Matematik Aflevering 16

Jeppe Møldrup

Opgave 10

a. Bestem en parameterfremstilling for linjen l.

$$A(0,20,45) \qquad B(17.3,-10,0)$$

Jeg finder linjen retningsvektor, ved at finde vektoren fra punkt A til B

$$\vec{r} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 17.3-0 \\ -10-20 \\ 0-45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.3 \\ -30 \\ -45 \end{pmatrix}$$

Så indsætter jeg i liniens parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Så parameterfremstillingen bliver

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 45 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 17.3 \\ -30 \\ -45 \end{pmatrix}$$

b. Bestem den spidse vinkel, som linjen l danner med xy-planen

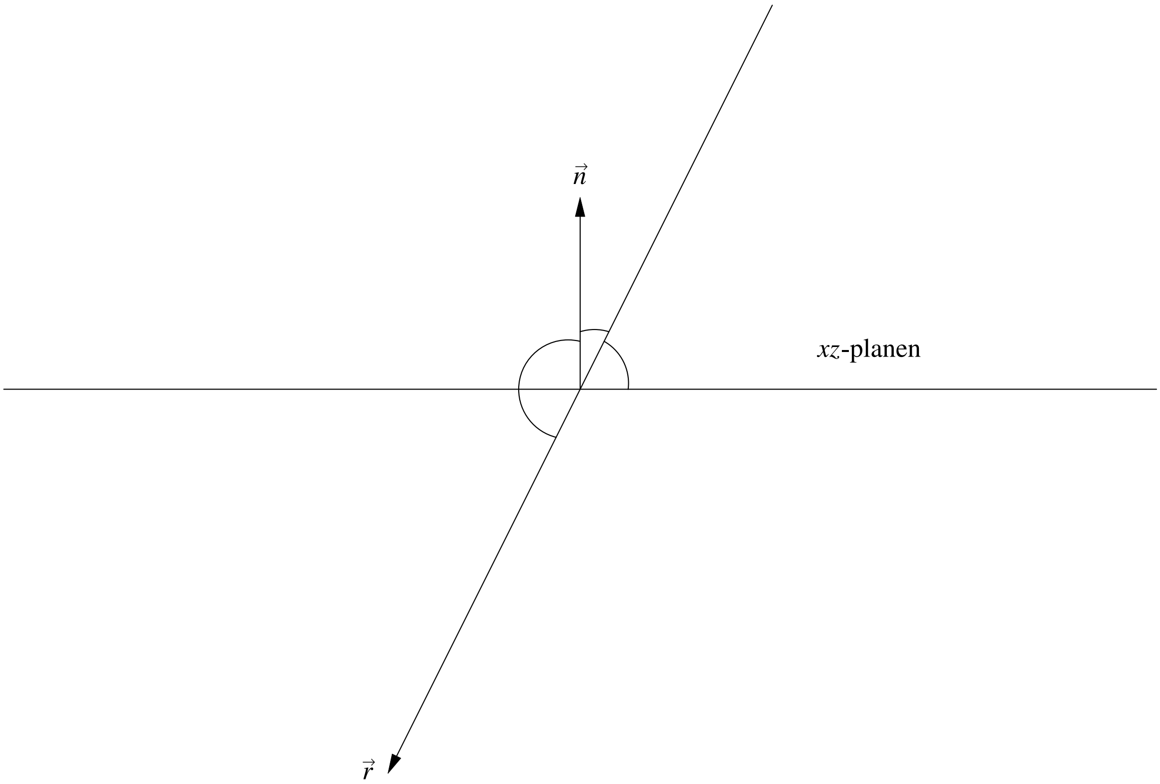
Idet planen ligger i xy vil normalvektoren være ret med z-aksen og jeg sætter derfor normalvektoren til at være

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så finder jeg vinklen med formlen

$$cos(v) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|} = \frac{dotp(\vec{n},\vec{r})}{norm(\vec{n}) \cdot norm(\vec{r})} \Leftrightarrow v = \cos^{-1}\left(\frac{dotp(\vec{n},\vec{r})}{norm(\vec{n}) \cdot norm(\vec{r})}\right) = 142.417°$$

Jeg indtegner situationen.



Med min tegning kan jeg se at for at finde den spidse vinkel, skal jeg først trække vinklen fra 180, for at finde den spidse mellem normalvektoren og linjen. Derefter trække den vinkel fra 90 for at finde den spidse vinkel mellem linjen l og planen

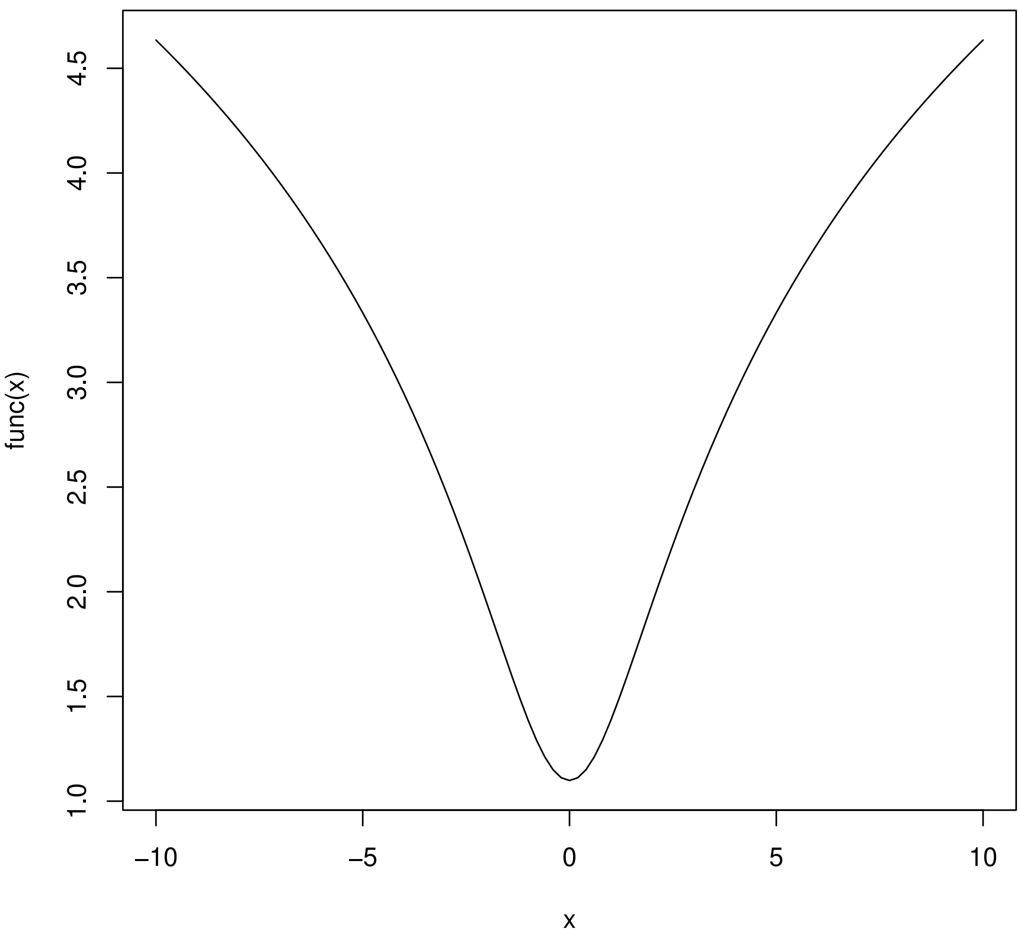
$$90° - (180° - 142.417°) = 52.417°$$

Så den spidse vinkel mellem l og planen er 52.417°

Opgave 11

a. Tegn grafon for f, og bestem en ligning for tangenten til grafen for f punktet $P(1, f(1))$

$$f(x) = ln(x^2 + 3)$$



Jeg finder $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 + x^2}$$

Så indsætter jeg 1

$$f'(1) = 0.5$$

Så hældningen af tangenten er 0.5. Jeg finder P's y-koordinat

$$f(1) = 1.3863$$

Så indsætter jeg punktet ind i tangentens ligning og finder b

$$y = 0.5x + b \Leftrightarrow 1.3863 = 0.5 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 1.89$$

Så tangentens ligning er

$$y = 0.5x + 0.89$$

Graferne for f og $g(x) = k|k > 4$ afgrænser med linjerne $x = -5$ og $x = 5$ en punktmængde M

b. Bestem k, så arealet af M er 40.

Jeg opstiller en ligningen

$$|\int_{-5}^{5}(ln(x^2+3)-k)\ \mathrm{d}x| = 40$$

Og finder k vha. solve

$$solve(|\int_{-5}^{5}(ln(x^2+3)-k)\ \mathrm{d}x| = 40)|k > 4 \rightarrow k = 6.19$$

Så hvis arealet skal være 40 skal k være 6.19

c. Bestem for k = 5 volumen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Jeg bruger formlen

$$|\pi \cdot \int_{a}^{b}(f(x))^2\ \mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{a}^{b}(g(x))^2\ \mathrm{d}x|$$

Så jeg indsætter

$$|\pi \cdot \int_{-5}^{5}(ln(x^2+3))^2\ \mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{-5}^{5}(5)^2\ \mathrm{d}x| = 618.83$$

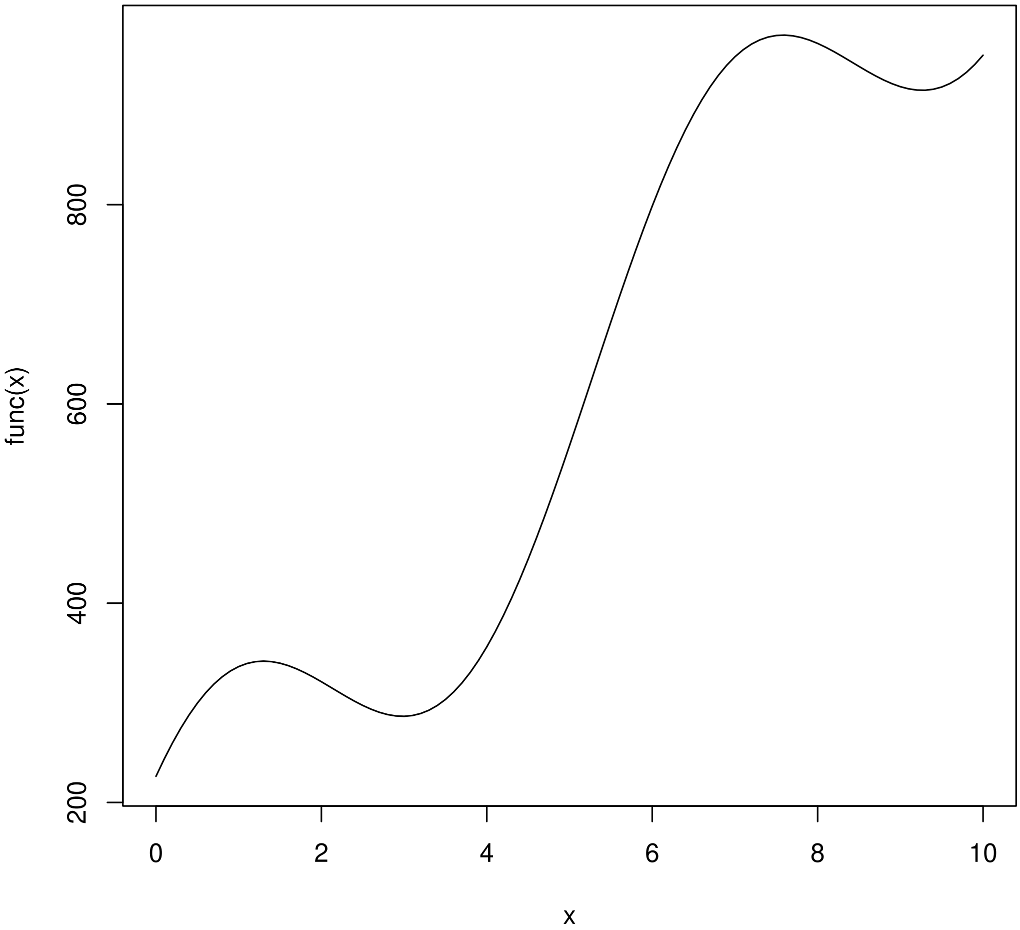
Så volumnet er 618.83

Opgave 12

$$K(t) = 100 \cdot t + 150 \cdot sin(t+1) + 100, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Hvor $K(t)$ betegner aktiekursen (målt i kurspoint) til tiden t(målt i år efter 2007).

a. Tegn grafen for K, og benyt modellen til at bestemme aktiekursen i 2010.



Jeg indsætter 3 i funktionen

$$K(3) = 286.48$$

Så aktiekursen i 2010 var 286.48 kurspoint

b. Bestem $K'(8)$, og redegør for betydningen af dette tal

Jeg differentierer funktionen og indsætter 8

$$\frac{d}{dx}(K(8) = -36.67$$

Så $K'(8)$ = -36.67, dvs. at i år 2015 faldt kursen med 36.67 kurspoint pr. år

c. Bestem det tidspunkt i perioden, hvor aktiekursen vokser hurtigst.

Jeg finder alle punktor hvor $K''(x) = 0$ vha. solve

$$solve(K''(x) = 0, x) \rightarrow x = 2.1415 or x = 5.2832 or x = 8.4248$$

I grafen fra a kan vi se at der hvor væksthastigheden er størst i perioden er mellem 4 og 6, og derfor ved jeg at det må være x = 5.2832.

Opgave 13

a. Opstil en differentiallignin, der beskriver udviklingen i andelen af kulstof-14 i dødt organisk materiale.

Jeg ved det er en differentialligning der er proportional med y med konstanten -0.000121. Så differentialligningen er

$$y' = -0.000121 \cdot y$$

b. Bestem andelen af kulstof-14 i grauballemanden i 2018.

Jeg finder løsningen til differentialligningen. Som er

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{kx} \Leftrightarrow y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-0.000121t}$$

Jeg ved at til tiden t = 0, er der 100% tilbage. Så den endelige formel er

$$y(t) = 100\% \cdot \mathrm{e}^{-0.000121t}$$

Så indsætter jeg år 2018, dvs. t = 2268 og ser hvor mange procent der er tilbage af grauballemanden

$$y(t) = 100\% \cdot \mathrm{e}^{-0.000121 \cdot 2268} = 76\%$$

Så der er cirka 76% tilbage af grauballemanden i år 2018

Opgave 14

a. Bestem koordinatsættet til punktet Q udtrykt ved a, og gør rede for, at arealet af trekant PQR som funktion af a er bestem ved

$$T(a) = 5a^2 - a^3, \quad 0 < a < 5$$

$$f(x) = x^2 - 10x + 29.$$

Jeg starter med at differentiere funktionen

$$f'(x) = 2x - 10$$

Differentialkvotienten er det samme som hældningen af tangenten, så jeg indsætter det i en lineær funktion der afhænger af a

$$y(a, x) = (2a - 10)x + b$$

Så kan jeg indsætte $f(x)$ ind på y's plads i punktet a, da det to grafer skærer hinanden i punktet a. Dvs. at x = a

$$a^2 - 10a + 29 = (2a - 10)a + b$$

Jeg kan så isolere b

$$b = a^2 - 10a + 29 - (2a - 10)a \Leftrightarrow b = a^2 + 10a + 29 - 2a^2 + 10a \Leftrightarrow b = -a^2 + 29$$

Idet b er skæringen med y-aksen og Q også er det. Vil koordinaterne af Q udtrykt ved a være

$$Q(0, -a^2 + 29)$$

For at finde arealet af trekanten udtrykt ved a starter jeg med at finde højden, ved at trække $f(a)$ fra b

$$(29 - a^2) - (a^2 - 10a + 29) = 29 - a^2 - a^2 + 10a - 29 = -2a^2 + 10a$$

Grundlinjen er a, og så indsætter jeg det ind i funktionen for arealet af en trekant

$$T = \frac{1}{2}hg \Leftrightarrow T(a) = \frac{1}{2}((-2a^2 + 10a) \cdot a) = \frac{1}{2}(10a^2 - 2a^3) = 5a^2 - a^3$$

Så arealet af trekanten udtrykt ved a er

$$T(a) = 5a^2 - a^3$$

b. Bestem den værdi af a, der gør arealet af trekant PQR størst mulig.

Jeg differentierer funktionen

$$T'(a) = (10 - 3a)a$$

Så finder jeg aller mulige ekstremaer, dvs. punkter hvor $T'(a) = 0$ vha. solve

$$solve(T'(a) = 0, a)|0 \leq a \leq 5 \rightarrow a = \frac{10}{3}$$

Så undersøger jeg områderne før og efter for at se om det er et maksimum, minimum eller en vandret vendetangent

$$T'(3) = 3$$

$$T'(4) = -8$$

Så punktet a = 10/3 er et maksimum. Og idet det er det eneste punkt hvor $T' = 0$, er det også et globalt maksimum. Derfor er trekantens areal størst når a = 10/3