Matematik Aflevering 11

Jeppe Møldrup

9.301*

En funktion f er bestem ved

$$f(x) = 6x^2 + 3$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(2, 10)$

Jeg starter med at finde den generelle funktion F ved at integrere funktionen f

$$F(x) = \int 6x^2 + 3 \, \mathrm{d}x = 2x^3 + 3x + k$$

Da jeg ved at den går gennem punktet $P(2, 10)$, kan jeg indsætte det ind i funktionen og udregne k

$$10 = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 + k \Leftrightarrow 10 = 22 + k \Leftrightarrow k = -12$$

Så forskriften for funktionen F er

$$F(x) = 2x^3 + 3x - 12$$

9.304

I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(20, 5)$ og $B(5, 10)$ samt en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a. Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{AB}$ og $\vec{a}$

Jeg starter med at finde koordinaterne til vektor $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 20 \\ 10 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nu skal jeg bare finde den numeriske værdi af determinanten mellem $\vec{AB}$ og $\vec{a}$ da dette er lig med arealet af parallelogrammet mellem dem

$$A = |-15 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)| = |-30 + 5| = 25$$

Så arealet af parallelogrammet er 25

b. Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{AB}$ på $\vec{a}$

Jeg bruger formlen for vektorprojektion

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Så i mit tilfælde er det

$$\vec{AB}_a = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{a}}{|\vec{AB}|^2} \cdot \vec{a}$$

Så jeg indsætter mine værdier

$$\vec{AB}_a = \frac{-15 \cdot (-1) + 5 \cdot 2}{\sqrt{5}^2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Så projektionen af $\vec{AB}$ på $\vec{a}$ er $\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

9.305

For et bestem fragtskib har man sammenhørende værdier af motoreffekt og fart.

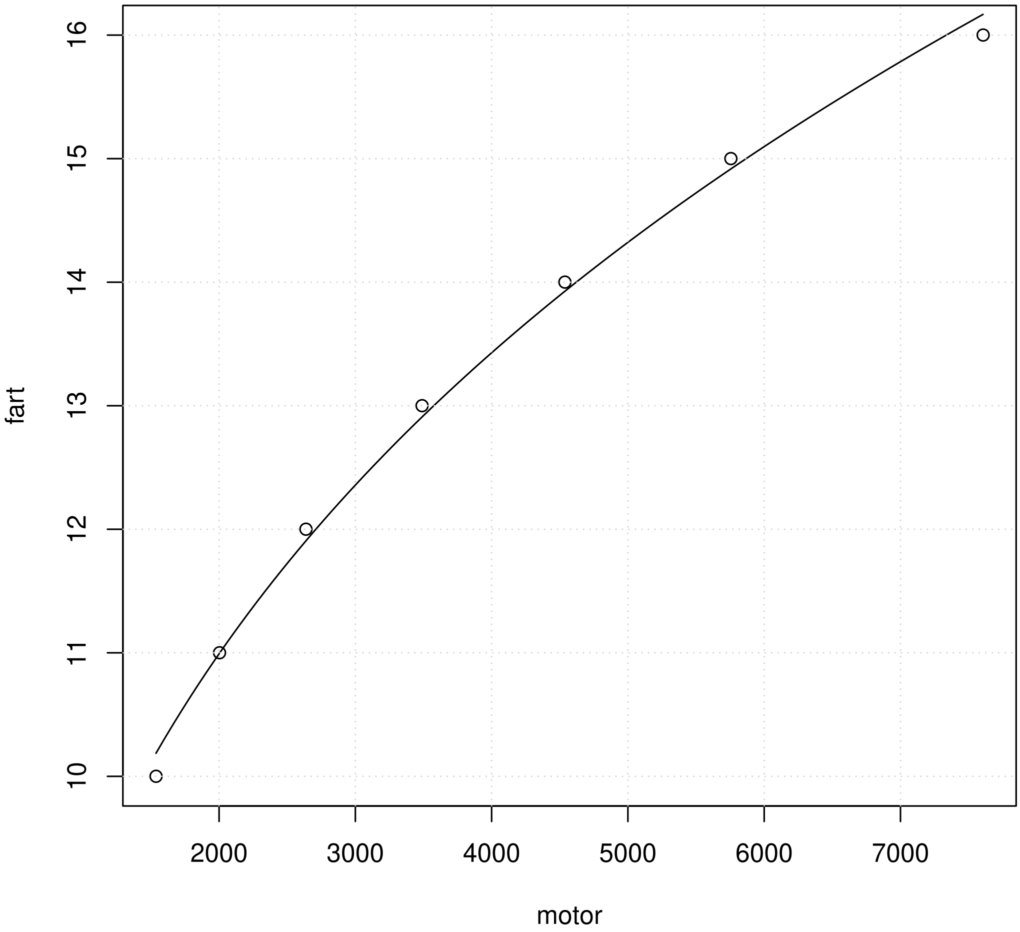
Motoreffekt(kW)	1537	2003	2637	3489	4537	5755	7606
Fart(knob)	10	11	12	13	14	15	16

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

Hvor $f(x)$ er farten(målt i knob) ved en motoreffekt på x (målt i kW).

a. Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.



Jeg har fundet a og b til at være

$$b = 1.2230694 \quad \text{og} \quad a = 0.2888837$$

dvs. forskriften for $f(x)$ er

$$f(x) = 1.2230694 \cdot x^{0.2888837}$$

b. Hvor hurtigt sejler skibet, når motoreffekten er 8000 kW

Jeg indsætter 8000 kW ind i funktionen

$$f(8000) = 1.2230694 \cdot 8000^{0.2888837} = 16.4055266839$$

Så farten i knob når motoreffekten er ved 8000 kW er cirka 16.41

c. Hvor mange procent øget farten, når motoreffekten øges med 30%?

I potensfunktioner er sammenhængen mellem fremskrivningsfaktoren F_x og F_y

$$F_x = \sqrt[a]{F_y}$$

Så jeg indsætter bare mine værdier(Hvor 30% = 0.30)

$$F_y = 0.30^{0.2888837} = 0.70623437658 \approx 70\%$$

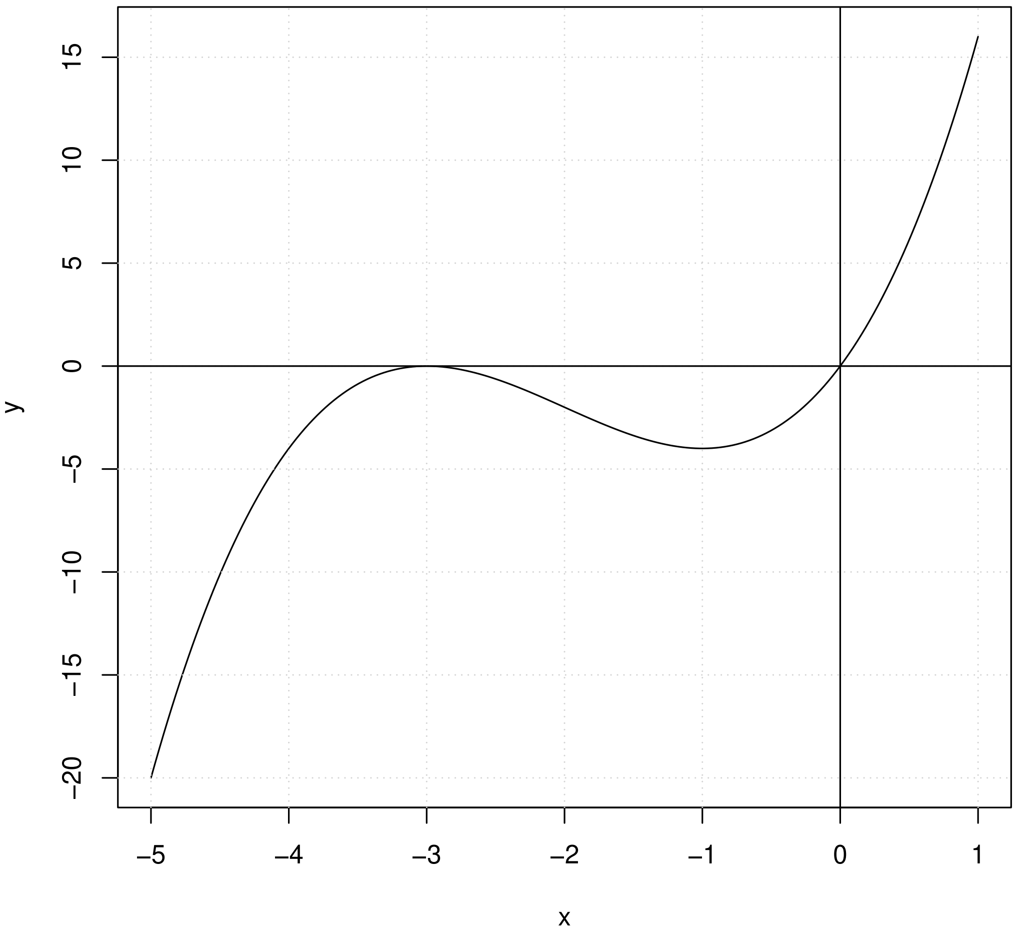
Så når x bliver øget med 30% bliver y øget med 70%

9.306

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

a. Tegn grafen for f, og bestem funktionen nulpunkter



Jeg finder nulpunkterne, dvs. de punkter hvor $f(x) = 0$ vha. solve

$$solve(0 = x^3 + 6x^2 + 9x, x) \rightarrow x = -3 \vee x = 0$$

Så grafen rammer x-aksen to steder, i $x = -3$ og i $x = 0$

b. Bestem monotoniforholdene for f.

Jeg finder samtlige mulige ekstremaer ved at finde alle steder for hældningen af f er 0, dvs. der hvor $f'(x) = 0$, dette gør jeg vha. solve

$$solve(f'(x) = 0, x) \rightarrow x = -3 \vee x = -1$$

Jeg undersøger så hældningen af grafen før, mellem og efter punkterne for at se om det er maksimummer, minimummer eller vandrette vendetangenter

$$f'(-4) = 9$$

$$f'(-2) = -3$$

$$f'(0) = 9$$

Så jeg ved at punktet $x = -3$ er et maksimum og punktet $x = -1$ er et minimum, så nu kan monotoni linjen tegnes

x		-3		-1	
f'	+	0	-	0	+
f	voks.	lok. max.	aft.	lok. min.	voks.

Så f er voksende i $x < -3$

f er aftagende i $-3 < x < -1$

f er voksende i $-1 < x$

En anden funktion g er bestemt ved

$$g(x) = -x^2 + bx + c$$

hvor b og c er konstanter. Det oplyses, at graferne for f og g har en fælles tangent t i punktet $P(1, f(1))$

c. Bestem en ligning for tangenten t, og bestem konstanterne b og c.

Jeg starter med at udregne puntets y-værdi

$$f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 16$$

Så punktet er $P(1, 16)$. Derefter finder jeg hældningen af f i punktet P

$$f'(1) = 24$$

Nu finder jeg den afledte funktion af g

$$g'(x) = -2x + b$$

Så jeg ved at ved x-værdien 1 er den afledte funktion af g 24, så jeg finder b

$$24 = -2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 26$$

Så indsætter jeg det i funktionen for g

$$g(x) = -x^2 + 26x + c$$

Da dette punkt går gennem punktet P kan jeg finde c

$$16 = -1^2 + 26 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -8$$

Så funktionen for g er

$$g(x) = -x^2 + 26x - 8$$

For at finde ligningen til tangenten t, ved jeg at hældningen er 24

$$y = 24x + b$$

Den går også gennem punktet P så jeg kan finde b

$$16 = 24 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -8$$

Så ligningen for tangenten t er

$$y = 24x - 8$$

9.307

Den væksthastighed, hvormed salmonellabakterier udvikler sig i råt kød, afhænger af den demperatur, som kødet opbevares ved. I en model kan væksthastigheden for salmonellabakterier som funktion af temperaturen beskrives ved funktionen

$$r(t) = 7.18 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 0.93)^2 \cdot (1 - e^{0.464 - (t - 46.96)}), \quad 0 \le t \le 47$$

hvor $r(t)$ betegner væksthastigheden af salmonellabakterier (målt i CFU/g pr. time), og t betegner temperaturen (målt i °C).

a. Bestem den temperatur, hvor væksthastigheden for salmonellabakterier er størst.

For at finde den temperatur, hvor væksthastigheden er størst. Skal jeg finde toppunktet på funktionen for væksthastighed. Dvs. jeg skal finde alle mulige ekstremaer for den afledte funktion, dvs. jeg skal finde der hvor $r''(t) = 0$. Dette gør jeg vha. solve

$$solve((7.18 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 0.93)^2 \cdot (1 - e^{0.464 - (t - 46.96)}))'' = 0, t) \to t = 1.52 \vee t = 4.34$$

Så undersøger jeg områderne før, efter og mellem

$$r''(1) = -1.8 \cdot 10^{17}$$

$$r''(2) = 4.35 \cdot 10^{16}$$

$$r''(5) = -4.36 \cdot 10^{15}$$

Så punktet $t = 4.34$ er et maksimum. Så der hvor væksthastigheden er højest er ved temperaturen $t = 4.34$