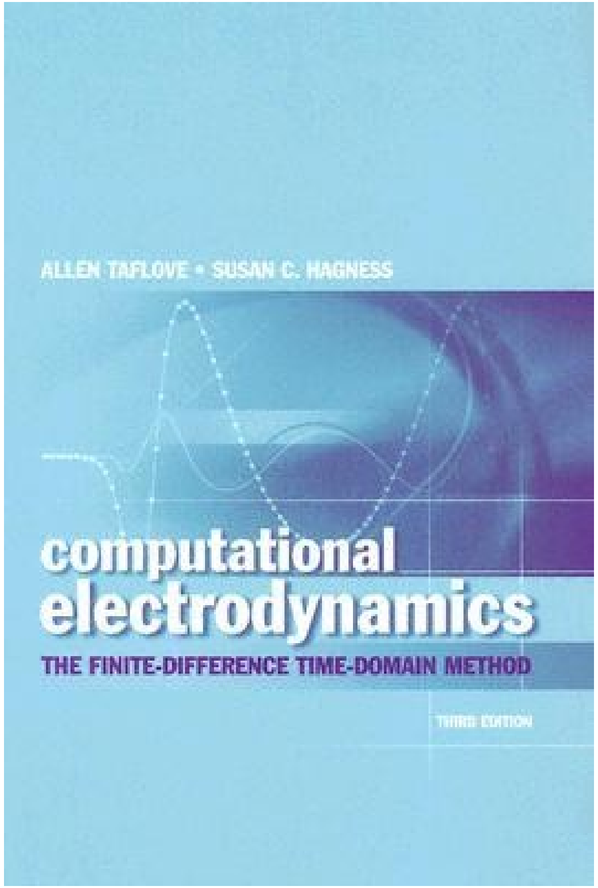
Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

Метод конечных разностей во временной области (FDTD)

Литература



Allen Taflove,
Susan C. Hagness

Computational Electrodynamics:
The Finite-Difference Time-Domain
Method

Литература

John B. Schneider.
Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method

https://eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/

Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

https://github.com/Jenyay/modelling

Численный расчет производной функции

Производная функции

$$f'(x_0) = ???$$

Производная функции

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Правая конечно-разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

Ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},x_0<\xi<x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением δ

$$x = x_0 + \delta$$

$$f\left(x_0 + \delta\right) = f\left(x_0\right) + \delta f'\left(x_0\right) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''\left(x_0\right) + \frac{1}{3!}\delta^3 f'''\left(x_0\right) + \ldots,$$

Правая конечно-разностная схема

Выражаем $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} - \frac{1}{2}\delta f''(x_0) - \frac{1}{6}\delta^2 f'''(x_0) - \ldots,$$

$$O(\delta) = -\left(\frac{1}{2}\delta f''(x_0) + \ldots\right)$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm \frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \ldots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \ldots,$$

Вычтем из первого выражения второе:

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\ldots,$$

Вычтем из первого выражения второе:

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\ldots,$$

Поделим левую и правую части на δ

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}=f'(x_0)+\frac{1}{3!}\frac{\delta^2}{2^2}f'''(x_0)+\ldots,$$

Центральная конечно-разностная схема

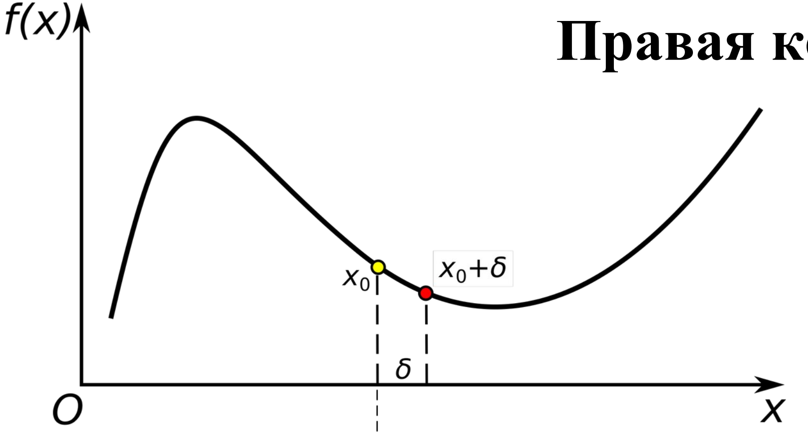
$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2)$$

Отбрасываем $O(\delta^2)$

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}}$$

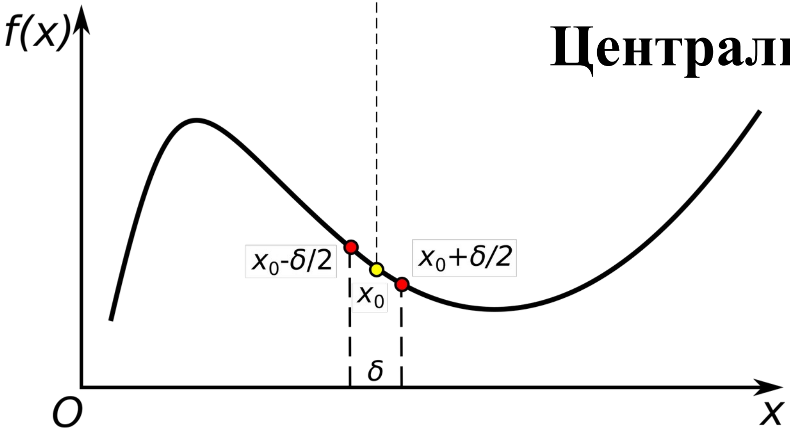
Погрешность пропорциональна δ^2.

Конечно-разностные схемы



Правая конечно-разностная схема

Погрешность расчета $f\,'(x_0)$ пропорциональна δ.



Центральная конечно-разностная схема

Погрешность расчета $f\,'(x_0)$ пропорциональна δ^2.

Разностная схема — конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной/интегральной задаче, описывающей математическую модель.

Примечание: Разностная схема получается применением методов дискретизации уравнений, содержащих производные по переменным фазового пространства (времени, пространственным координатам и т.п.). Для корректного описания решения дифференциальной/интегральной задачи разностная схема должна обладать свойствами сходимости, аппроксимации, устойчивости, консервативности.

ГОСТ Р 57188-2016. Численное моделирование физических процессов. Термины и определения.

Сходимость решения — стремление значений решения дискретной модели к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (например, шага интегрирования).

Порядок аппроксимации — показатель степени уменьшения значения ошибки дискретизации при измельчении интервалов дискретизации переменной фазового пространства.

Консервативность численного метода — выполнение дискретного аналога закона сохранения для любого элементарного объема в любой части расчетной области.

ГОСТ Р 57188-2016. Численное моделирование физических процессов. Термины и определения.