Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Моделирование распространения электромагнитной волны в среде с потерями

Закон Ампера для среды с потерями

При $\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0$

$$\mathbf{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$:

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2}$$

После подстановки:

$$\sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$C_{E_z E} = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$C_{E_z H} = \frac{S_c Z_0}{\varepsilon \left(1 + loss\right)}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \underline{C_{E_zE}}\, E_z^q[m] + \underline{C_{E_zH}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

Для случая σ = 0 См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\mathbf{j}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $((m + 1/2)\Delta_x;\ q\Delta_t)$:

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

$$\frac{H_y^q[m+1/2] \approx \dfrac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}}{\begin{array}{l}\sigma_m \dfrac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} + \\ + \mu\mu_0 \dfrac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} = \\ = \dfrac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}\end{array}}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_y^{q-1/2}[m+1/2]+$$

$$+\frac{\dfrac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_y^{q-1/2}[m+1/2]+$$

$$+\frac{\dfrac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2 \mu \mu_0}$$

$$C_{H_y H} = \frac{1 - loss_m}{1 + loss_m}$$

$$C_{H_y E} = \frac{S_c}{\mu Z_0 \left(1 + loss_m\right)}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = \underline{C_{H_y H}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \underline{C_{H_y E}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

Расчет магнитной компоненты поля

Для случая $\sigma_m = 0$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

Геометрия решаемой задачи (fdtd_loss.py)