Matematik aflevering 5

9.206

To funktioner g og h er givet ved

$$g(x) = 4(1 - e^{-x}) \; og \; h(x) = e^x - 1$$

a. Tegn graferne for g og h i samme koordinatsystem, og bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem de to grafer.

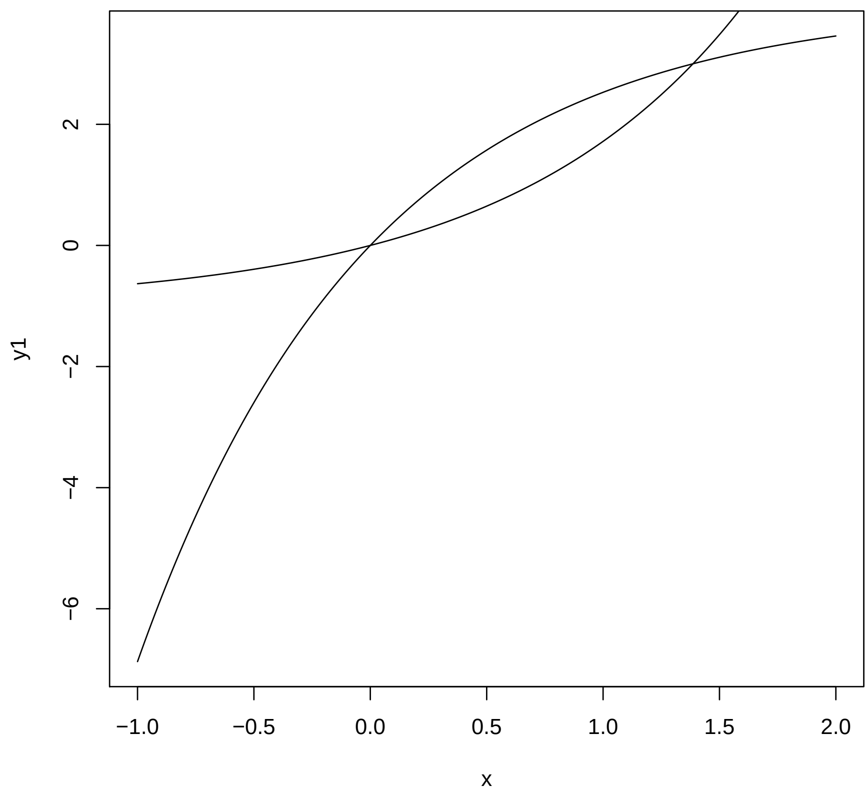

Figure 1: plot of chunk unnamed-chunk-1

For at finde de to skæringspunkter skal jeg finde de steder på graferne hvor både x og y er ens, dette gør jeg vha. solve

$$solve(y = 4(1 - e^{-x}) \; and \; y = e^{x} - 1, x, y) \rightarrow x = 0, y = 0$$
$$x = 1.38629, y = 3$$

Graferne for g og h afgrænser en punktmængde M, der har et areal

b. Bestem arealet af M.

Jeg bruger formlen

$$V = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) \; dx \right|$$

Så jeg indsætter mine værdier

$$V = \left| \int_0^{1.38629} (4(1 - e^{-x}) - (e^{x} - 1)) \; dx \right| = 0.931472$$

Så arealet af punktmængden M er cirka 0.93

c. Bestem $g'(x)$, og gør rede for, at g er voksende

$$g'(x) = (4(1 - e^{-x}))' = 4e^{-x}$$

g er voksende fordi dens afledte funktion altid er positiv lige meget hvilken x værdi du giver den

9.207

En kugle i et koordinatsystem i rummet har centrum i $C(0, 0, 5)$, og punktet $P(2, -1, 3)$ ligger på kuglen

a. Bestem en ligning for kuglen, og bestem en ligning for kugles tangentplan i P.

Jeg indsætter værdierne i skabelonen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = r^2$$

For at finde kuglens radius finder jeg længden af vektoren mellem centrum og punktet på kuglen med formlen

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 + 1 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

Så kuglens ligning er

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$$

For at finde ligningen for tangentplanen i P bruger jeg $\vec{r}$ som min normalvektor og punktet P som mit punkt og indsætter det i skabelonen

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \quad -2(x-2) + (y+1) + 2(z-3) = 0$$

En anden tangentplan til kuglen er givet ved ligningen

$$\alpha : \qquad 3x + 6y - 6z + 3 = 0$$

b. Bestem koordinatsættet til røringspunktet Q mellem kuglen og α

Jeg ved at planen er tangent på kuglen, dvs. at en normalvektor fra kuglens centrum ud til planen vil ligge på punktet Q. Så jeg projicere kuglens centrum på planen ved først at finde parameterfremstillingen for linjen der går gennem centrummet og har planens normalvektor som retningsvektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Nu kan jeg opskive funktionerne for de tre koordinater

$$x = 2 + 3t$$
$$y = -1 + 6t$$
$$z = 3 - 6t$$

Nu kan jeg finde skæringspunktet mellem linjen og planen ved at indsætte de tre funktioner for koordinaterne og finde værdien af t

$$3(2+3t) + 6(-1+6t) - 6(3-6t) + 3 = 0$$

Jeg finder værdien af t vha. solve

$$solve(3(2+3t) + 6(-1+6t) - 6(3-6t) + 3 = 0, t) \to t = 0.18519$$

Så indsætter jeg det i linjens parameterfremstilling og finder punktet

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.18519 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.55557 \\ 0.11114 \\ 1.88886 \end{pmatrix}$$

Så røringspunktet mellem planen α og kuglen er cirka $\begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.1 \\ 1.8 \end{pmatrix}$

9.208

I en model for udviklingen af en bestem type kræftsvulst er antallet af kræftceller en funktion af tiden, der opfylder differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0.82 \cdot 0.88^t \cdot N$$

Hvor N er antallet af kræftcetter (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i døgn). Det oplyses, at $N(10) = 266$.

a. Bestem vækshastigheden til tidspunktet $t = 10$

Jeg indsætter N og t ind i differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0.82 \cdot 0.88^{10} \cdot 266 = 60.75$$

Så efter 10 døgn kommer der 60.75 millioner flere kraftceller til hver dag

b. Bestem en forskrift for $N(t)$

Jeg starter med at løse differentialligningen vha. seperation af de variable

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0.82 \cdot 0.88^t \Leftrightarrow \int \frac{1}{N}\ dN = \int 0.82 \cdot 0.88^t\ dt$$

$$\ln(N) = -6.4146 \cdot 0.88^t + k$$

Jeg isolerer så N

$$N(t) = e^{-6.4146 \cdot 0.88^t + k}$$

Jeg ved at $N(10) = 266$ så jeg kan indsætte dette ind i funktionen og finde værdien af k vha. solve

$$solve(266 = e^{-6.4146 \cdot 0.88^{10} + k}, k) \to k = 7.36997$$

Så forskriften for $N(t)$ er $N(t) = e^{-6.4146 \cdot 0.88^t + 7.36997}$

9.209

a. Opstil et udtryk, der beskriver symønsterets omkreds udtrykt ved x og y

Omkredsen ville have værdien af y to gange til siderne, $2x$ en gang til bunden, og halvdelen af omkredsen af en cirkel med radius x. Så funktionen for omkredsen er

$$O = 2y + 2x + 2x\pi$$

b. Bestem symønstrets areal som funktion af x, når omkredsen er 100 cm.

Jeg indsætter 100 ind på O's plads og isolerer y

$$100 = 2y + 2x + 2x\pi \Leftrightarrow y(x) = 50 - x - x\pi$$

c. Bestem x, således at symønsterets areal bliver størst muligt, når omkredsen er 100 cm.

Jeg starter med at opskrive en ligning for arealet af mønstret

$$V = 2x \cdot y - \frac{\pi}{2}x^2$$

Nu indsætter jeg højre side fra funktionen fra opgave b ind på y's plads

$$V = 2x \cdot (50 - x - x\pi) - \frac{\pi}{2}x^2 \Leftrightarrow V = 100x - 2x^2 - 2x^2\pi - \frac{pi}{2}x^2$$

Nu finder jeg monotoniforholdende for V ved at finde samtlige mulige ekstremaer, dvs. der hvor $V'(x) = 0$

$$V' = 100 - 4x - 5\pi x$$

Jeg finder hvor $V'(x) = 0$ vha. solve

$$solve(0 = 100 - 4x - 5\pi x, x) \rightarrow x = 5.0741$$

Nu kigger jeg på området før og efter denne x-værdi for at se om det er et maksimum, minimum eller vandret vendetangent

$$V'(10) = 100 - 4 \cdot 10 - 5\pi \cdot 10 = -97.08$$

$$V'(2) = 100 - 4 \cdot 2 - 5\pi \cdot 2 = 60.58$$

Så da området før er voksende og området efter er aftagende ved jeg at det er et maksimum i punktet $x = 5.0741$ dvs. det punkt hvor V er højest.