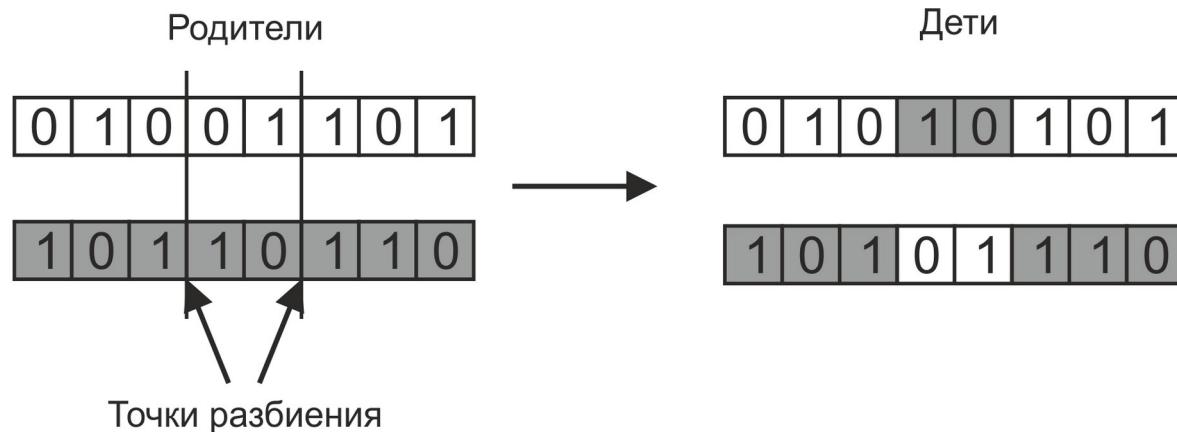
- Расчет среднего арифметического.
- Расчет среднего геометрического.
- Побитовое скрещивание.

Генетический алгоритм. Операторы скрещивания

Одноточечное скрещивание



Многоточечное скрещивание



Генетический алгоритм. Операторы мутации



Другие алгоритмы мутации

- Добавление к хромосоме небольшой случайной величины
- Инвертирование всех битов хромосомы
- Замена хромосомы на случайное число

Операторы отбора

- Метод поддержания постоянного размера популяции
- Метод вероятностного отбора
- Метод турнира
- Метод элиты

Критерии останова

- Постоянство целевой функции.
- Достижение заданного значения целевой функции.
- Достижение определенного номера поколения.
- Вырождение популяции.

Недостатки генетического алгоритма

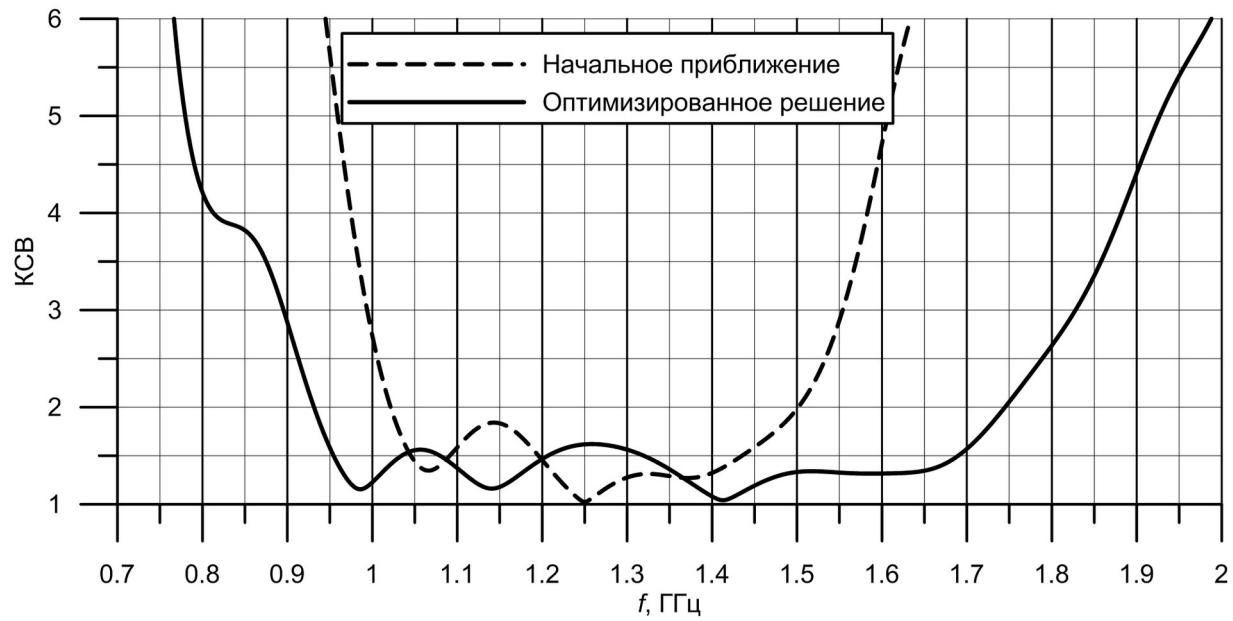
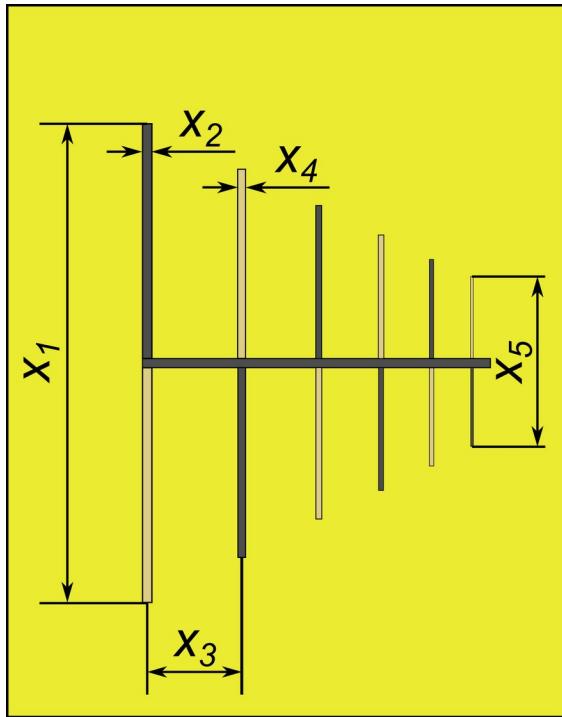
- Не гарантируется нахождение глобального экстремума.
- Использование вероятностных операций.
- Большое количество вычислений целевой функции.
- Большое количество параметров алгоритма.

Модификации генетического алгоритма

- Совместное применение с итерационными алгоритмами.
- Создание нескольких независимых популяций.
- Адаптация параметров алгоритма во время выполнения.
- Использование ГА для определения оптимальных параметров другого ГА.

Примеры использования

Оптимизация параметров антенны с помощью генетического алгоритма

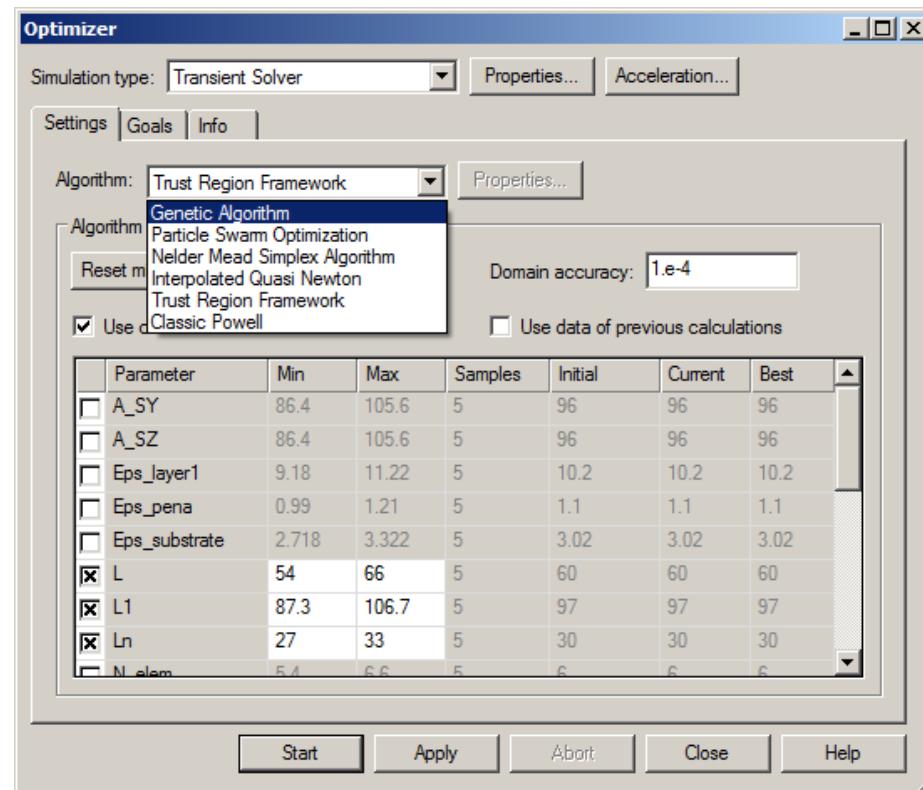
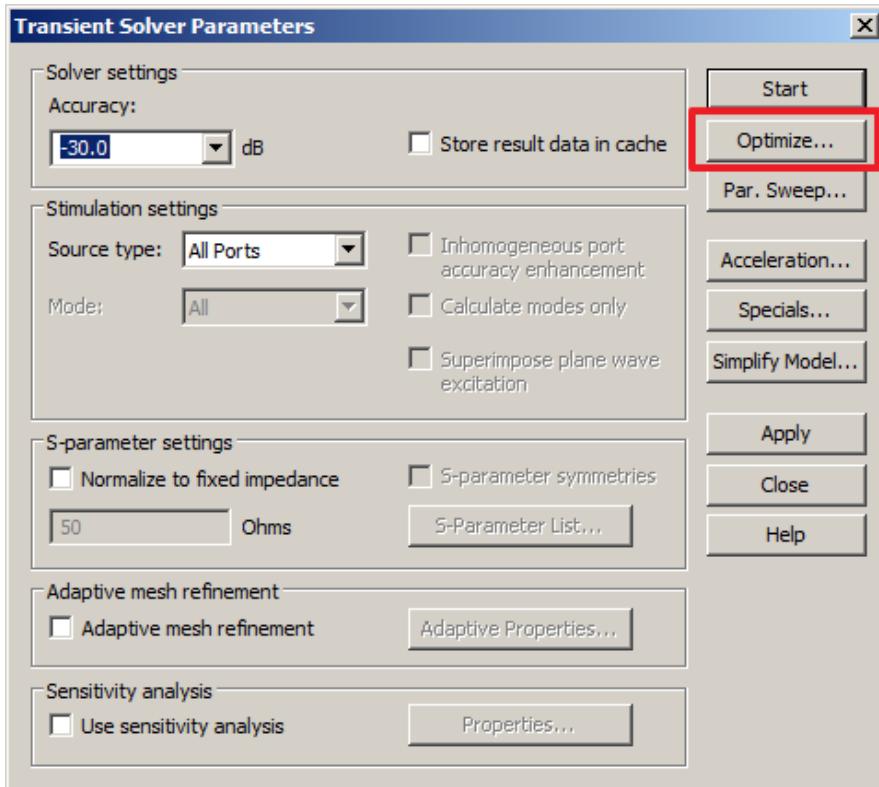


Параметры алгоритма:

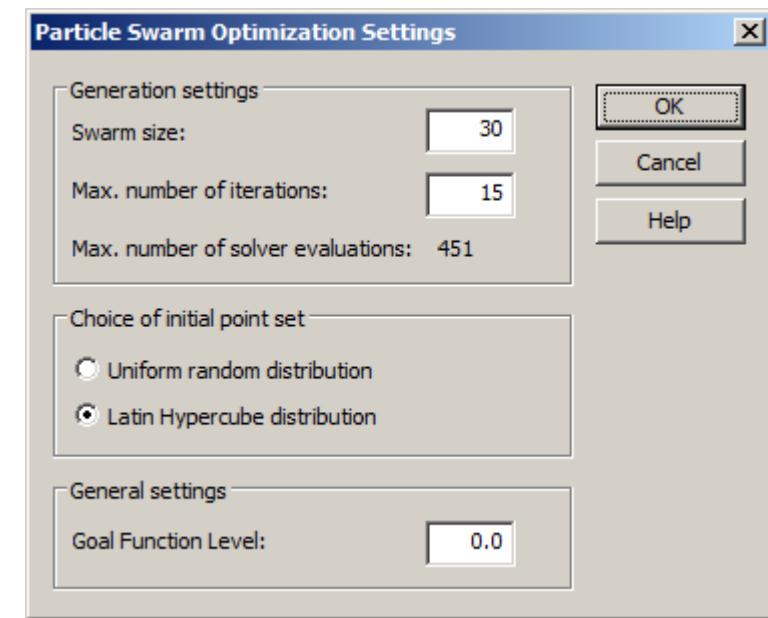
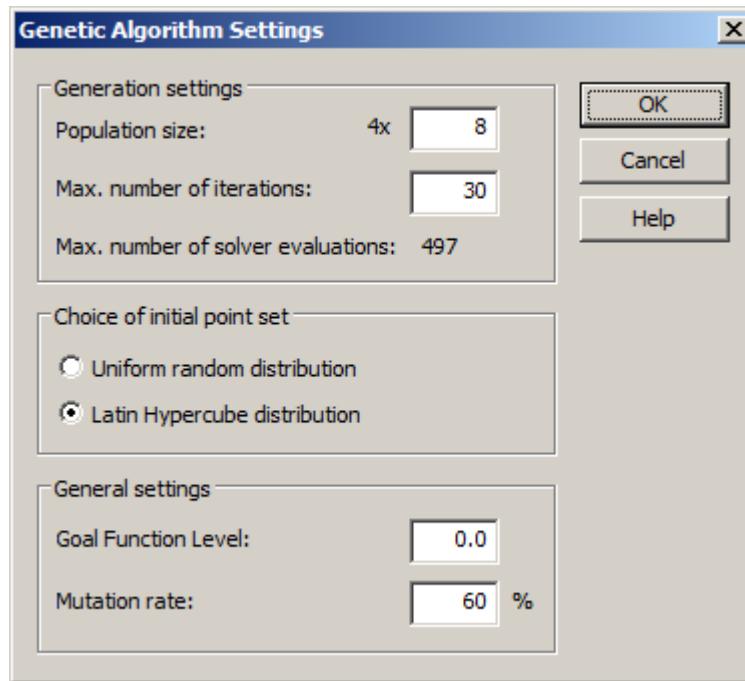
- Минимизация КСВ в заданном диапазоне частот 0.95 – 1.65 ГГц
- Количество оптимизируемых параметров: 3
- Размер популяции: 12 особей
- Вероятность мутации: 60%
- Количество поколений: 30
- Общее количество моделирований: 187
- Время одного расчета: 3 минуты

$$\Phi(\mathbf{X}) = \max(KCB) \Big|_{f \in [f_{min}; f_{max}]}$$

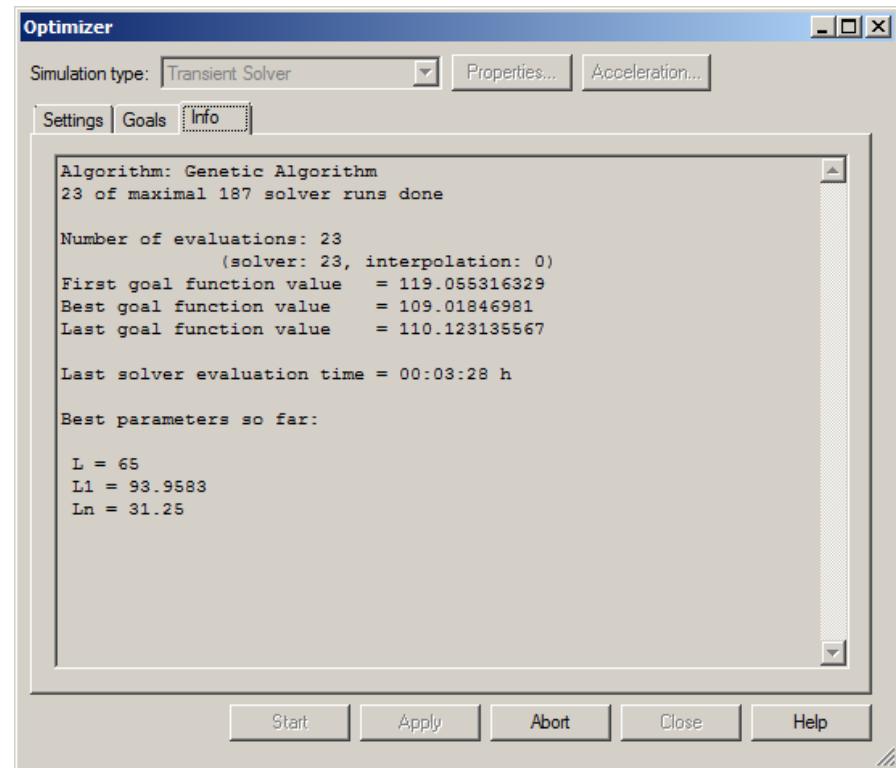
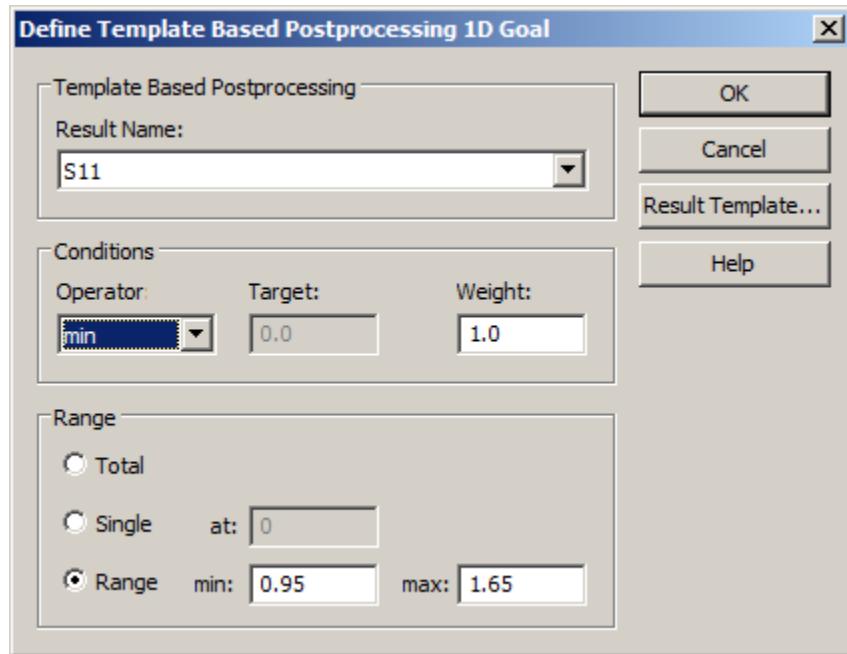
Алгоритмы глобальной оптимизации в CST Microwave Studio



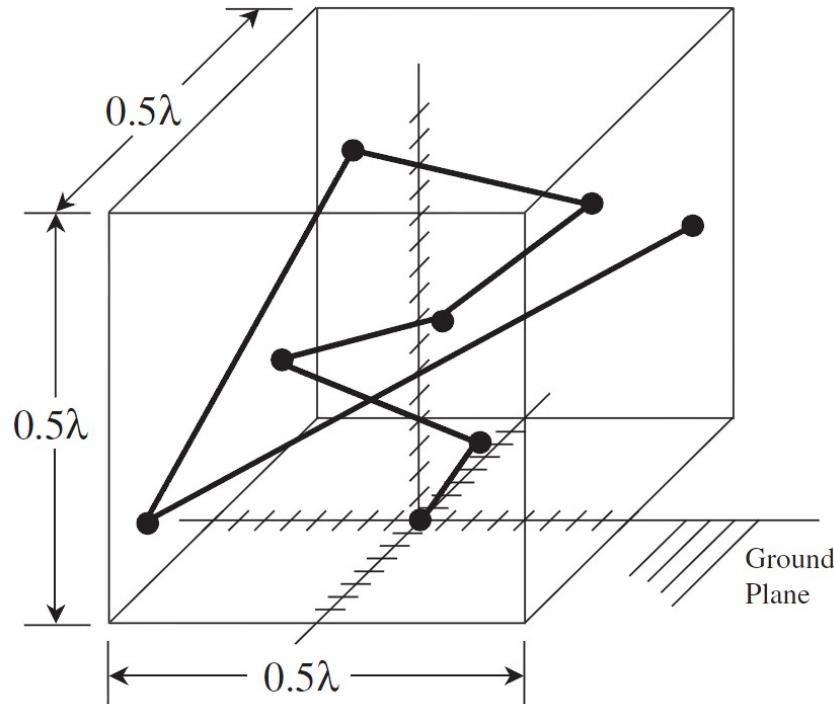
Алгоритмы глобальной оптимизации в CST Microwave Studio



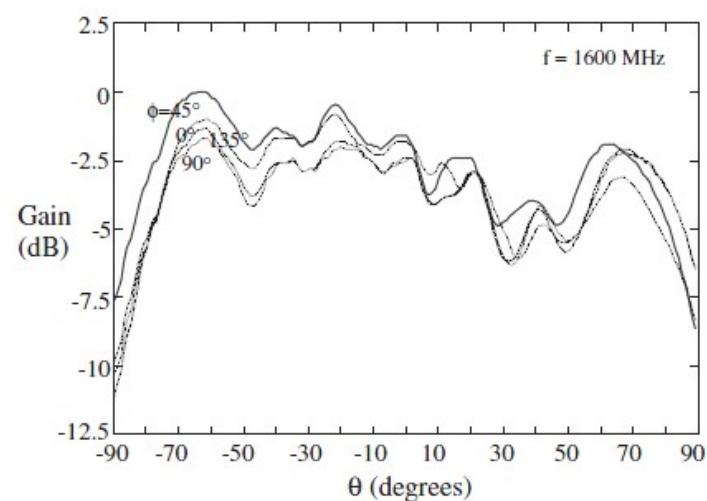
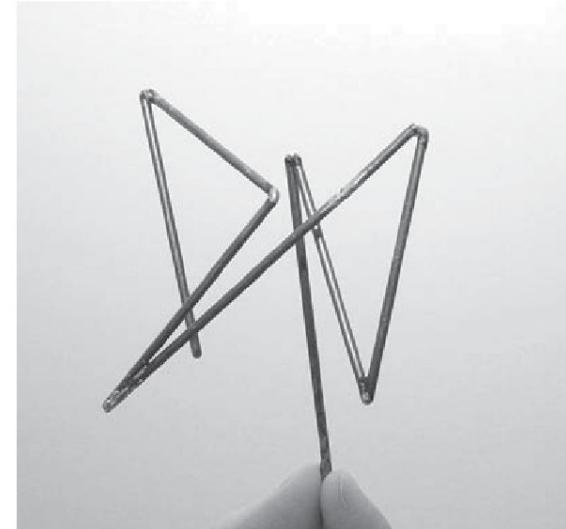
Алгоритмы глобальной оптимизации в CST Microwave Studio



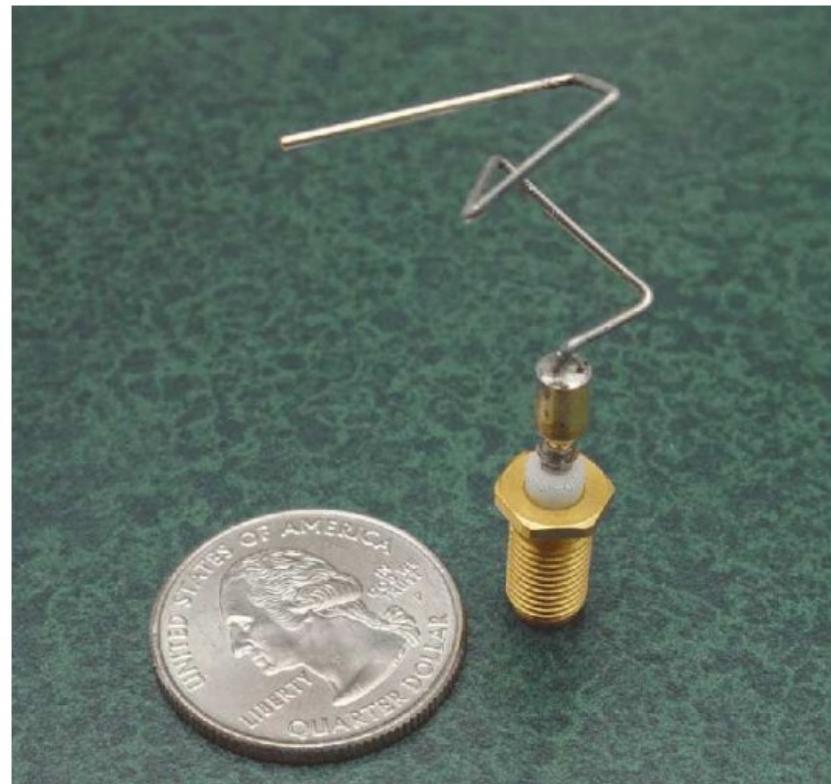
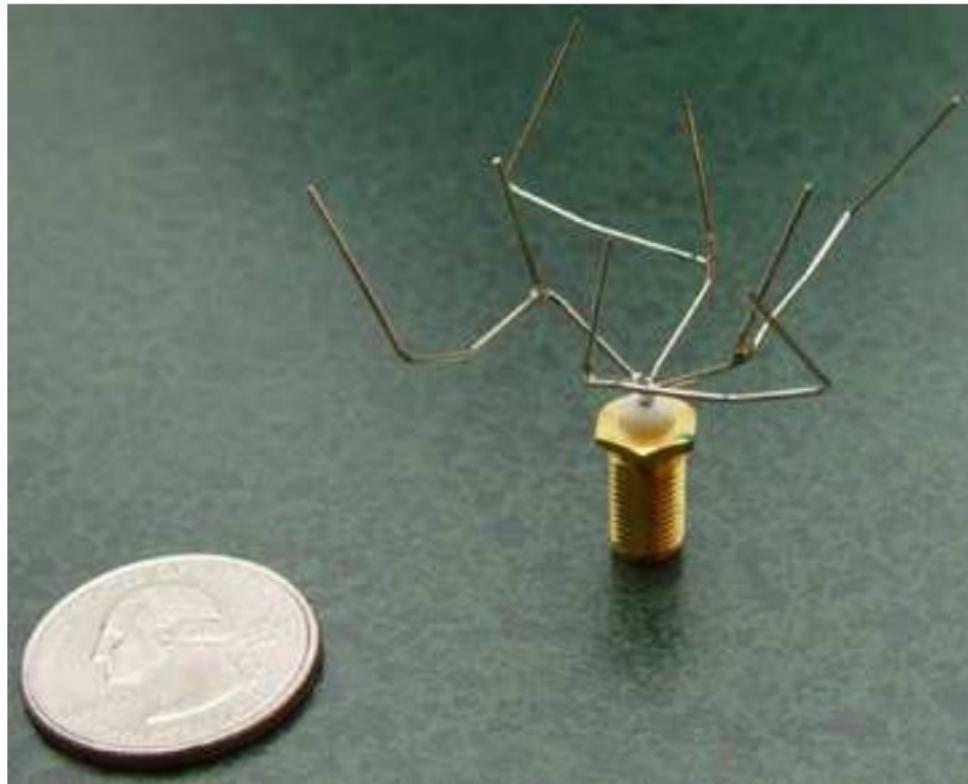
Пример применения генетического алгоритма



$$cost = \sum_{\text{over all } \theta, \phi} [gain(\theta, \phi) - average\ gain]^2$$

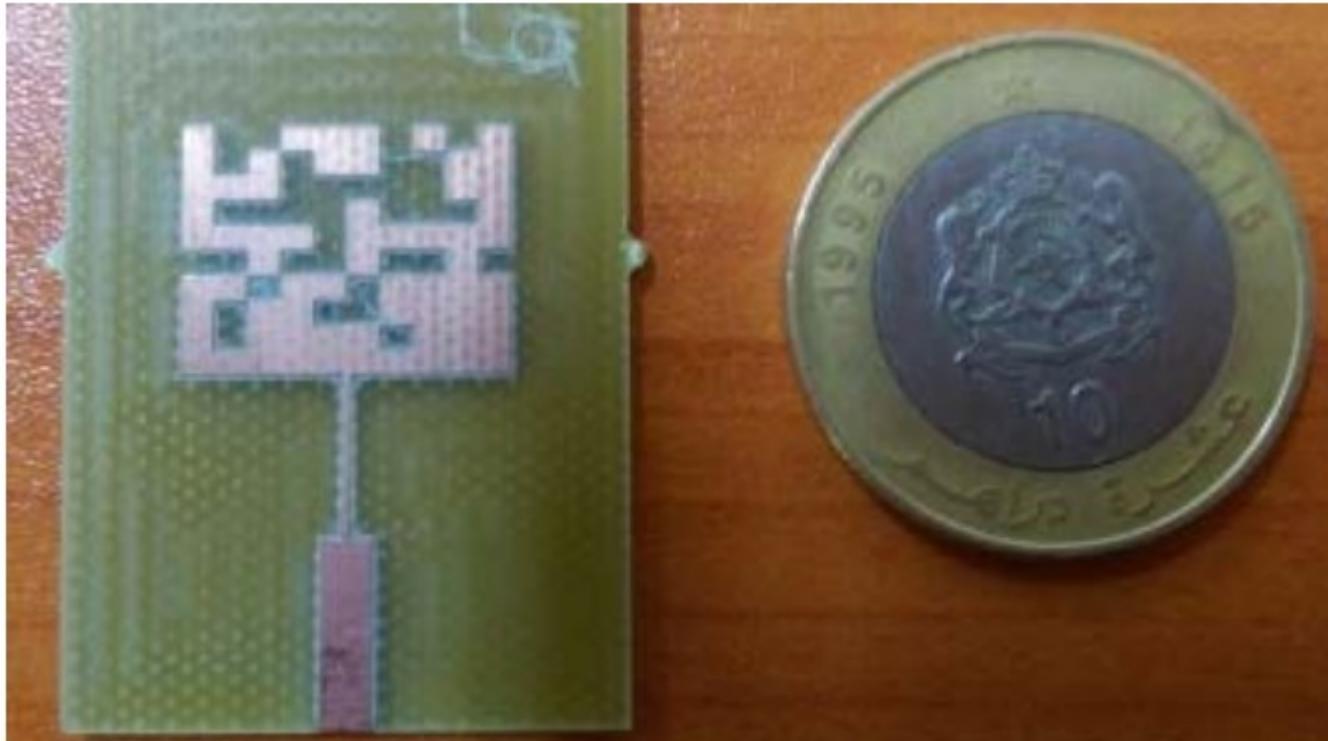


Пример применения генетического алгоритма



Hornby, Greg & Globus, Al & Linden, Derek & Lohn, Jason. (2006). Automated Antenna Design with Evolutionary Algorithms. Collection of Technical Papers - Space 2006 Conference. 1. 10.2514/6.2006-7242.

Пример применения генетического алгоритма



Mohammed Lamsalli, Abdelouahab El Hamichi, Mohamed Boussouis, Naima A. Touhami, and Taj-eddin Elhamadi. Genetic Algorithm Optimization for Microstrip Patch Antenna Miniaturization. *Progress In Electromagnetics Research Letters*, Vol. 60, 113–120, 2016

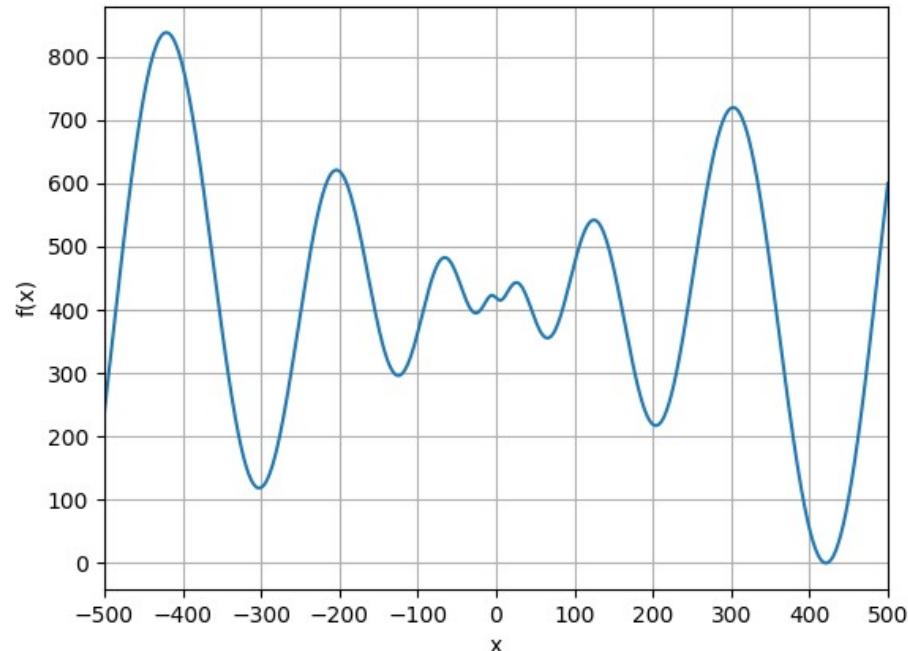
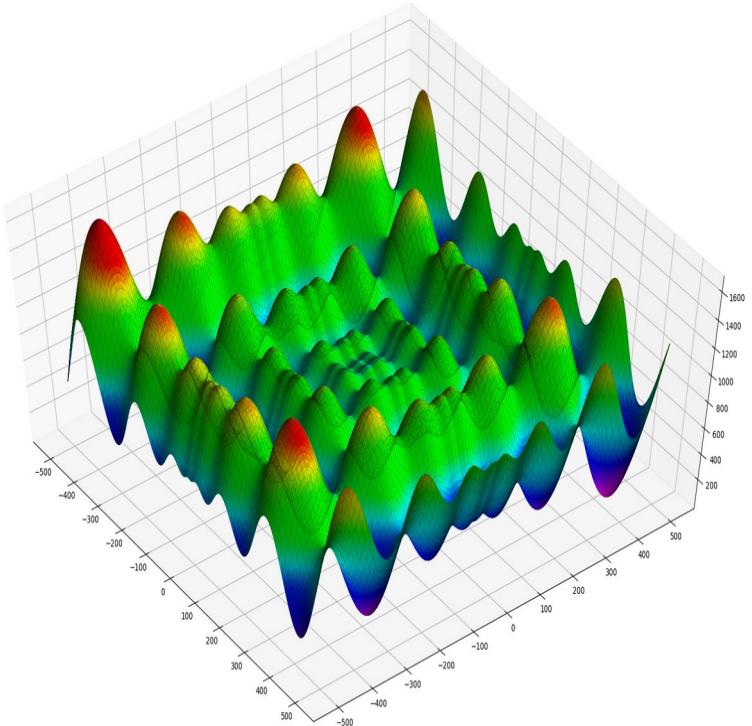
Реализация генетического алгоритма на C#

<https://jenyay.net/Programming/Genetic>

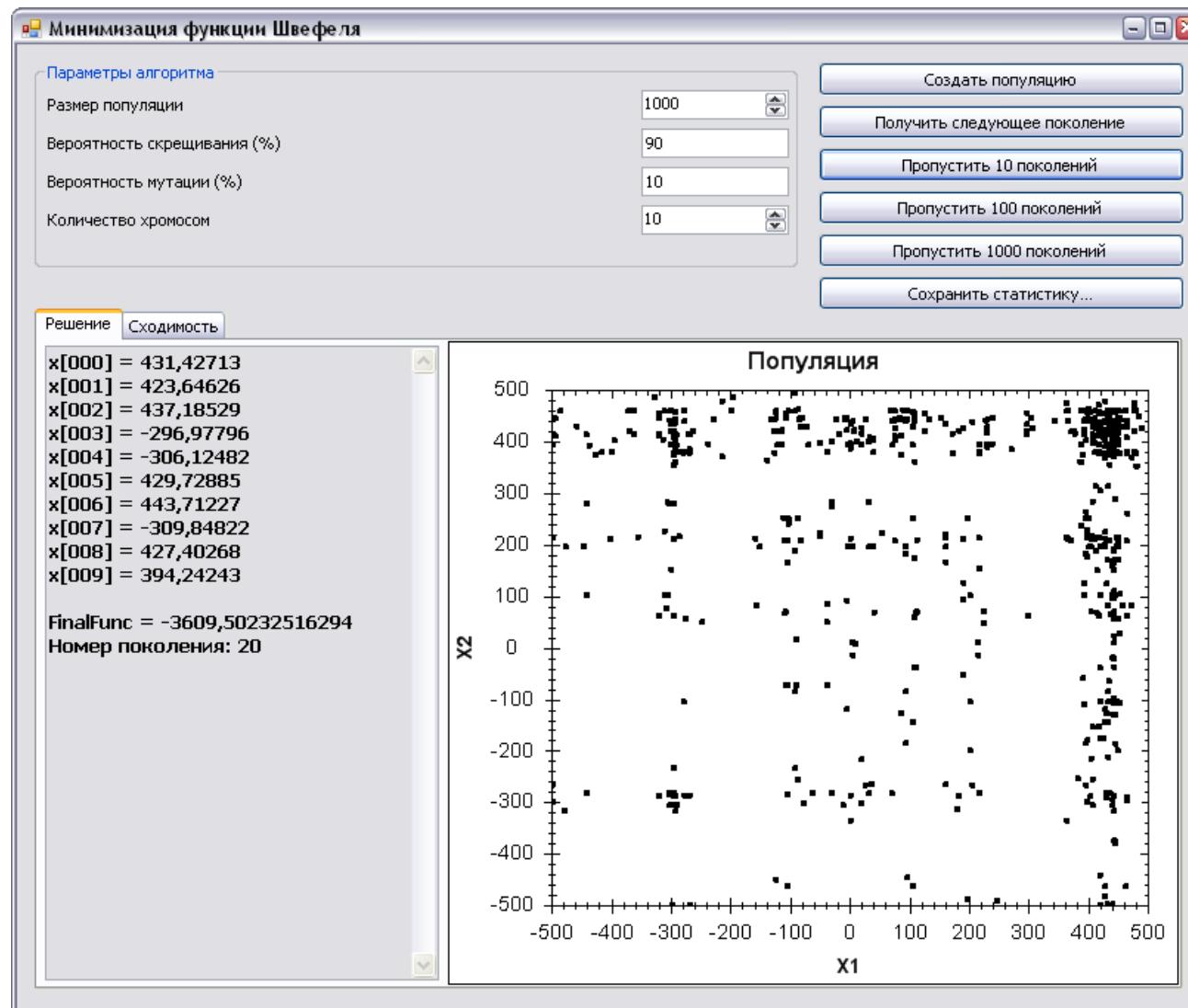
Тестовые функции. Функция Швефеля (Schwefel function)

$$f(\mathbf{x}) = 418.9829n + \sum_{i=1}^n \left(-x_i \sin \left(\sqrt{|x_i|} \right) \right)$$

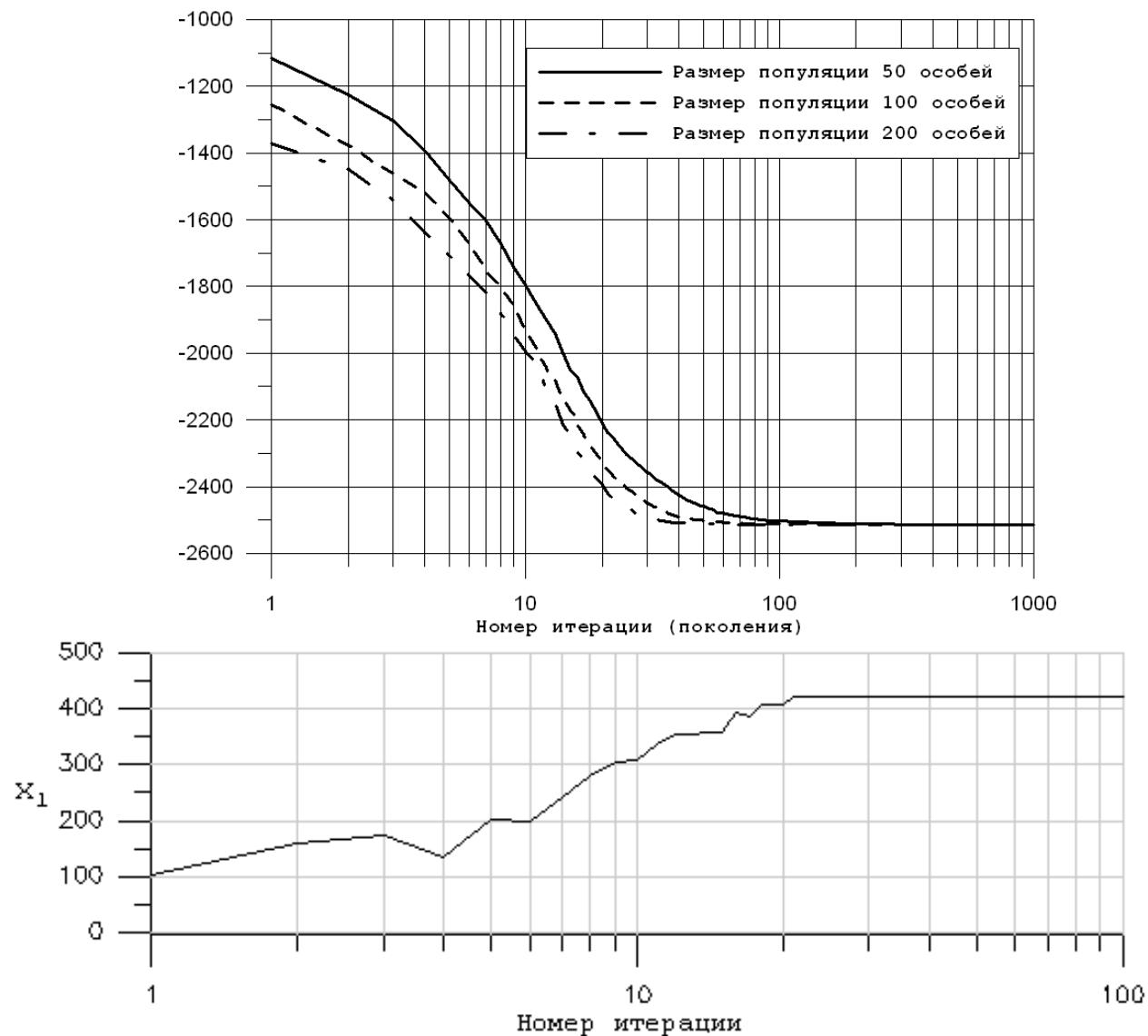
Глобальный минимум: $f(\mathbf{x}) = 0$ при
 $x_i = 420.9687, i = 1, \dots, n; -500 \leq x_i \leq 500$



Демонстрация работы генетического алгоритма



Сходимость генетического алгоритма



Ссылки

Библиотека для реализации генетических алгоритмов на языке C#:

<https://jenyay.net/Programming/Genetic>

Реализация генетического алгоритма оптимизации на языке Rust:

<https://jenyay.net/Programming/OptlibGenetic>

Выступление в Московском клубе программистов с докладом про генетический алгоритм:

<https://www.youtube.com/watch?v=89Wk0kNnbJQ>

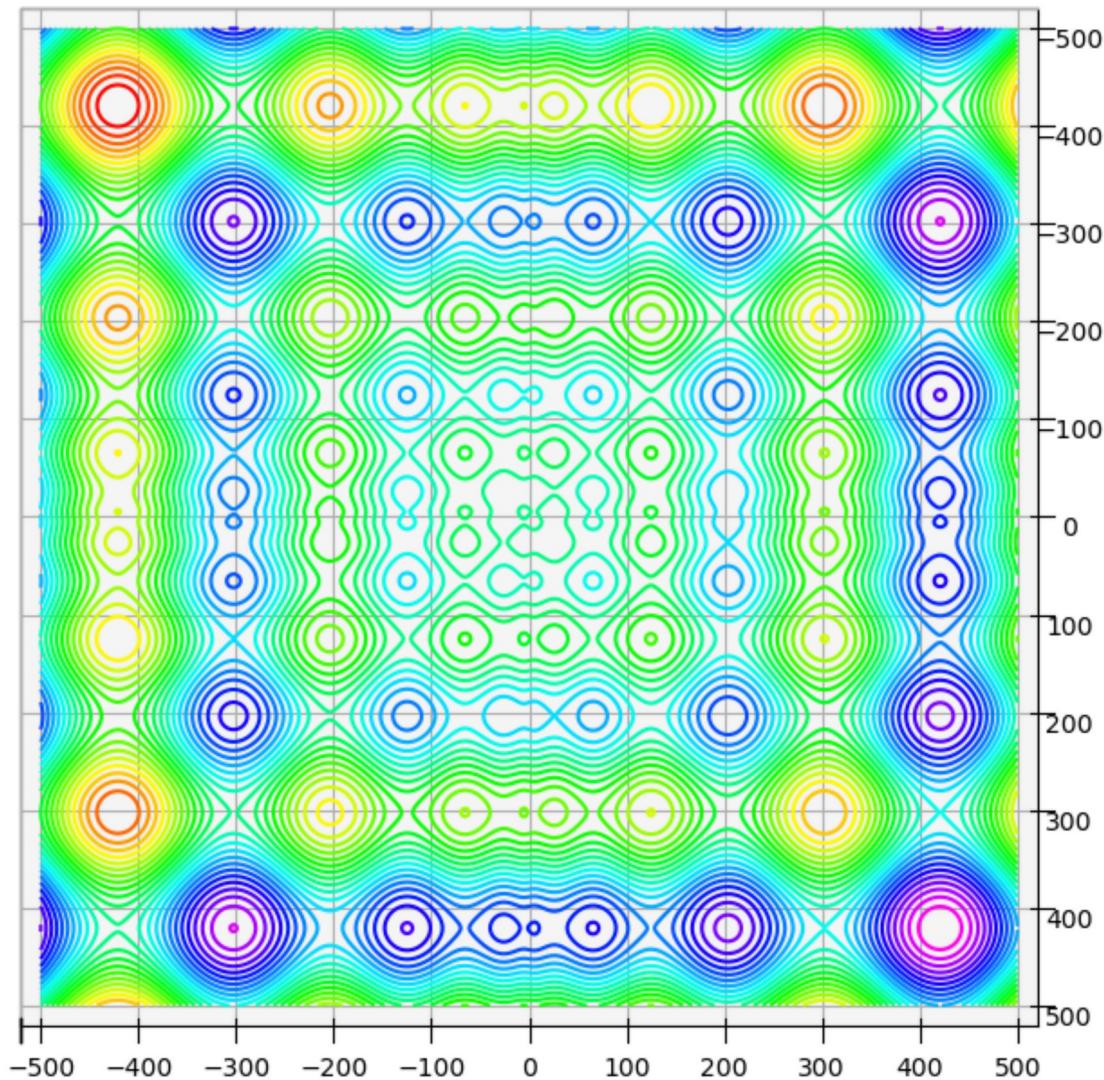
Алгоритм роя частиц

Kennedy J., Eberhart R. "Particle Swarm Optimization".
Proceedings of IEEE International Conference
on Neural Networks. IV. 1995

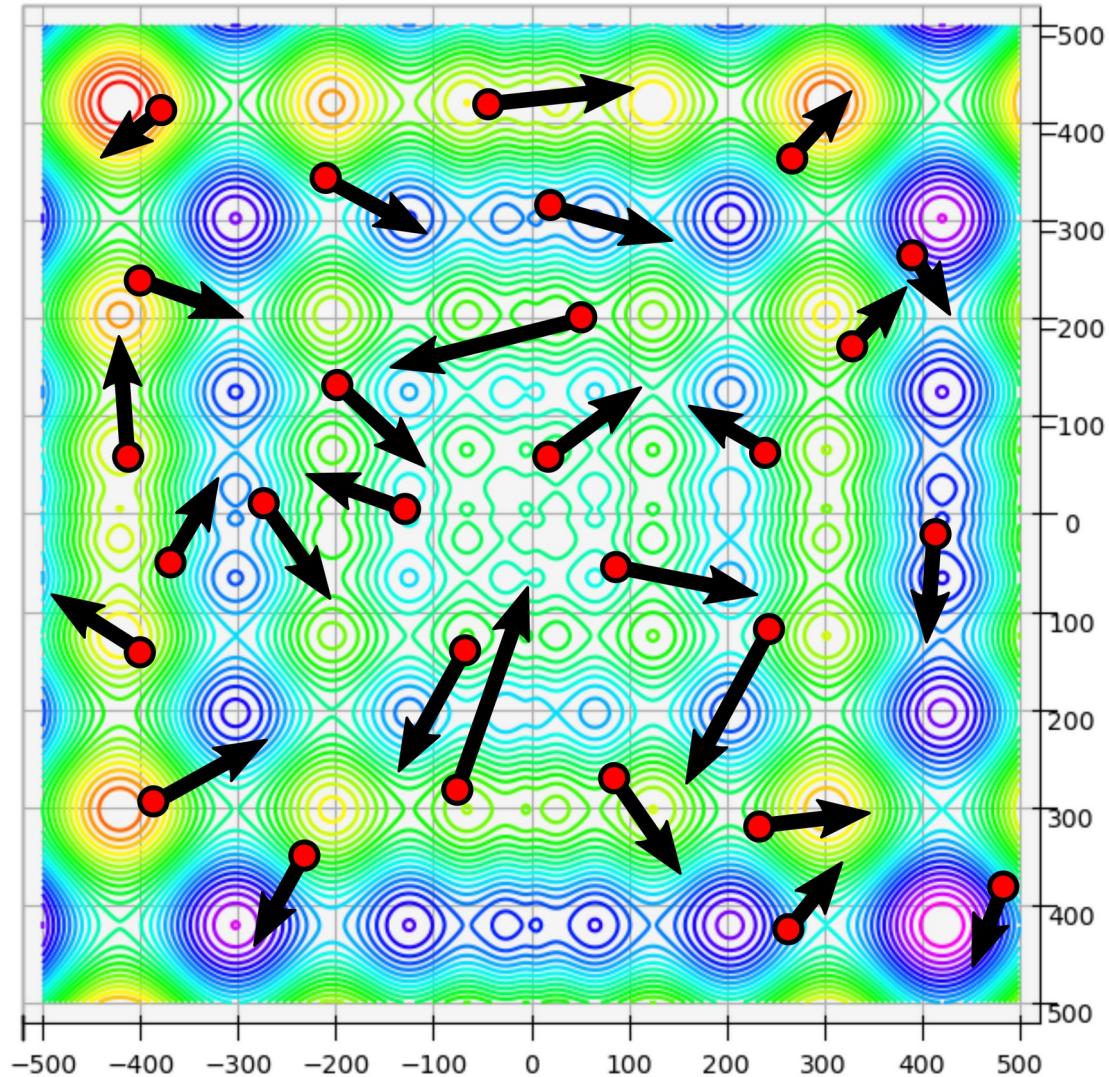
Идея алгоритма



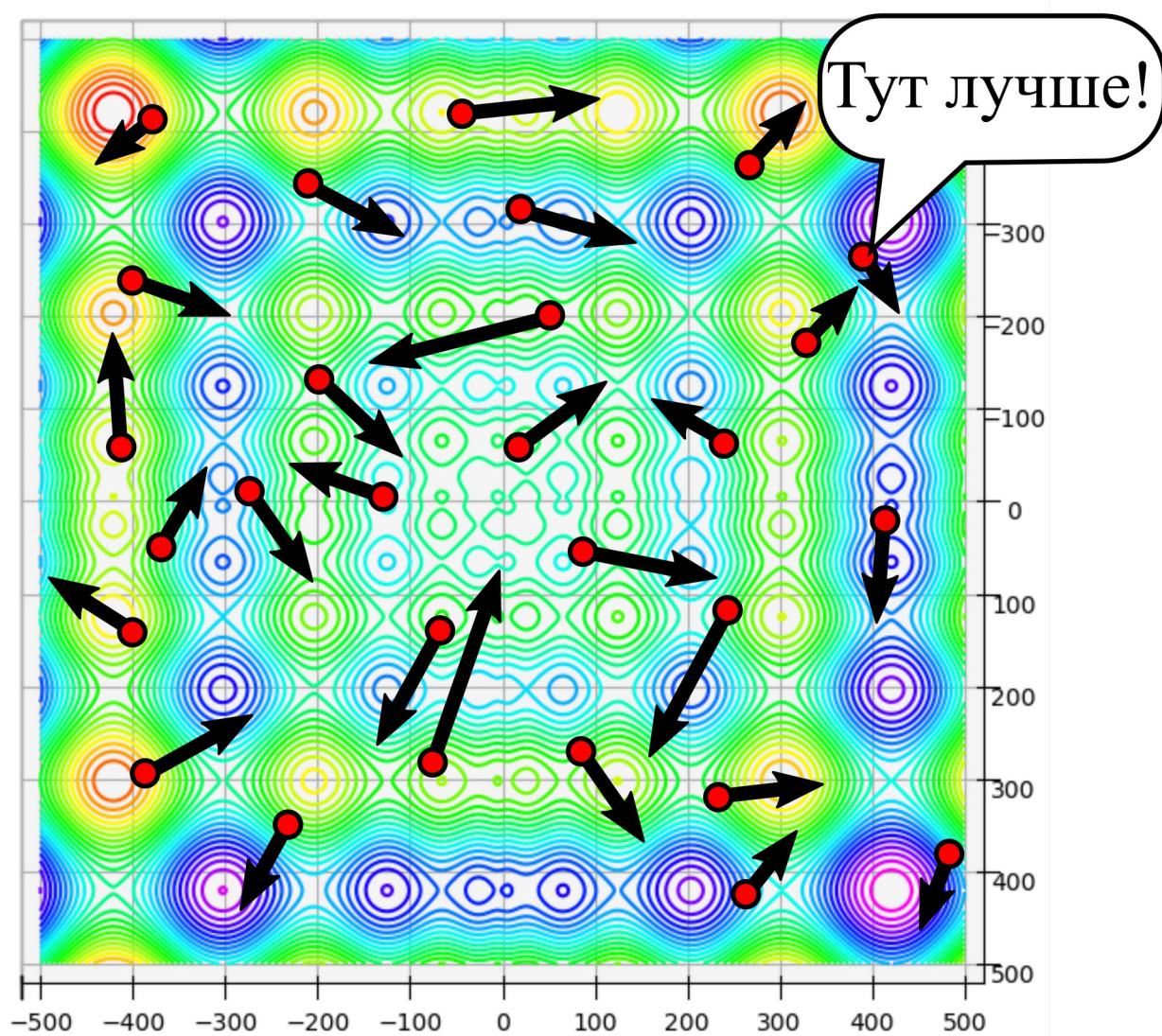
Алгоритм роя частиц



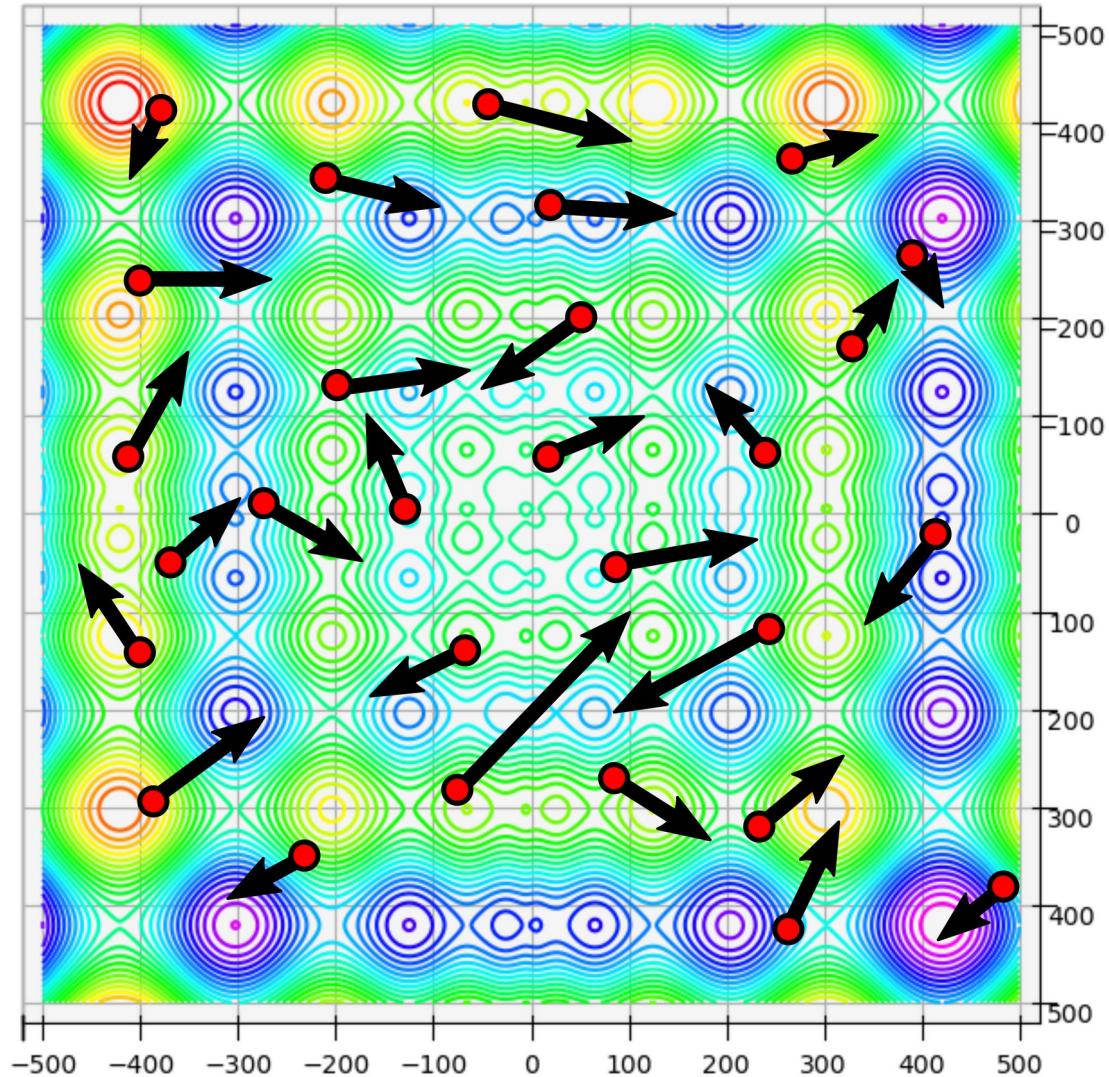
Алгоритм роя частиц



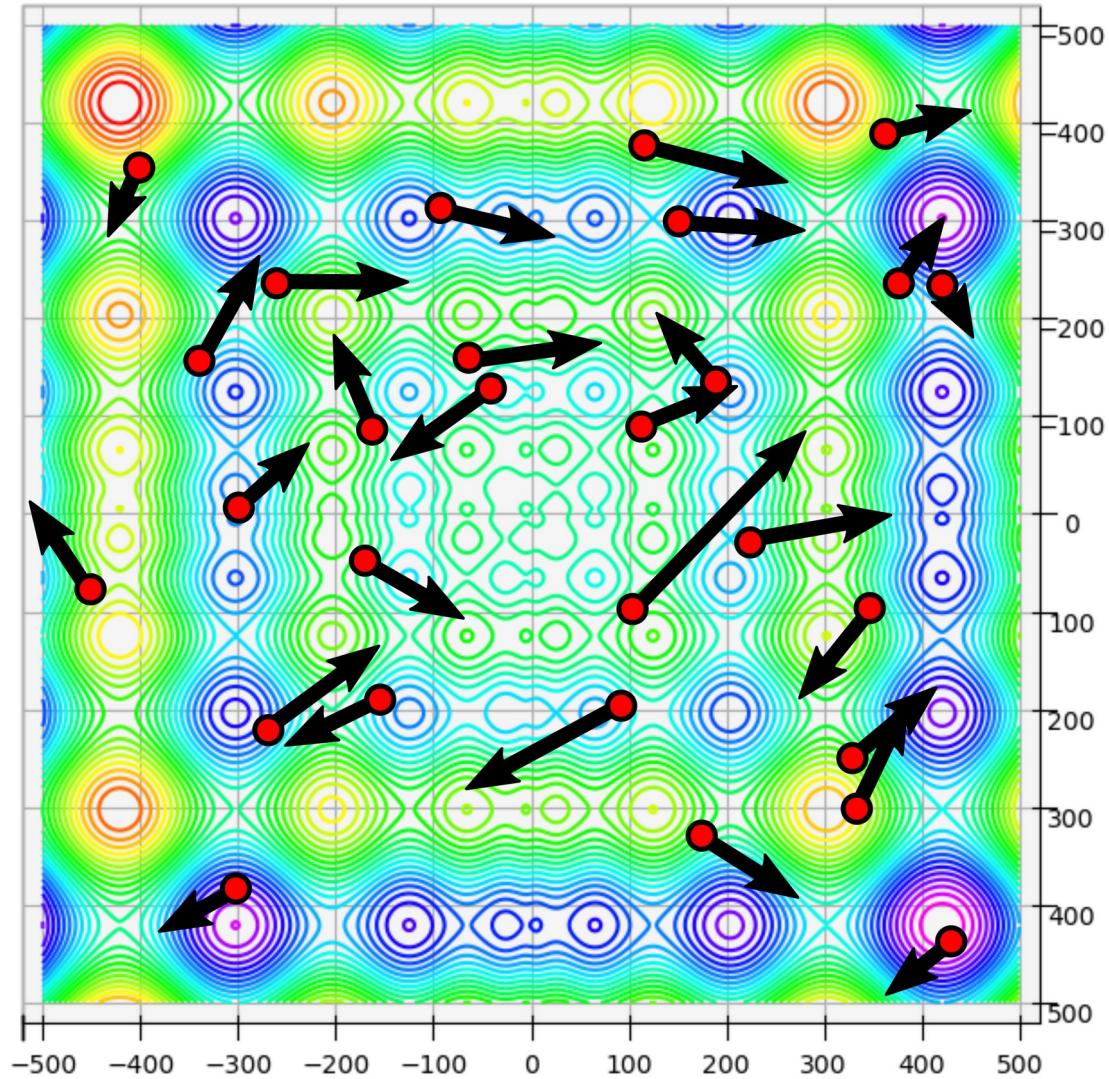
Алгоритм роя частиц



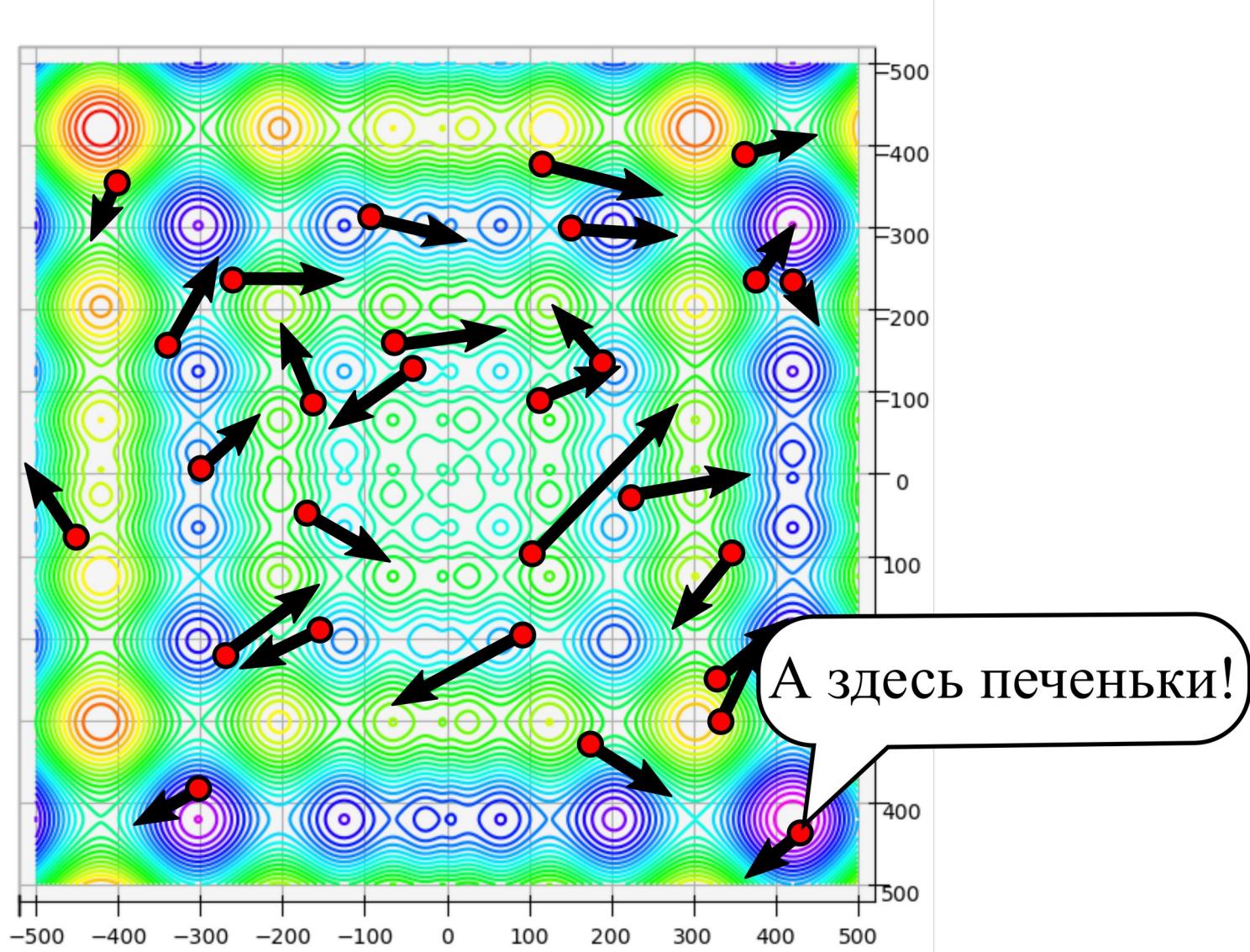
Алгоритм роя частиц



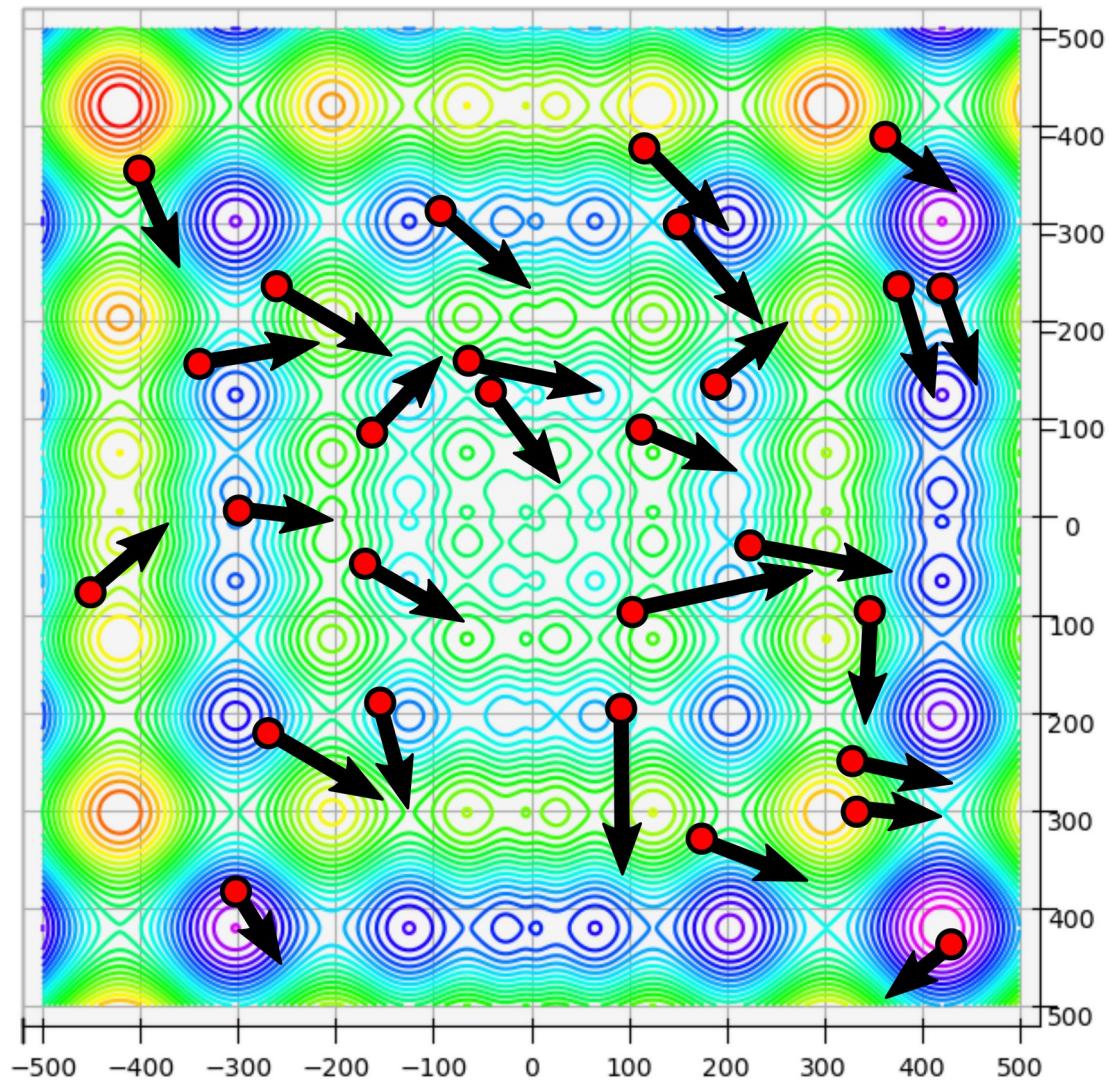
Алгоритм роя частиц



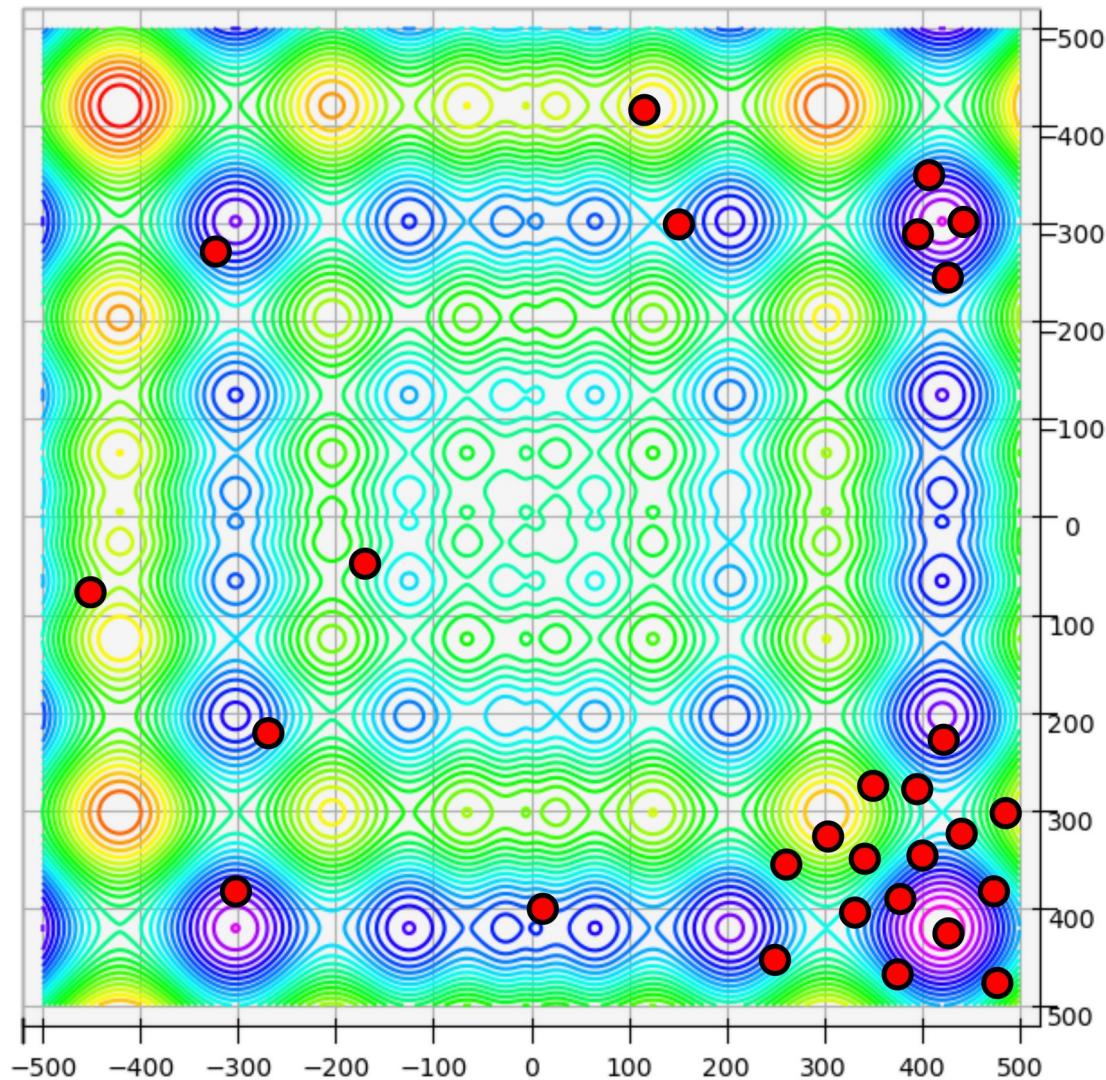
Алгоритм роя частиц



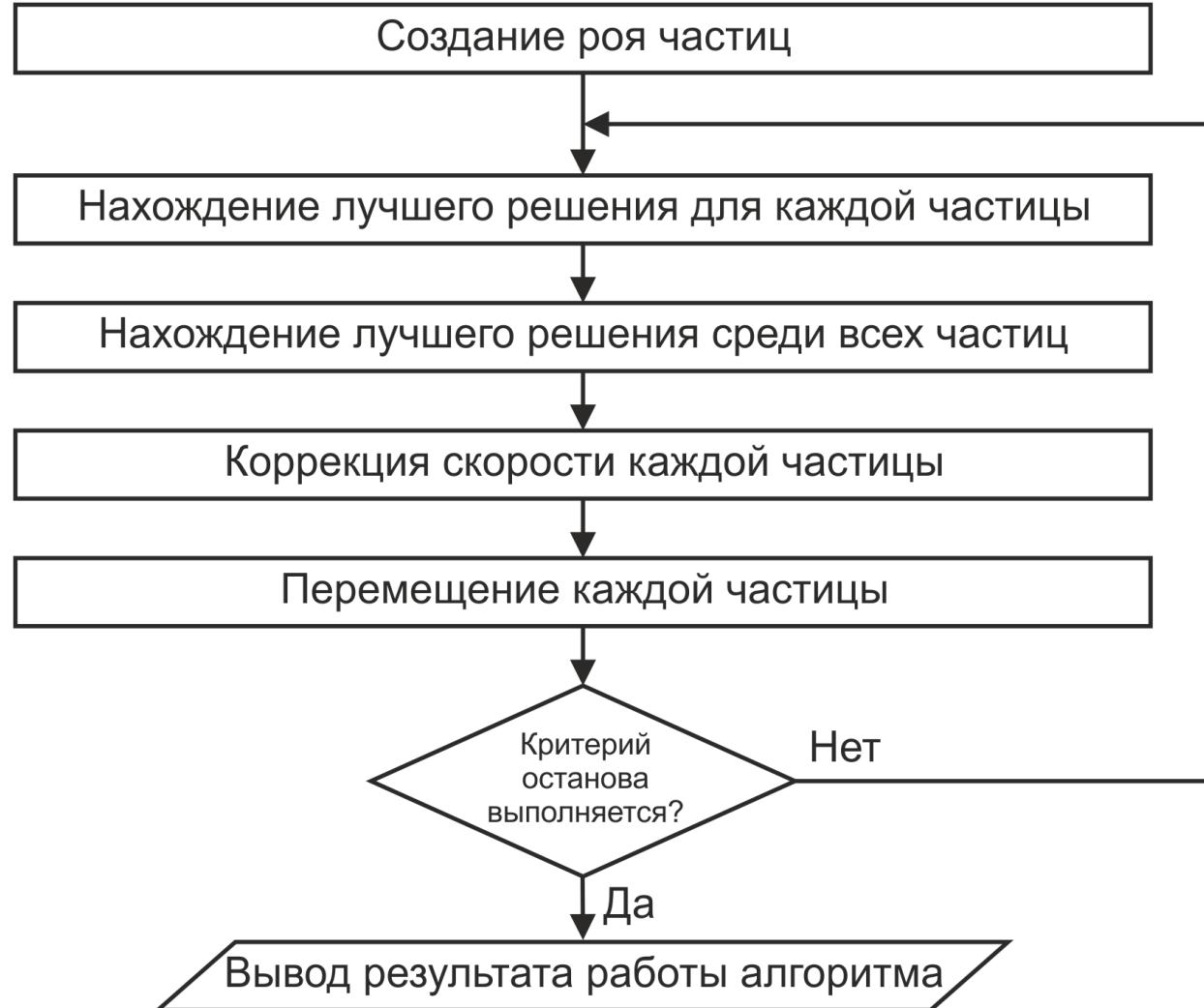
Алгоритм роя частиц



Алгоритм роя частиц



Алгоритм роя частиц



Критерии останова

- Постоянство целевой функции.
- Достижение заданного значения целевой функции.
- Достижение определенного номера итерации.
- Все частицы сошлись в одну точку.

Расчет скорости частиц. Классический алгоритм

$$\mathbf{v}_{i,t+1} = \mathbf{v}_{i,t} + \underbrace{\varphi_p r_p (\mathbf{p}_{i,t} - \mathbf{x}_{i,t})}_{\Delta_{v \text{собств}}} + \underbrace{\varphi_g r_g (\mathbf{g}_t - \mathbf{x}_{i,t})}_{\Delta_{v \text{глоб}}}$$

$\mathbf{v}_{i,t}$ – вектор скорости i -й частицы при t -й итерации алгоритма.

$\mathbf{x}_{i,t}$ – вектор координат i -й частицы при t -й итерации алгоритма.

\mathbf{p}_i – вектор координат лучшего решения, найденного i -й частицей.

\mathbf{g} – вектор координат лучшего решения, найденного всеми частицами при t -й итерации алгоритма.

r_p, r_g – случайные числа в интервале $(0, 1)$.

φ_p, φ_g – весовые коэффициенты.

Модификации алгоритма роя частиц. Реализация «LBEST»

$$\mathbf{v}_{i,t+1} = \mathbf{v}_t + \varphi_p r_p (\mathbf{p}_{i,t} - \mathbf{x}_{i,t}) + \varphi_l r_l (\underline{\mathbf{l}}_{i,t} - \mathbf{x}_{i,t})$$

\mathbf{l}_t – вектор координат лучшего решения, найденного среди соседних частиц.

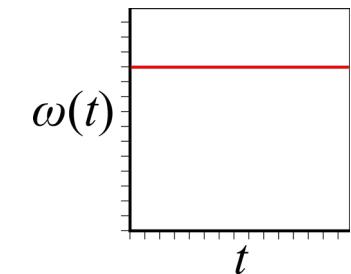
Модификации алгоритма роя частиц. Реализация с учетом инерции

$$\mathbf{v}_{i,t+1} = \underline{\omega(t)} \mathbf{v}_{i,t} + \varphi_p r_p (\mathbf{p}_{i,t} - \mathbf{x}_{i,t}) + \varphi_g r_g (\mathbf{g}_t - \mathbf{x}_{i,t})$$

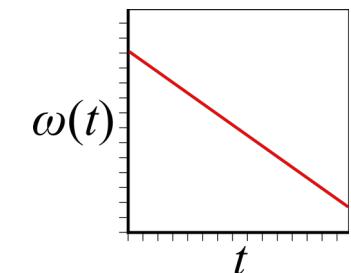
$\omega(t)$ – коэффициент инерции

Примеры зависимостей коэффициента инерции от номера итерации

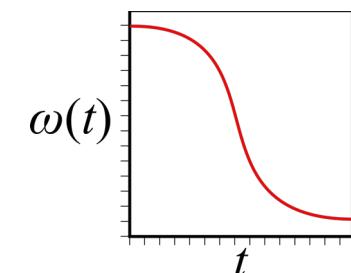
1. Постоянное значение. $w(t) = c$



2. Линейное убывание. $w(t) = w_{max} - \frac{w_{max} - w_{min}}{t_{max}} t$



3. Сигмоид. $w(t) = \frac{w_{start} - w_{end}}{1 + e^{-u(t - n \cdot t_{max})}} + w_{end}, \quad u = 10^{\log(t_{max}) - 2}$



Bansal, Singh, Pramod et al. **Inertia Weight Strategies in Particle Swarm Optimization**. Proceedings of the 2011 3rd World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, NaBIC 2011. 633-640.
10.1109/NaBIC.2011.6089659.

Алгоритм роя частиц с использованием коэффициента сужения

$$\mathbf{v}_{i,t+1} = \underline{K} \left(\mathbf{v}_{i,t} + \varphi_p r_p (\mathbf{p}_{i,t} - \mathbf{x}_{i,t}) + \varphi_g r_g (\mathbf{g}_t - \mathbf{x}_{i,t}) \right)$$

$$K = \frac{2\alpha}{\varphi_p + \varphi_g - 2}$$

$$\varphi_p + \varphi_g > 4$$

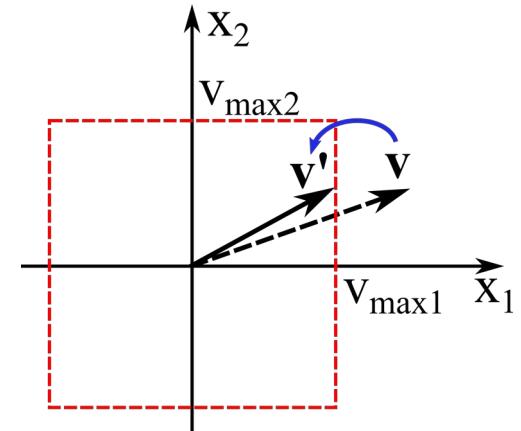
$$\alpha \in (0, 1), \text{ обычно } \alpha \approx 0.9$$

Способы ограничения скорости частиц

1. Ограничение проекций скорости по каждой координате.

if $v_{ik} > v_{\max k}$ **then**

$$v_{ik} = v_{\max k}$$



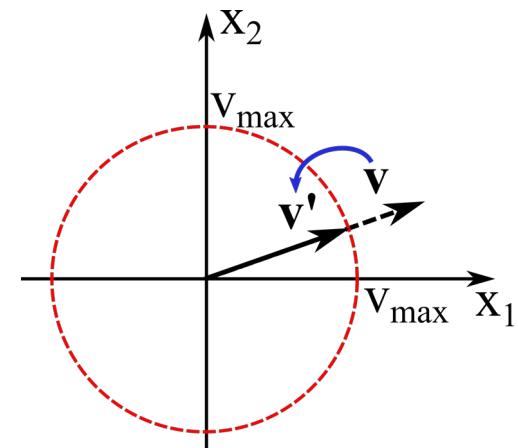
2. Ограничение модуля скорости.

if $|v_i| > v_{\max}$ **then**

$$v_i = v_i \cdot v_{\max} / |v_i|$$

i — номер частицы;

k — номер размерности.



Перемещение частиц

$$\mathbf{X}_{i,t+1} = \mathbf{X}_{i,t} + \mathbf{V}_{i,t+1}$$

Реализация алгоритма роя частиц на языке C#

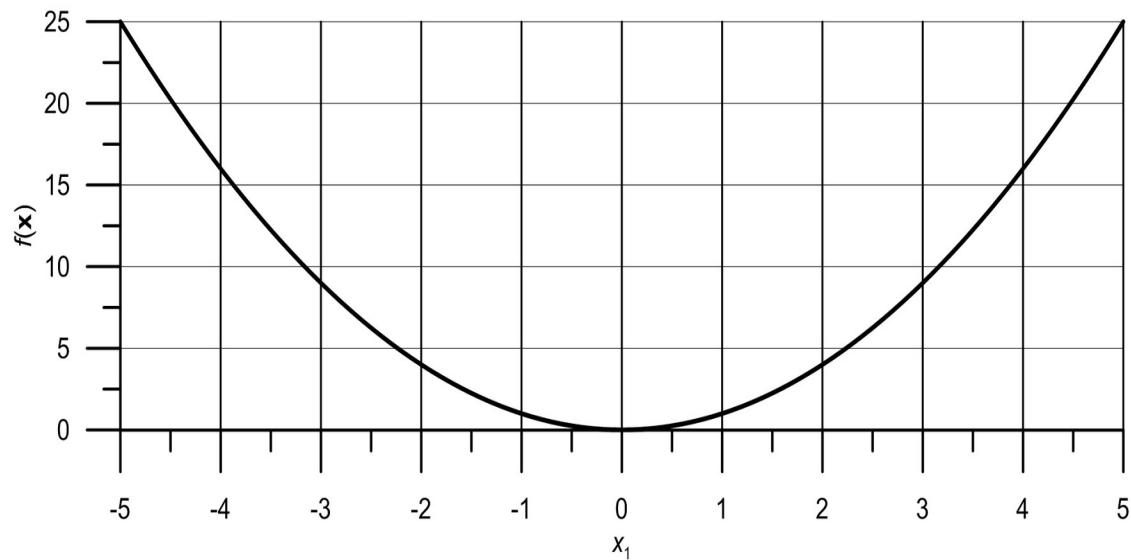
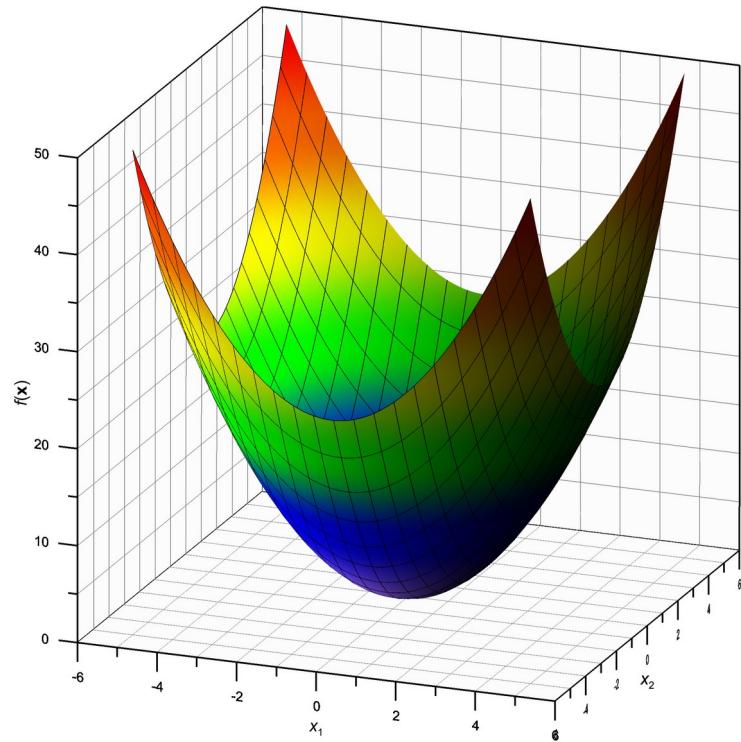
<https://jenyay.net/Programming/ParticleSwarm>



Тестовые функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

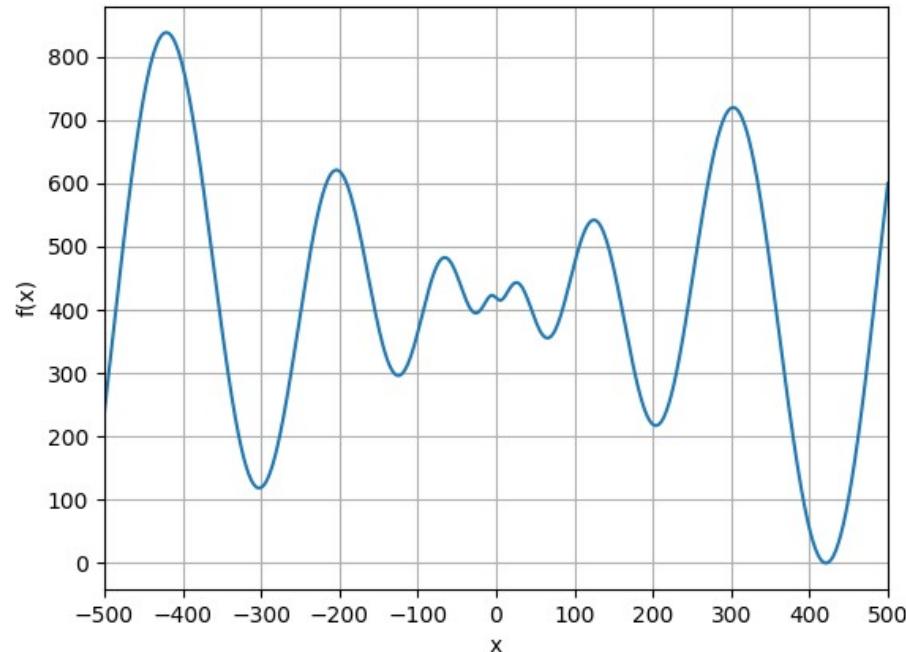
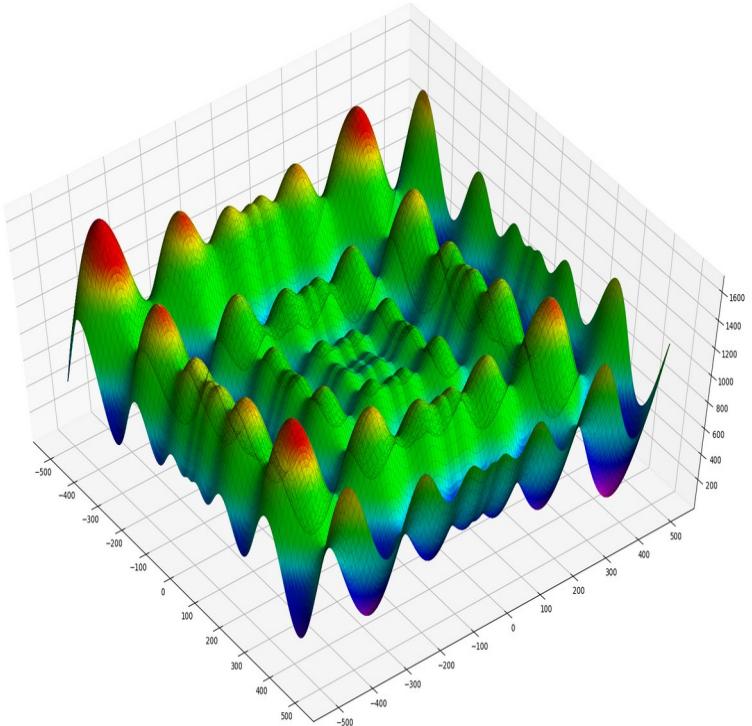
Глобальный минимум: $f(x) = 0$ при
 $x_i = 0, i = 1, \dots, n$



Тестовая функция. Функция Швефеля (Schwefel function)

$$f(\mathbf{x}) = 418.9829n + \sum_{i=1}^n \left(-x_i \sin \left(\sqrt{|x_i|} \right) \right)$$

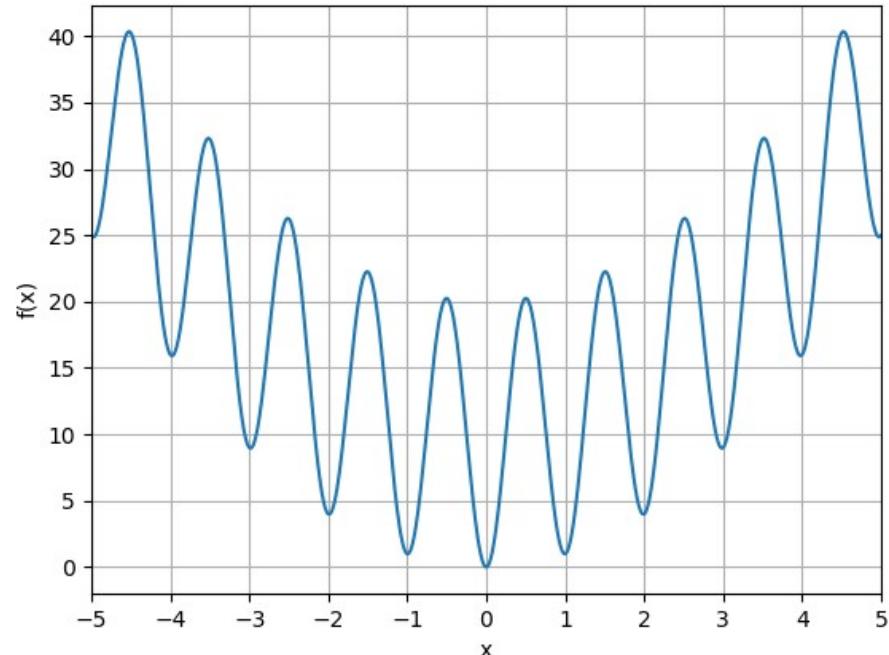
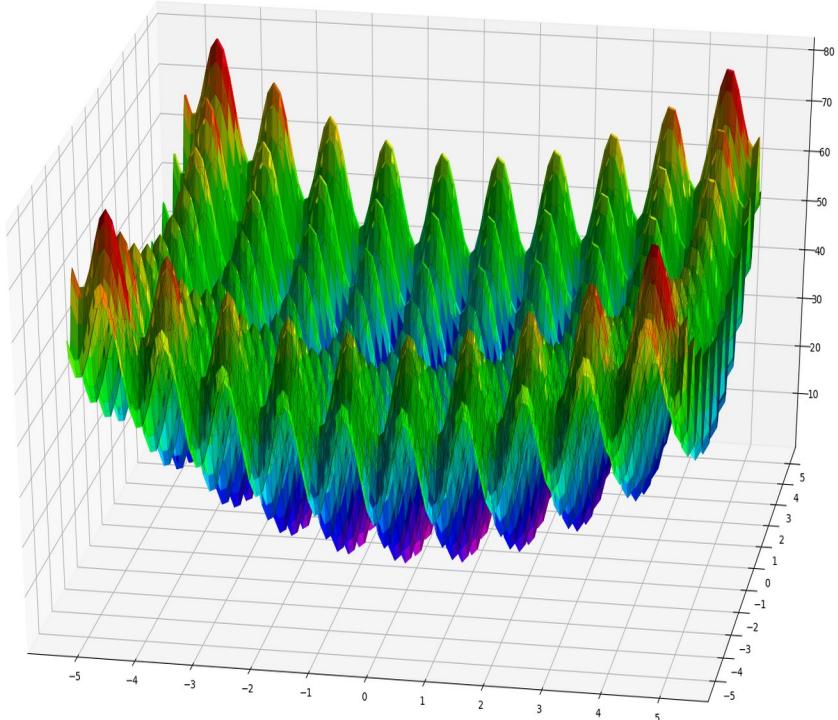
Глобальный минимум: $f(\mathbf{x}) = 0$ при
 $x_i = 420.9687, i = 1, \dots, n; -500 \leq x_i \leq 500$



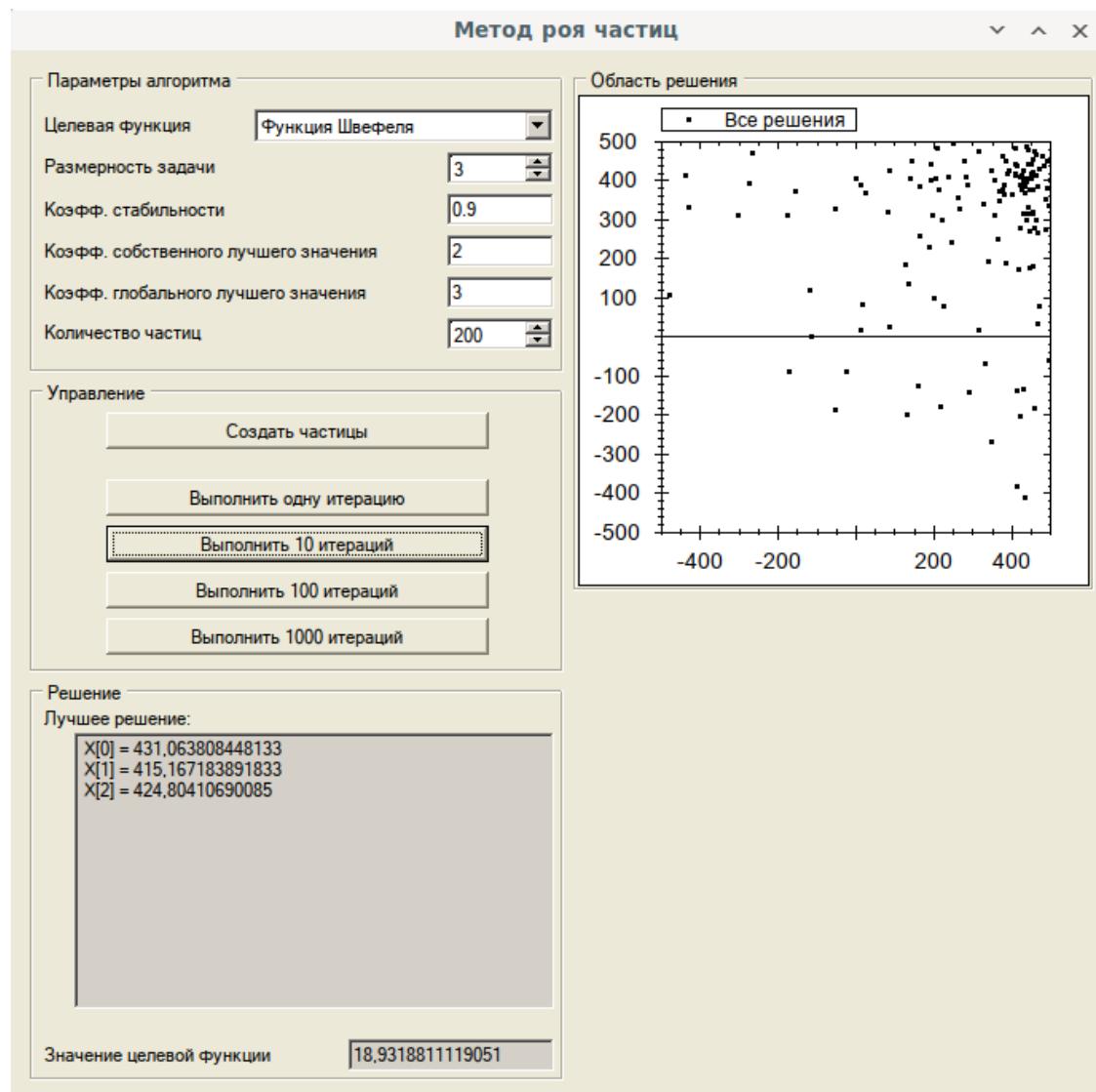
Тестовые функции. Функция Растигина

$$f(\mathbf{x}) = 10n + \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) \right)$$

Глобальный минимум: $f(\mathbf{x}) = 0$ при
 $x_i = 0, i = 1, \dots, n,$
 $-5.12 \leq x_i \leq 5.12$

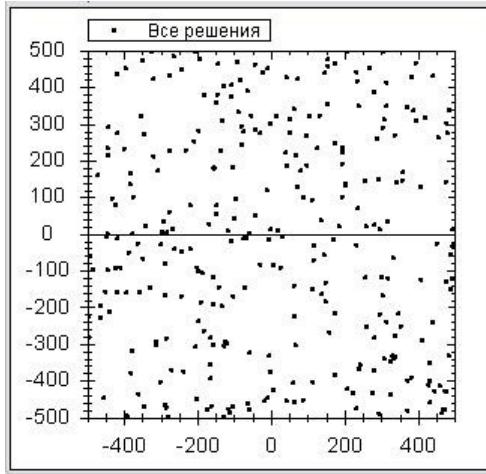


Демонстрация работы алгоритма роя частиц

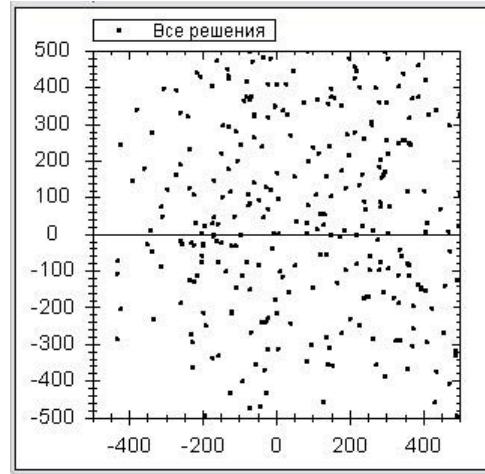


Сходимость алгоритма роя частиц

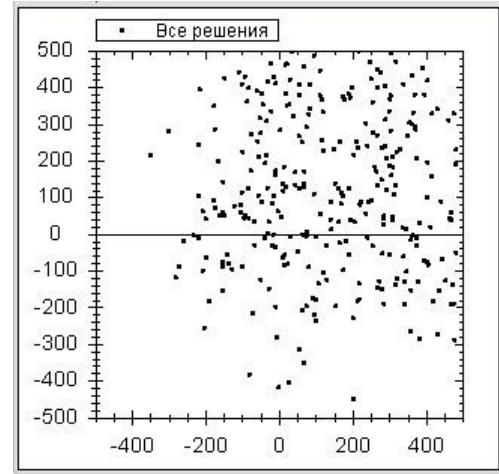
Итерация №0



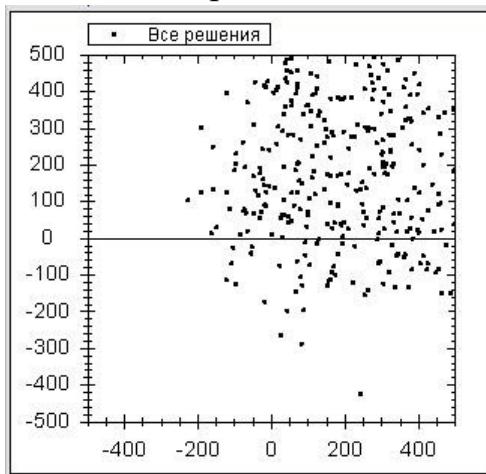
Итерация №1



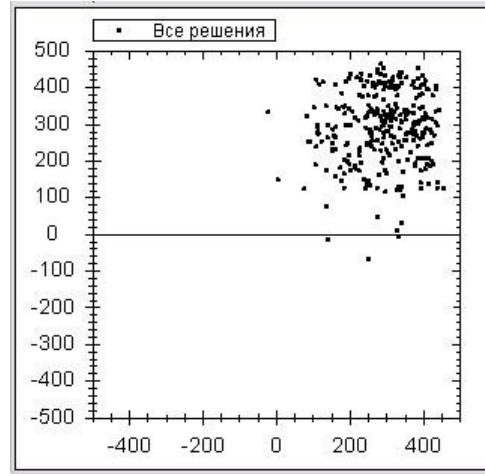
Итерация №2



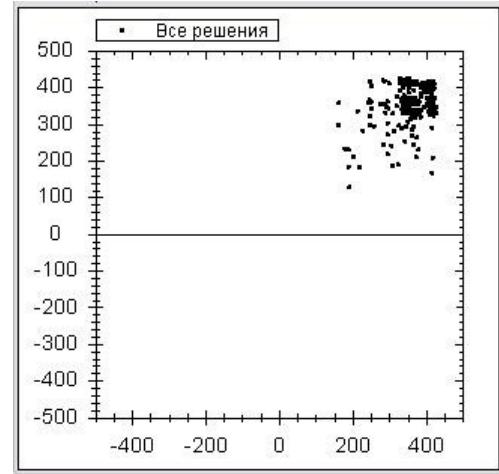
Итерация №3



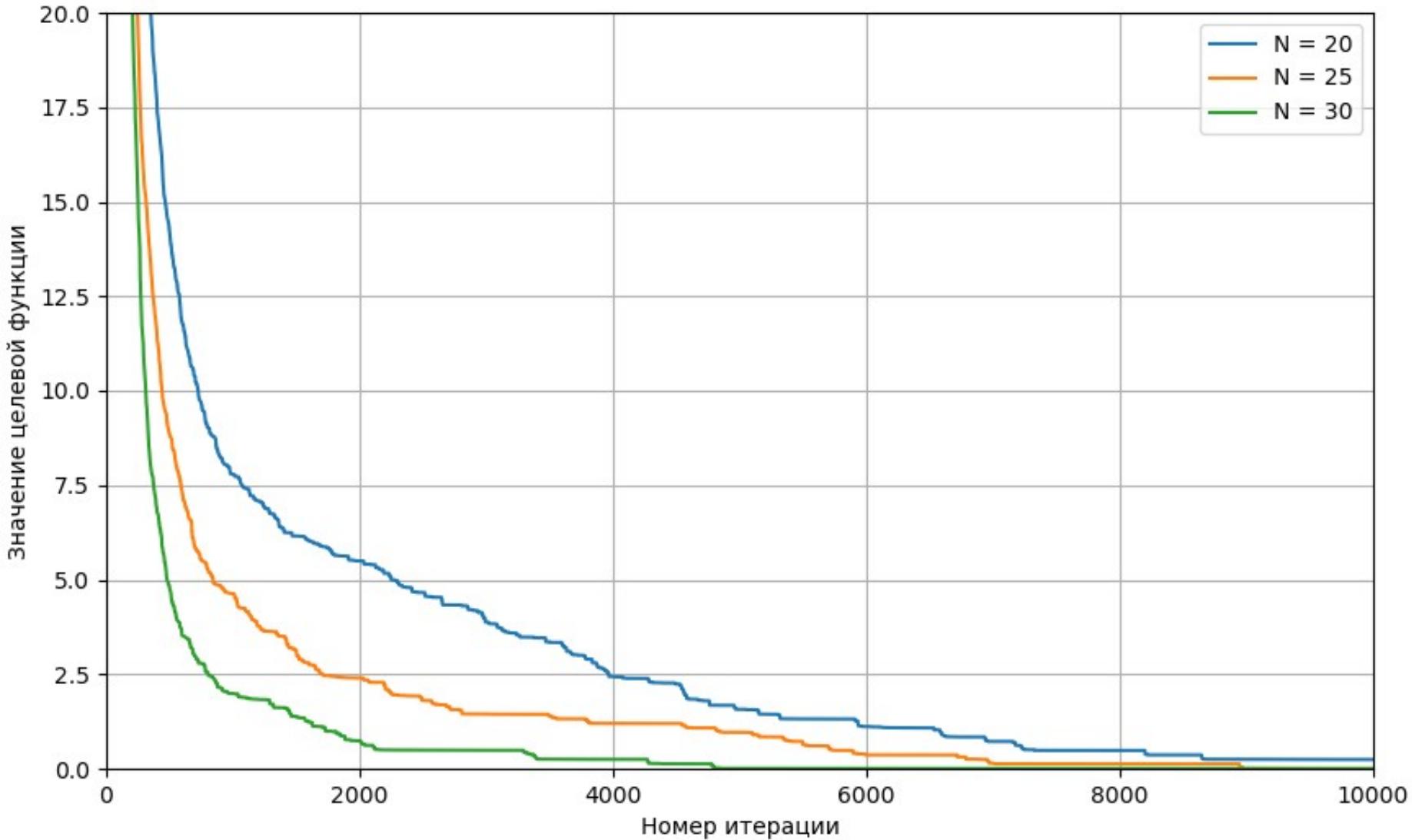
Итерация №10



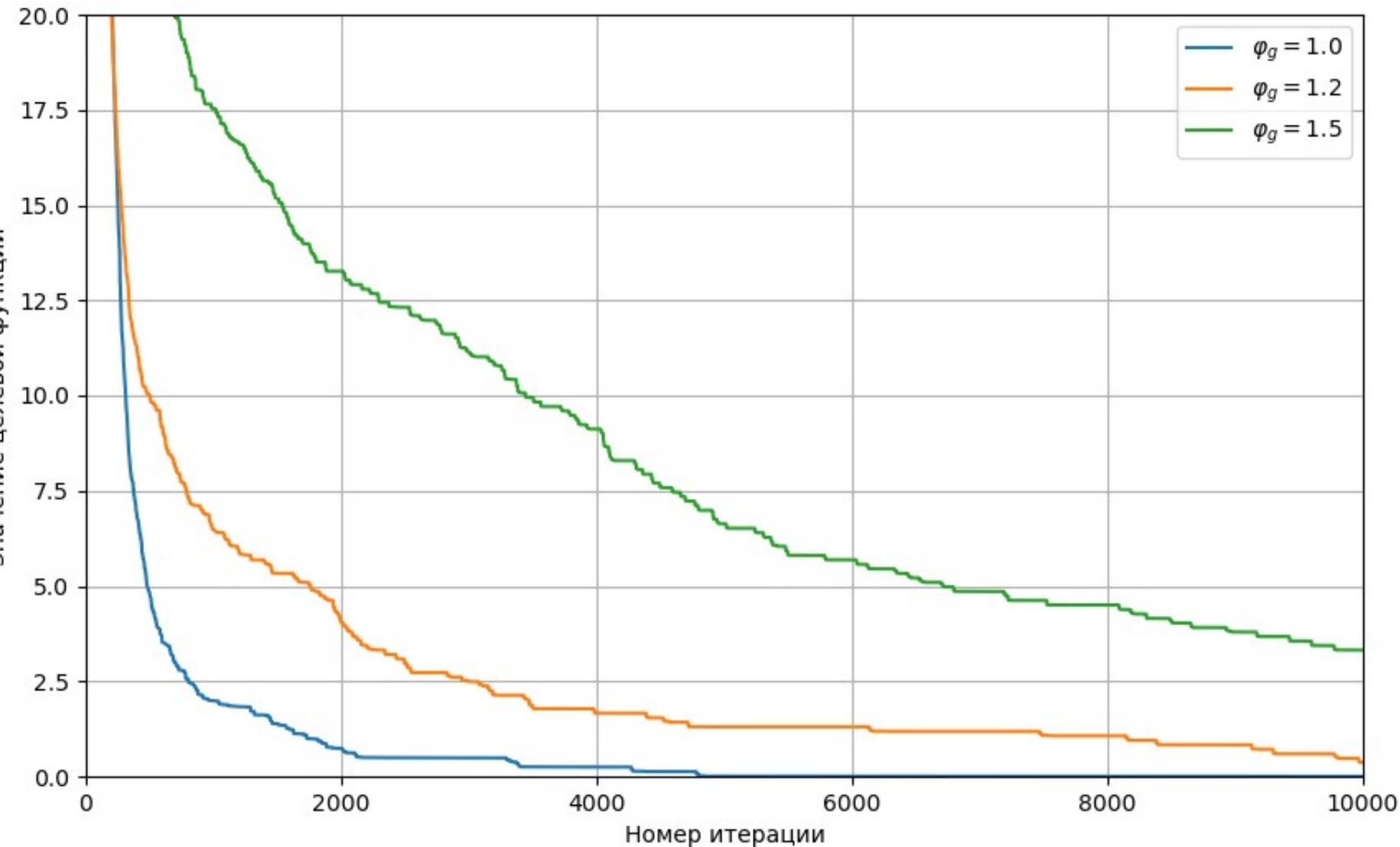
Итерация №30



Влияние количества частиц на сходимость



Влияние параметра φ_g на сходимость



Модификации метода роя частиц

1. Добавление случайной телепортации (аналог мутации в генетическом алгоритме).
2. Алгоритм с отрицательным подкреплением.
3. Совместное использование с другими алгоритмами оптимизации [1].
4. Разделение роя частиц на несколько групп.

1. Saptarshi Sengupta, Sanchita Basak, Richard II. (2018). **Particle Swarm Optimization: A survey of historical and recent developments with hybridization perspectives.** 10.3390/make1010010.

Преимущества и недостатки метода роя частиц



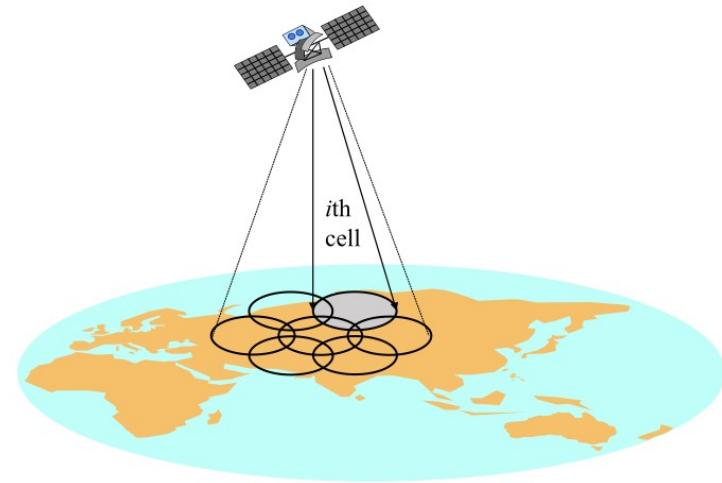
Простота реализации



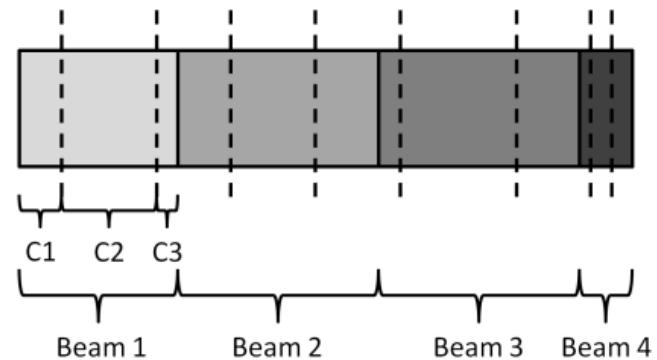
Сильная зависимость качества
сходимости от выбранных коэффициентов

Примеры применения в радиотехнике

1. Fabio Renan Durand, Taufik Abrão.
Power allocation in multibeam satellites based on particle swarm optimization.
AEU - International Journal of Electronics and Communications. August 2017



2. Pachler, Nils & Garau Luis, Juan Jose & Guerster, Markus & Crawley, Edward & Cameron, Bruce. **Allocating Power and Bandwidth in Multibeam Satellite Systems using Particle Swarm Optimization.** In 2020 IEEE Aerospace Conference, 2020.



Ссылки

Алгоритм роя частиц.

Описание и реализации на языках Python и C#:

<https://jenyay.net/Programming/ParticleSwarm>

Реализация алгоритмов оптимизации на языке Rust:

<https://github.com/Jenyay/rust-optimization>

**Выступление в Московском клубе программистов с
докладом про алгоритм роя частиц:**

<https://www.youtube.com/watch?v=57YBBIwnkQU>