Abstract

Abstract

Indholdsfortegnelse

1 Indledning

Indledning

2 Redegørelse

Differenskvotient er sekantens hældning af to punkter x_0 og $x_0 + \Delta x$ på en differentiabel graf. Differentialkvotient er så tangentens hældning af et punkt x_0 på en differentiabel graf.
Se bilag 1.
Hastighed er den udledte funktion fra en stedfunktion dvs. en graf for tid og strækning, hvor den udledte funktion er en graf for tid og strækning per tid. Så hastighed er ændringen af hastighed per tid og har enheden $\frac{m}{s}$. Acceleration er så den udledte funktion fra en hastighedsfunktion. Dvs. at acceleration er ændringen af hastighed per tid og har enheden $\frac{m}{s^2}$.
Teorien bag luftmodstand er at jo større tværsnitsarealet eller frontarealet for et legeme er og jo hurtigere legemet bevæger sig gennem luften, desto større er den luftmodstand der virker på legemet. Luftmodstanden vil være en kraft der peger den anden retning end den retning som legemet bevæger sig, fordi legemet skubber luften i den retning legemet bevæger sig og så ifølge newtons tredje lov bliver legemet så udsat for en kraft der er lige så stor men omvendt af den legemet udsætter luften for.

3 Forsøg med kageform

Formålet med forsøget er at finde en sammenhæng mellem faldhastighed af et legeme og luftmodstanden. Forsøget går så ud på at vi lader nogle papir muffinforme falde gennem luften hvor vi så måler papirformene med en bevægelsesføler. For at få

noget variation ændrer vi på massen af papirformene ved at stakke flere papirforme oveni hinanden og lade dem falde sammen.
Teorien bag det er at kageformene bliver udsat for 2 kræfter. Tyngdekraften og luftmodstanden. Og når kageformene så når et punkt hvor de falder med konstant hastighed, ved vi fra newtons 1. lov at summen af alle kræfter er lig 0. Og da luftmodstanden i dette tilfælde laver en kraft der er omvendt af tyngdekraften ved vi at de to krafter må være lig med hinanden hvir kageformen falder med en konstant hastighed.
Se bilag 8.

3.1 Ligning for F_{luft}

For at finde en ligning for F_{luft} starter vi med at måle en hel masse data med kageformene. Her finder vi så et område i vores data hvor vi kan se at kageformen falder med konstant hastighed se det gule område i bilag 7. De kan vi se fordi stedfunktionen er lineær og derfor er den udledte funktion konstant. Så skriver vi så dataet ned i tabellen nedenunder

$v(\frac{m}{s})$	0.981	1.14	1.67	2.59	1.65	3.05	1.89	1.99
$m(g)$	6.91	14.07	34.83	62.04	23.97	69.51	28.68	40.47

Som jeg forklarede i redegørelsen for forsøget ved vi at når hastigheden er konstant. Og det kun er tyngdekraften og luftmodstanden der virker på kageformen så vil tyngdekraften og luftmodstanden være lige store. Så vi bruger formlen

$$F_t = m \cdot a$$

Til at finde størrelsen på tyngdekraften der virker på kageformen.
Og da $F_t = F_{luft}$(Vi kigger kun på størrelsen af kraften her, da det er den der er ens) kan vi bare indsætte værdierne in i tabellen nedenunder

$v(\frac{m}{s})$	0.981	1.14	1.67	2.59	1.65	3.05	1.89	1.99
$m(g)$	6.91	14.07	34.83	62.04	23.97	69.51	28.68	40.47
$F_{luft}(N)$	0.068	0.138	0.342	0.609	0.235	0.683	0.282	0.397

Herefter indsætter vi værdierne for hastighed og luftmodstand ind i et CAS program og udfører potensregression for at finde en sammenhæng mellem hastigheden af kageformen og luftmodstanden. Grunden til at vi bruger potensregression og ikke nogle af de andre er fordi det er den regressionstype der passer bedst med vores data.
Se bilag 2.

3.2 Differentialligning

Nu hvor vi har en formel for luftmodstand vil vi gerne kunne bruge den i en simulation så vi kan sammenligne noget af vores data med den. Den data vi vil sammenligne med simulationsdataen er noget af det data hvor kageformen endnu ikke har ramt konstant hastighed endnu. Se bilag 7.
Nogle ting vi ved er

$$F_t = m \cdot g$$

Og den teoretiske formel for luftmodstand er

$$F_{luft} = -k \cdot v^2$$

Så

$$F_{res} = F_{luft} + F_t = -k \cdot v^2 + m \cdot g$$

(Dette gælder kun fordi vores akse peger nedad. Dvs. at tyngdekraften er positiv og luftmodstanden er negativ)
Newtons anden lov siger at

$$F_{res} = m \cdot a$$

Så vi kan substituere F_{res} i den anden formel

$$-k \cdot v^2 + m \cdot g = m \cdot a$$

Så isolerer vi acceleration i formlen

$$a = \frac{-k \cdot v^2}{m} + g$$

Og som jeg forklarede i redegørelsen så er acceleration bare den udledte funktion af hastighed, så vi kan substituere a med v'

$$v' = \frac{-k}{m} \cdot v^2 + g$$

Og så ser vi at det er en differentialligning vi har gang i her.

3.3 Numerisk løsning af differentialligningen

Vi er ikke i stand til bare at finde en løsning til differentialligningen, så i stedet så løser vi den numerisk ved hjælp af Eulers metode.
Eulers metode er en metode hvor vi kan finde et løsning som er tæt på den rigtige løsning til differentialligningen men den er ikke den eksakte løsning.
Det vi gør når vi bruger Eulers metode er at vi i stedet for at udregne en funktion som er løsning til differentialligningen så tager vi en eller anden start værdi for sted, hastighed og acceleration og tager små skridt hvor vi udregner nye værdier efter et eller andet tidsskridt. Så i stedet for at finde den eksakte løsning, laver vi bare små bidder af lineære grafer og sætter dem sammen da vi meget nemt ud fra differentialligningen kan udregne hældningen til punkterne.
For at lave grafen over hastigheden vil vi så tage en starthastighed v_0 og lægge hældningen gange med den tid der er gået til for at få det næste punkt i vores graf.
Og da vi lige har udledt ligningen

$$v' = \frac{-k}{m} \cdot v^2 + g = a$$

vil vi finde næste punkt med formlen

$$v_{ny} = v_{gammel} + a_{gammel} \cdot \Delta t$$

Og ligeledes ville punkterne til grafen for stedet være beregnet med formlen

$$s_{ny} = s_{gammel} + v_{gammel} \cdot \Delta t$$

Da hastigheden er stedfunktionens hældning. For at finde punkterne til accelerationen bruger vi bare differentialligningen med de gamle værdier for hastigheden

$$a_{ny} = \frac{-k}{m} \cdot v_{gammel}^2 + g$$

(Her ville vi så ikke bruge den teoretiske formel for luftmodstand, men snarre den som vi selv har beregnet i forsøget med kageformene)
Det ville være lidt bøvlet at skulle lave alle værdierne for stedet hastigheden og accelerationen i hånden. Så vi implementerer det her i sproget Python og får vores computer til at gøre det for os i stedet.
Se bilag 3.

3.4 Sammenligning mellem forsøg og numerisk løsning

Nu når vi så har kørt Python koden og lavet de tre diagrammer i bilag 4, 5 og 6. Kan vi så sammenligne dem med hinanden. (Rød farve er simulationen og blå farve er vores målte data)
Når man kigger på grafen for sammenhængen mellem tid og sted så kan man se at den faktisk passer nogenlunde fornuftigt med dataen fra simulationen. Men hvis man derimod kigger på graferne for sammenhængen mellem ted og hastighed og for sammenhængen mellem tid og acceleration. Så ser man at de ikke passer lige så godt som de andre. Punkterne i de to grafer stikker kun i samme retning som dataen for simulationen men ellers er der ikke så meget til fælles for dem. Og det skyldes

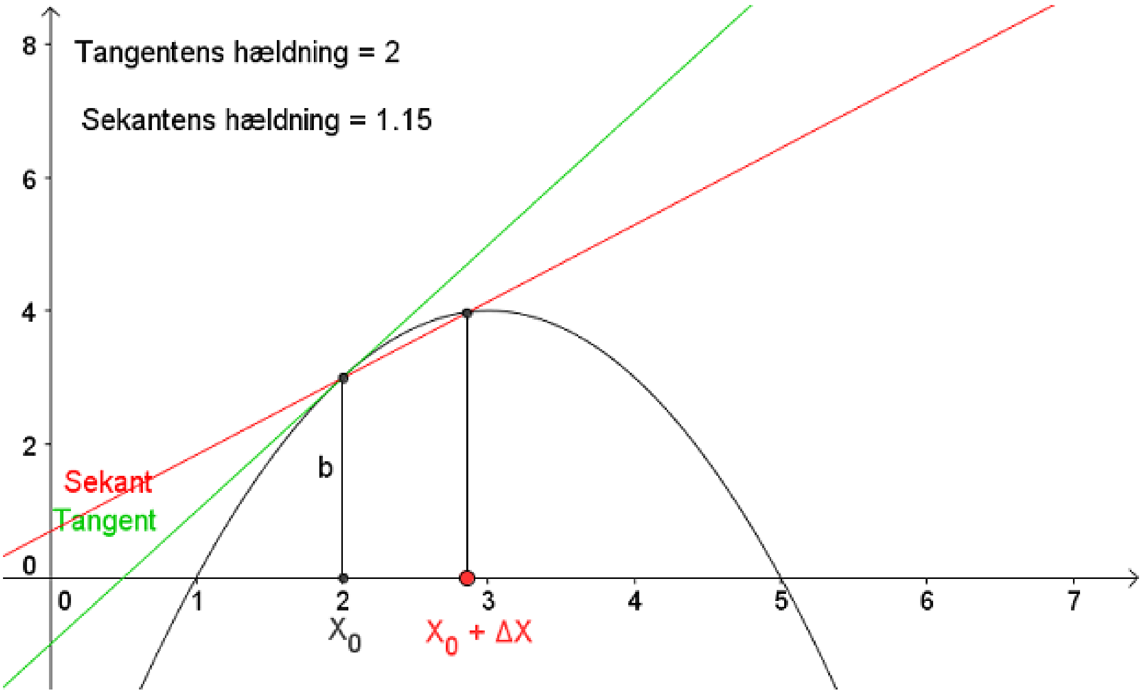
fejlkilder.
fejlkilder der indgår i vores forsøg er f.eks. at vores bevægelsesføler ikke måler hastighed eller acceleration, men i stedet regner dem ud ud fra stedfunktionen. Så hvis stedfunktionen som føleren har målt ikke er helt god. Så bliver de resulterende hastigheds- og accelerationsfunktioner heller ikke helt gode og nok kommer til at have relativ stor afvigelse. Derudover har vi i vores forsøg kommet til at indstille vores føler til kun at tage data med 20 hz, i stedet for at indstille den til 25 hz. Mindre datapunkter betyder normalt også at det bliver mindre præcist. Ellers er der fejlkilder som at frontarealet ikke konstant fordi vi hele tiden trækker og skubber i kageformen uden at tænke over det, men altså på den måde skabe en afvigelse i frontarealet.

4 Konklusion

I denne opgave har jeg undersøgt luftmodstandens indvirkning på en kageform gennem forsøg hvor jeg har indsamlet data på en kageform der falder gennem luften. Jeg har så brugt denne data til at opskrive en model for luftmodstandens indvirkning. Jeg har så brugt modellen sammen med newtons 2. lov til at opskrive en differentialligning. Differentialligningen var i dette tilfælde ikke mulig at løse på normal vis, så i stedet brugt jeg Eulers metode til at finde en numerisk løsning på differentialligningen. Derefter sammenlignede jeg noget af mit opsamlede data og så min numeriske løsning på differentialligningen, dette giver indblik i hvor præcist mit data var og hvor troværdig min formel for luftmodstand er.

5 Bilag

Bilag 1

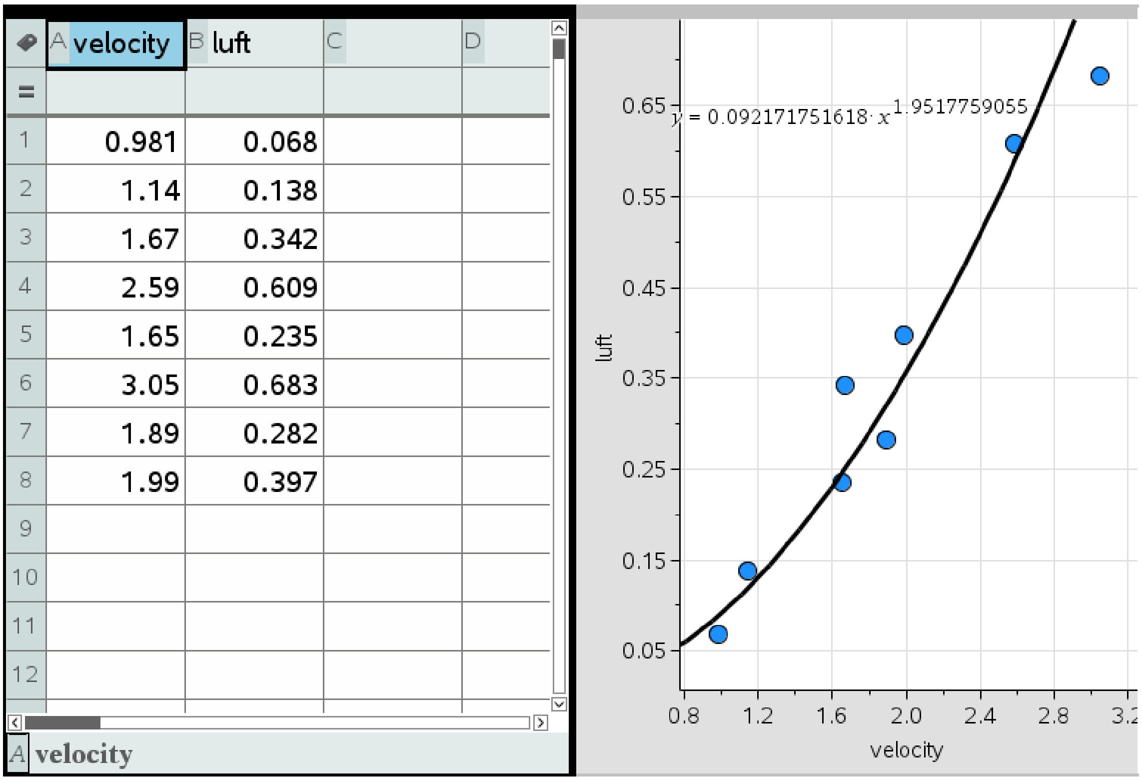


Fra:

http://www.buhlweb.dk/matwiki/index.php?n=MatematikB.Differentialkvotient

Sidst besøgt: 21/06-2018 klokken 21:12

Bilag 2



	A velocity	B luft	C	D
=				
1	0.981	0.068		
2	1.14	0.138		
3	1.67	0.342		
4	2.59	0.609		
5	1.65	0.235		
6	3.05	0.683		
7	1.89	0.282		
8	1.99	0.397		
9				
10				
11				
12				

Bilag 3

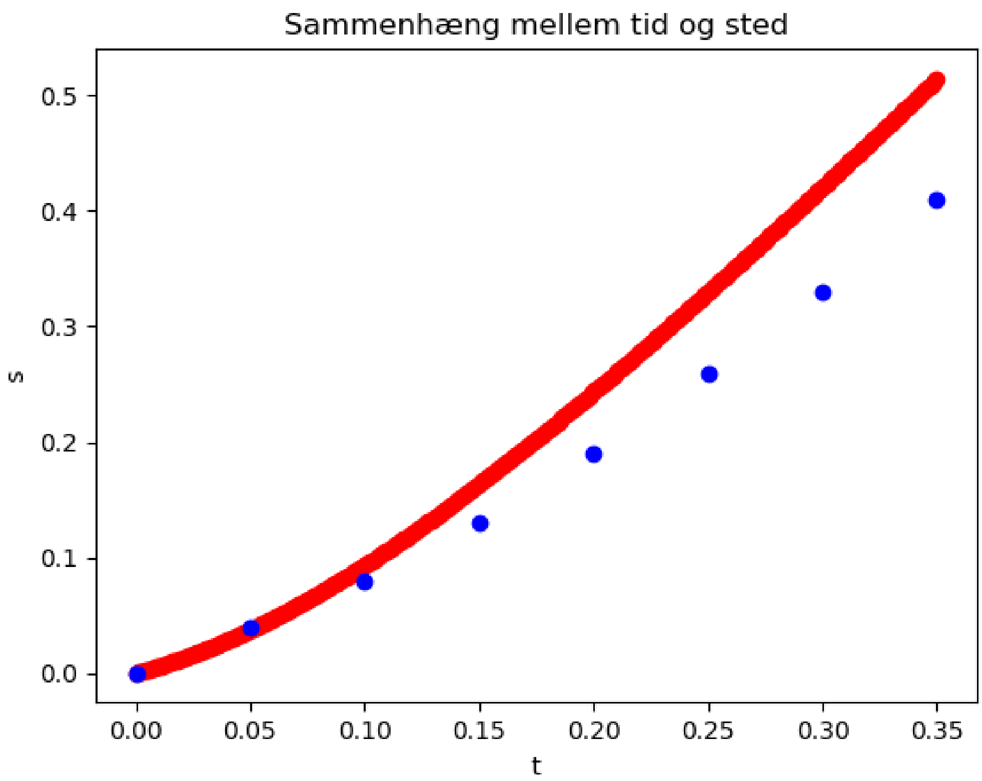
```
# EULERS METODE
# Simulering af frit fald
# Accelationen er a = g = 9.82 m/s^2

from pylab import*
from math import*

# --- STARTBETINGELSER ---
s0 = 0          # Kuglen starter 5.00 meter over jorden
t0 = 0          # Tiden er 0 s ved start
a0 = 4.21       # Startaccelerationen er 9.82 m/s^2 - nedad!
v0 = 0.54           # Starthastigheden er 0 m/s
```

```
q = 1.9517759055
k = 0.092171751618
m = 0.03483
g = 9.82

dt = 0.001      # Laengden af tidsskridtet

tidraw = [0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9]
tidboi = []
velocityraw =[-0.54,-0.76,-0.96,-1.12,-1.25,-1.37,-1.48,-1.58]
velocity = []
accelerationraw = [-4.21,-4.06,-3.57,-3.01,-2.55,-2.27,-2.10,-1.78]
acceleration = []
positionraw = [0.85, 0.81, 0.77, 0.72, 0.66, 0.59, 0.52, 0.44]
position = []

for x in range(0, positionraw.__len__()):  #behandling af det raa
                                  data saa position, accelleration
                                  og hastighed stiger og starter
                                  ved 0 mens tiden starter ved 0.
    position.append(positionraw[0]-positionraw[x])
    tidboi.append(tidraw[x]-tidraw[0])
    velocity.append(-1*velocityraw[x])
    acceleration.append(-1*accelerationraw[x])

tmax = tidboi[-1]   #saetter max tiden til den tid hvor vores data
                                  stopper.
# --- DATA ---
sdat = [s0]       # Liste med data - sted
tdat = [t0]       # Tid
vdat = [v0]       # Hastighed
adat = [a0]     # Acceleration
```

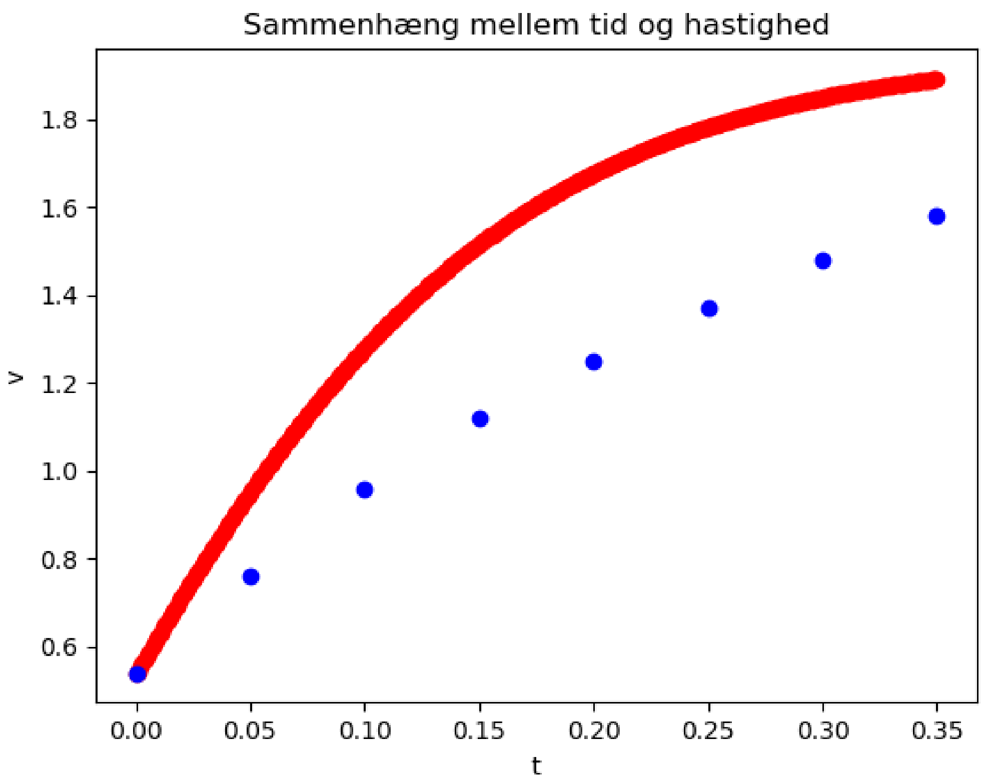
```
# --- Eulers metode ---
while(t0<tmax):      # Proceduren gentages indtil makstiden opnaas
    s1 = s0 + v0*dt # Her skriver vi ligningerne ind.
    v1 = v0 + a0*dt
    p = float(math.pow(v0, q))
    a1 = float((-(k/m)*p)+g)        # Den er her konstant
    t1 = t0 + dt
    sdat.append(s1) # Beregningen af det nye punkt tilfoejes til listerne
    vdat.append(v1)
    adat.append(a1)
    tdat.append(t1)
    s0 = s1          # Det ny punkt laves til udgangspunkt for naeste beregning
    v0 = v1
    t0 = t1
    a0 = a1

with open("data.csv",'w') as myfile:
    myfile.write("Tid,Sted,Hastighed,Acceleration \n")
    for i in range(0, tdat.__len__()):
        myfile.write(str(tdat[i]) + "," + str(sdat[i]) + "," + str(vdat[i]) + "," + str(adat[i]) + "\n")


        # --- GRAFIK ---
        figure(1)
        title("Sammenhaeng mellem tid og sted")
        xlabel(" t ")
        ylabel(" s ")
        plot(tdat,sdat,'ro')     # Her tegnes simuleringen
        plot(tidboi, position,'bo')     # Her tegnes simuleringen
```

```
figure(2)
title("Sammenhaeng mellem tid og hastighed")
xlabel(" t ")
ylabel(" v ")
plot(tdat,vdat,'ro')     # Her tegnes simuleringen
plot(tidboi,velocity,'bo')     # Her tegnes simuleringen

figure(3)
title("Sammenhaeng mellem tid og acceleration")
xlabel(" t ")
ylabel(" a ")
plot(tdat, adat,'ro')     # Her tegnes simuleringen
plot(tidboi, acceleration,'bo')     # Her tegnes
                                   simuleringen

show()                        # Og her laver programmet grafen
```

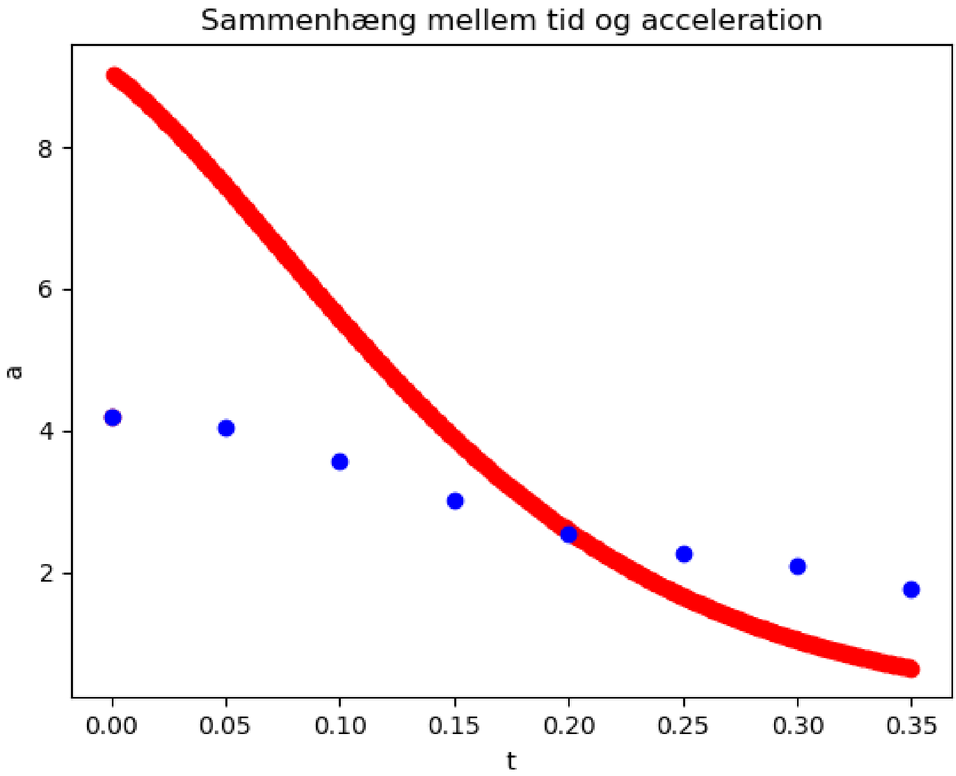
Bilag 4


Sammenhæng mellem tid og sted
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
s
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
t

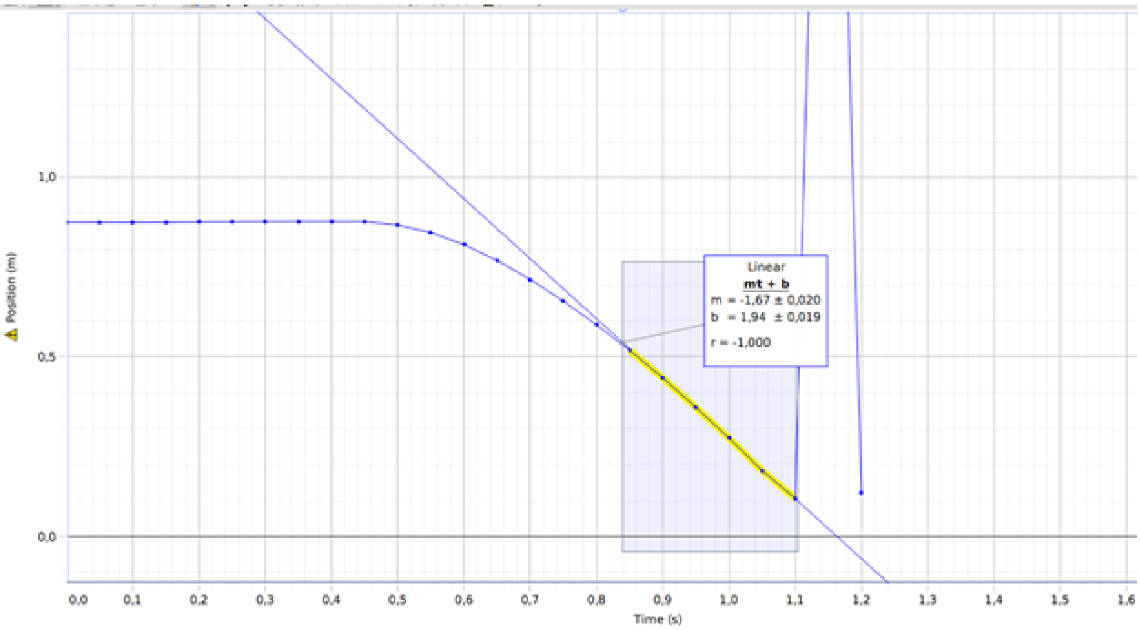
Bilag 5


Sammenhæng mellem tid og hastighed
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
v
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
t

Bilag 6


Sammenhæng mellem tid og acceleration
a
8
6
4
2
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
t

Bilag 7


Linear
mt + b
m = -1,67 ± 0,020
b = 1,94 ± 0,019
r = -1,000
Position (m)
Time (s)
1,0
0,5
0,0
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6

Bilag 8