

**Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)**

---

**«Метод конечных разностей  
во временной области (FDTD)»**

**Метод  
полного поля / рассеянного поля  
(Total-Field / Scattered-Field, TFSF)**

# Метод Total-Field / Scattered-Field

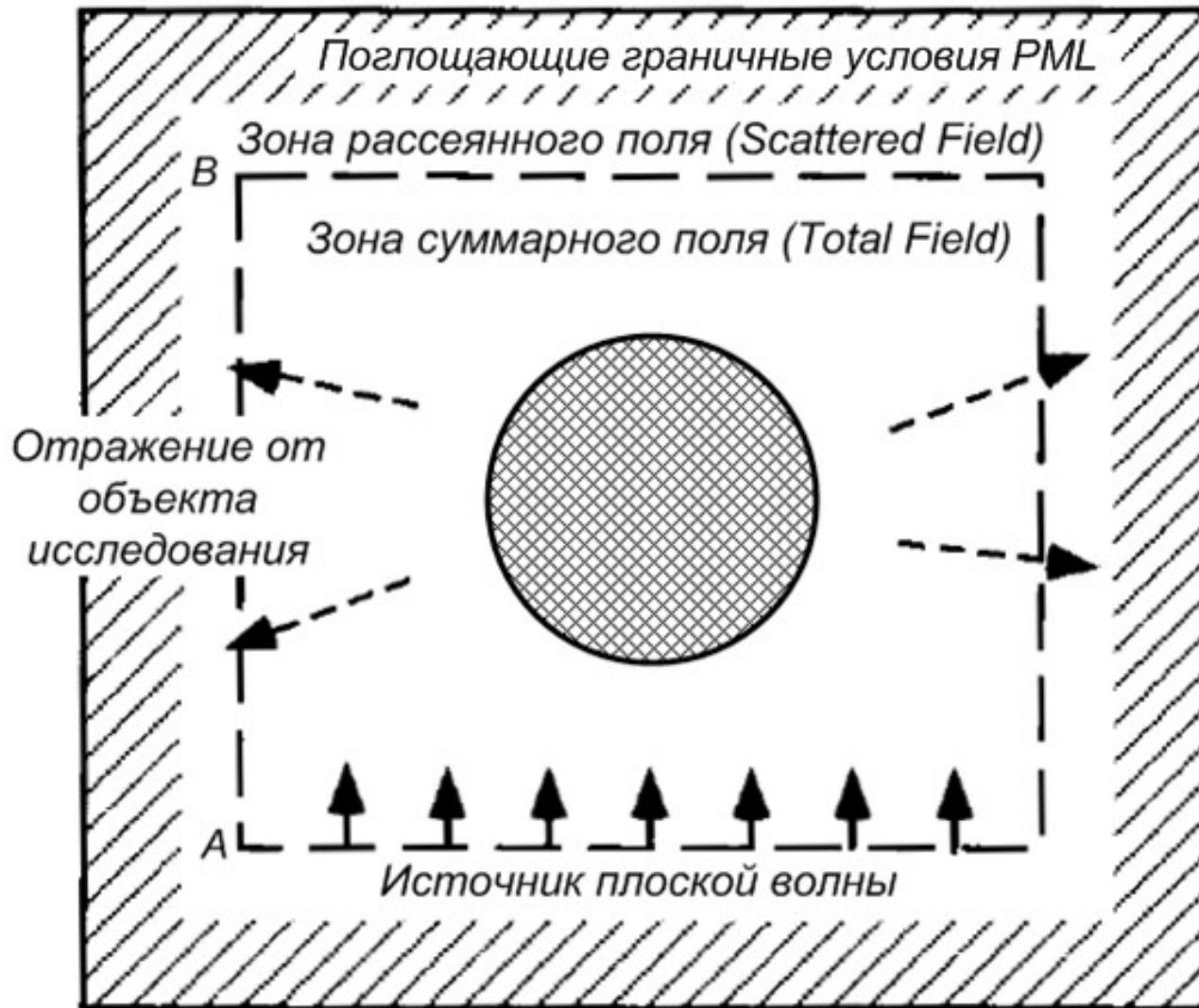
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{пад}}$  могут быть рассчитаны аналитически в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{расс}}$  изначально не известны. Рассчитываются с помощью метода FDTD.

# Метод Total-Field / Scattered-Field

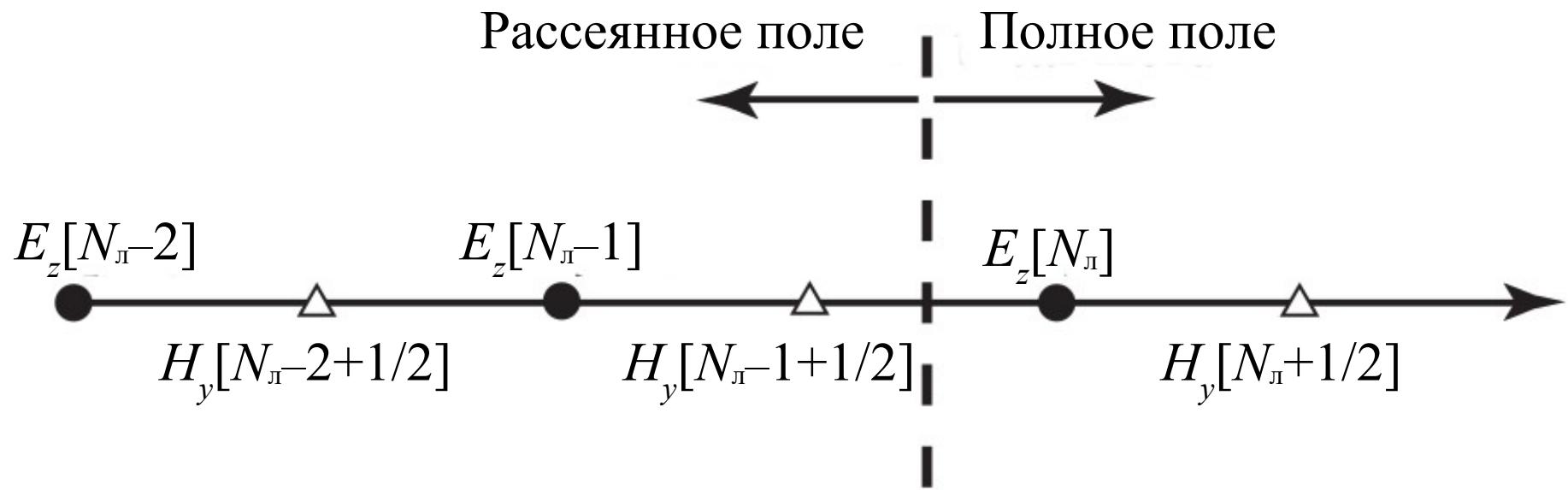


# Метод Total-Field / Scattered-Field.<sup>5</sup>

## Левая граница

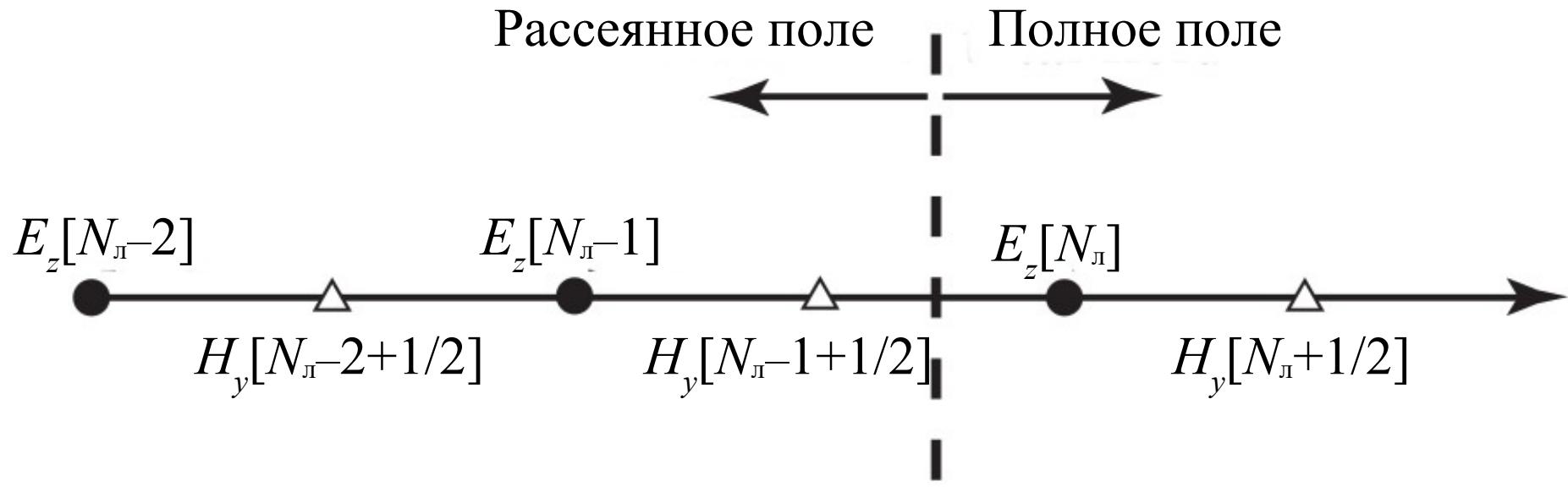
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



# Метод Total-Field / Scattered-Field.<sup>6</sup>

## Левая граница



$H_y[N_{\text{л}} - 1 + 1/2] = H_y[N_{\text{л}} - 1/2]$  — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N_\text{л}]$  — первая ячейка в области полного поля.

# Метод Total-Field / Scattered-Field

**Важно!** Только рассеянное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области полного поля

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля  $E_z$

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} \right)$$

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке  $(N - 1/2)\Delta x$

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} +$$

$$+ \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} + \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{пад.}} \right\} \right)$$

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2]}^{\text{полн.}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} + \underbrace{\left( -\frac{1}{Z} E_z^{\text{пад.}}[N_{\text{л}} - 1/2] \right)}_{\text{полн.}} \right\} \right)$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^q[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} + 1/2] - H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \mid \quad \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} = \frac{Z_0 S_c}{\epsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}} - 1/2]$$


---

Для свободного пространства и если  $S_c = 1$ :

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\underbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}_{\text{расс.}} = \underbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}_{\text{расс.}} + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( \underbrace{E_z^q[N_{\text{л}}]}_{\text{полн.}} - \underbrace{E_z^q[N_{\text{л}} - 1]}_{\text{расс.}} \right)$$

проблема

# Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]}^{\text{расс.}} +$$

$$+ \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( \underbrace{E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}} \text{ пад.}]}_{\text{полн. пад.}} - \underbrace{E_z^q[N_{\text{л}} - 1]}_{\text{расс.}} \right)$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}} - 1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

или

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] + \frac{1}{Z_0} (E_z^q[N_{\text{л}}] - E_z^q[N_{\text{л}} - 1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{1}{Z_0} E_z^{\text{пад}}[N_{\text{л}}]$$

# Total-Field / Scattered-Field

## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{q+1/2} \text{пад}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field

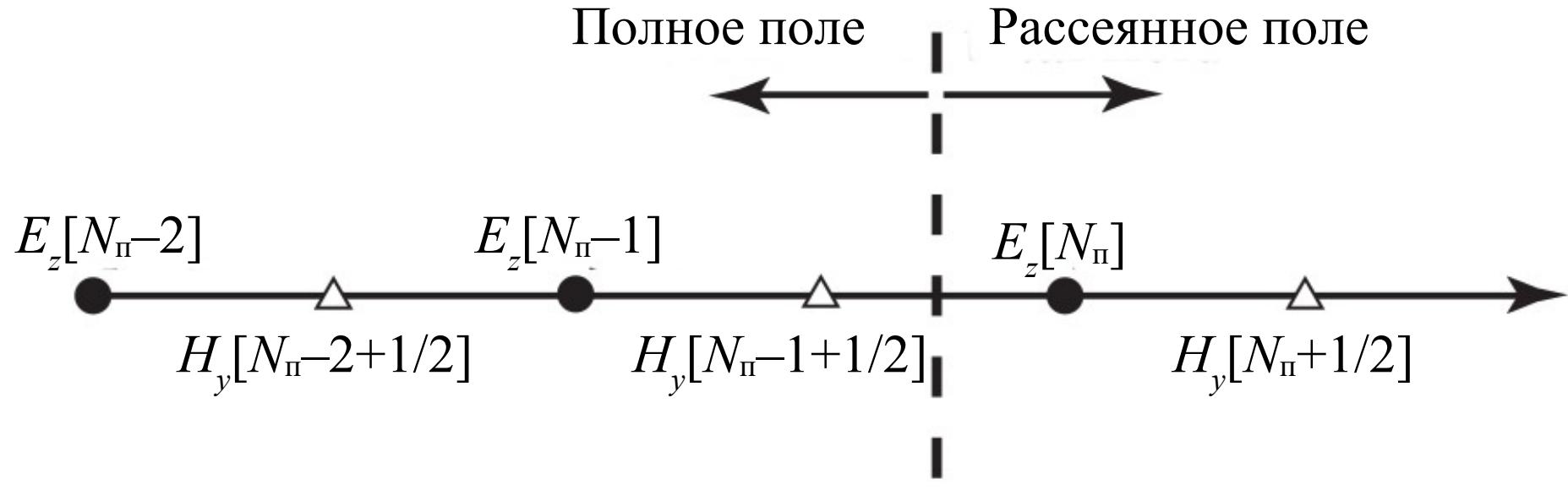
## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] - \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_z^q \text{пад}[N_{\text{л}}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_z^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field.

## Правая граница



$H_y[N_\pi - 1 + 1/2] = H_y[N_\pi - 1/2]$  — последняя ячейка в области  
полного поля.

$E_z[N_\pi]$  — первая ячейка в области рассеянного поля.

# Total-Field / Scattered-Field.

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^q \text{пад}[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{Z} E_z^{q+1/2} \text{пад}[N_{\Pi} - 1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field.

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2] + \frac{S_c}{Z_0 \mu} E_z^q \text{пад}[N_{\Pi}]$$

$$E_z^{q+1}[N_{\Pi}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_{\Pi}] - \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_z^{q+1/2}[N_{\Pi} - 1/2]$$

# Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий  $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени  $q = [0...maxTime - 1]$ :

Цикл по пространству  $m = [0...maxSize - 2]$ :

Расчет  $H_y^{q+1/2}$

**Ввод поля**  $H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^q[N_{\text{л}}]$

**Ввод поля**  $H_y^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^q[N_{\text{п}}]$

Цикл по пространству  $m = [1...maxSize - 1]$ :

Расчет  $E_z^{q+1}$

**Ввод поля**  $E_z^{q+1}[N_{\text{л}}] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}} - 1/2]$

**Ввод поля**  $E_z^{q+1}[N_{\text{п}}] \leftarrow \dots E_{z,\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{п}} - 1/2]$

Вывод результатов

Конец

# Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

# Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

# Одномерное волновое уравнение

$f$  — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

# Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$  — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$  дважды дифференцируема
- $\xi$  можно заменить на  $t \pm x / v$   
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

# Гауссов импульс

$$f(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2}$$

# Гауссов импульс в дискретной форме

Делаем замену  $t$  на  $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left( q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\varepsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left( q - \frac{m \sqrt{\varepsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

# Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{1}{Z} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

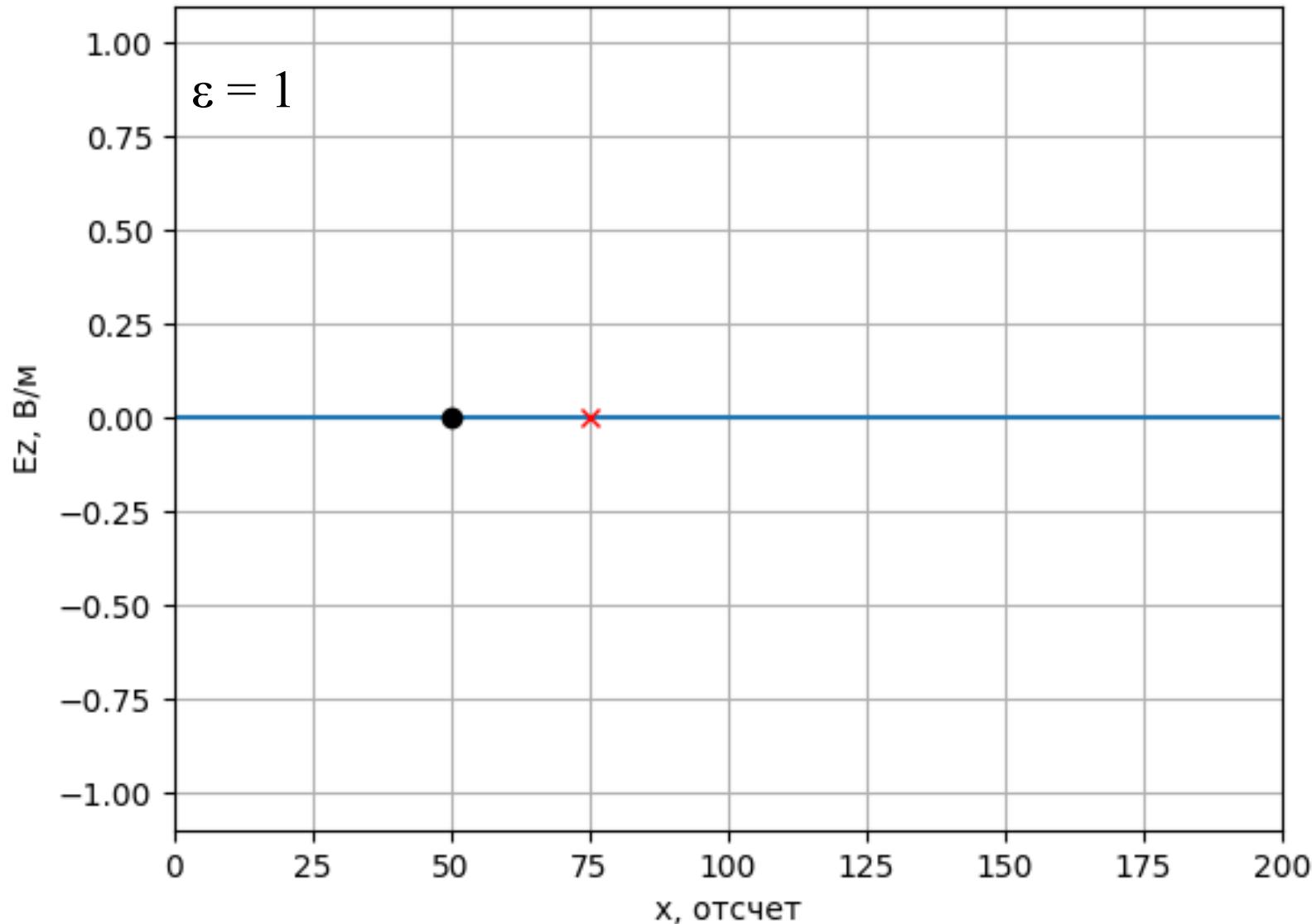
Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$E_{z \text{ пад}}^q[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

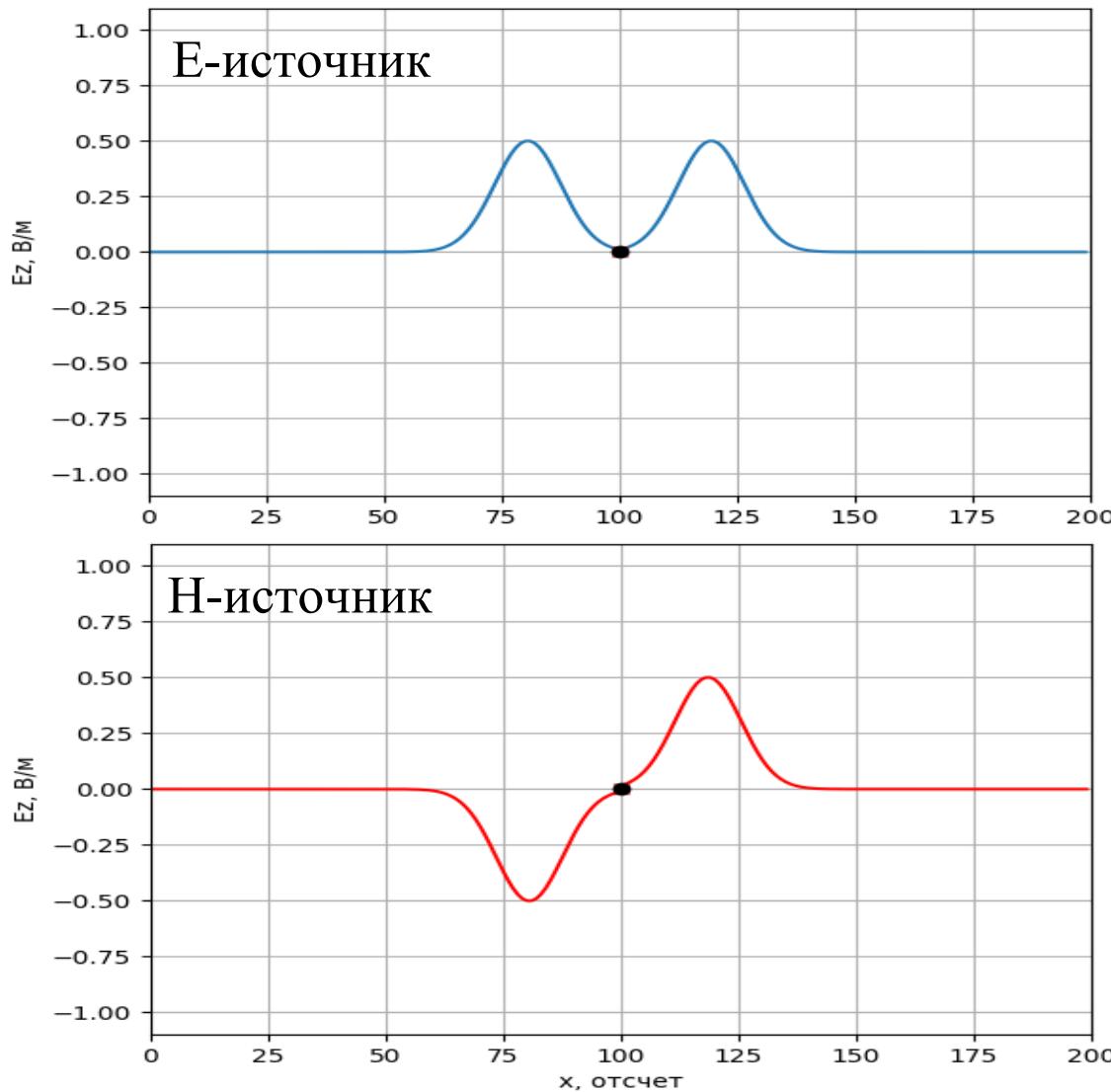
$$H_{y \text{ пад}}^q[m] = -\frac{1}{Z_0} E_{z \text{ пад}}^q[m] = -\frac{A}{Z_0} e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Демонстрация метода Total Field / Scattered Field

## Демонстрация метода TFSF (fdtd\_tfsf\_gauss.py)



# Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



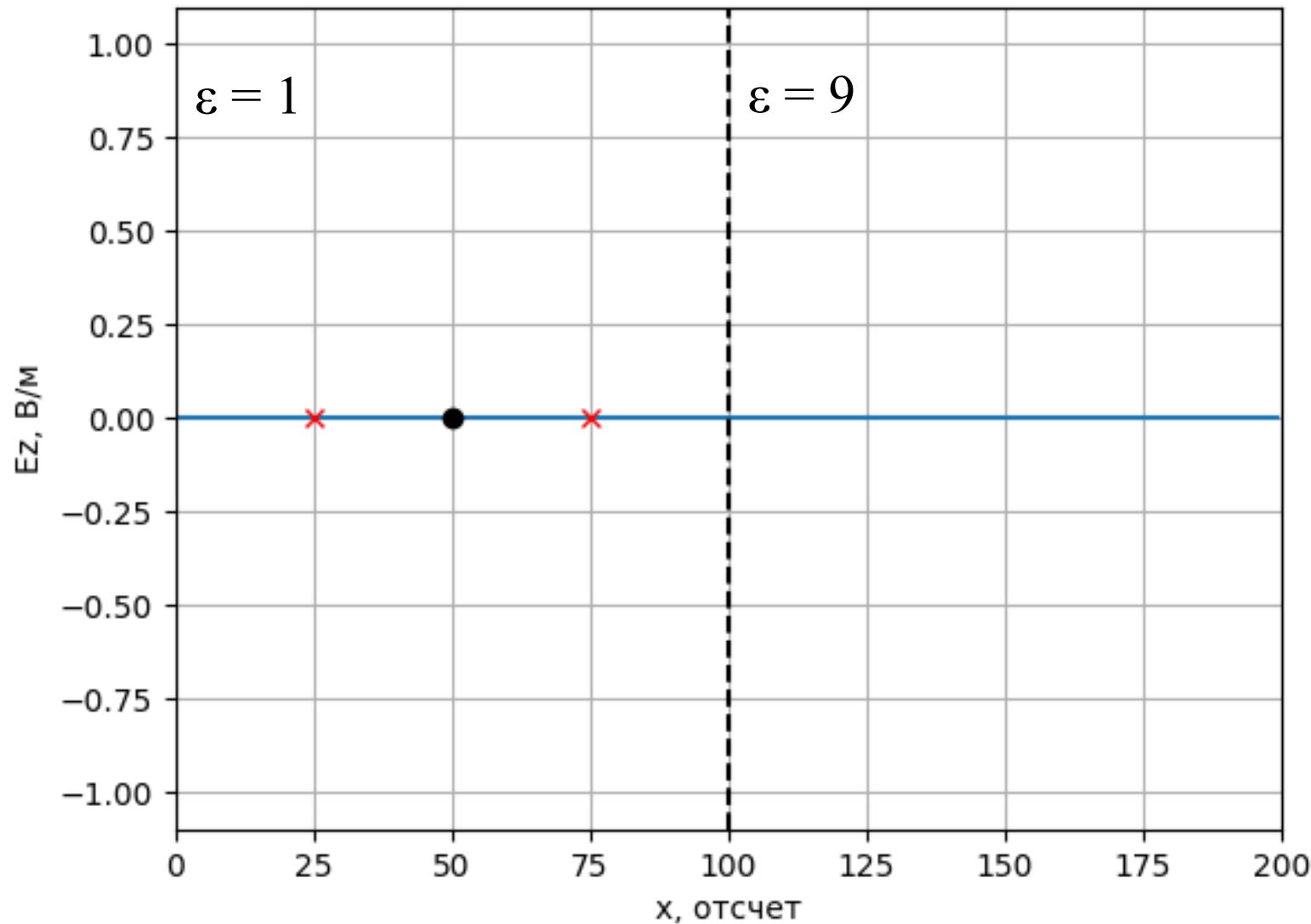
# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника  $x = 0$  соответствует  $N$ -й ячейке

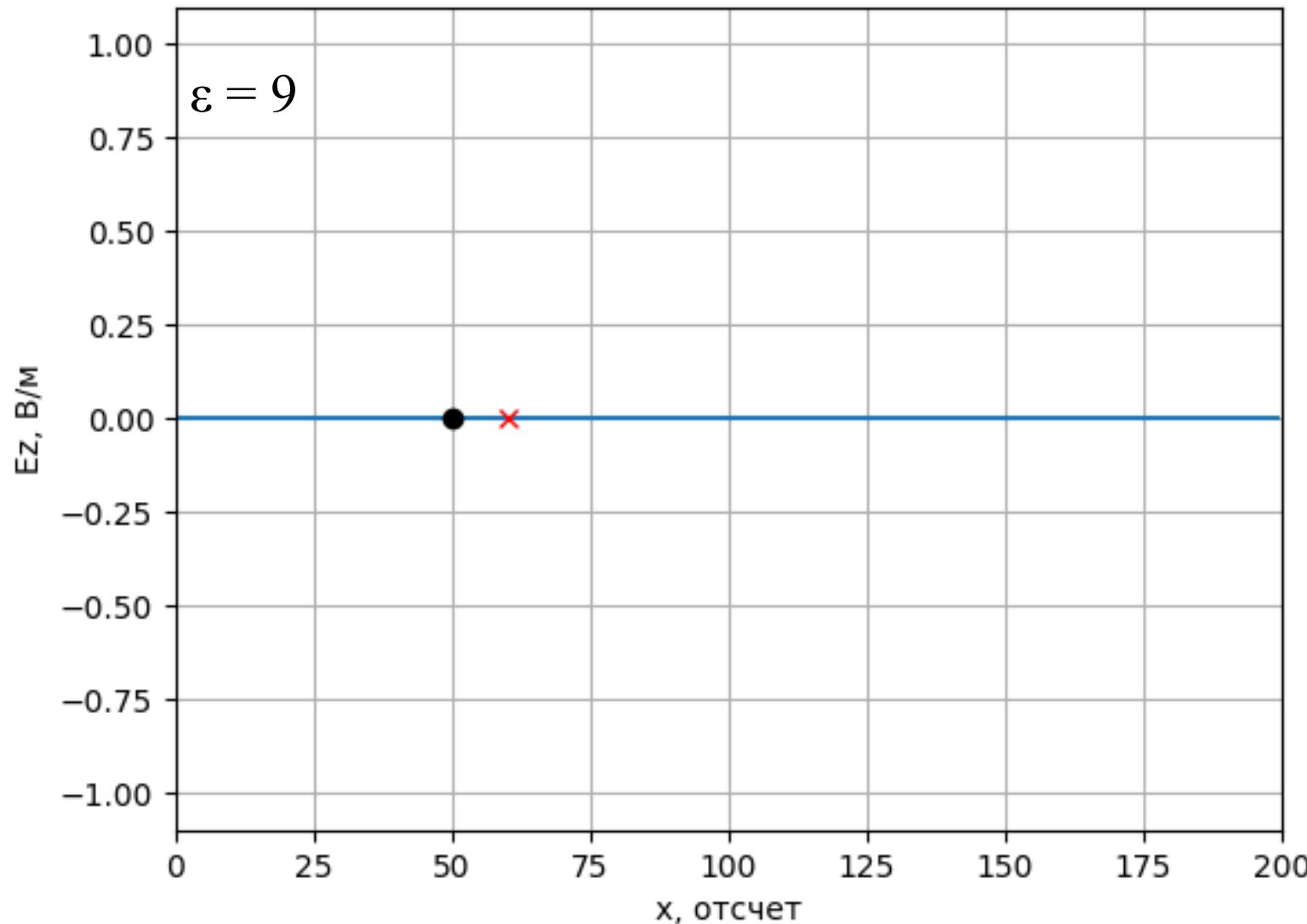
$$H_y^{q+1/2}[N - 1/2] = H_y^{q+1/2}[N - 1/2] - \frac{1}{Z_0} E_{z,\text{пад}}^q[0]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_{z,\text{пад}}^{q+1/2}[-1/2]$$

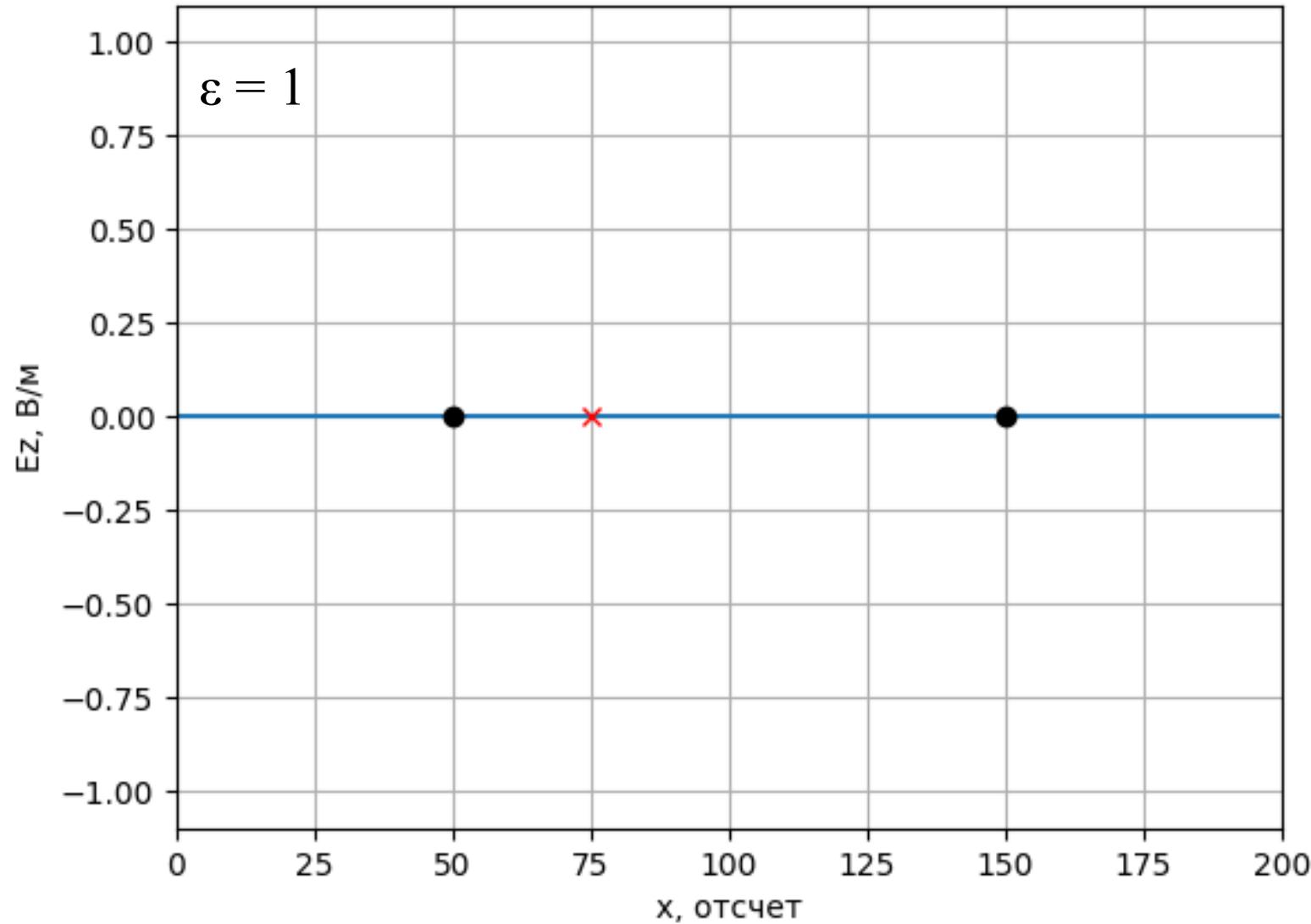
# Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSF (fdtd\_tfsf\_heterogen.py)



## с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd\_tfsf\_medium\_gauss.py)



# Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd\_tfsf\_left\_right\_gauss.py)



# Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd\_tfsf\_left\_right\_gauss\_pec.py)

