

# «Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

# **Метод полного поля / рассеянного поля (Total-Field / Scattered-Field, TF/SF)**

# Метод Total-Field / Scattered-Field

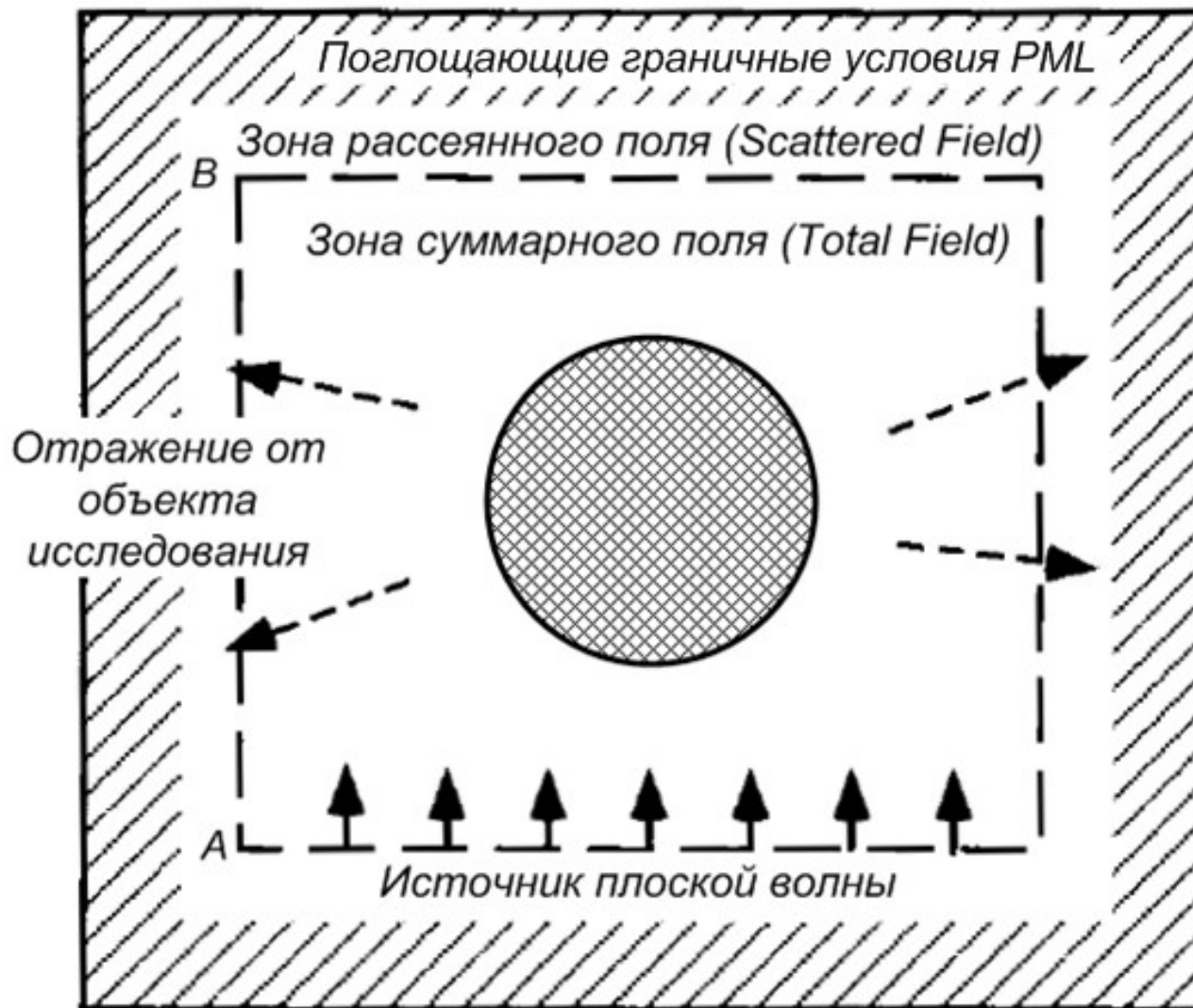
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{пад}}$  могут быть рассчитаны аналитически в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{расс}}$  изначально не известны. Рассчитываются с помощью метода FDTD.

# Метод Total-Field / Scattered-Field

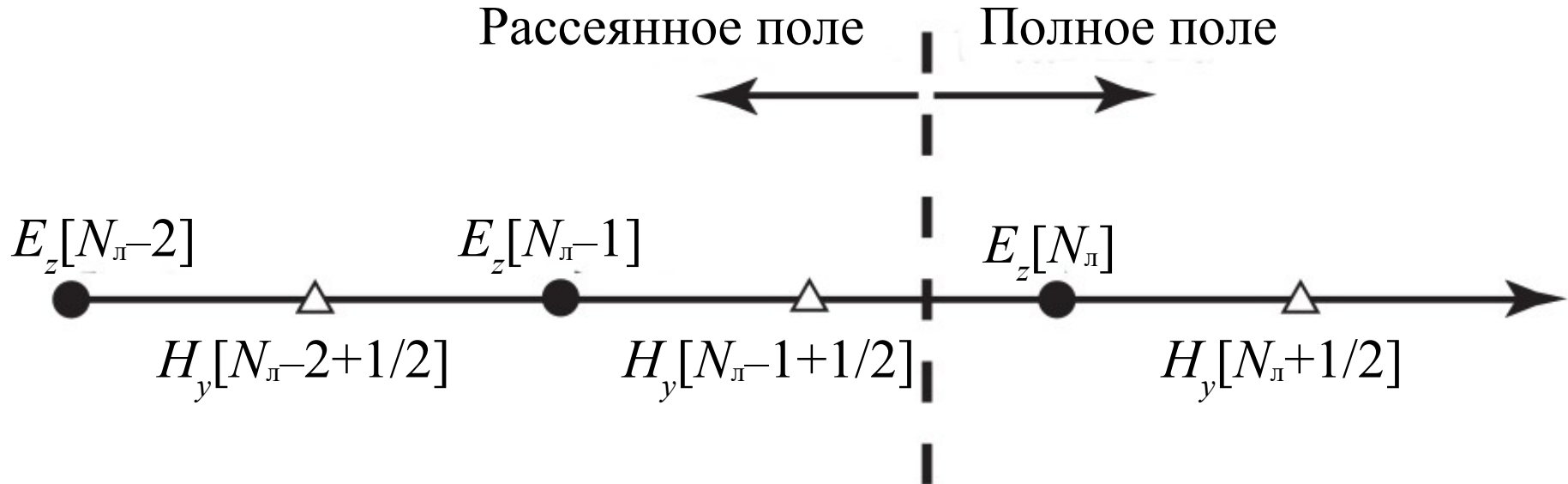


# Метод Total-Field / Scattered-Field. <sup>5</sup>

## Левая граница

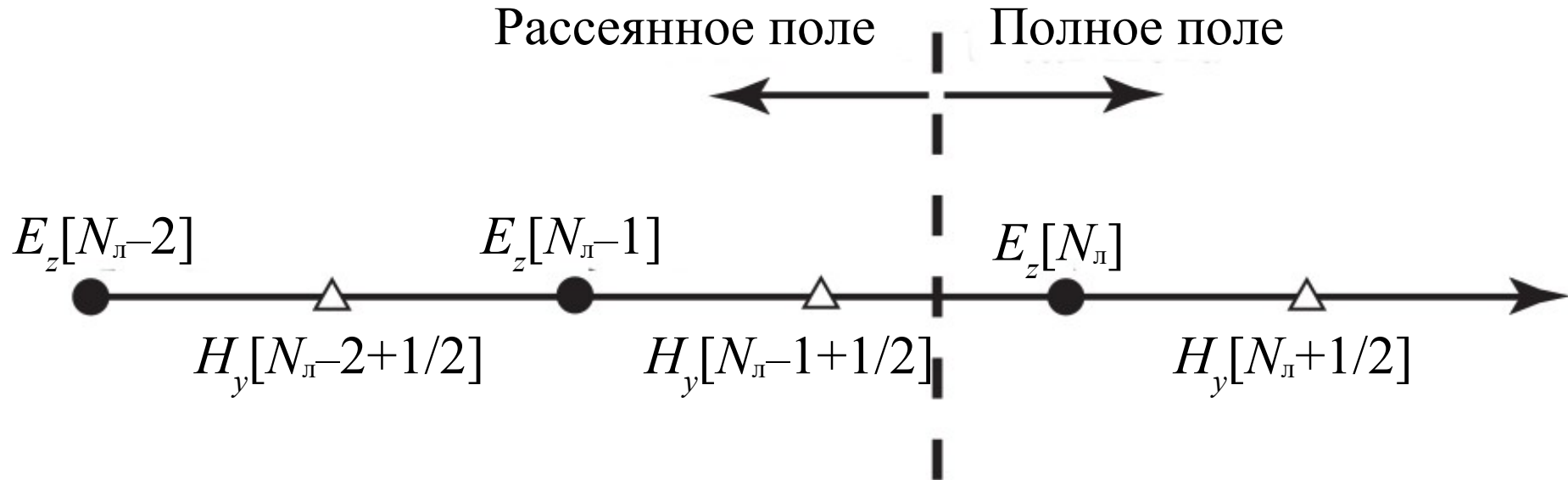
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



# Метод Total-Field / Scattered-Field. <sup>6</sup>

## Левая граница



$H_y[N_{\text{л}} - 1 + 1/2] = H_y[N_{\text{л}} - 1/2]$  — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N_{\text{л}}]$  — первая ячейка в области полного поля.

# Метод Total-Field / Scattered-Field

**Важно!** Только рассеянное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области полного поля

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля  $E_z$

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{ПОЛН.}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} \right)$$



# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке  $(N - 1/2)\Delta x$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} &= \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{\left\{ H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + H_{y \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right\}}^{\text{полн.}} \right)
 \end{aligned}$$

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{ПОЛН.}} + \\
 & + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{ПОЛН.}} - \overbrace{\left( H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + \left( -\frac{1}{W} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right) \right)}^{\text{ПОЛН.}} \right)
 \end{aligned}$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^q[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2] - H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left| \quad \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$


---

Для свободного пространства и если  $S_c = 1$ :


$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

# Поле на левой границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} \left( \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} - \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}-1]}^{\text{расс.}} \right)$$

проблема



# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} + \\
 & + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( \overbrace{\left( \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} - \overbrace{E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]}^{\text{пад.}} \right)}^{\text{расс.}} - \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}-1]}^{\text{расс.}} \right)
 \end{aligned}$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}}-1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

или

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{S_c}{W_0 \mu} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

16

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}}-1/2] + \frac{1}{W_0} (E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}}-1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{1}{W_0} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$



# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

17

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field

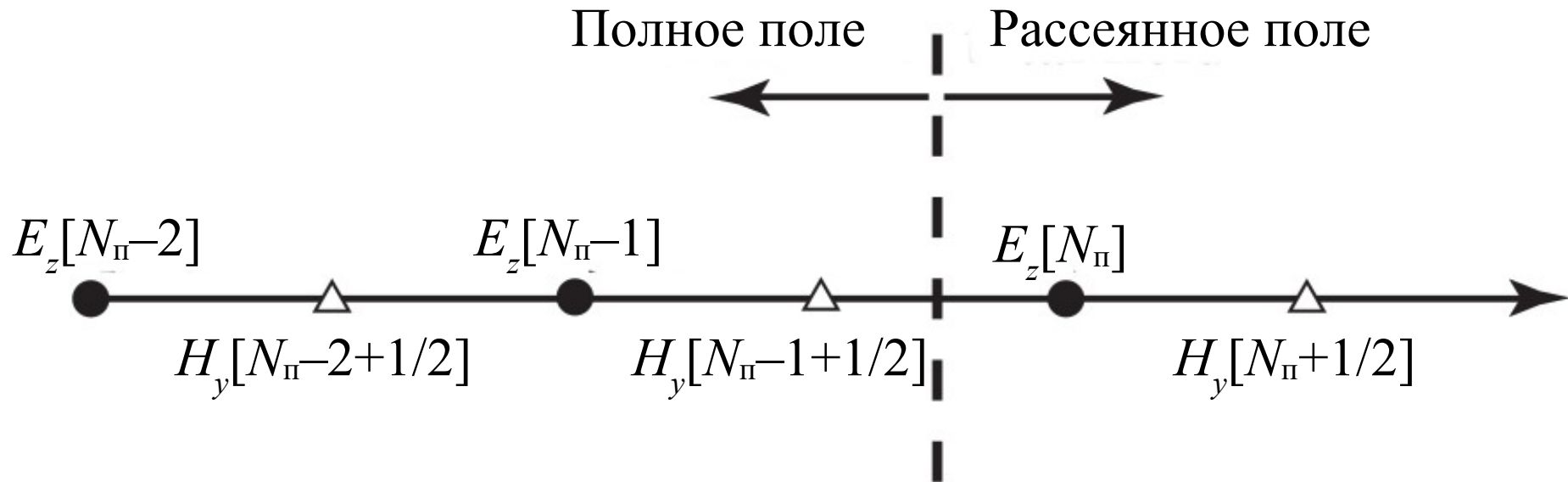
## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2] - \frac{S_c}{W_0 \mu} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field.

## Правая граница



$H_y[N_\pi - 1 + 1/2] = H_y[N_\pi - 1/2]$  — последняя ячейка в области  
полного поля.

$E_z[N_\pi]$  — первая ячейка в области рассеянного поля.

# Total-Field / Scattered-Field.

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field.

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2] + \frac{S_c}{W_0 \mu} E_{z \text{ пад}}^q[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_{z \text{ пад}}^{q+1/2}[N_{\Pi}-1/2]$$

# Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий  $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени  $q = [0...maxTime - 1]$ :

Цикл по пространству  $m = [0...maxSize - 2]$ :

Расчет  $H_y^{q+1/2}$

**Ввод поля**  $H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^q[N_{\text{л}}]$

**Ввод поля**  $H_y^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^q[N_{\text{п}}]$

Цикл по пространству  $m = [1...maxSize - 1]$ :

Расчет  $E_z^{q+1}$

**Ввод поля**  $E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$

**Ввод поля**  $E_z^{q+1}[N_{\text{п}}] \leftarrow \dots E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2]$

Вывод результатов

Конец

# Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

# Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$



# Одномерное волновое уравнение

28

$f$  — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

# Решение одномерного волнового уравнения

29

$f(\xi)$  — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$  дважды дифференцируема
- $\xi$  можно заменить на  $t \pm x / v$   
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

# Гауссов импульс

$$f(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2}$$

# Гауссов импульс в дискретной форме

31

Делаем замену  $t$  на  $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left( q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left( q - \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

# Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{W} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{W} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

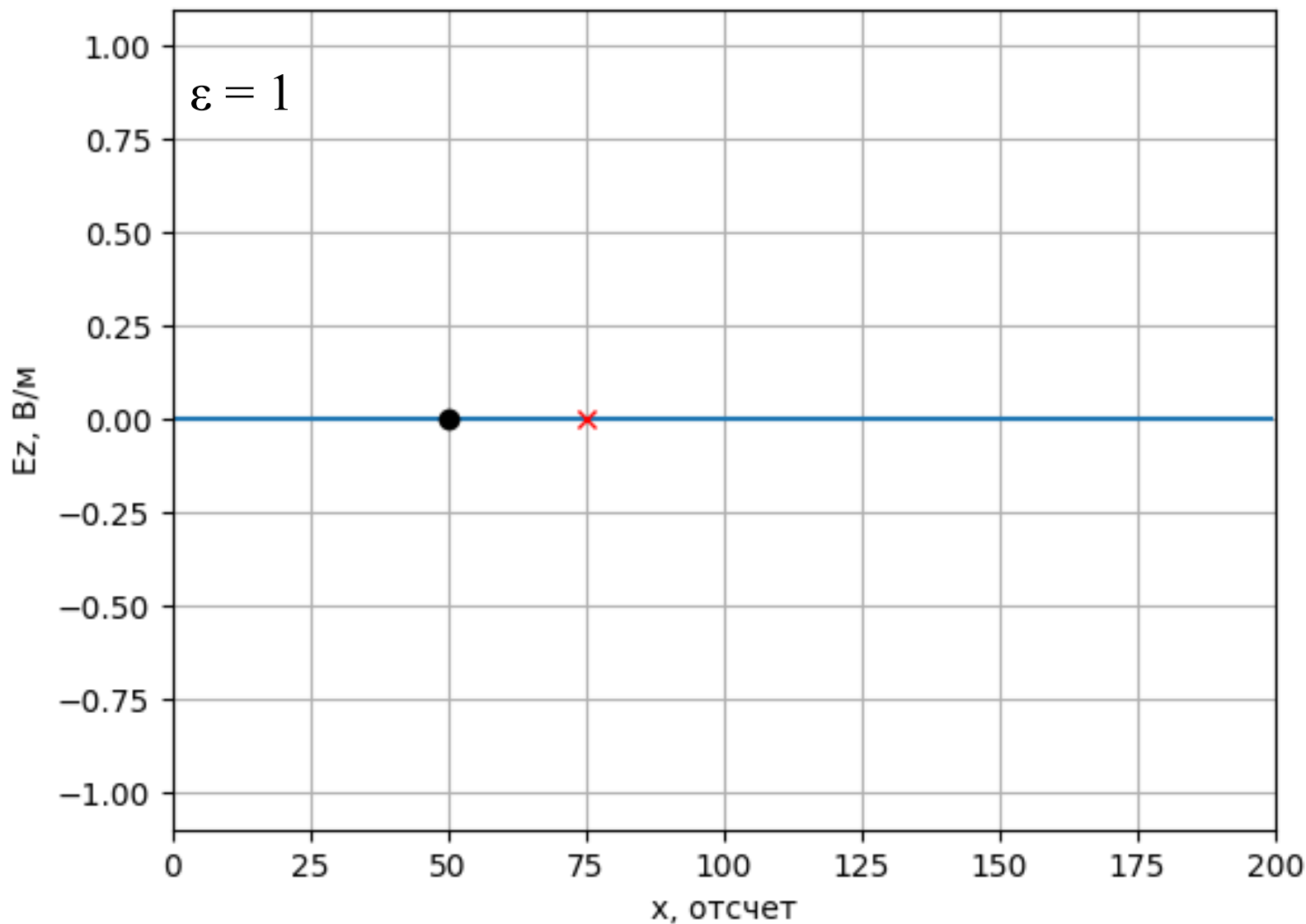
Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{W_0} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{W_0} e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

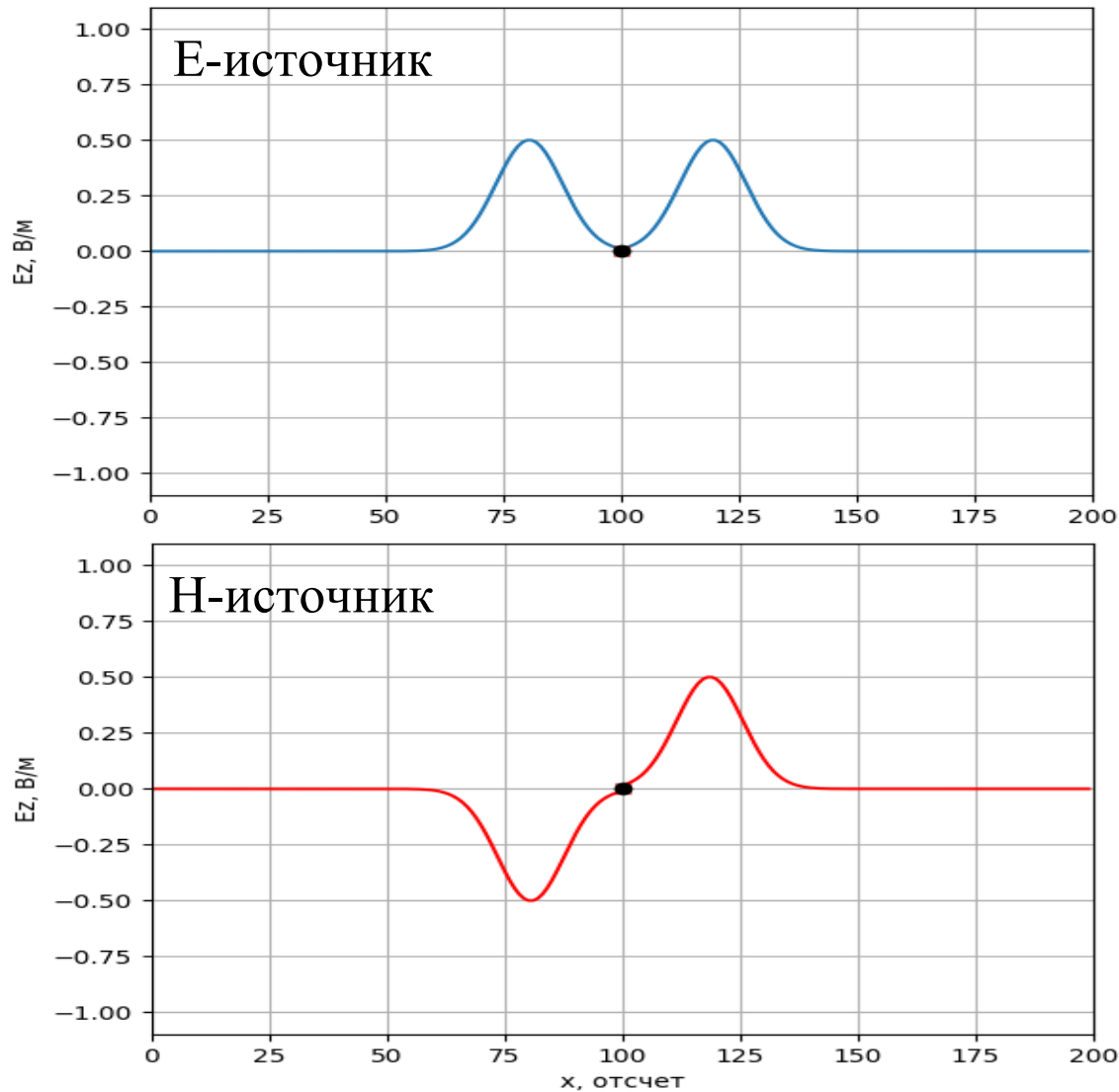
# **Демонстрация метода Total Field / Scattered Field**

# Демонстрация метода TFSF (fdtd\_tfsf\_gauss.py)





# Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



# Поле на границе

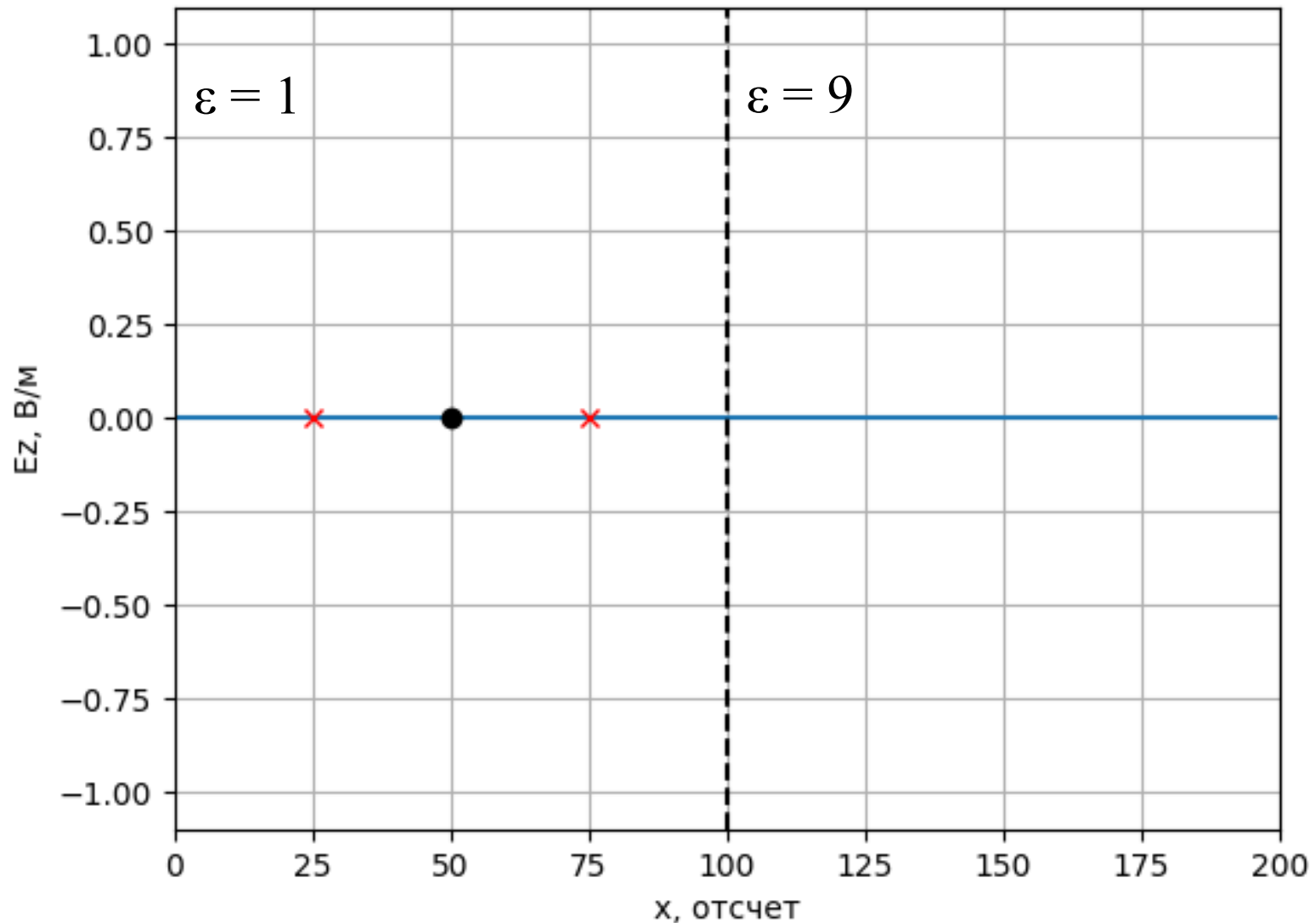
## Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника  $x = 0$  соответствует  $N$ -й ячейке

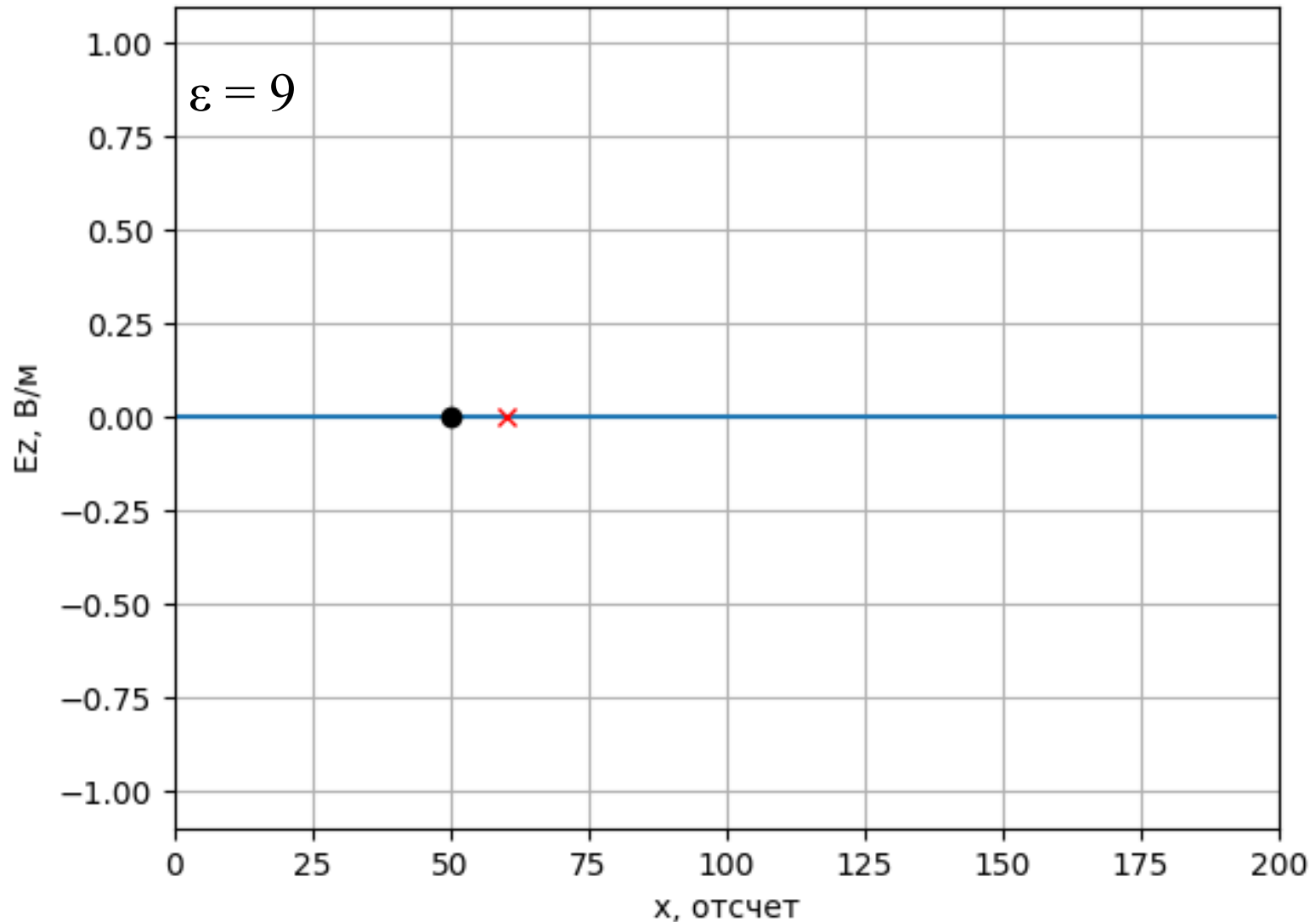
$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_{z.\text{пад}}^q[0]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[-1/2]$$

# Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSF (fdtd\_tfsf\_heterogen.py)

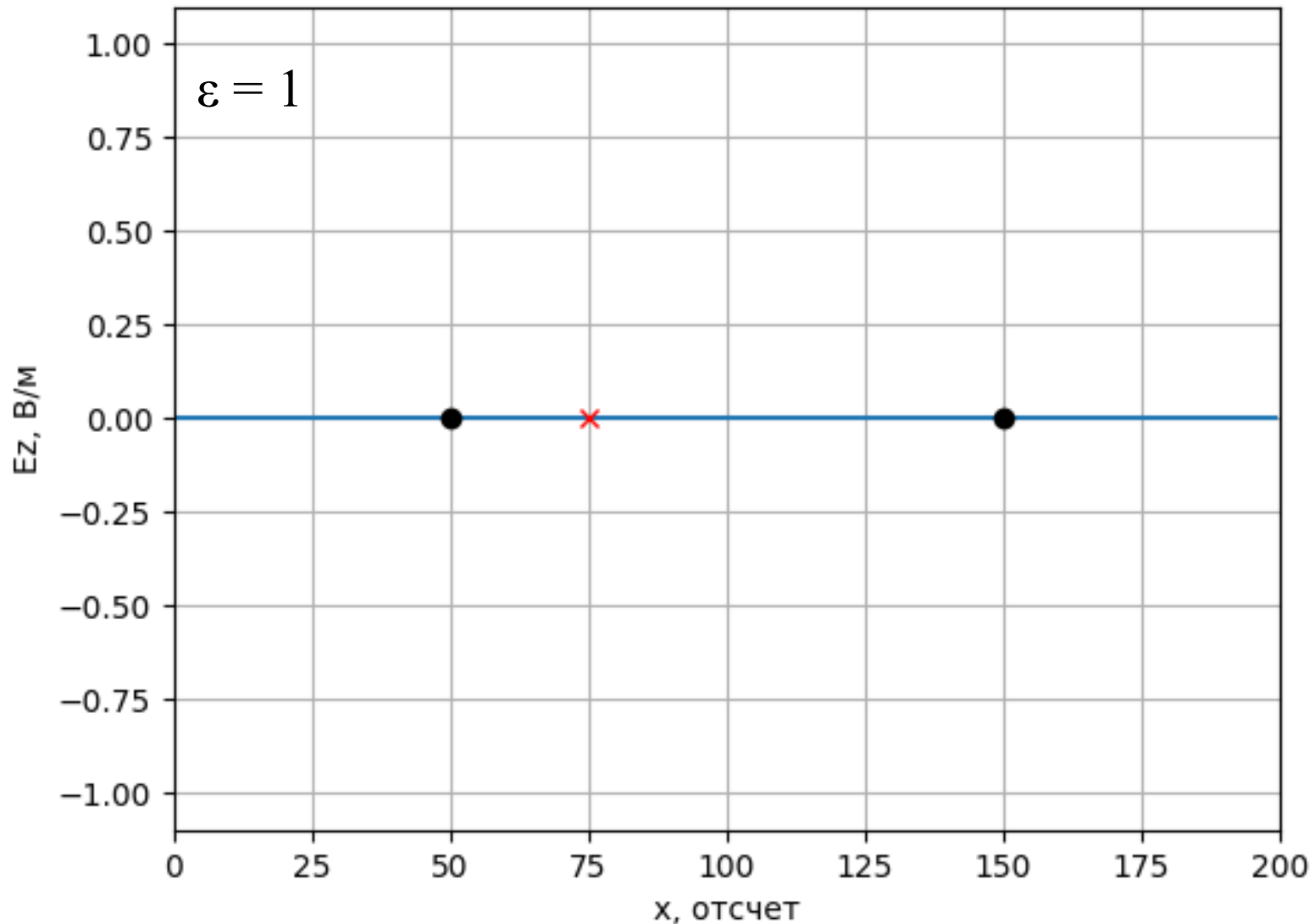


# Метод Total Field / Scattered Field с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd\_tfsf\_medium\_gauss.py)



# Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd\_tfsf\_left\_right\_gauss.py)

40



# Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd\_tfsf\_left\_right\_gauss\_pes.py)

41

