Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

# «Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

# Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

# Типы поглощающих граничных условий



Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

# Линейные операторы

Оператор $A$ называются линейным,
если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

# Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов $A$ и $B$ выполняются условия:

$$(A + B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$$

$$(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$$

# Волновое уравнение в одномерном случае



$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_z = 0$$

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z=0$$

# Уравнения адвекции

Любая функция $E_z$, которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

I. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$E_z\left(t+x/v\right)=E_z\left(t+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,x\right)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Сделаем замену $$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\, x$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\, x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}=0$$

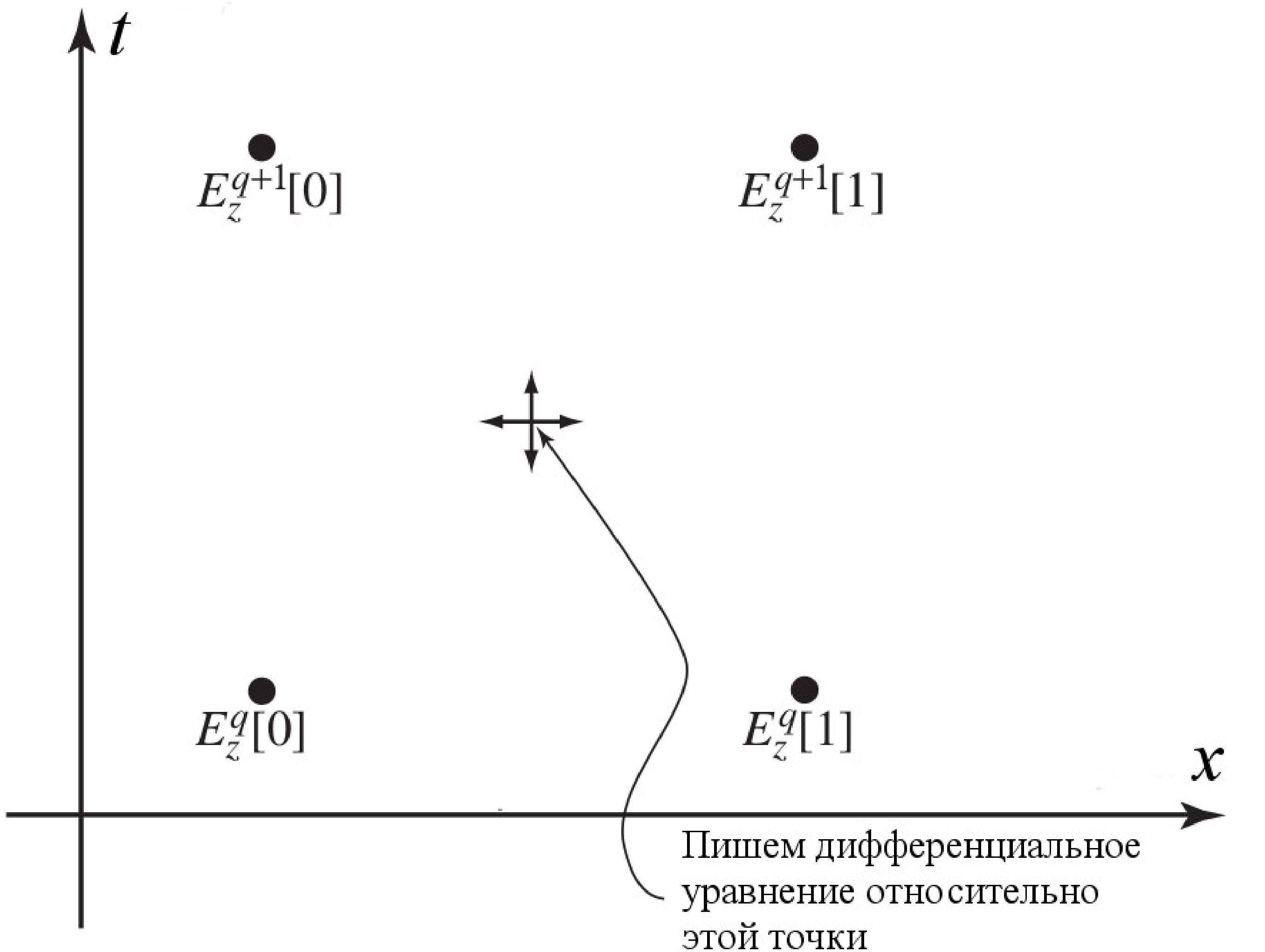
$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}+\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}=0$$

$$2\,\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

# Поглощающие граничные условия первой степени

# Поглощающие граничные условия первой степени для левой границы



Запишем производные в уравнении адвекции через центральную конечно-разностную схему

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} =$$

???

$$=\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{E_z^{q+1}[1/2]-E_z^{q}[1/2]}{\Delta_t}$$

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^{q}[1/2] \approx \frac{E_z^{q}[0] + E_z^{q}[1]}{2}$$

$$\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\,(q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx$$

$$\approx \frac{\dfrac{E_z^{q+1}[1] + E_z^{q}[1]}{2} - \dfrac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q}[0]}{2}}{\Delta_x}$$

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[1]+E_z^{q}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q}[0]}{2}}{\Delta_x}-$$

$$-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}=0$$

# Поглощающие граничные условия первой степени для левой границы

Из полученного уравнения выражаем $E_z^{q+1}[0]$ и учитываем, что:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}, \qquad S_c=\frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x}$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[0]=E_z^q[1]+\frac{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-1}{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}+1}\left(E_z^{q+1}[1]-E_z^q[0]\right)}$$

# Поглощающие граничные условия первой степени для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - 1}{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + 1}\left(E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M]\right)$$

# Поглощающие граничные условия первой степени

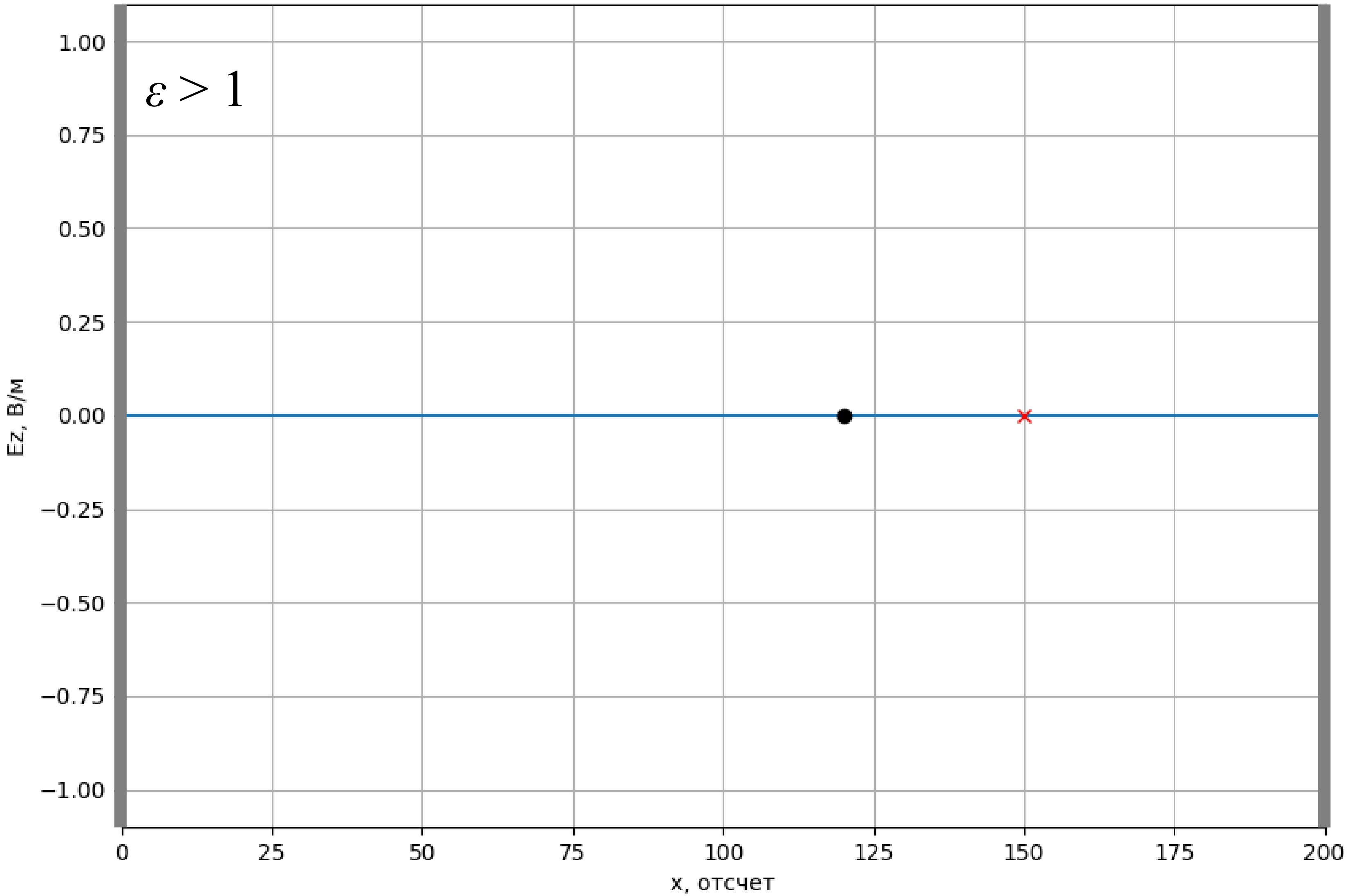
Для свободного пространства и $S_c = 1$ выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий (ABC) первой степени (fdtd_abc_first.py)





# Формулировка граничных условий ABC первой степени с использованием дискретных операторов

Введем несколько новых операторов:

$I$ — оператор идентичности.

$$I\,E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

$s_x^w$ — оператор пространственного сдвига.

$$s_x^w\,E_z^q[m] = E_z^q[m+w]$$

$s_t^w$ — оператор временно́го сдвига.

$$s_t^w\,E_z^q[m] = E_z^{q+w}[m]$$

# Свойства линейных операторов

Введенные операторы коммутативны
(можно менять порядок их применения)

$$s_x^w s_t^w = s_t^w s_x^w$$

$$I s_x^w = s_x^w$$

$$I s_t^w = s_t^w$$

$$I I = I$$

# Уравнения адвекции

I. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

# Использование дискретных операторов для граничных условий ABC первого порядка

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx$$

$$\approx\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}$$

# Использование дискретных операторов для граничных условий ABC первого порядка

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q+1}[m+1]}{2}=$$

$$=\frac{I\,E_z^{q+1}[m]+s_x^1 E_z^{q+1}[m]}{2}=$$

$$=\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)E_z^{q+1}[m]$$

# Использование дискретных операторов для граничных условий ABC первого порядка



Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q}[m]}{2}=$$

$$=\frac{I\,E_z^{q+1}[m]+s_t^{-1}\,E_z^{q+1}[m]}{2}=$$

$$=\left(\frac{I+s_t^{-1}}{2}\right)E_z^{q+1}[m]$$

# Поглощающие граничные условия с использованием дискретных операторов

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx \frac{\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)E_z^{q+1}[0]-\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)s_t^{-1}E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t}=$$

$$=\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)E_z^{q+1}[0]=$$

$$=\frac{1}{2\Delta_t}\left(I-s_t^{-1}+s_x^1-s_x^1\cdot s_t^{-1}\right)E_z^{q+1}[0]=$$

$$=\frac{1}{2\Delta_t}\left(E_z^{q+1}[0]-E_z^{q}[0]+E_z^{q+1}[1]-E_z^{q}[1]\right)$$

# Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{\Delta_x/2,(q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$

$$\approx \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_x}\left(-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1} \cdot s_x^1\right) E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_x}\left(-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] + E_z^q[1]\right)$$

# Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи



Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для $E_z^{q+1}[0]$ даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - 1}{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + 1}\left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0]\right)$$

# Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition — ABC) второй степени

# Поглощающие граничные условия второй степени

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z=0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае



Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}\times\right.$$

$$\left.\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}\right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно $E_z^{q+1}[0]$, то мы получим

$$E_z^{q+1}[0] = \underbrace{\frac{-1}{1/S'_c + 2 + S'_c}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{S'_c} - 2 + S'_c \right)}_{k_2} \left( E_z^{q+1}[2] + \underline{E_z^{q-1}[0]} \right) + \right.$$

$$+ \underbrace{2\left( S'_c - \frac{1}{S'_c} \right)}_{k_3} \left( \underline{E_z^{q}[0]} + \underline{E_z^{q}[2]} - E_z^{q+1}[1] - \underline{E_z^{q-1}[1]} \right) -$$

$$\left. - \underbrace{4\left( \frac{1}{S'_c} + S'_c \right)}_{k_4} \underline{E_z^{q}[1]} \right\} - \underline{E_z^{q-1}[2]}$$

# Поглощающее граничное условие второй степени



В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

# Поглощающее граничное условие второй степени



Для свободного пространства и $S_c = 1$ граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$
$$1 \rightarrow M-1$$
$$2 \rightarrow M-2$$

В индексации Python:

$$0 \rightarrow -1$$
$$1 \rightarrow -2$$
$$2 \rightarrow -3$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий (ABC) второй степени (fdtd_abc_second.py)