Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

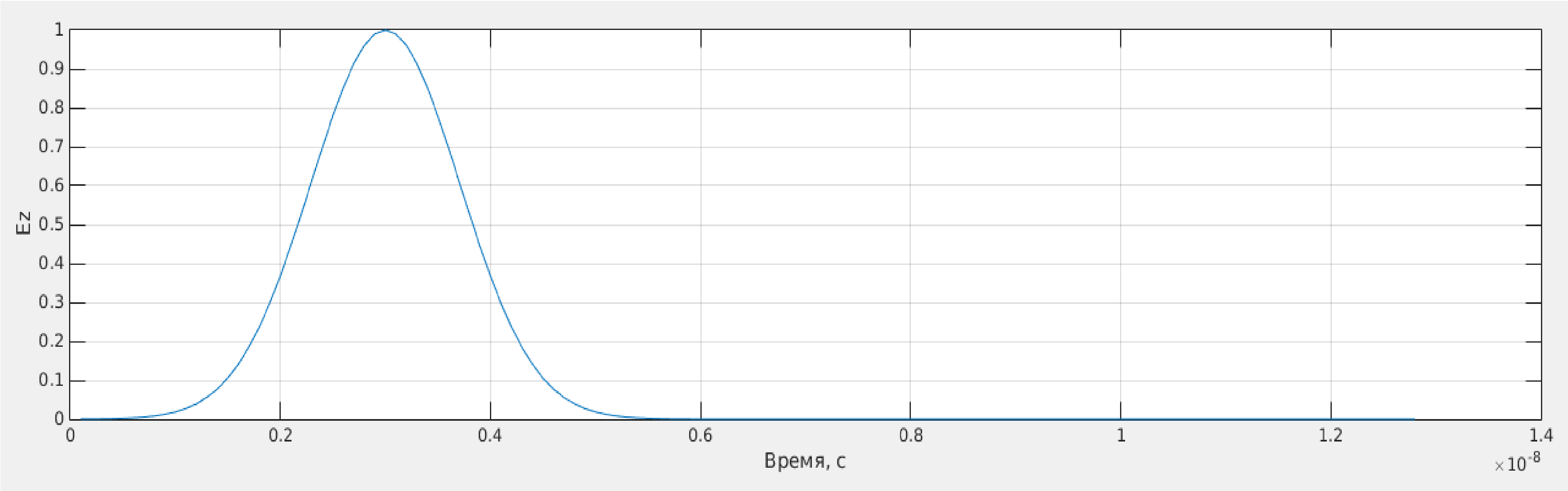
«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Источники возбуждения

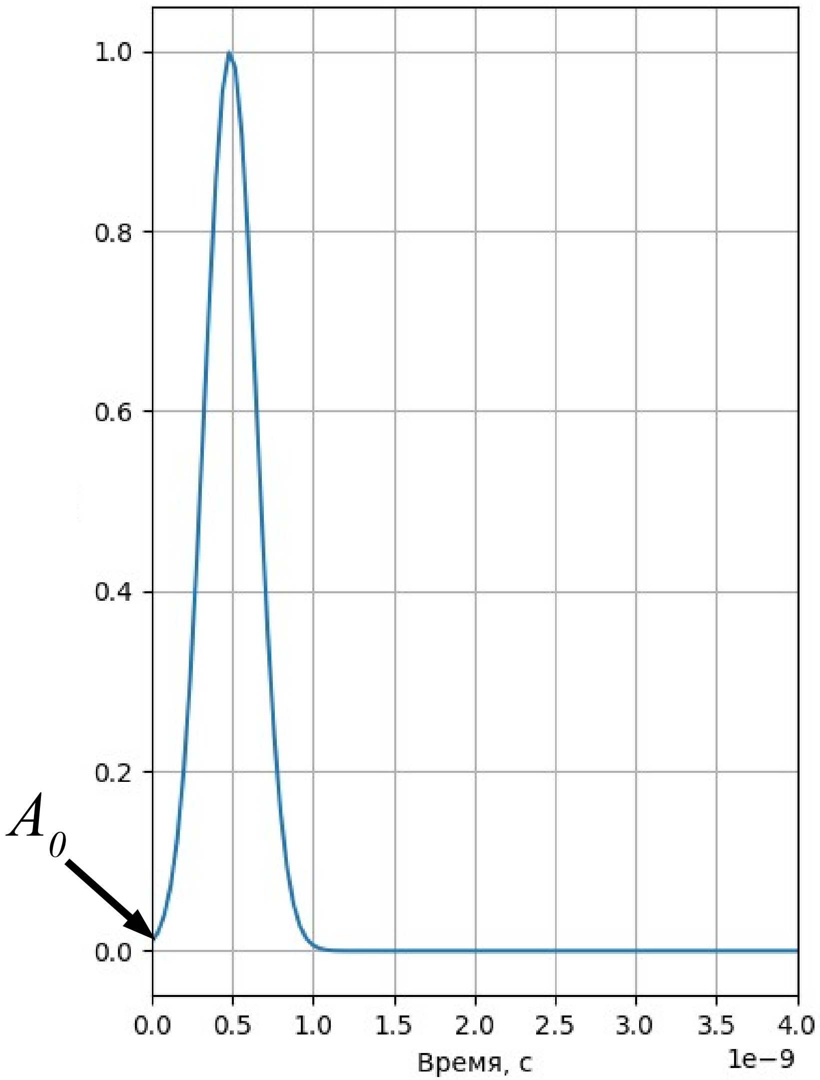
Гауссов импульс

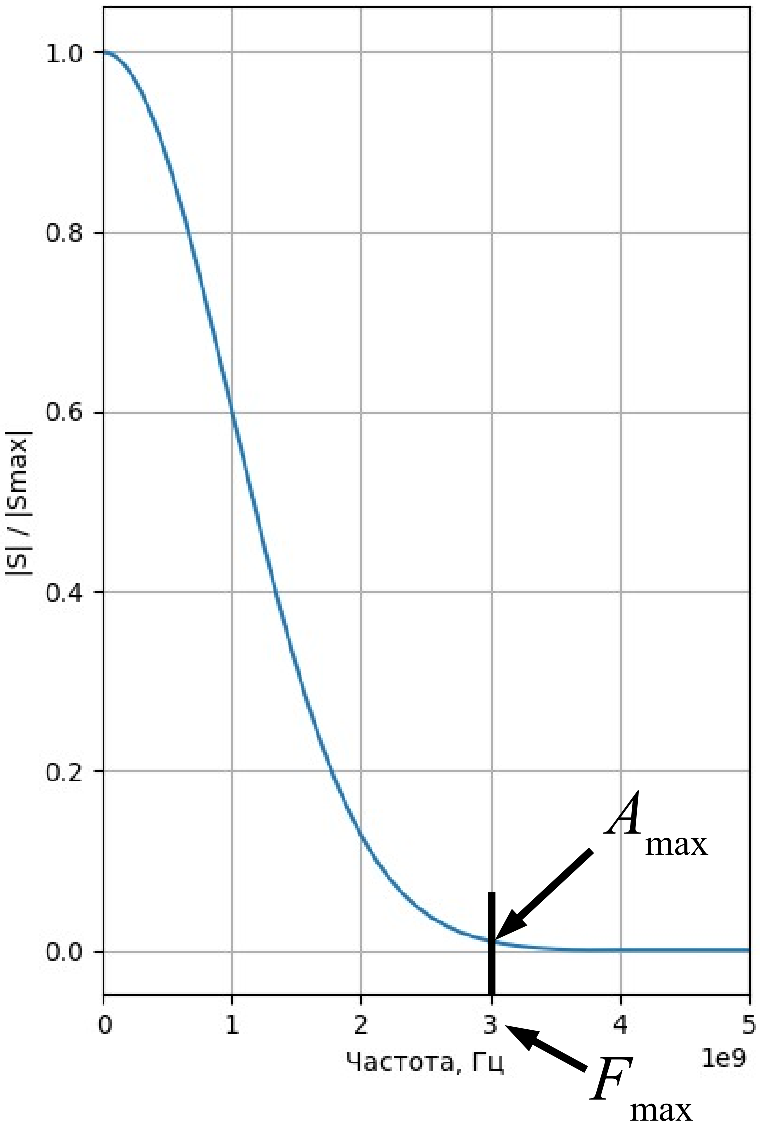
Гауссов импульс

$$f_g(t)=A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр гауссова импульса





Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $A_0 > 1$— уровень ослабления сигнала в момент времени $t = 0$.
- $F_{\max}$ — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$— уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$.

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln\left(A_{\max}\right)}}{\pi F_{\max}} \qquad d_g = w_g \sqrt{\ln\left(A_0\right)}$$

Демонстрация спектра гауссова импульса

spectrum_gauss.py

Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

$$E^q[m] = e^{-\left(\frac{\left(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right) - N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

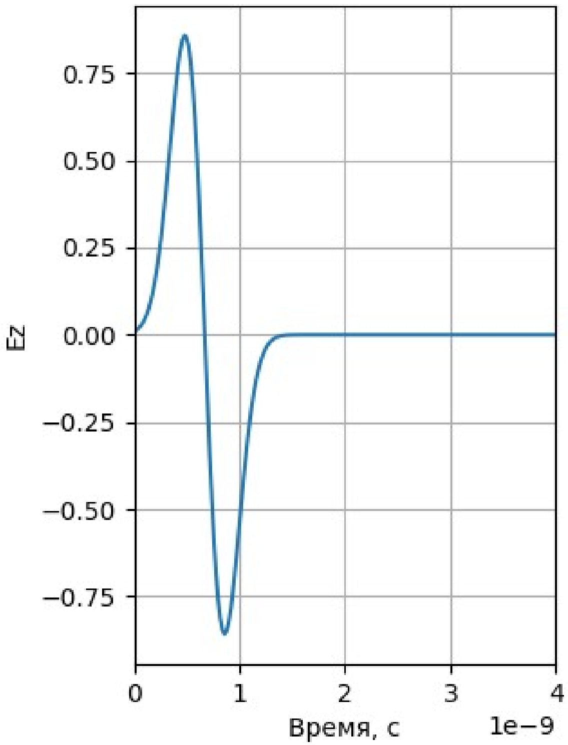
$$N_{wg} = w_g / \Delta_t$$

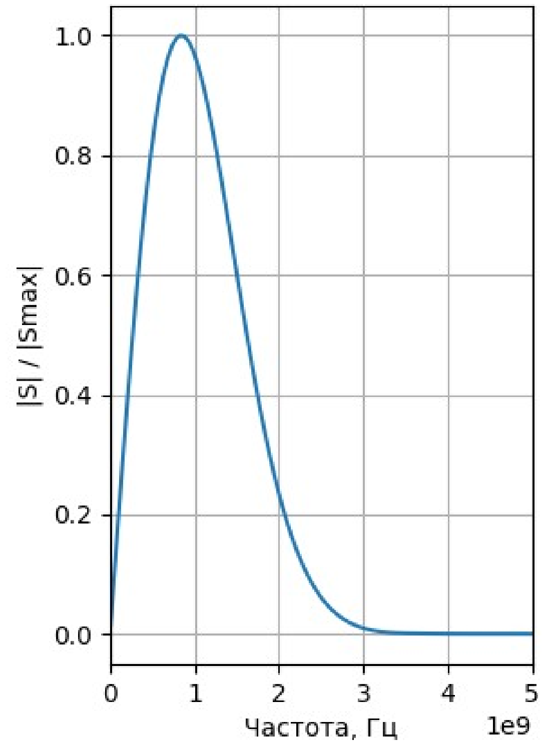
$$N_{dg} = d_g / \Delta_t$$

Дифференцированный гауссов импульс

Дифференцированный гауссов импульс

$$f_g(t) = -2A_m\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$





Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $F_{\max}$ — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$ и ослабление в момент времени $t = 0$.

$$f_g(t) = -2A_m\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(5.5A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g\sqrt{\ln\left(2.5A_{max}\sqrt{\ln(2.5A_{max})}\right)}$$

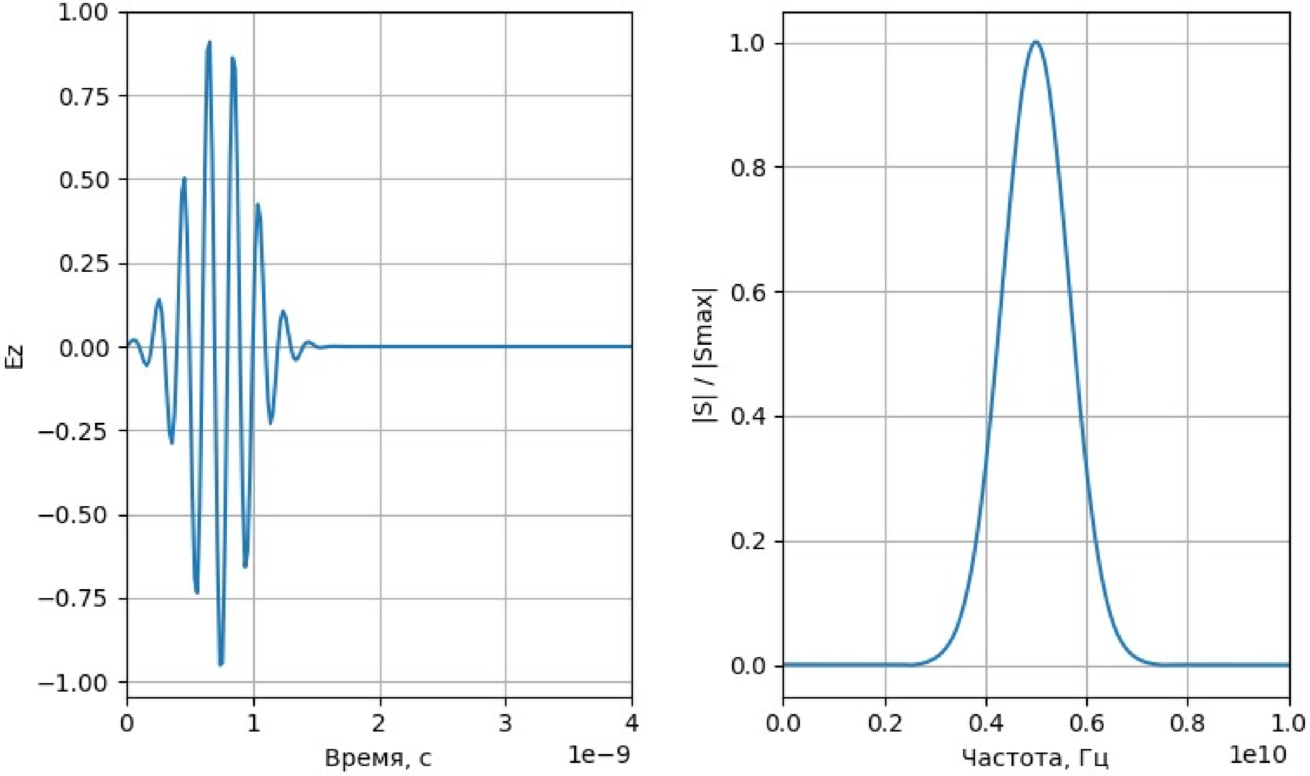
Демонстрация спектра дифференцированного гауссова импульса

spectrum_gauss_diff.py

Модулированный гауссов импульс

Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t)\, e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- f_0 — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$.
- A_0 — ослабление огибающей сигнала в момент времени $t = 0$.
- ΔF — ширина спектра по уровню ослабления $A_{\max}$.

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t)\, e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = 2\sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F) \qquad d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

Демонстрация спектра модулированного гауссова импульса

spectrum_gauss_mod.py

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$ (для одномерного случая)

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

В выражении для модулированного гауссова импульса заменим t на $t \pm x / v$

$$E(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$E(t, x) = \sin\left(2\pi f_0 \left(t \pm \frac{x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$$\lambda_0 = N_{\lambda_0} \Delta x, \qquad w_g = N_{wg} \Delta_t, \qquad d_g = N_{dg} \Delta_t,$$

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c},$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{N_{\lambda_0} \Delta x} = \frac{S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t}$$

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$$E^{q}[m]=\sin\left(\frac{2\pi S_c}{N_{\lambda_0}\Delta_t}\left(q\Delta_t\pm\frac{m\Delta_t\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\right)\right)e^{-\left(\frac{q\Delta_t\pm\frac{m\Delta_t\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}-N_{dg}\Delta_t}{N_{wg}\Delta_t}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$E^{q}[m]=\sin\left(\frac{2\pi}{N_{\lambda_0}}\left(qS_c\pm m\sqrt{\varepsilon\mu}\right)\right)e^{-\left(\frac{q\pm\frac{m\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}-N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

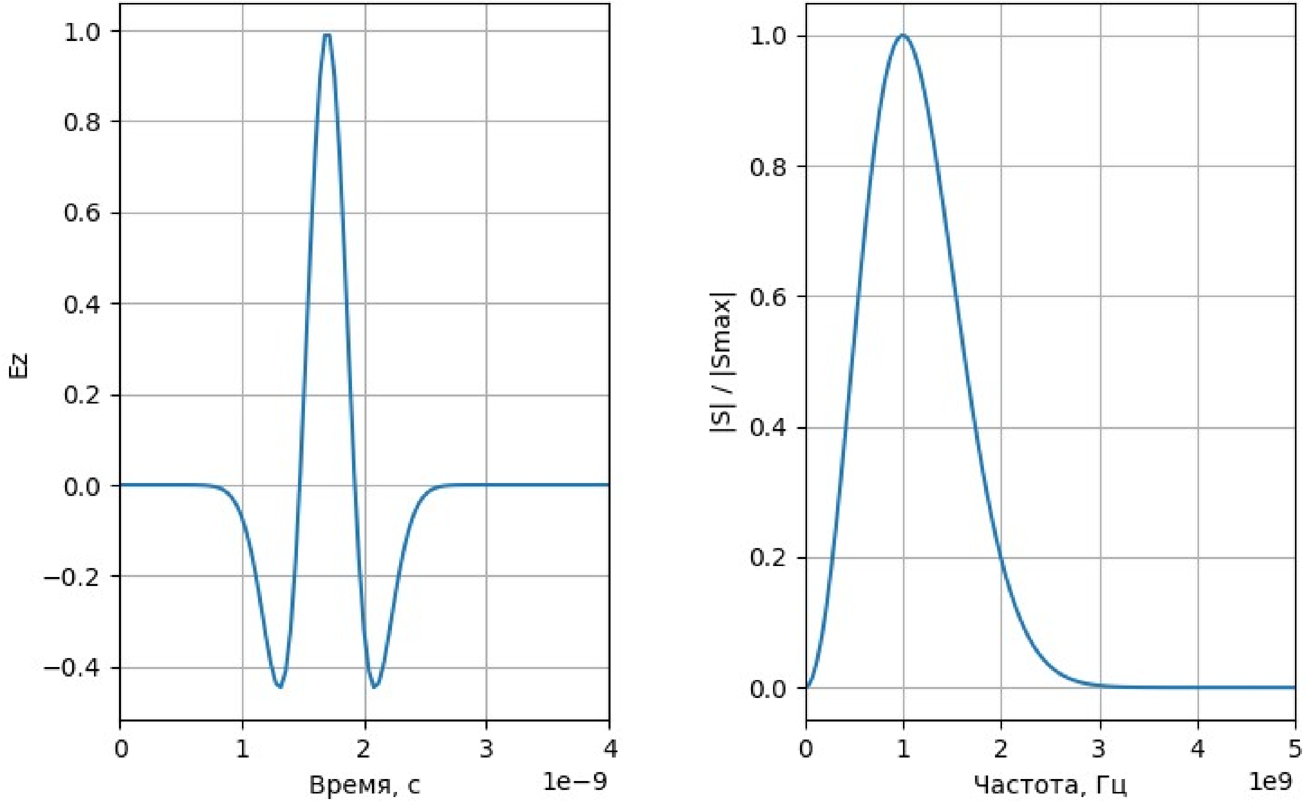
Демонстрация модулированного гауссова импульса при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_medium_gauss_mod.py

Вейвлет Рикера

Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- f_P — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\left\{\pi f_p \left[t - d_r\right]\right\}^2\right) e^{-\left\{\pi f_p \left[t - d_r\right]\right\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

M_d — коэффициент задержки

Демонстрация спектра вейвлета Рикера

spectrum_ricker.py

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c\,\Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right) \exp\left(-\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right)$$

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

В выражении для вейвлета Рикера заменим t на $t \pm x / c$

$$E\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c}=\frac{m\Delta_x}{c}=\frac{m\Delta_t}{S_c}, \qquad f_p=\frac{S_c}{N_p\Delta_t}, \qquad d_r=M_d\frac{1}{f_p}=M_d\frac{N_p\Delta_t}{S_c}$$

$$E^q[m]=\left(1-2\pi^2\left[\frac{S_c q\pm m}{N_p}-M_d\right]^2\right)e^{-\pi^2\left[\frac{S_c q\pm m}{N_p}-M_d\right]^2}$$

Демонстрация вейвлета Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_ricker.py

Уравнение плоской волны для гармонического сигнала в дискретном виде

Гармонический сигнал

$$E(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

или в дискретном виде

$$E(q\Delta_t) = A\cos(\omega q\Delta_t + \varphi_0)$$

Гармонический сигнал в терминах длин волн

Если задана длина волны в виде: $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$, то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$E(q\Delta_t) = A\cos\left(\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q\Delta_t + \varphi_0\right)$$

$$E^q = A\cos\left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \varphi_0\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$E(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$$

$$x = m\Delta_x$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x}\left(q\Delta_t-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}m\Delta_x\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x}\left(q\Delta_t-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}m\Delta_x\right)$$

Вынесем за скобки Δ_x / с

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(q\frac{\Delta_t c}{\Delta_x}-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)=\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$E^q[m] = A\cos\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q - \sqrt{\mu\varepsilon}\, m\right) + \varphi_0\right)$$

Обычно используют:

$$E^q[m] = A\sin\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q - \sqrt{\mu\varepsilon}\, m\right) + \varphi_0\right)$$

Демонстрация гармонического сигнала при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_sin.py
fdtd_tfsf_medium_sin.py

Демонстрация стоячей волны

fdtd_tfsf_sin.py
fdtd_swr.py