

# «Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

# Численная дисперсия

# Численная дисперсия

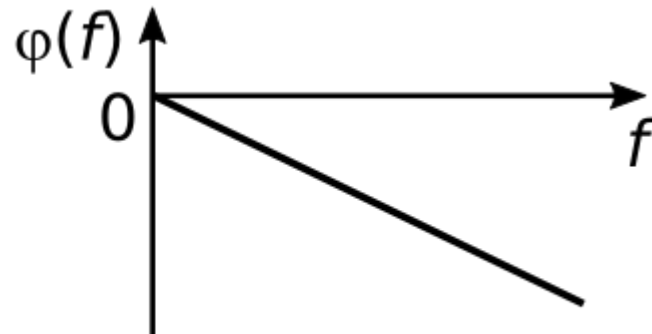
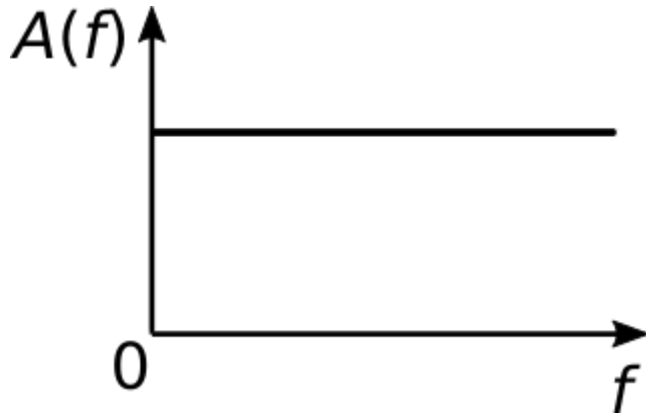
Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от частоты.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}$$

# Область пространства как фильтр



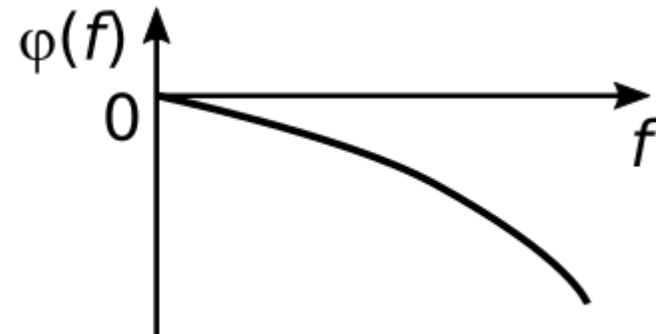
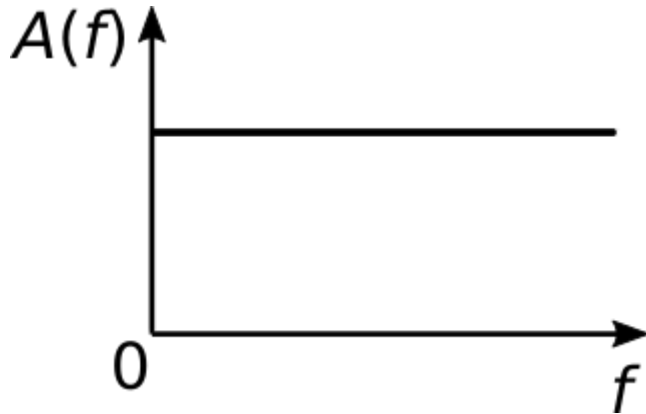
Параметры фильтра без дисперсии



# Область пространства как фильтр



Параметры фильтра с дисперсией



# Волновое уравнение в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

# Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, x_0 < \xi < x$$

Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора  
вблизи точки  $x_0$  со смещением  $\delta$  справа и слева

$$x = x_0 + \delta \qquad x - x_0 = \delta$$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$x = x_0 - \delta \qquad x - x_0 = -\delta$$

$$f(x_0 - \delta) = f(x_0) - \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots$$



# Расчет второй производной в дискретном виде

9

Сложим выражения для  $f(x + \delta)$  и  $f(x - \delta)$

$$f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) = 2f(x_0) + \frac{2}{2!} \delta^2 f''(x_0) + O(\delta^4)$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) - 2f(x_0)}{\delta^2} + O(\delta^2)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right|_{m,q} = \frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right|_{m,q} = \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}$$

Подставляем выражения для вторых производных  
в волновое уравнение

$$\frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2} - \frac{1}{v^2} \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2} = 0$$

Выражаем  $E_z^{q+1}[m]$

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} (E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m]) - E_z^{q-1}[m] + 2 E_z^q[m]$$

Пусть  $E_z^q$  — плоская волна с гармоническим колебанием

$$E_z^q[m] = e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)}$$

$\tilde{k} = k' - j k''$  — комплексное волновое число  
в дискретном пространстве

Подставляем  $E_z^q[m]$  в выражение с предыдущего слайда

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left( E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m] \right) - E_z^{q-1}[m] + 2 E_z^q[m]$$



$$\begin{aligned} e^{j(\omega(q+1)\Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} &= \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left[ e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k}(m+1)\Delta_x)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k}(m-1)\Delta_x)} - 2 e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} \right] - \\ &\quad - e^{j(\omega(q-1)\Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} + 2 e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} \end{aligned}$$

Делим обе части выражения на  $e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)}$

$$e^{j\omega\Delta_t} = \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left( e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} + e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} - 2 \right) - e^{-j\omega\Delta_t} + 2$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t} + e^{-j\omega\Delta_t}}{2} = \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left( \frac{e^{-j\tilde{k}\Delta_x} + e^{j\tilde{k}\Delta_x}}{2} - 1 \right) + 1$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t} + e^{-j\omega\Delta_t}}{2} = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left( \frac{e^{-j\tilde{k}\Delta_x} + e^{j\tilde{k}\Delta_x}}{2} - 1 \right) + 1$$



Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

$$\cos(\omega \Delta_t) = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left( \cos(\tilde{k} \Delta_x) - 1 \right) + 1$$

# Комплексное волновое число в дискретном пространстве

19

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left( \left( \frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 \left( \cos(\omega \Delta_t) - 1 \right) + 1 \right)$$

$k = \frac{\omega}{v}$  — волновое число при отсутствии численной дисперсии

# Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

Используем разложение функции  $\cos(u)$  в ряд Маклорена:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n u^{(2n)}}{(2n)!}$$

Для малого  $u$  будем считать, что

$$\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2!}$$

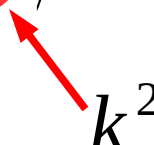
# Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left( \left( \frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left( \left( \frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 \left( 1 - \frac{(\omega \Delta_t)^2}{2} - 1 \right) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left( 1 - \frac{(\Delta_x)^2}{2} \frac{\omega^2}{v^2} \right) = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} (k \Delta_x)^2 \right)$$

  $k^2$

# Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

Для малого  $\Delta_x$  :

$$1 - \frac{(k \Delta_x)^2}{2} \approx \cos(k \Delta_x)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos(\cos(k \Delta_x)) = k$$

Нет численной дисперсии

# Частный случай: «Магический» шаг по времени

Если

$$\Delta_t = \frac{\Delta_x}{v}$$

или

$$v \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = 1$$

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left( \left( \frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta_x} \arccos (\cos(\omega \Delta_t) - 1 + 1) = \frac{\omega \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{\omega}{v} = k \end{aligned}$$

Нет численной дисперсии

# Численная дисперсия

$$\frac{\tilde{v}}{v} = \frac{\pi \sqrt{\epsilon \mu}}{N_{\lambda} \arcsin \left( \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \sin \left( \frac{\pi S_c}{N_{\lambda}} \right) \right)}$$

$\tilde{v}$  — скорость распространения волны в дискретном пространстве

$N_{\lambda}$  — количество ячеек сетки на длину волны



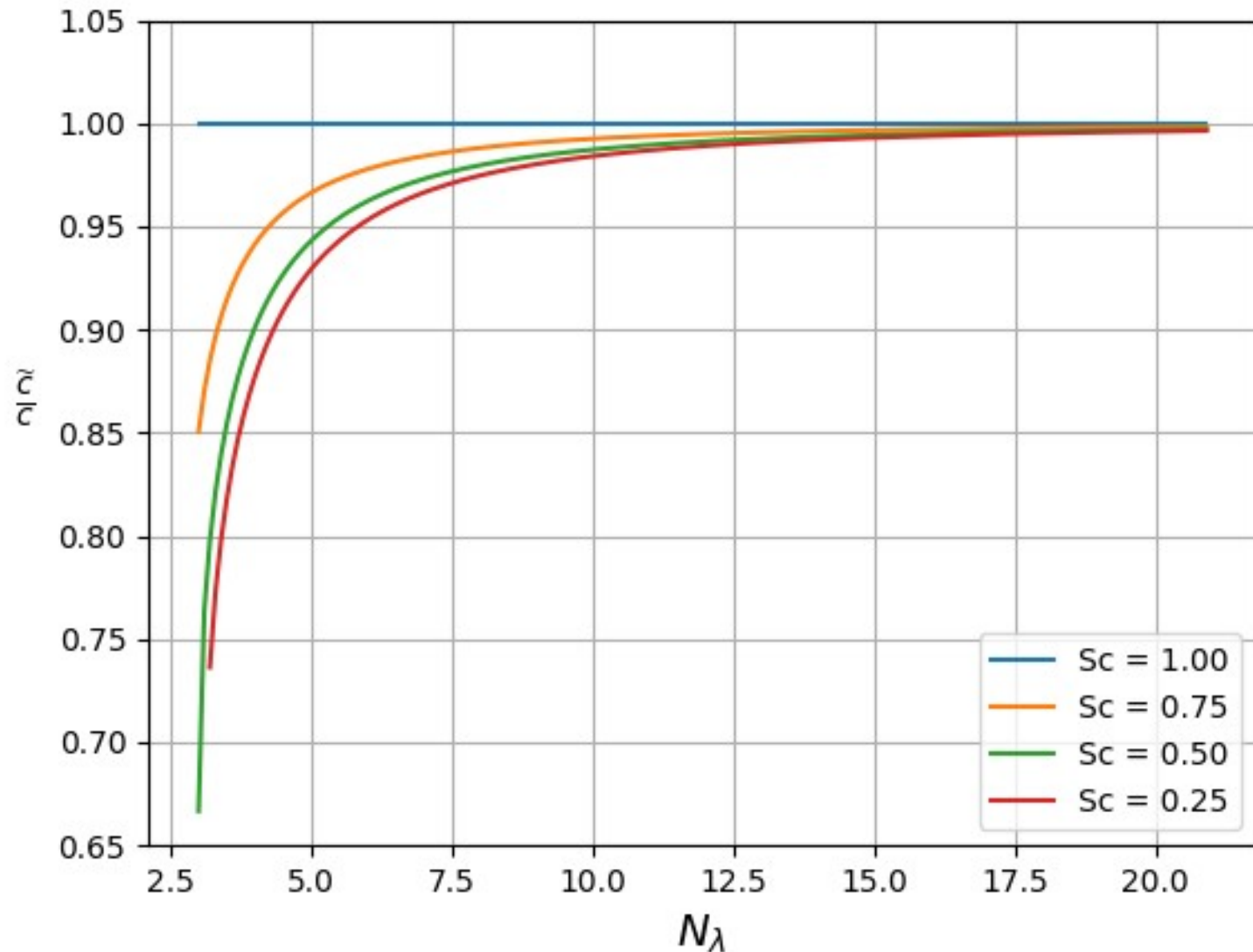
Если  $S_c = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$

$$\frac{\tilde{v}}{v} = \frac{\pi}{N_\lambda \arcsin \left( \sin \left( \frac{\pi}{N_\lambda} \right) \right)} = \frac{\pi N_\lambda}{N_\lambda \pi} = 1$$

Нет численной дисперсии

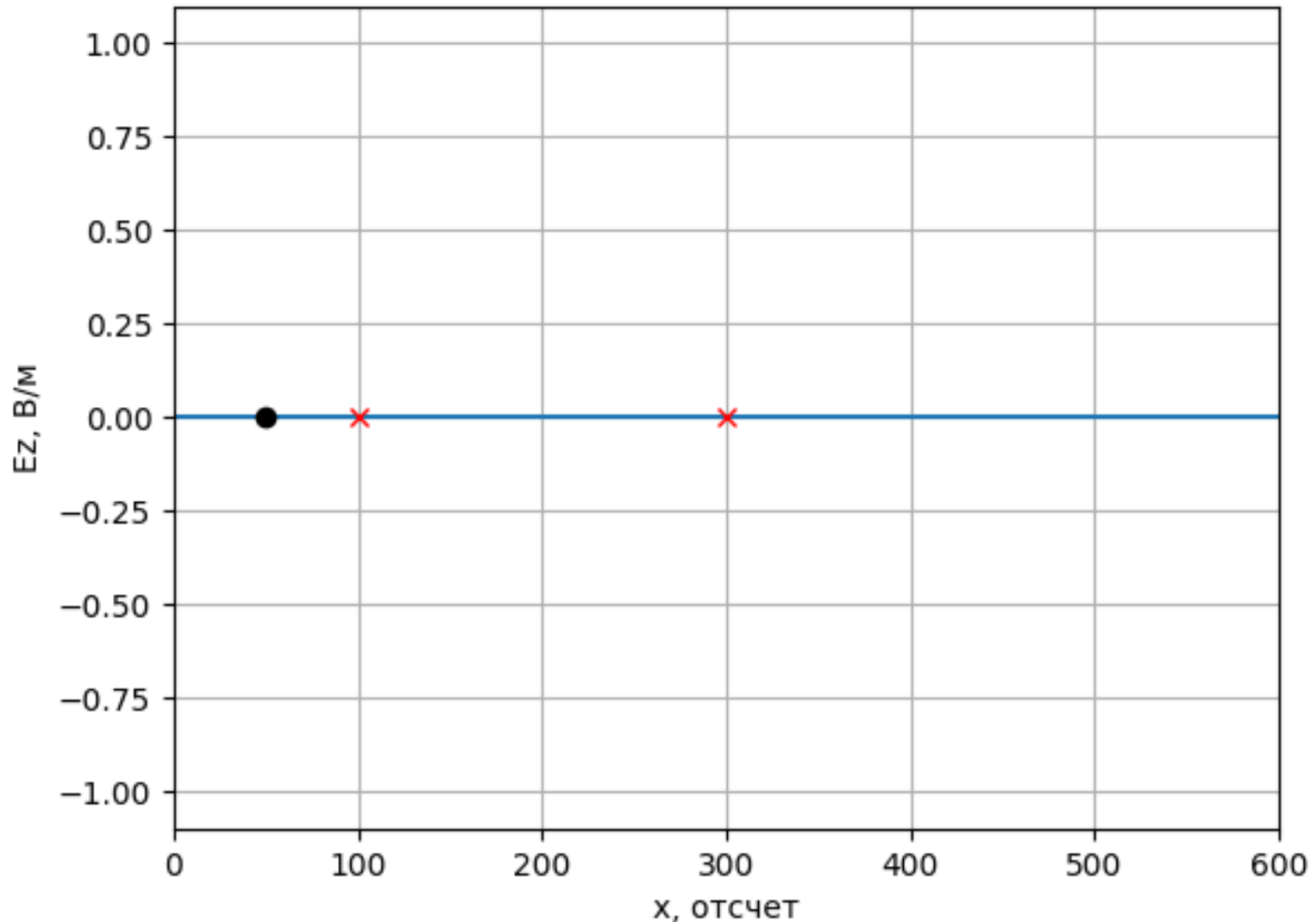
# Анализ численной дисперсии (dispersion.py)

26



# Анализ численной дисперсии (fdtd\_dispersion\_vacuum.py)

27



# Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd\_dispersion.py)

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega d}{\Delta_{\phi}} = \frac{\omega N_d \Delta_x}{\Delta_{\phi}}$$

$d$  — расстояние между датчиками, м

$N_d$  — расстояние между датчиками, отсчет

$\Delta_{\phi}$  — разность фаз на круговой частоте  $\omega$ , рад

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n \Delta f = \frac{2\pi n}{N_s \Delta_t}$$

$n$  — номер отсчета в спектре сигнала

$N_s$  — количество отсчетов в зарегистрированном сигнале

# Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd\_dispersion.py)

29

$$v_{\phi}(n) = \frac{2\pi N_d \Delta_x}{N_s \Delta_t \Delta_{\phi}} n = \frac{2\pi N_d c}{N_s \Delta_{\phi} S_c} n$$

# Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков  
 $\mu = 1$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

# Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

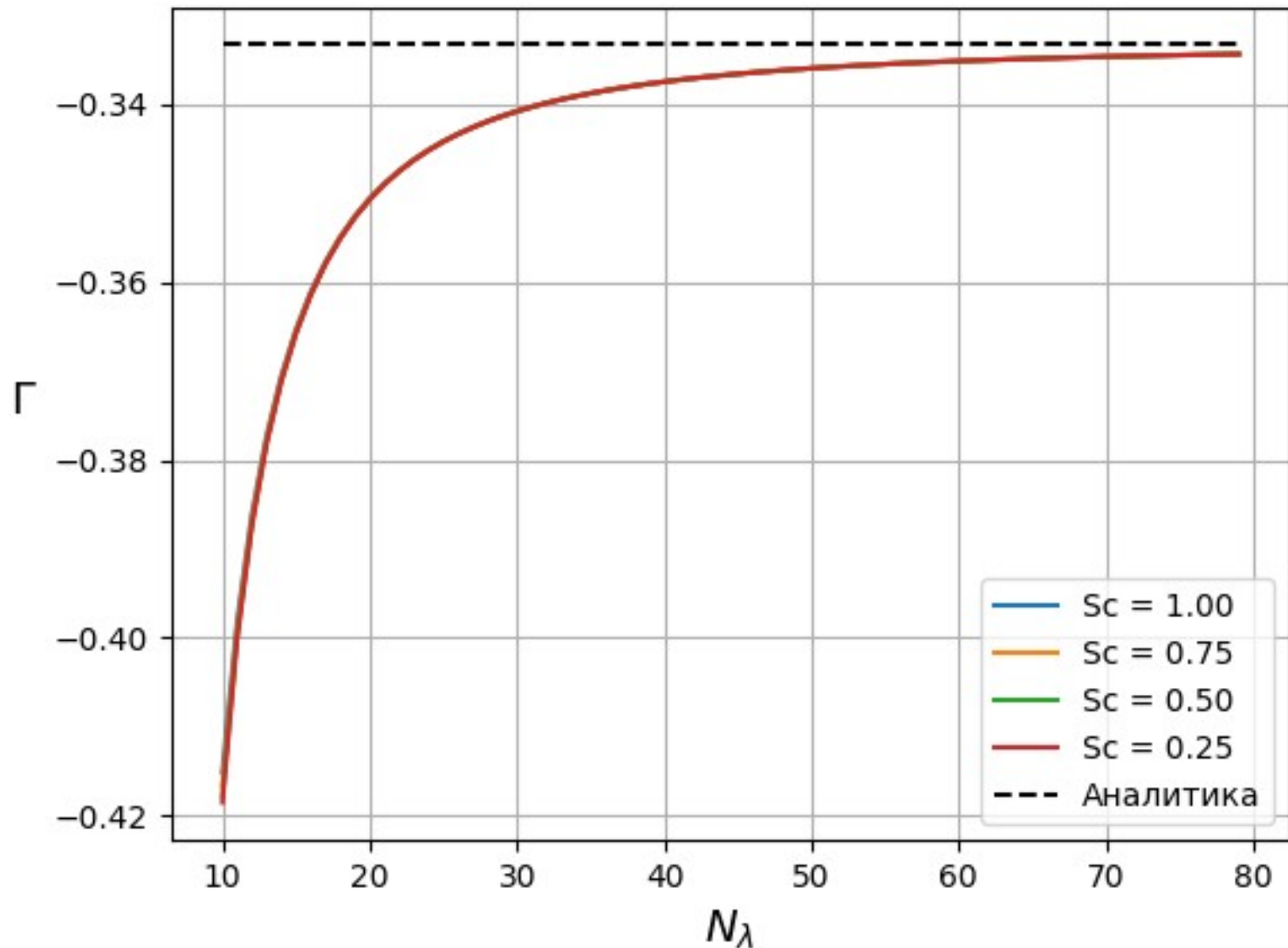
$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \quad \Bigg| \quad \tilde{I} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

где

$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

# Коэффициент отражения в дискретном пространстве (reflection\_error.py)

32





# Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x[m+1/2]} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x[m]} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

# Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} \underline{S_c[m+1/2]}$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} \underline{S_c[m]}$$

# Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$v \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

$$\frac{S'_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \leq 1$$

$$S'_c \leq \sqrt{\epsilon \mu}$$

# Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd\_heterogen\_sc.py)

36

