Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

# «Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

# Численная дисперсия

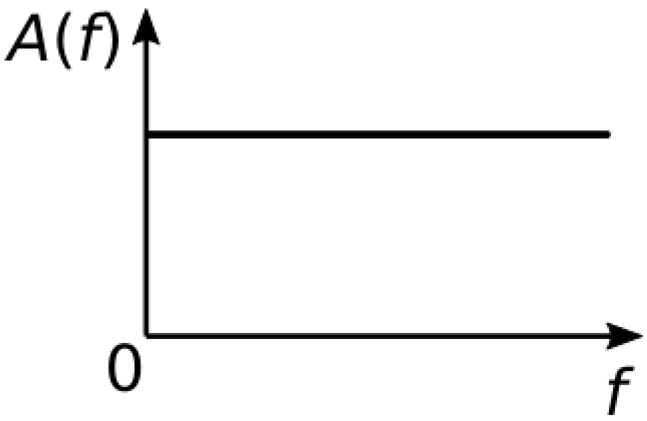
# Численная дисперсия

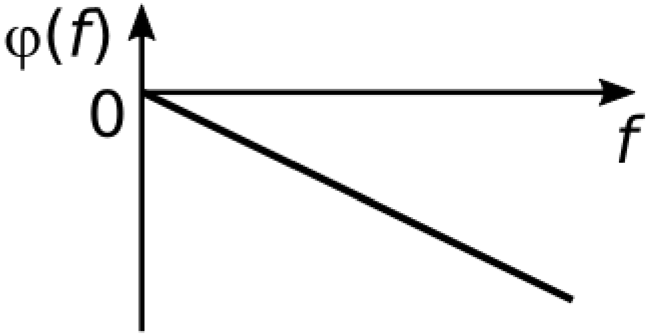
Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от частоты.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\,\lambda}{2\,\pi}$$

# Область пространства как фильтр

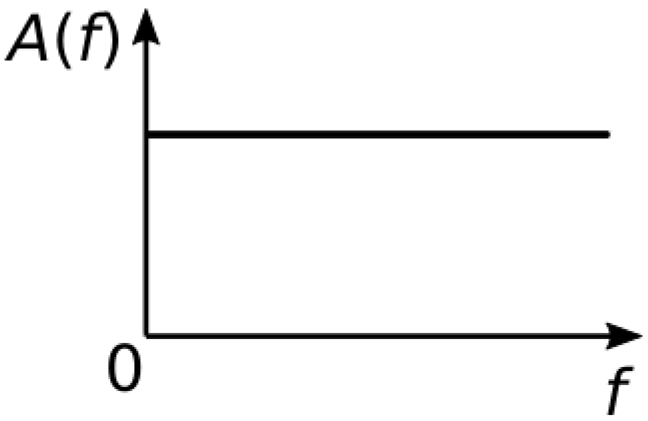
Параметры фильтра без дисперсии

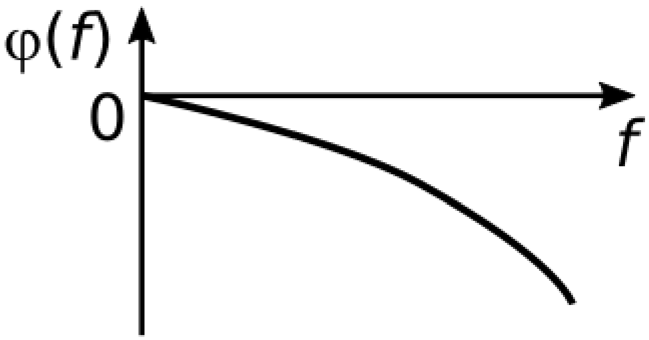


# Область пространства как фильтр

Параметры фильтра с дисперсией



# Волновое уравнение в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

# Ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},x_0<\xi<x$$

# Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x_0$ со смещением $\delta$ справа и слева

$$x = x_0 + \delta \qquad x - x_0 = \delta$$

$$f(x_0+\delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\delta^3 f'''(x_0) + \ldots$$

$$x = x_0 - \delta \qquad x - x_0 = -\delta$$

$$f(x_0-\delta) = f(x_0) - \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\delta^3 f'''(x_0) + \ldots$$

# Расчет второй производной в дискретном виде



Сложим выражения для $f(x+\delta)$ и $f(x-\delta)$

$$f\left(x_0+\delta\right)+f\left(x_0-\delta\right)=2f\left(x_0\right)+\frac{2}{2!}\delta^2 f''\left(x_0\right)+O\left(\delta^4\right)$$

$$\boxed{f''\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0+\delta\right)+f\left(x_0-\delta\right)-2f\left(x_0\right)}{\delta^2}+O\left(\delta^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\right|_{m,q} = \frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\right|_{m,q} = \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}$$

Подставляем выражения для вторых производных в волновое уравнение

$$\frac{E_z^q[m+1]+E_z^q[m-1]-2E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}-\frac{1}{v^2}\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q-1}[m]-2E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}=0$$

Выражаем $E_z^{q+1}[m]$

$$\boxed{E_z^{q+1}[m]=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(E_z^q[m+1]+E_z^q[m-1]-2E_z^q[m]\right)-E_z^{q-1}[m]+2E_z^q[m]}$$

Пусть $E_z^q$ — плоская волна с гармоническим колебанием

$$E_z^q[m] = e^{j\left(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x\right)}$$

$\dot{\tilde{k}} = k' - j k''$ — комплексное волновое число в дискретном пространстве

Подставляем $E_z^q[m]$ в выражение с предыдущего слайда

$$E_z^{q+1}[m]=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(E_z^q[m+1]+E_z^q[m-1]-2E_z^q[m]\right)-E_z^{q-1}[m]+2E_z^q[m]$$

$$\Downarrow$$

$$e^{j(\omega(q+1)\Delta_t-\dot{\tilde{k}}\,m\Delta_x)}=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\Big[e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}(m+1)\Delta_x)}+$$

$$+e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}(m-1)\Delta_x)}-2e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}\,m\Delta_x)}\Big]-$$

$$-e^{j(\omega(q-1)\Delta_t-\dot{\tilde{k}}\,m\Delta_x)}+2e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}\,m\Delta_x)}$$

Делим обе части выражения на $e^{j\left(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x\right)}$

$$e^{j\omega\Delta_t} = \frac{v^2\left(\Delta_t\right)^2}{\left(\Delta_x\right)^2}\left(e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} + e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} - 2\right) - e^{-j\omega\Delta_t} + 2$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t}+e^{-j\omega\Delta_t}}{2}=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(\frac{e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}+e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}}{2}-1\right)+1$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t}+e^{-j\omega\Delta_t}}{2}=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(\frac{e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}+e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}}{2}-1\right)+1$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

$$\cos(\omega \Delta_t) = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left( \cos(\dot{\tilde{k}} \Delta_x) - 1 \right) + 1$$

# Комплексное волновое число в дискретном пространстве

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos\left( \left( \frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t} \right)^2 \left( \cos\left(\omega\,\Delta_t\right) - 1 \right) + 1 \right)$$

$k = \dfrac{\omega}{v}$ — волновое число при отсутствии численной дисперсии

# Частный случай: $\Delta_x \to 0, \Delta_t \to 0$

Используем разложение функции cos(*u*) в ряд Маклорена:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n u^{(2n)}}{(2n)!}$$

Для малого *u* будем считать, что

$$\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2!}$$

# Частный случай: $\Delta_x \to 0,\ \Delta_t \to 0$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t}\right)^2\left(\cos(\omega\,\Delta_t)-1\right)+1\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t}\right)^2\left(1-\frac{(\omega\,\Delta_t)^2}{2}-1\right)+1\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(1-\frac{(\Delta_x)^2}{2}\underbrace{\frac{\omega^2}{v^2}}_{k^2}\right)=\frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(1-\frac{1}{2}(k\,\Delta_x)^2\right)$$

# Частный случай: $\Delta_x \to 0$, $\Delta_t \to 0$



Для малого $\Delta_x$ :

$$1-\frac{\left(k\,\Delta_x\right)^2}{2}\approx\cos\left(k\,\Delta_x\right)$$

$$\dot{\tilde{k}}=\frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\cos\left(k\,\Delta_x\right)\right)=k$$

Нет численной дисперсии

# Частный случай: «Магический» шаг по времени

Если $\boxed{\Delta_t = \dfrac{\Delta_x}{v}}$ или $\boxed{v\dfrac{\Delta_t}{\Delta_x} = 1}$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t}\right)^2\left(\cos(\omega\,\Delta_t) - 1\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\cos(\omega\,\Delta_t) - 1 + 1\right) = \frac{\omega\,\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{\omega}{v} = k$$

Нет численной дисперсии

# Численная дисперсия

$$\frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}{N_\lambda \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)}$$

$\tilde{c}$ – скорость распространения волны в дискретном пространстве

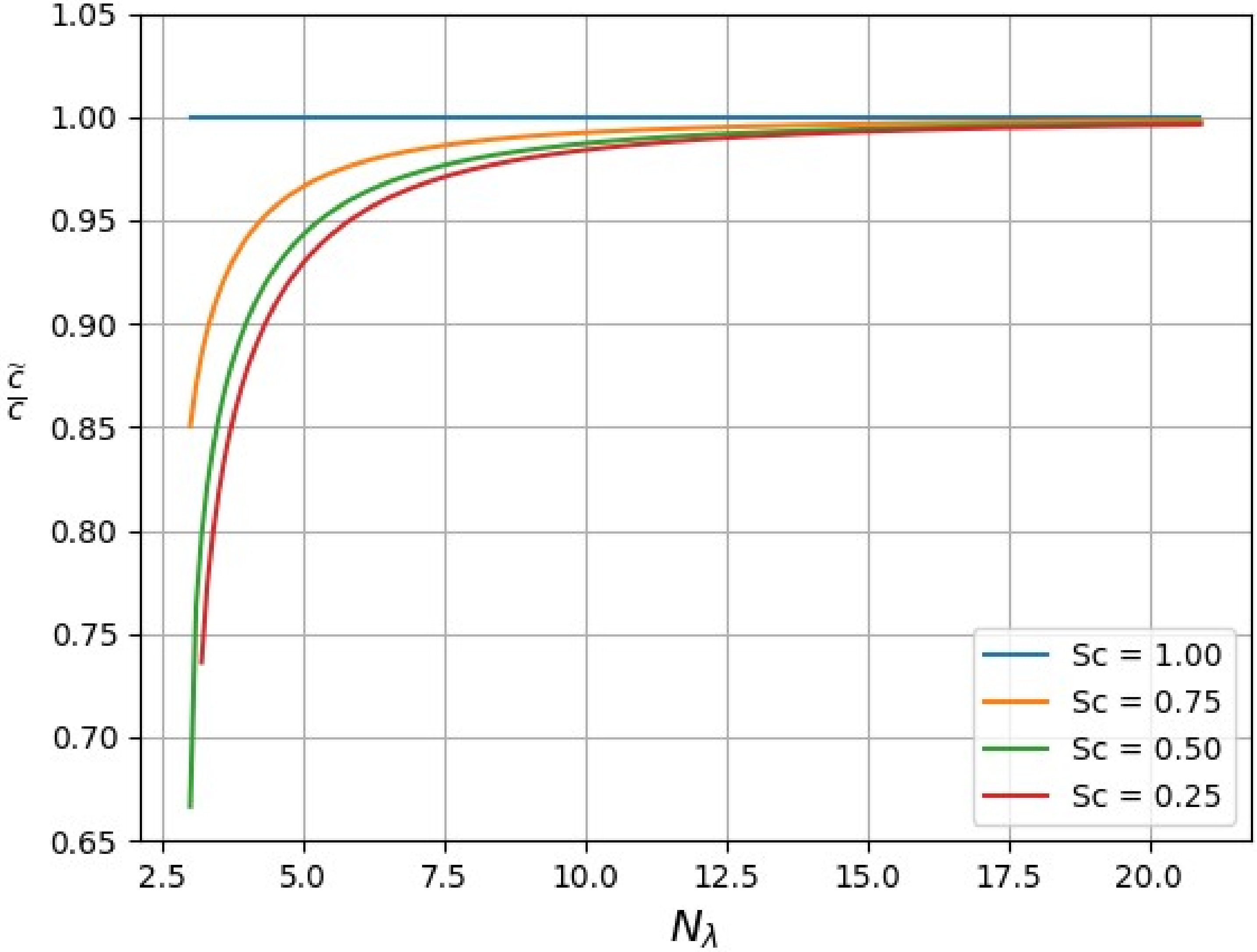
$N_\lambda$ – количество ячеек сетки на длину волны

Если $S_c = 1$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$

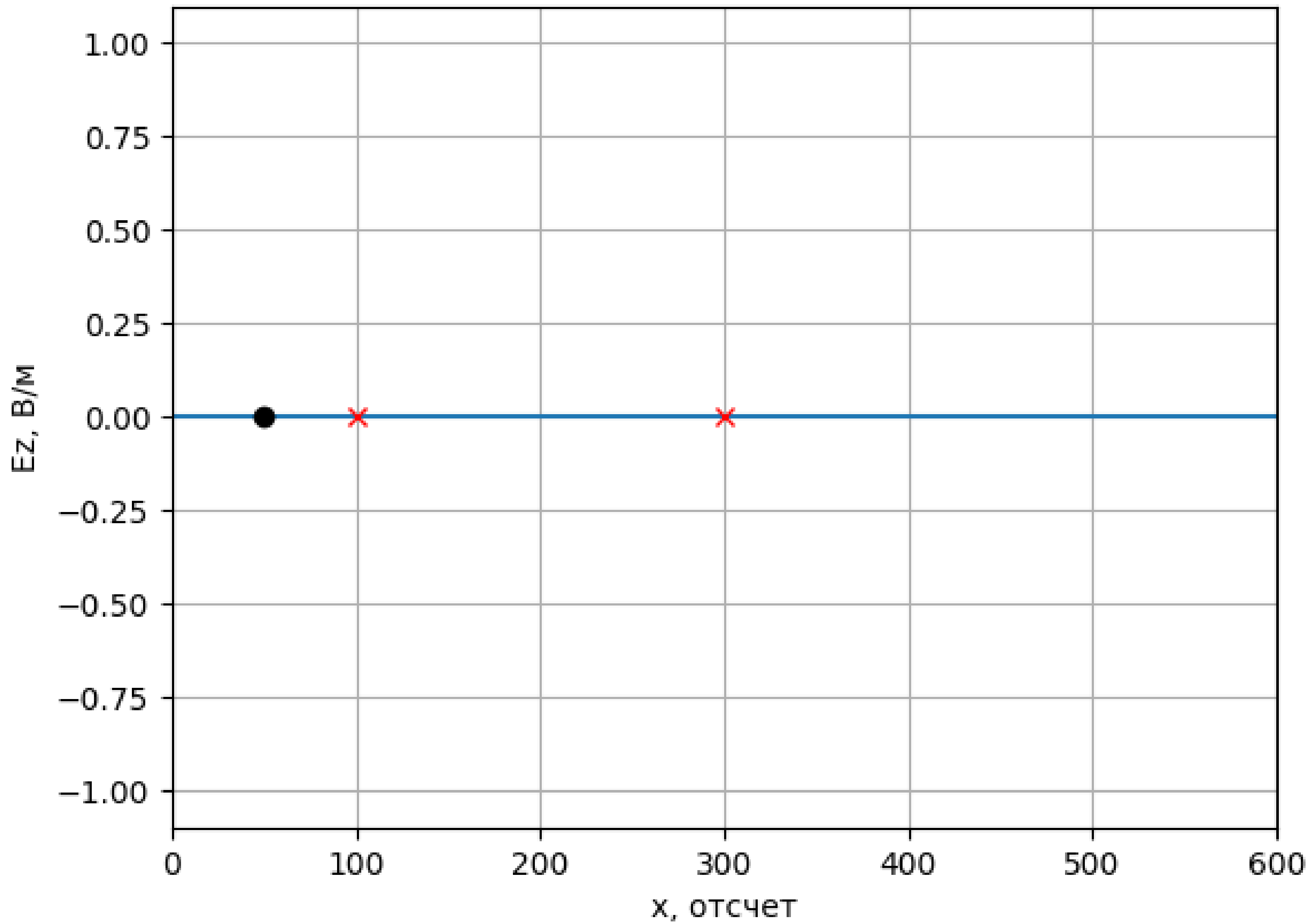
$$\frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\pi}{N_\lambda \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{N_\lambda}\right)\right)} = \frac{\pi N_\lambda}{N_\lambda \pi} = 1$$

Нет численной дисперсии

# Анализ численной дисперсии (dispersion.py)



# Анализ численной дисперсии (fdtd_dispersion_vacuum.py)



# Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd_dispersion.py)

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega d}{\Delta_\phi} = \frac{\omega N_d \Delta_x}{\Delta_\phi}$$

$d$ — расстояние между датчиками, м

$N_d$ — расстояние между датчиками, отсчет

$\Delta_\varphi$ — разность фаз на круговой частоте ω, рад

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n \Delta f = \frac{2\pi n}{N_s \Delta_t}$$

$n$ — номер отсчета в спектре сигнала

$N_s$ — количество отсчетов в зарегистрированном сигнале

# Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd_dispersion.py)



$$v_{\phi}(n) = \frac{2\pi N_d \Delta_x}{N_s \Delta_t \Delta_{\phi}} n = \frac{2\pi N_d c}{N_s \Delta_{\phi} S_c} n$$

# Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков

$\mu = 1$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

# Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

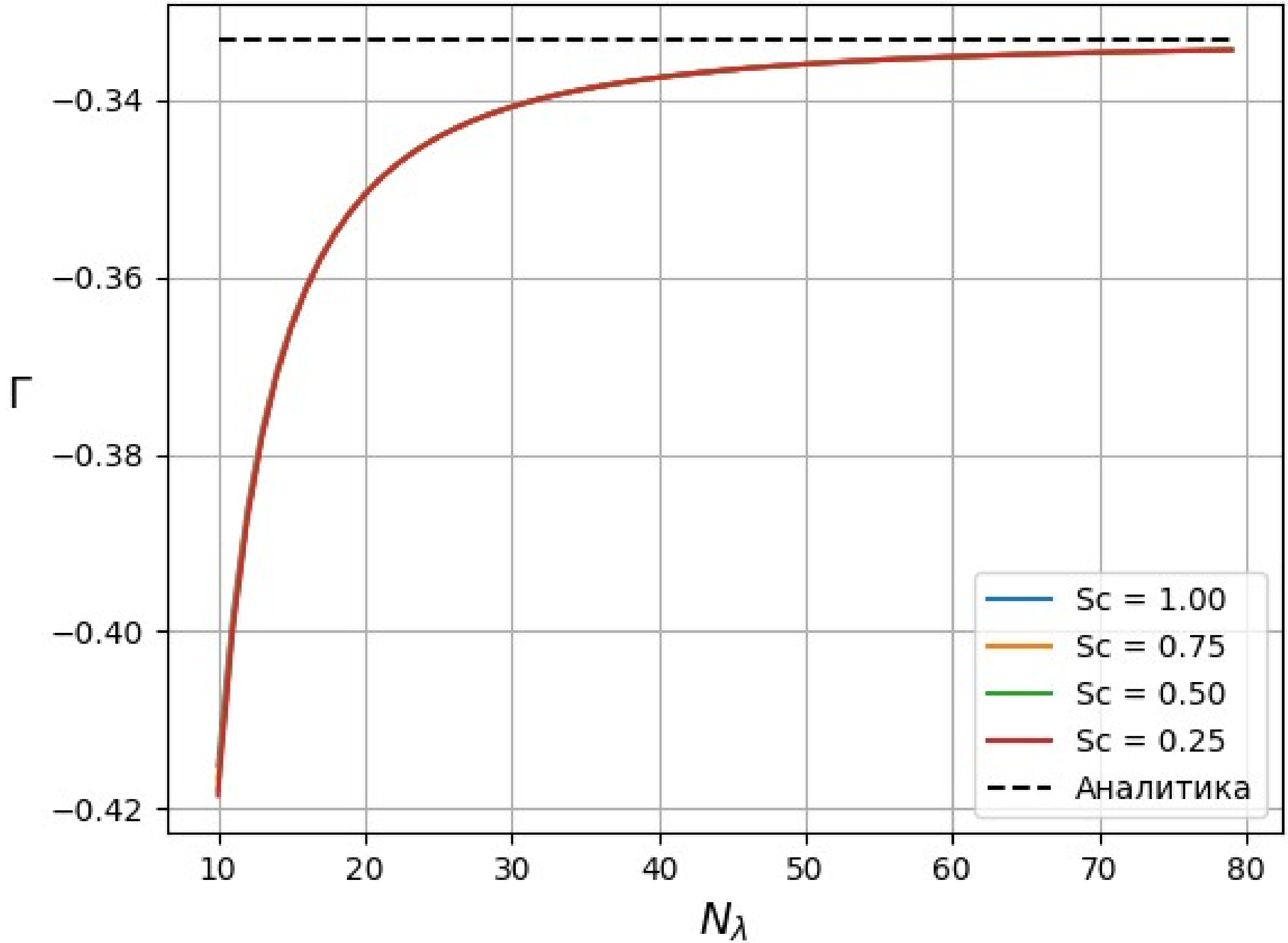
$$\tilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

где

$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{S_c}\sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

# Коэффициент отражения в дискретном пространстве (reflection_error.py)





# Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\underline{\Delta_x[m+1/2]}}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\underline{\Delta_x[m]}}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

# Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)\frac{1}{\mu W_0}\underline{S_c[m+1/2]}$$

---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)\frac{W_0}{\varepsilon}\underline{S_c[m]}$$

# Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$v\frac{\Delta_t}{\Delta_x}\leqslant 1$$

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}\leqslant 1$$

$$\frac{S'_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\leqslant 1$$

$$\boxed{S'_c\leqslant\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

# Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd_heterogen_sc.py)