

**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

**«Метод конечных разностей
во временной области (FDTD)»**

**Метод
полного поля / рассеянного поля
(Total-Field / Scattered-Field, TFSF)**

Метод Total-Field / Scattered-Field

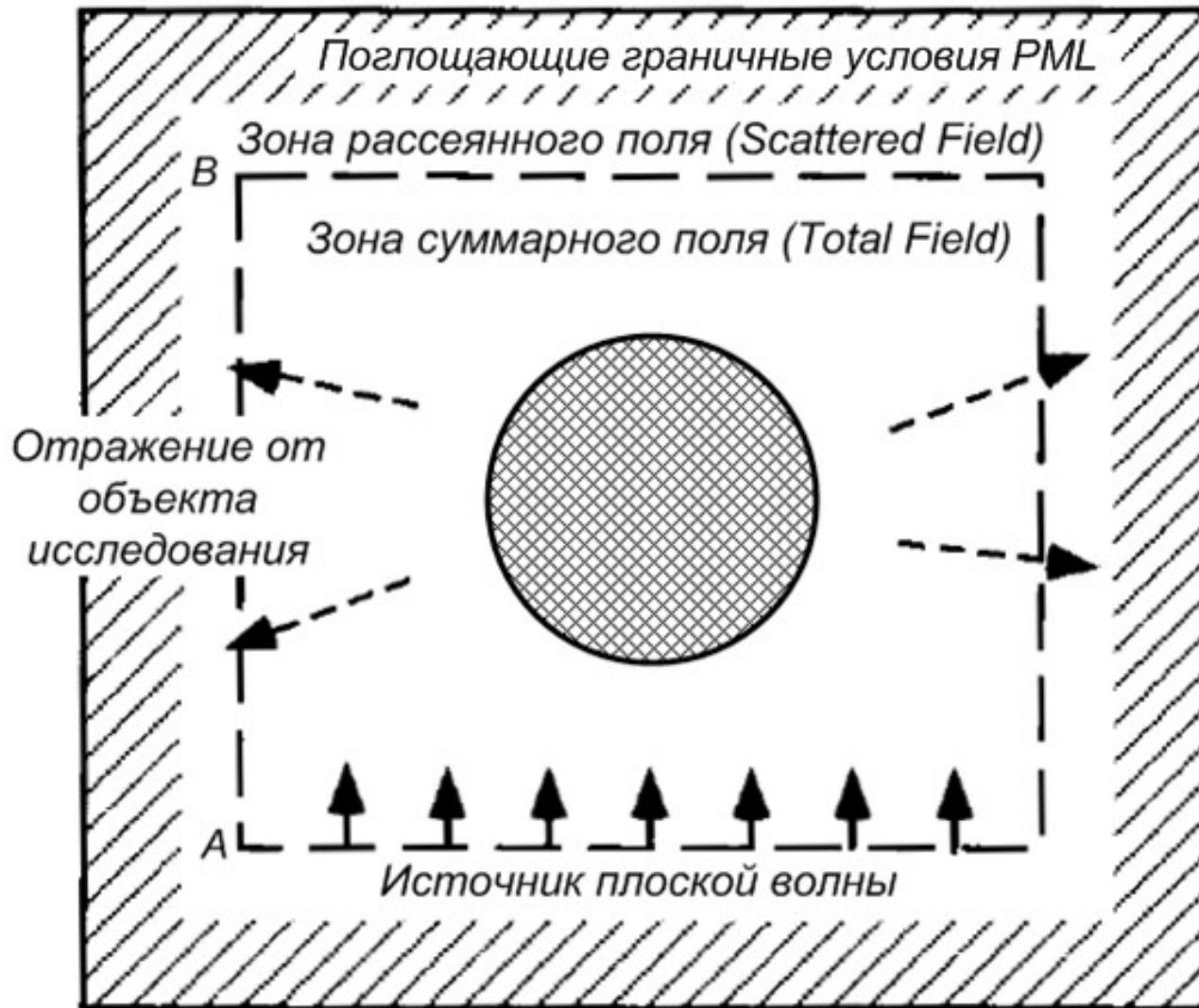
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}$, $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ могут быть рассчитаны аналитически в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}$, $\mathbf{H}_{\text{расс}}$ изначально не известны. Рассчитываются с помощью метода FDTD.

Метод Total-Field / Scattered-Field

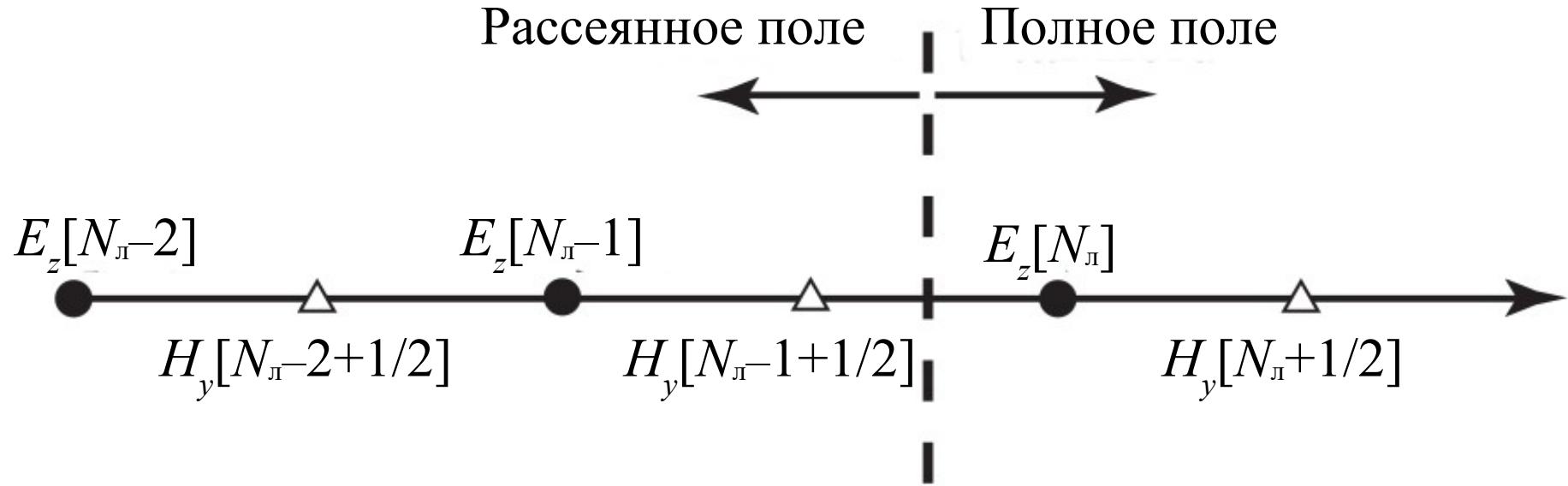


Метод Total-Field / Scattered-Field. ⁵

Левая граница

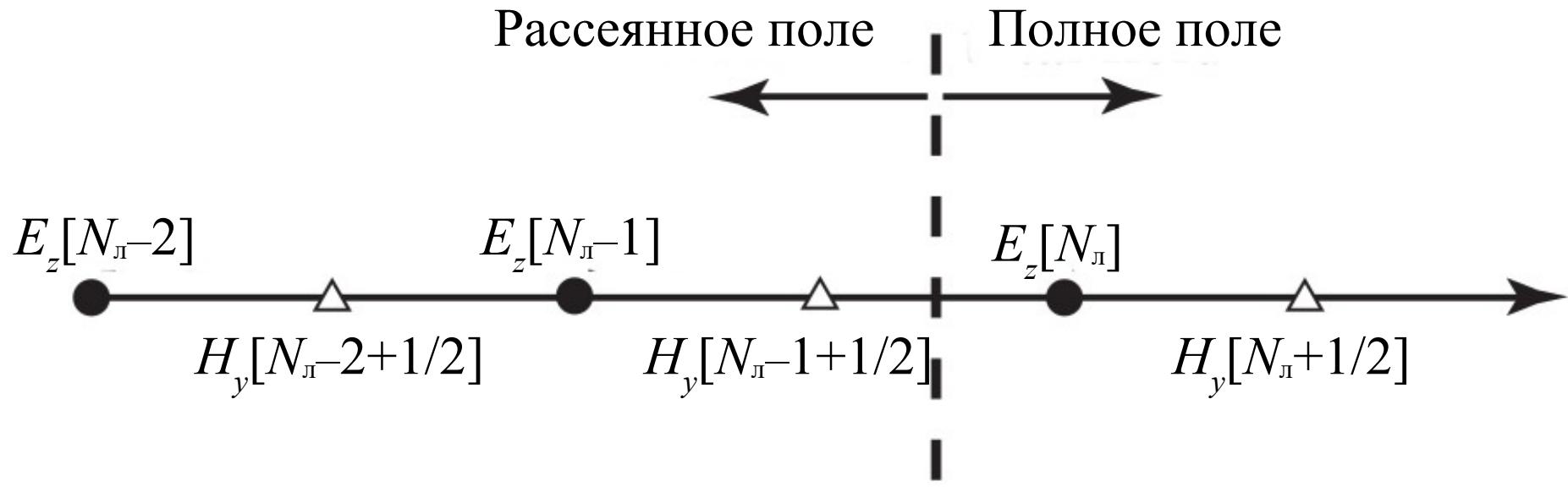
$$E_{\text{полн}} = E_{\text{пад}} + E_{\text{расс}}$$

$$H_{\text{полн}} = H_{\text{пад}} + H_{\text{расс}}$$



Метод Total-Field / Scattered-Field.⁶

Левая граница



$H_y[N_{\text{л}} - 1 + 1/2] = H_y[N_{\text{л}} - 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N_\text{л}]$ — первая ячейка в области полного поля.

Метод Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области полного поля

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} \right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке $(N - 1/2)\Delta x$

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} +$$

$$+ \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} + \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{пад.}} \right\} \right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{Z} E_z^{\text{пад.}}[N_{\text{л}} - 1/2] \right)}_{\text{полн.}} \right\} \right)$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^q[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2] - H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \mid \quad \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} = \frac{Z_0 S_c}{\epsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

проблема

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(\overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} - \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}} - 1]}^{\text{расс.}} \right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} +$$

$$+ \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(\underbrace{E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}} \text{ пад.}]}_{\text{полн. пад.}} - \underbrace{E_z^q[N_{\text{л}} - 1]}_{\text{расс.}} \right)$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}} - 1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

или

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + \frac{1}{Z_0} (E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}} - 1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{1}{Z_0} E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}}]$$

Total-Field / Scattered-Field

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{q+1/2} \text{пад}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

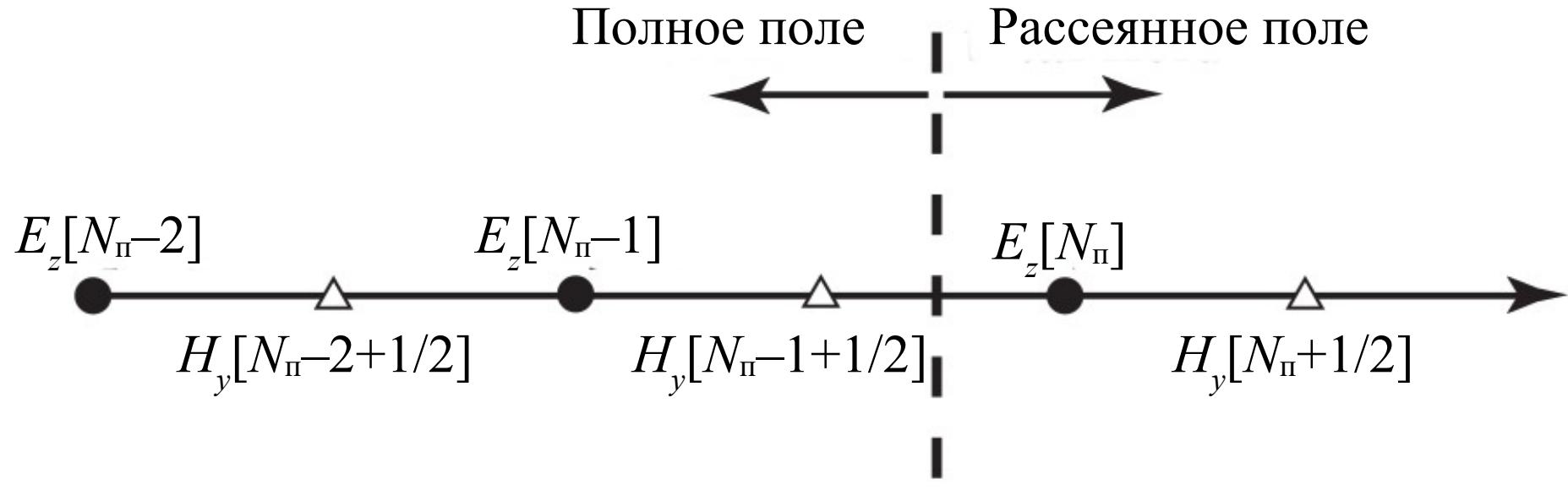
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_z^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field.

Правая граница



$H_y[N_\pi - 1 + 1/2] = H_y[N_\pi - 1/2]$ — последняя ячейка в области
полного поля.

$E_z[N_\pi]$ — первая ячейка в области рассеянного поля.

Total-Field / Scattered-Field.

Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^q \text{пад}[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{q+1/2} \text{пад}[N_{\Pi} - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field.

Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] + \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_z^q \text{пад}[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_z^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2]$$

Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени $q = [0...maxTime - 1]$:

Цикл по пространству $m = [0...maxSize - 2]$:

Расчет $H_y^{q+1/2}$

Ввод поля $H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^q[N_{\text{л}}]$

Ввод поля $H_y^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^q[N_{\text{п}}]$

Цикл по пространству $m = [1...maxSize - 1]$:

Расчет E_z^{q+1}

Ввод поля $E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$

Ввод поля $E_z^{q+1}[N_{\text{п}}] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2]$

Вывод результатов

Конец

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

Гауссов импульс

$$f(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2}$$

Гауссов импульс в дискретной форме

Делаем замену t на $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left(q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\varepsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left(q - \frac{m \sqrt{\varepsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z} e^{-\left(\frac{(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

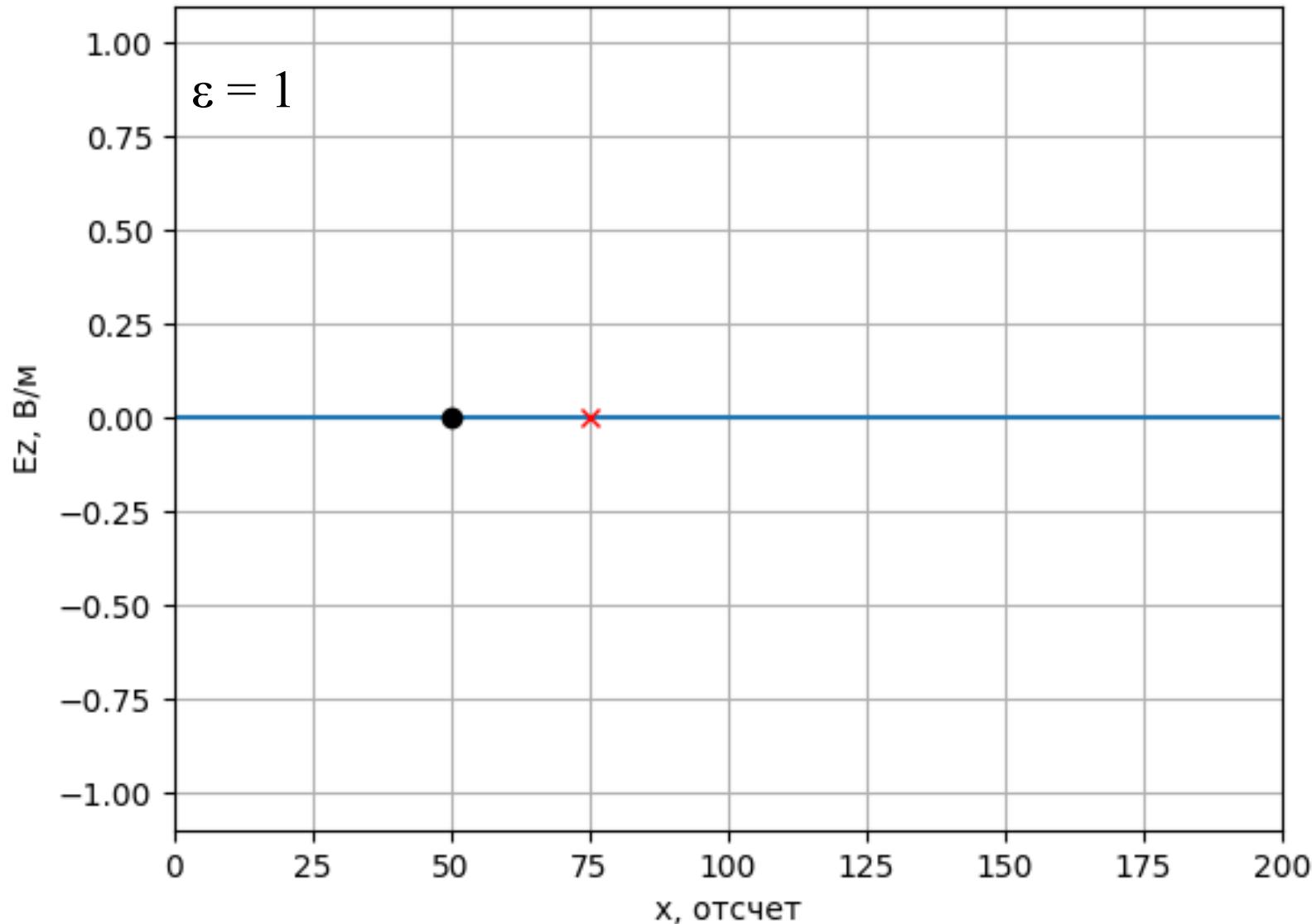
Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

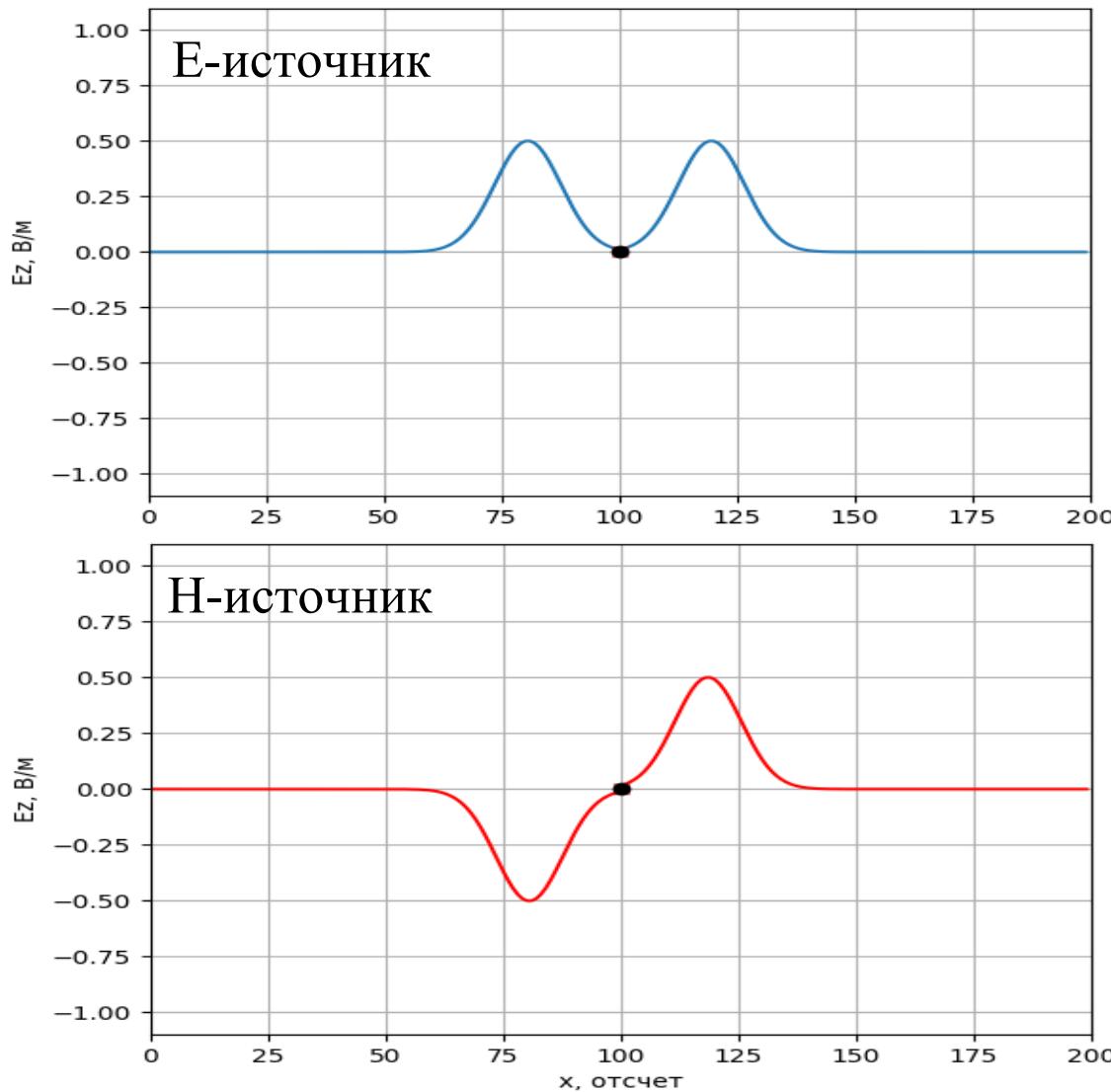
$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z_0} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z_0} e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Демонстрация метода Total Field / Scattered Field

Демонстрация метода TFSF (fdtd_tfsf_gauss.py)



Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



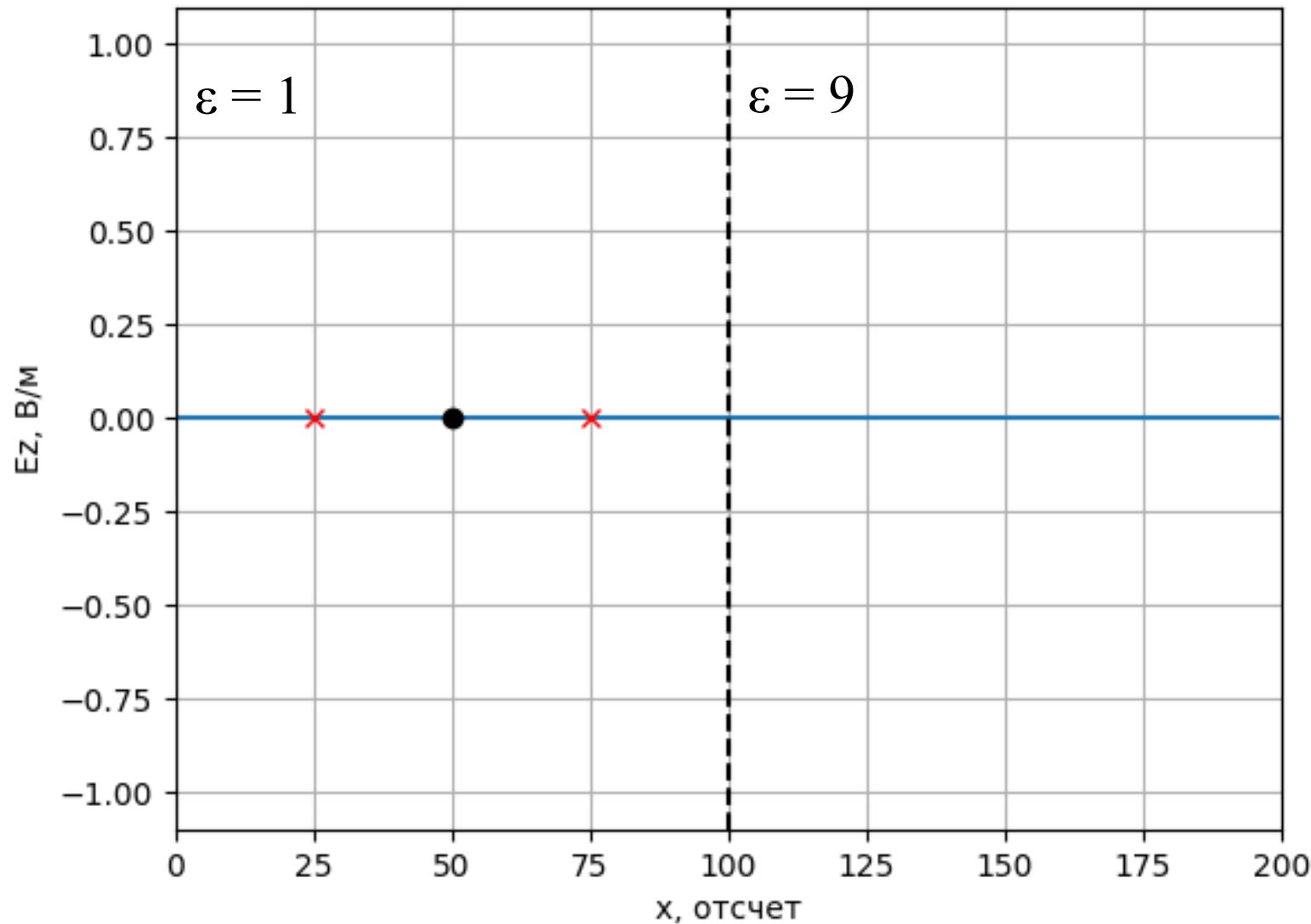
Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует N -й ячейке

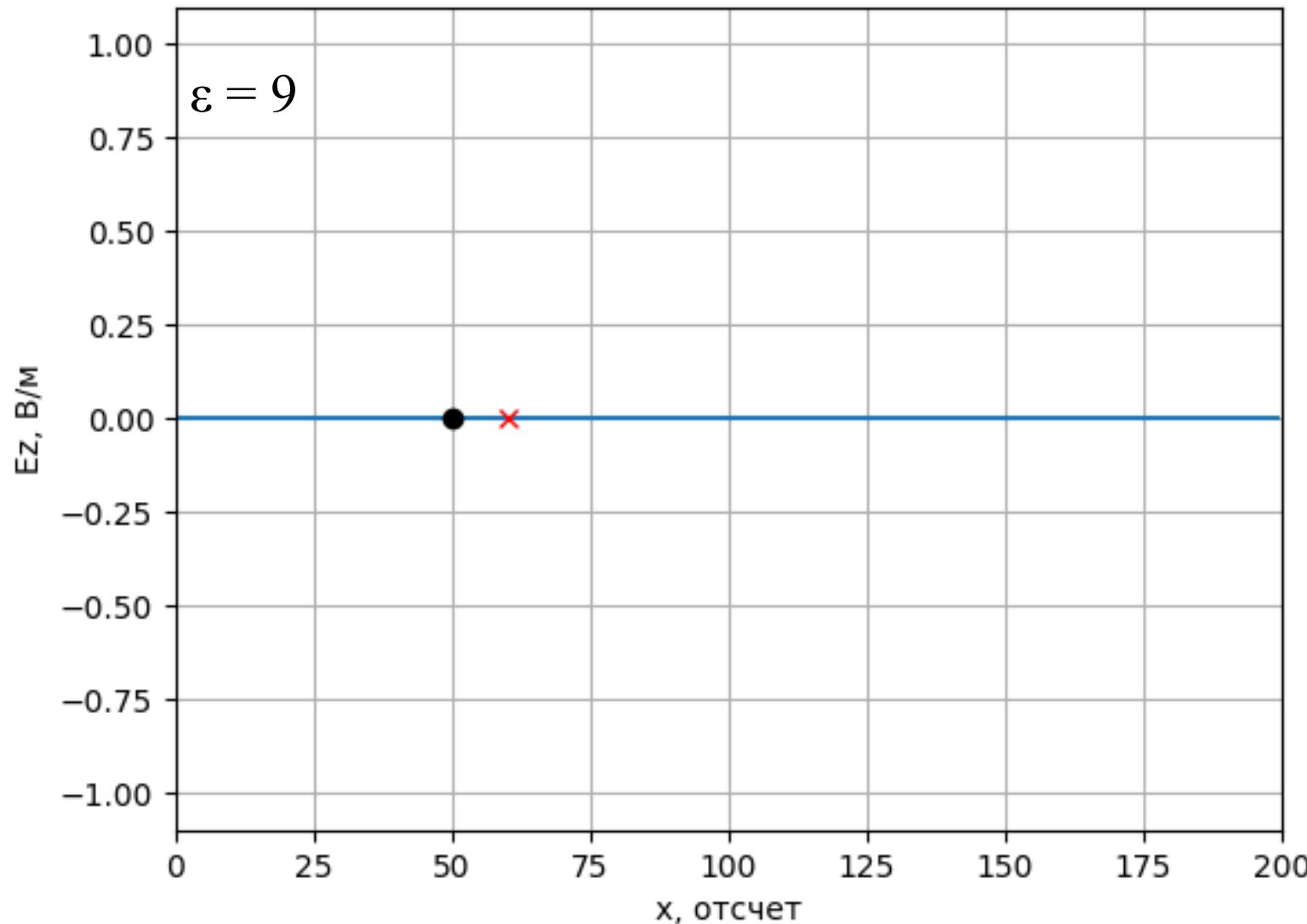
$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{Z_0} E_{z,\text{пад}}^q[0]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_{z,\text{пад}}^{q+1/2}[-1/2]$$

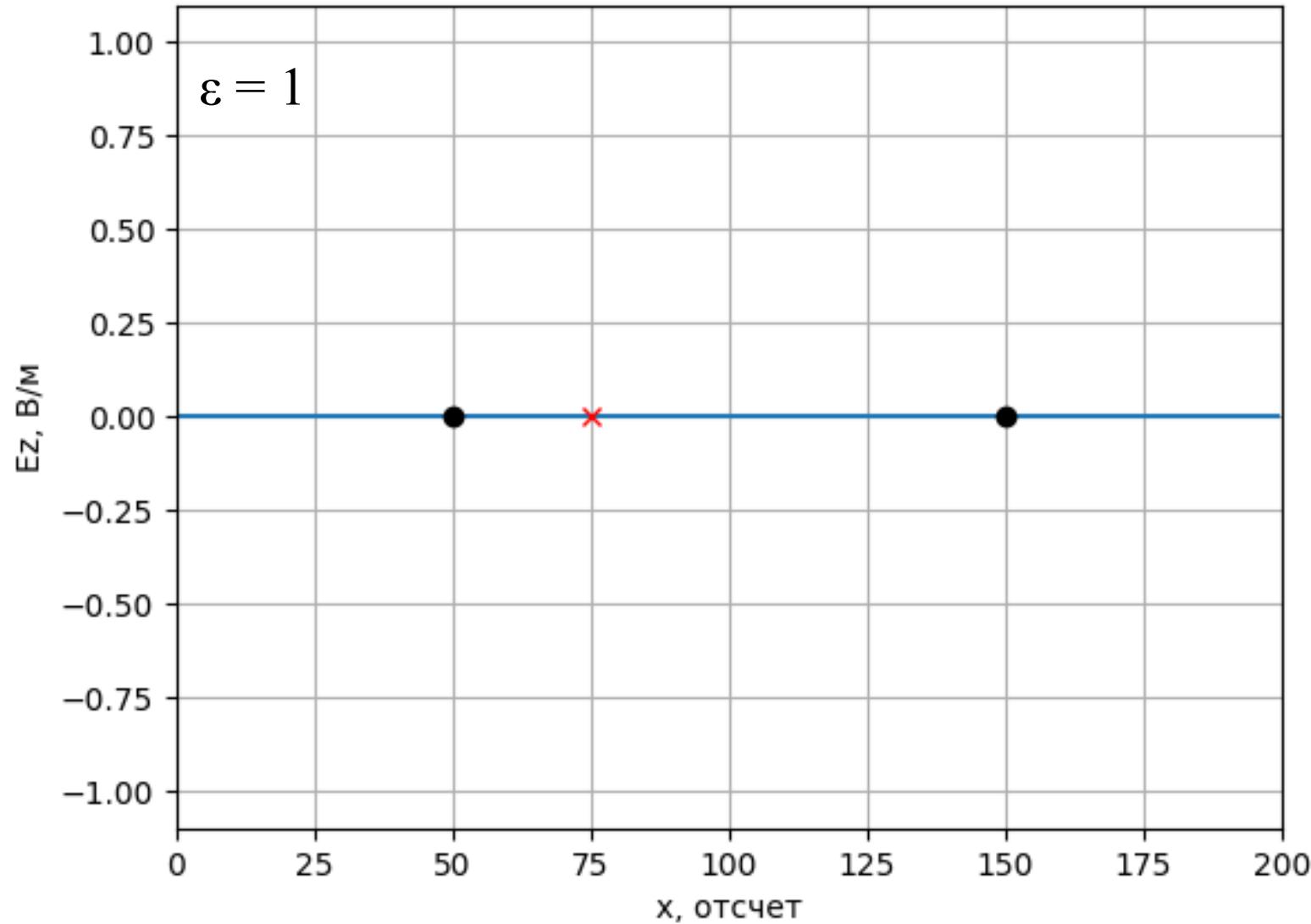
Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSF (fdtd_tfsf_heterogen.py)



с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd_tfsf_medium_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss_pec.py)

