

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Метод полного поля / рассеянного поля (Total-Field / Scattered-Field, TF/SF)

Метод Total-Field / Scattered-Field

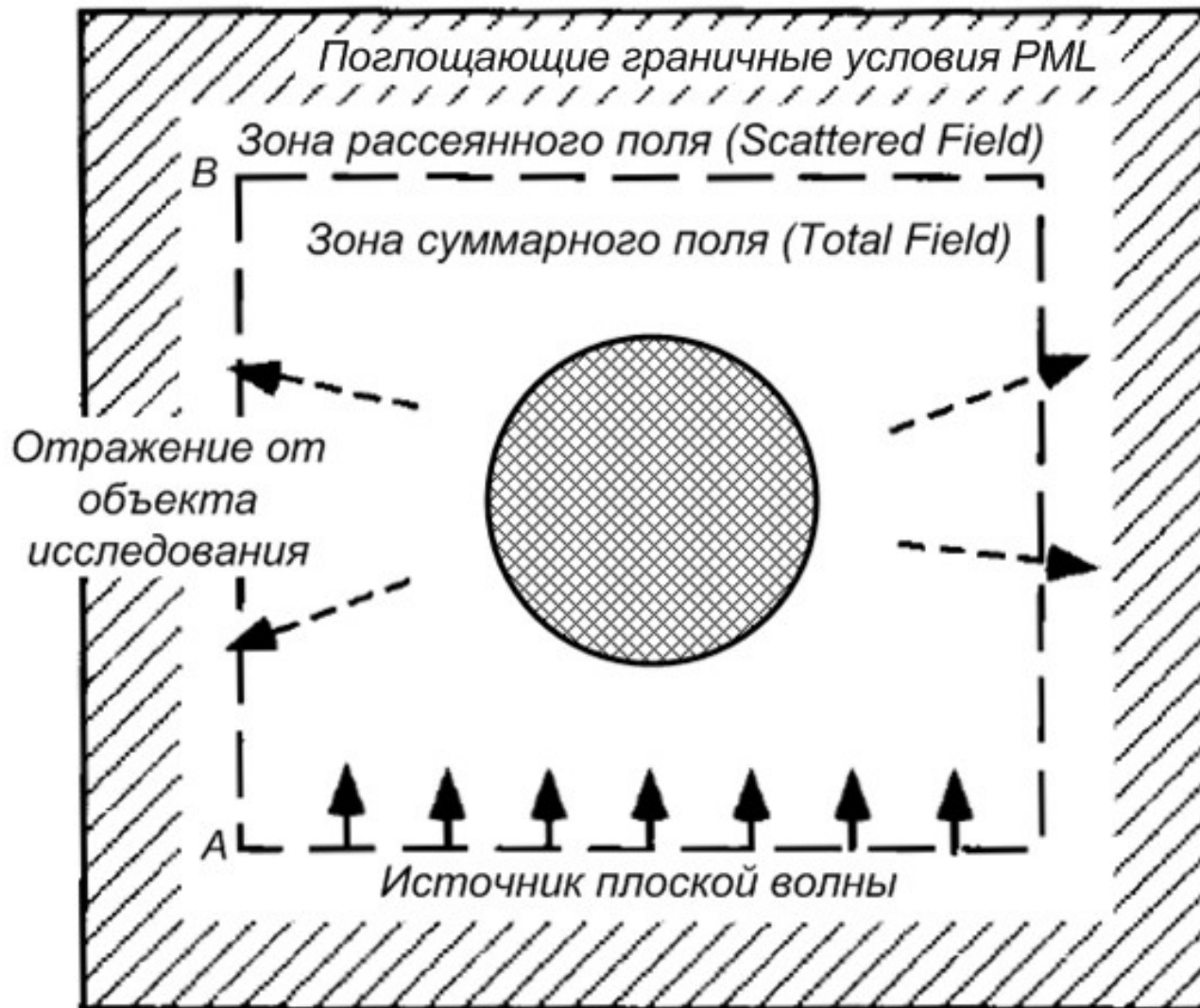
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}, \mathbf{H}_{\text{пад}}$ могут быть рассчитаны аналитически в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}, \mathbf{H}_{\text{расс}}$ изначально не известны. Рассчитываются с помощью метода FDTD.

Метод Total-Field / Scattered-Field

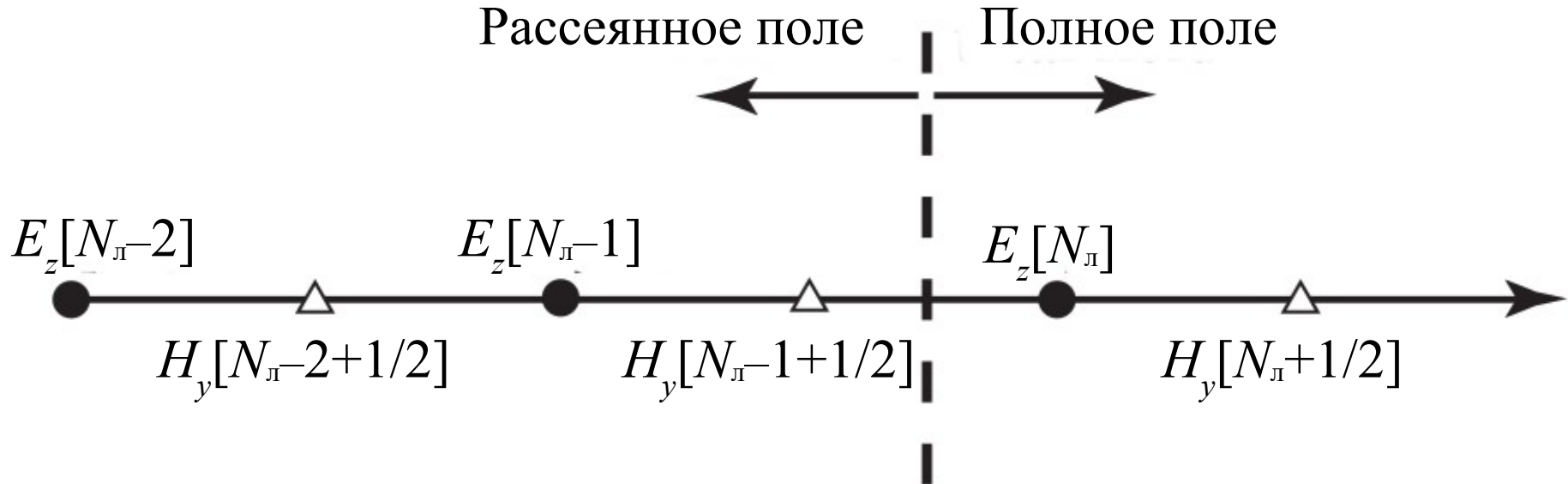


Метод Total-Field / Scattered-Field. ⁵

Левая граница

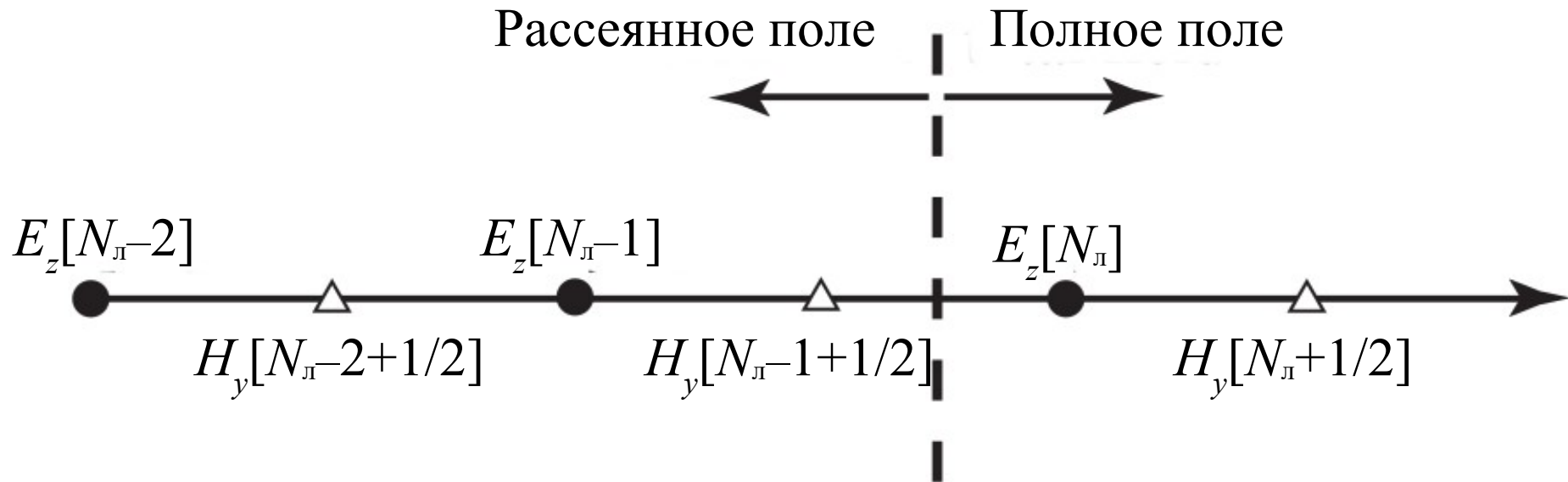
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Метод Total-Field / Scattered-Field. ⁶

Левая граница



$H_y[N_{\text{л}} - 1 + 1/2] = H_y[N_{\text{л}} - 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N_{\text{л}}]$ — первая ячейка в области полного поля.

Метод Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области полного поля

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{ПОЛН.}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} \right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке $(N - 1/2)\Delta x$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} &= \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{\left\{ H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + H_{y \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right\}}^{\text{полн.}} \right)
 \end{aligned}$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} + \\
 & + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{ПОЛН.}} - \overbrace{\left(H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + \left(-\frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right) \right)}^{\text{ПОЛН.}} \right)
 \end{aligned}$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^q[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2] - H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \left| \quad \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} = \frac{Z_0 S_c}{\epsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:


$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Поле на левой границе

Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} \left(\overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} - \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}-1]}^{\text{расс.}} \right)$$

проблема



Поле на левой границе

Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} + \\
 & + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} - \overbrace{E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]}^{\text{пад.}} \right)}^{\text{расс.}} - \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}-1]}^{\text{расс.}} \right)
 \end{aligned}$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}}-1] \right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

или

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2] + \frac{1}{Z_0} \left(E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}}-1] \right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{1}{Z_0} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

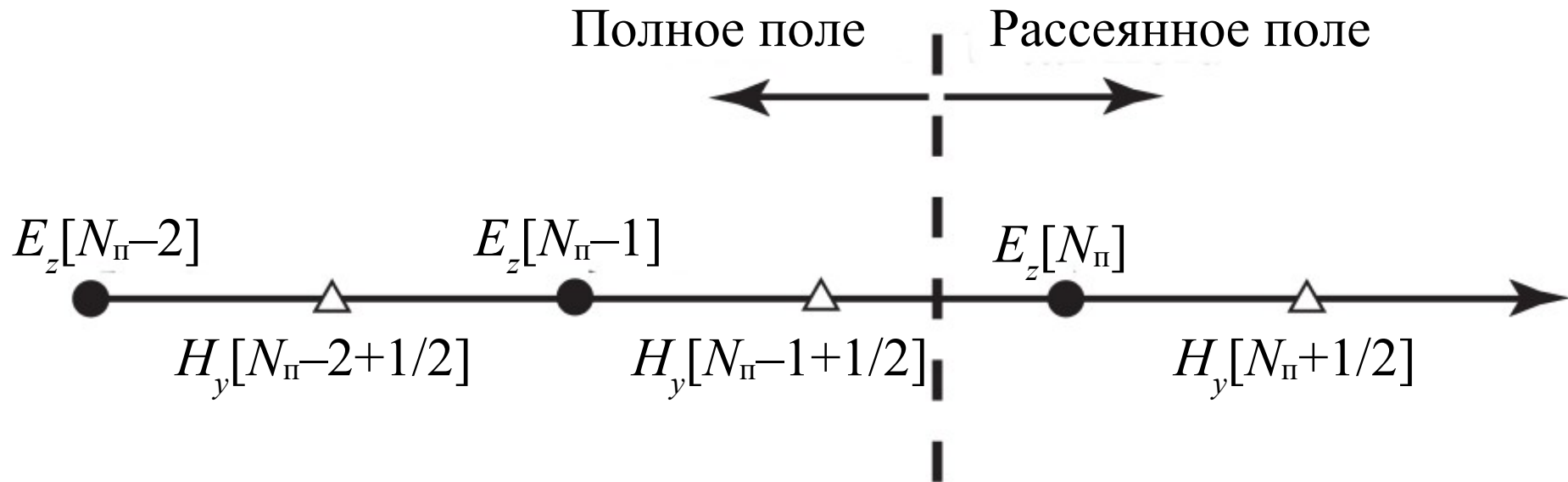
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field.

Правая граница



$H_y[N_\pi - 1 + 1/2] = H_y[N_\pi - 1/2]$ — последняя ячейка в области
полного поля.

$E_z[N_\pi]$ — первая ячейка в области рассеянного поля.

Total-Field / Scattered-Field.

Правая граница

21

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field.

Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] + \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2]$$

Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

25

Начало

Задание начальных условий $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени $q = [0...maxTime - 1]$:

Цикл по пространству $m = [0...maxSize - 2]$:

Расчет $H_y^{q+1/2}$

Ввод поля $H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^q[N_{\text{л}}]$

Ввод поля $H_y^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^q[N_{\text{п}}]$

Цикл по пространству $m = [1...maxSize - 1]$:

Расчет E_z^{q+1}

Ввод поля $E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$

Ввод поля $E_z^{q+1}[N_{\text{п}}] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2]$

Вывод результатов

Конец

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

28

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

Гауссов импульс

$$f(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2}$$

Гауссов импульс в дискретной форме

31

Делаем замену t на $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left(q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left(q - \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

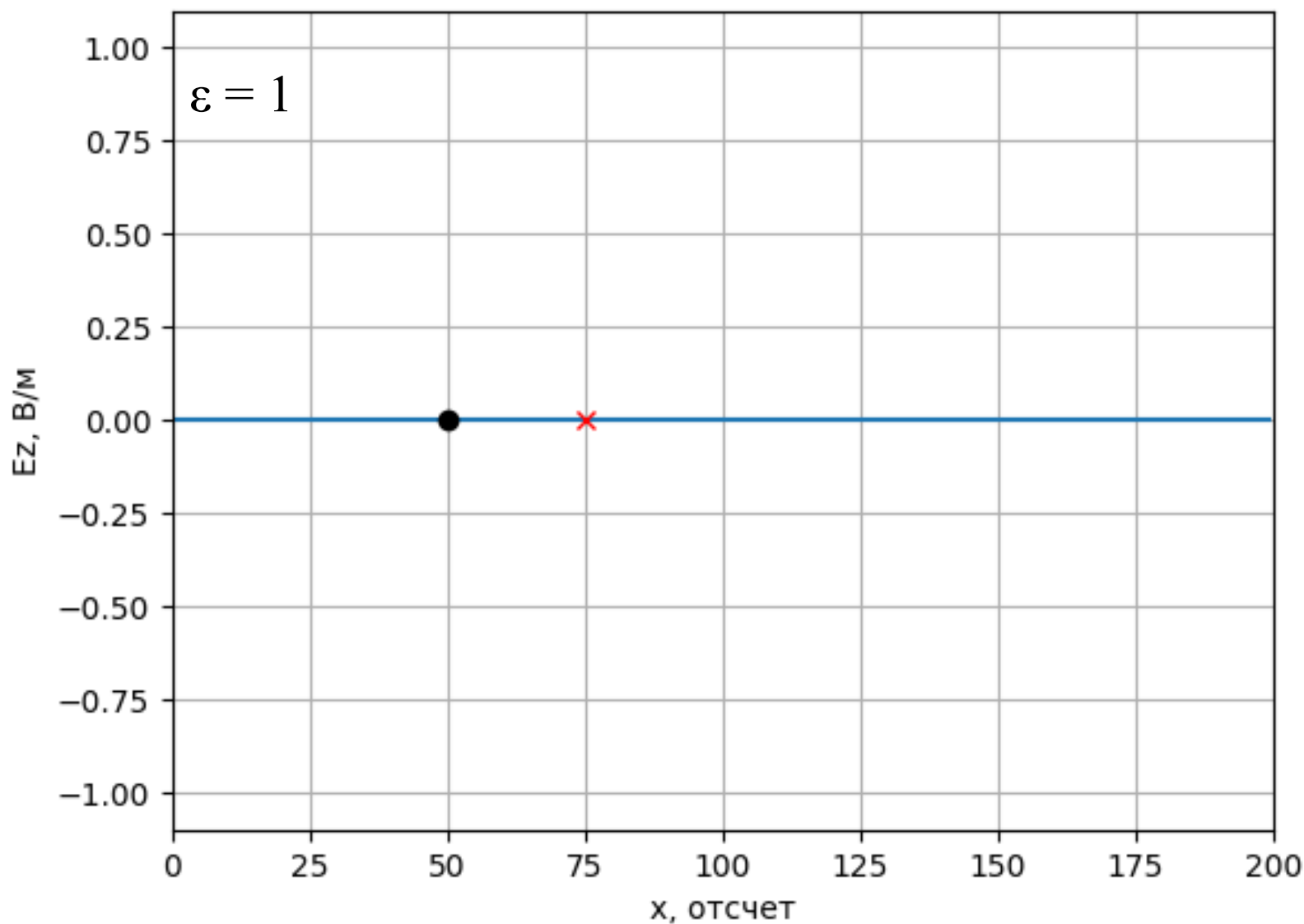
Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

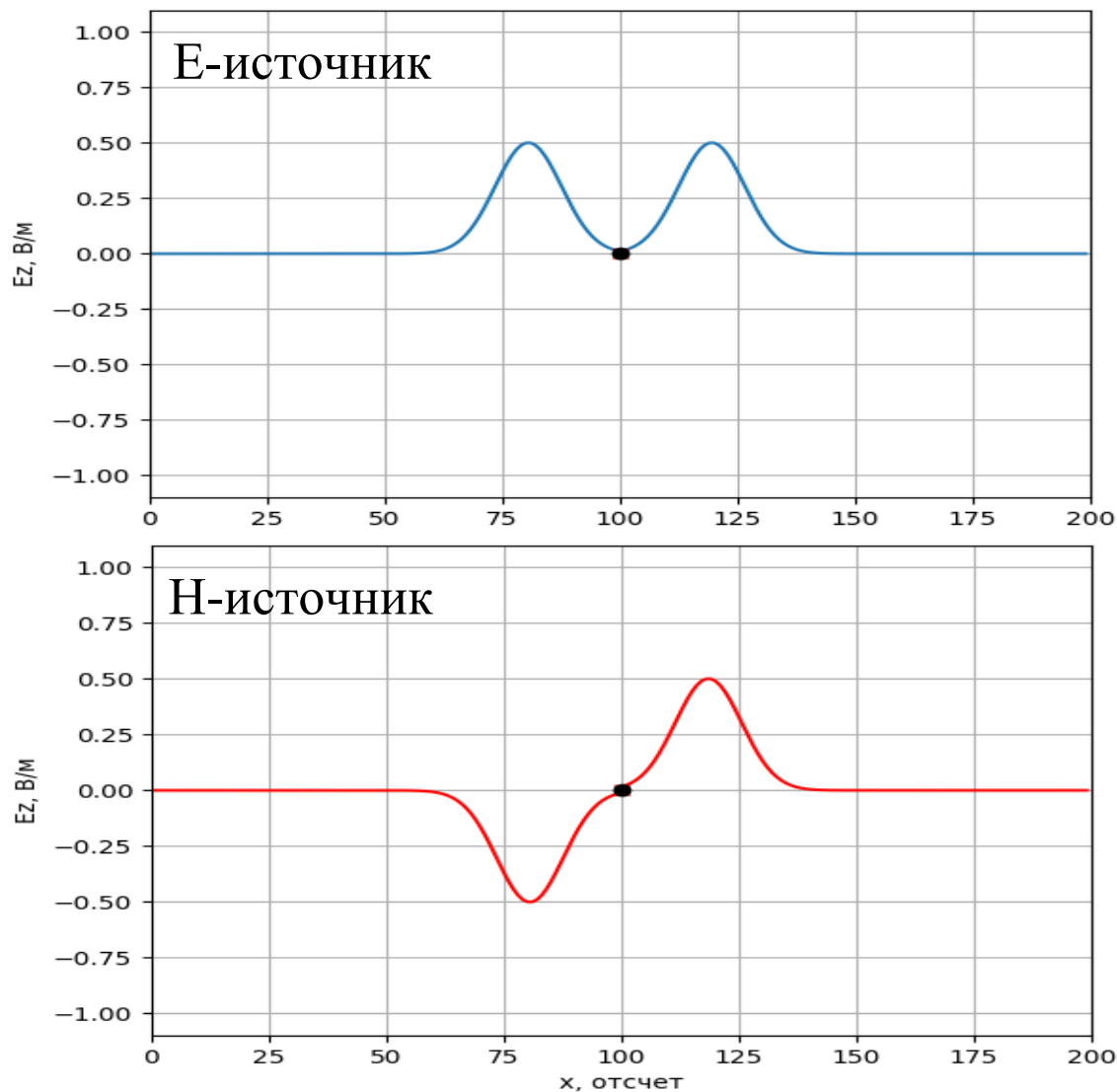
$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z_0} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z_0} e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Демонстрация метода Total Field / Scattered Field

Демонстрация метода TFSF (fdtd_tfsf_gauss.py)



Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



Поле на границе

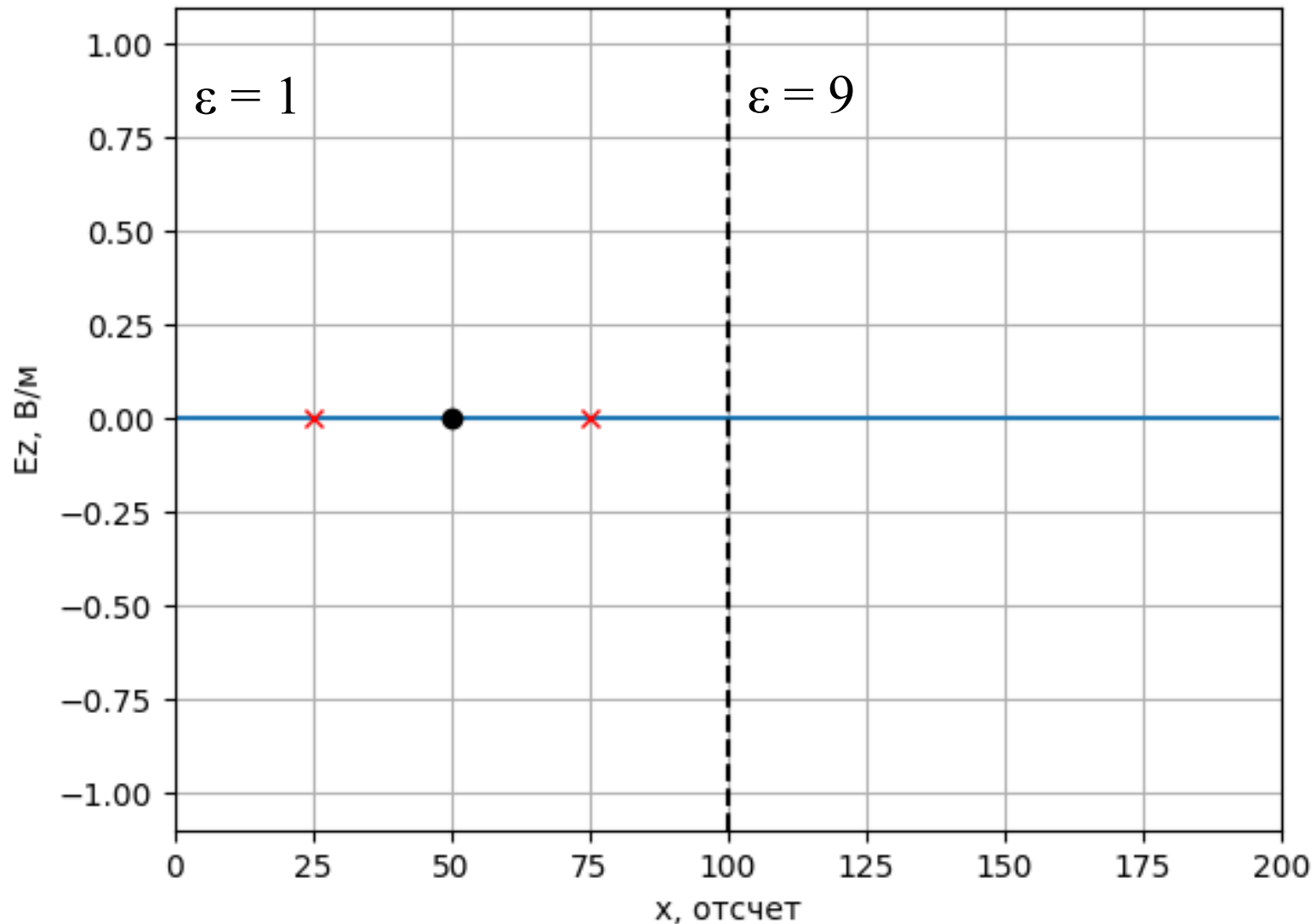
Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует N -й ячейке

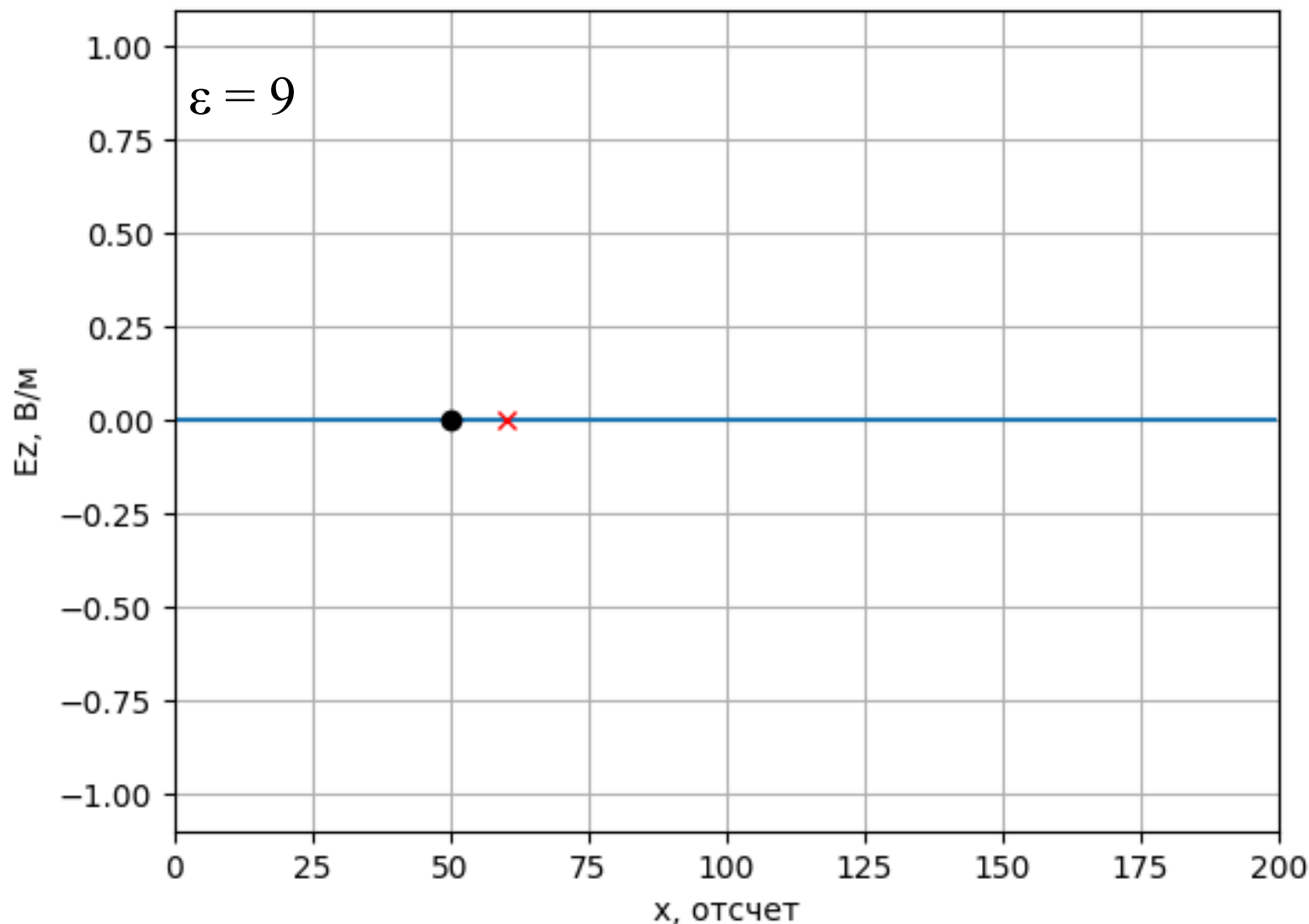
$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{Z_0} E_{z.\text{пад}}^q[0]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[-1/2]$$

Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSSF (fdtd_tfsf_heterogen.py)

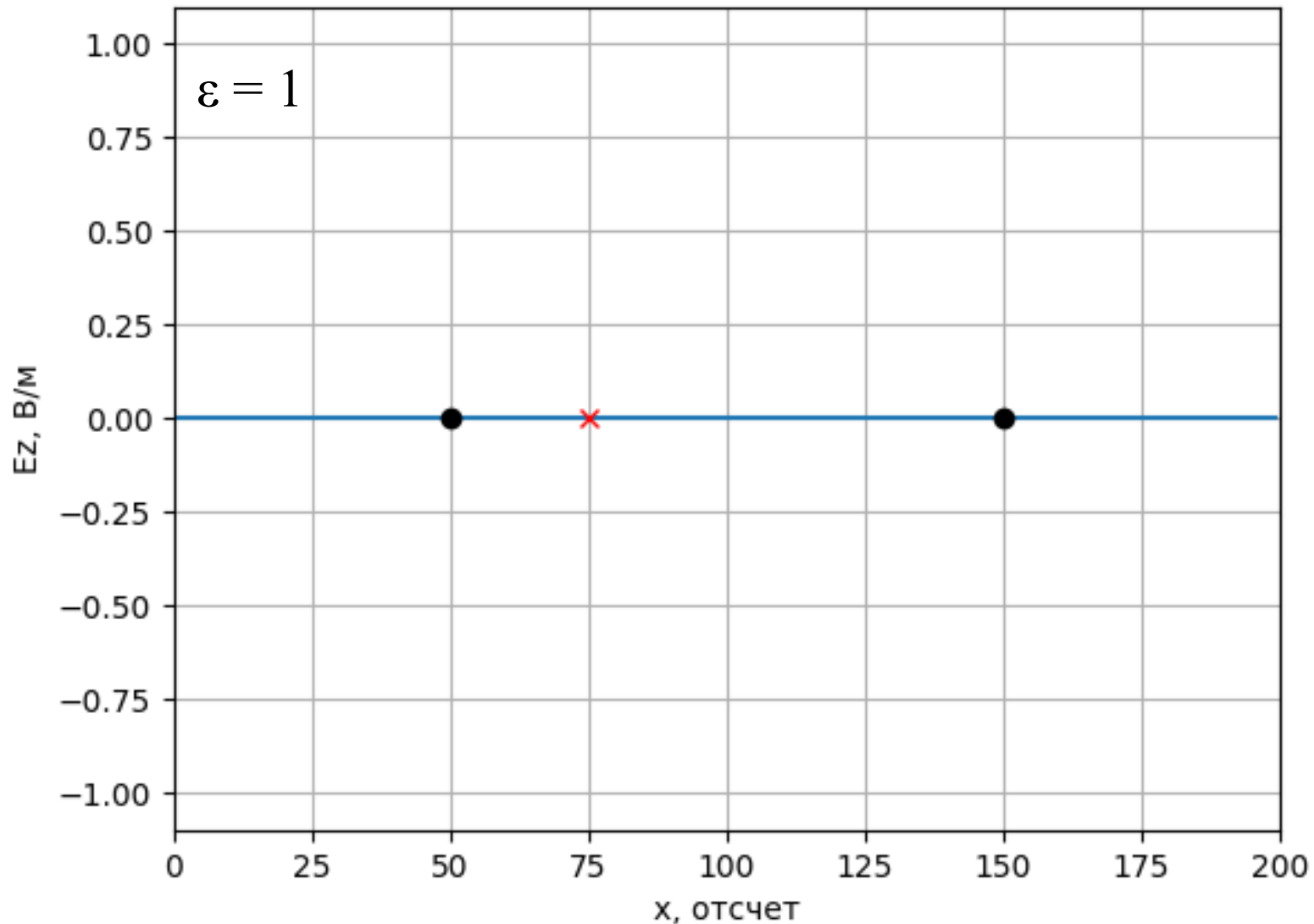


Метод Total Field / Scattered Field с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd_tfsf_medium_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss.py)

40



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss_pes.py)

41

