

**Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)**

---

**«Метод конечных разностей  
во временной области (FDTD)»**

# Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

# Типы поглощающих граничных условий

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

# Линейные операторы

Оператор  $A$  называются линейным, если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

# Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов  $A$  и  $B$  выполняются условия:

$$(A + B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$$

$$(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0$$

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

# Уравнения адвекции

Любая функция  $E_z$ , которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

I. 
$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II. 
$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$E_z(t + x/v) = E_z(t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Сделаем замену

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

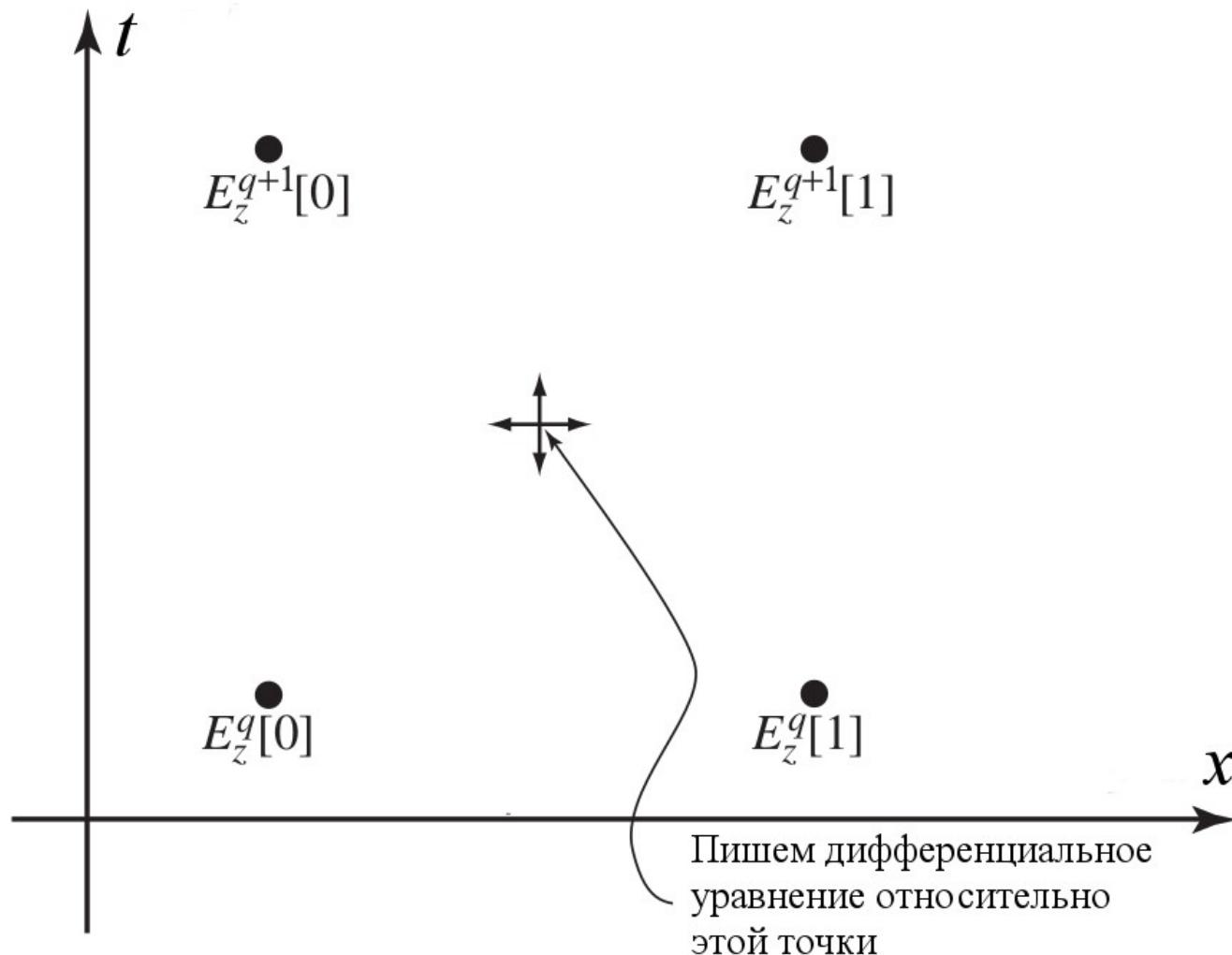
$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\xi}} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

# Поглощающие граничные условия первой степени

# Поглощающие граничные условия первой степени для левой границы



Запишем производные в уравнении адвекции  
через центральную конечно-разностную схему

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \Bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} =$$

$$= \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{E_z^{q+1}[1/2] - E_z^q[1/2]}{\Delta_t}$$

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^q[1/2] \approx \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}$$

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} = \\
 &= \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx \\
 & \approx \frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x}
 \end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} -$$

$$-\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t} = 0$$

## Поглощающие граничные условия первой степени для левой границы

Из полученного уравнения выражаем  $E_z^{q+1}[0]$  и учитываем, что:

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c}, \quad S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} \quad S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{S'_c - 1}{S'_c + 1} (E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0])$$

## Поглощающие граничные условия первой степени для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{S'_c - 1}{S'_c + 1} (E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M])$$

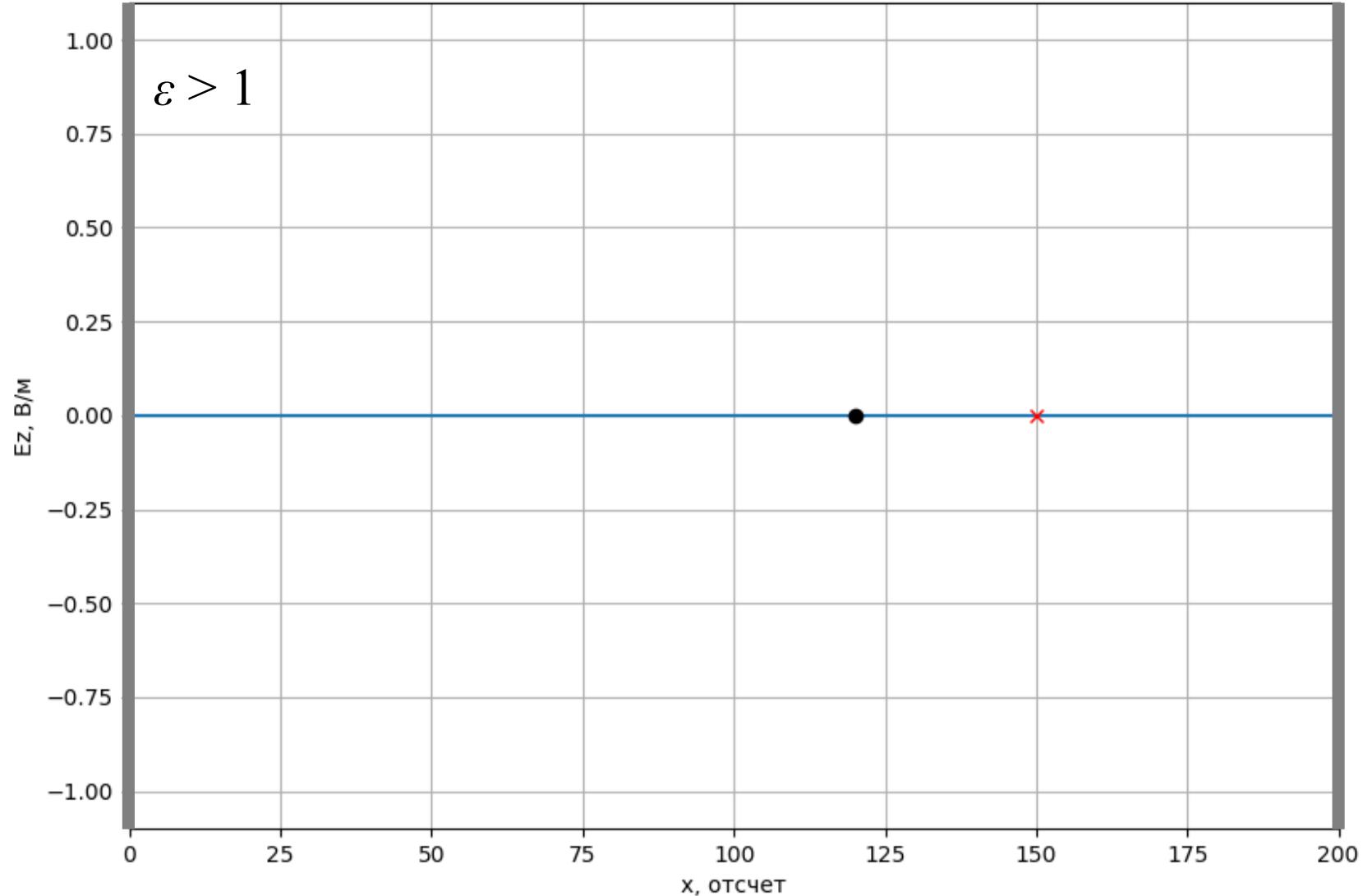
# Поглощающие граничные условия первой степени

Для свободного пространства и  $S_c = 1$  выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий 27 (ABC) первой степени (fdtd\_abc\_first.py)



# Формулировка граничных условий АВС первой степени с использованием дискретных операторов

Введем несколько новых операторов:

$I$  — оператор идентичности.

$$I E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

$s_x^w$  — оператор пространственного сдвига.

$$s_x^w E_z^q[m] = E_z^q[m+w]$$

$s_t^w$  — оператор временного сдвига.

$$s_t^w E_z^q[m] = E_z^{q+w}[m]$$

# Свойства линейных операторов

Введенные операторы коммутативны  
(можно менять порядок их применения)

$$S_x^w S_t^w = S_t^w S_x^w$$

$$I S_x^w = S_x^w$$

$$I S_t^w = S_t^w$$

$$II = I$$

# Уравнения адвекции

I.

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II.

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

# Использование дискретных операторов для 32 границных условий АВС первого порядка

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

# Использование дискретных операторов для 33 границных условий АВС первого порядка

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q+1}[m+1]}{2} =$$

$$= \frac{IE_z^{q+1}[m] + S_x^1 E_z^{q+1}[m]}{2} =$$

$$= \left( \frac{I + S_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[m]$$

# Использование дискретных операторов для 34 границных условий АВС первого порядка

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} = \\ & = I E_z^{q+1}[m] + s_t^{-1} E_z^{q+1}[m] = \\ & = \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

# Поглощающие граничные условия с использованием дискретных операторов

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \frac{\left( \frac{I + S_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[0] - \left( \frac{I + S_x^1}{2} \right) S_t^{-1} E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t} = \\ = \left( \frac{I + S_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - S_t^{-1}}{\Delta_t} \right) E_z^{q+1}[0]$$

# Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[0]$$

# Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{ \left( \frac{S_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + S_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \left( \frac{I + S_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - S_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для  $E_z^{q+1}[0]$  даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{S_c' - 1}{S_c' + 1} (E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0])$$

# Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition — ABC) второй степени

# Поглощающие граничные условия второй степени

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[ \left\{ \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \left( \frac{I + s_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \times \right.$$

$$\left. \left\{ \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \left( \frac{I + s_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно  $E_z^{q+1}[0]$ , то мы получим

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[0] = & \underbrace{\frac{-1}{1/S'_{\text{c}} + 2 + S'_{\text{c}}}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{S'_{\text{c}}} - 2 + S'_{\text{c}} \right)}_{k_2} \left( E_z^{q+1}[2] + E_z^{q-1}[0] \right) + \right. \\
 & + 2 \underbrace{\left( S'_{\text{c}} - \frac{1}{S'_{\text{c}}} \right)}_{k_3} \left( E_z^q[0] + E_z^q[2] - E_z^{q+1}[1] - E_z^{q-1}[1] \right) - \\
 & \left. - 4 \underbrace{\left( \frac{1}{S'_{\text{c}}} + S'_{\text{c}} \right)}_{k_4} E_z^q[1] \right\} - E_z^{q-1}[2]
 \end{aligned}$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

Для свободного пространства и  $S_c = 1$   
граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$

$$1 \rightarrow M - 1$$

$$2 \rightarrow M - 2$$

В индексации Python:

$$0 \rightarrow -1$$

$$1 \rightarrow -2$$

$$2 \rightarrow -3$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий 44 (ABC) второй степени (fdtd\_abc\_second.py)

