Matematik aflevering 3

1.005

En cirkel C og en linge l er bestemt ved

$$C: \ x^2 - 4x + y^2 + 2y = 11$$
$$l: y = x + 1$$

Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem l og C

Jeg ved at ved skærringspunktern er både x og y værdierne ens for l og C. Og da l er bestemt ved $y = x + 1$ kan jeg bare indsætte $x + 1$ ind på y's plads i cirklen C.

$$x^2 - 4x + \underbrace{(x+1)^2}_{\text{Kvadratsætning}} + 2(x+1) = 11$$
$$x^2 - 4x + x^2 + 1 + 2x + 2x + 2 = 11$$
$$2x^2 - 4x + 4x = 8$$
$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Så x værdierne til de to punkter er henholdsvis 2 og -2. Nu kan jeg indsætte dem ind i linjens ligning for at finde de tilhørerne y-værdier

$$y = x + 1 \Leftrightarrow y = 2 + 1 = 3 \vee y = -2 + 1 = -1$$

Så de to punkter hvor cirklen og linjen skærer hinanden er $(2, 3)$ og $(-2, -1)$

1.006

En cirkel har centrum i punktet $C(3, -2)$ og gå gennem punktet $P(0, 2)$.
Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet P.

Jeg ved fra afstandsfunktionen mellem en cirkels centrum og en linje at linjen mellem centrum og punktet P ligger retvinklet på tangenten til punktet P. Så jeg kan bruge vektor $\vec{PC}$ som min normalvektor. Og så kan jeg bruge skabelonen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Hvor a og b er koordinaterne til min normalvektor.

$$3(x - 0) - 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$$

Så linjens ligning vil være $y = \frac{3}{4}x + 2$

1.049

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 7\ln(x) - 2x^2$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$

Jeg starter med at differentiere funktionen f

$$f'(x) = (7\ln(x) - 2x^2)' = \frac{7}{x} - 4x$$

Så indsætter jeg 1 ind i den differentierede funktion for at finde hældningen til punktet P

$$f'(x) = \frac{7}{1} - 4 \cdot 1 = 7 - 4 = 3$$

Så hældningen til ligningen for tangenten til punktet P er 3
Så jeg indsætter det i en formel for lineær vækst

$$y = 3x + b$$

Nu finder jeg den tilhørerne y-værdi til x-værdien 1 ved at indsætte 1 ind i funktion f

$$f(1) = 7\ln(1) - 2 \cdot 1^2 = -2$$

Så punktet P er altså $P(1, -2)$
Jeg indsætter det i den lineære formel og isolerer b

$$-2 = 3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -5$$

Så ligningen for tangenten til grafen for f i punktet P er $y = 3x - 5$

1.074

Gøre rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion

Den røde graf hører til $f(x)$ fordi den blå graf har en negativ hældning i starten mens den røde graf aldrig kommer under 0 på y-aksen så den kan ikke være den afledte funktion til den blå.

9.217

Ved genoptræning af en patient efter en korsbåndsoperation i knært anvendes en maskine, som bøjer patientens knæ. I tabellen ses sammenhørende værdier af den vinkel, som knæet køjes med, og den kraftpåvirkning, der registreres i det nye korsbånd.

Vinkel(grader)	20	40	60	80
Kraftpåvirkning(N)	0.035	0.063	0.085	0.10

I en model antages des, at kraftpåvirkningen i korsbåndet som funktion af vinklen er af typen

$$f(x) = b \cdot x^a, \qquad 0 \leq x \leq 90$$

hvor $f(x)$ betegner kraftpåvirkningen(målt i N) ved vinklen x(målt i grader).

a. Bestem a og b

Jeg laver potensregression på dataet

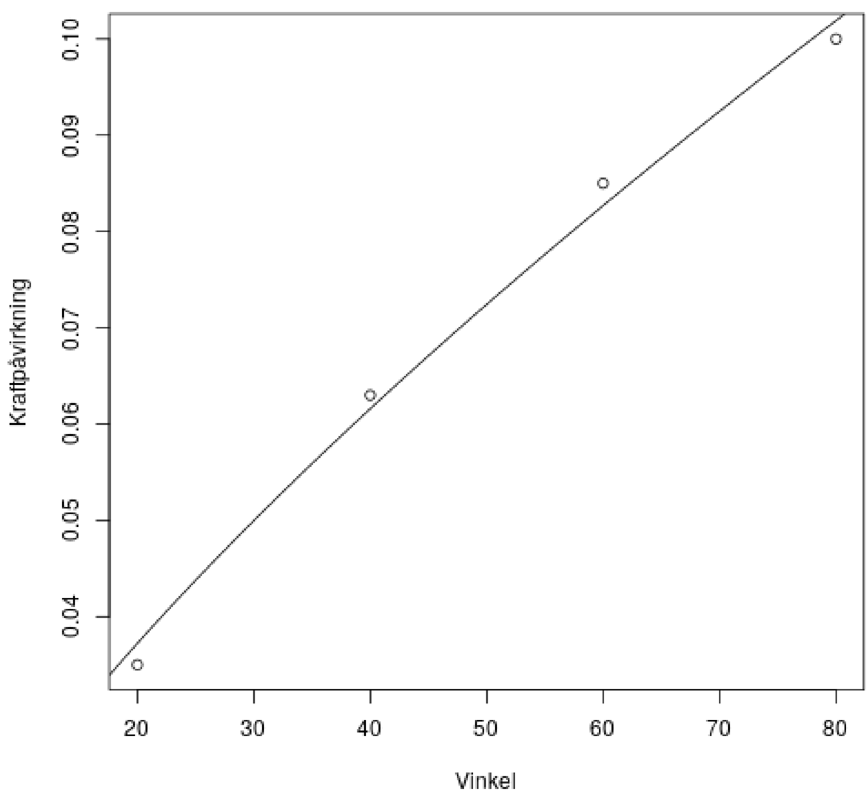

Figure 1: Potensregression

$a = 0.726$ og $b = 0.00422$

b. Jeg indsætter bare 45° ind i funktionen

```
## [1] 0.06709623
```

$$f(45°) = 0.0671\ N$$

c. Bestem hvor meget kraftpåvirkningen øges, når vinklen øges med 30%

Da det er en potensfunktion kan jeg bruge formlen

$$F_y = F_x^a$$

hvor F er fremskrivningsfaktoren for henholdsvis x og y

$$0.30^{0.726} \cdot 100\% = 11.8138\%$$

Så for hver gang vinklen øges med 30% så øges kraftpåvirkningen med 12%

9.234

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$$

og en linje l er gived ved ligningen

$$3x + 4y - 7 = 0$$

a. Bestem afstanden fra cirklens centrum til linjen l

Jeg har cirklens ligning i formen

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

hvor (x_0, y_0) er cirklens centrum og r er cirklens radius
Så cirklens centrum er $C(2, -1)$
Nu kan jeg bare bruge formlen for afstanden mellem et punkt og en linje

$$dist(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Så jeg indsætter punktet og linjen

$$dist(C, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot -1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

Så afstanden mellem cirklens centrum og linjen l er 1

Linjen m går gennem cirklens centrum og er venkelret på l

b. Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen m og cirklen.

Linjen l har normalvektoren

$$\vec{n_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Og da m ligger ret på l betyder det at $\vec{n}$ er retningsvektor for m, og m går gennem cirklen centrum. så vi har en retningsvektor og et punkt for m, så vi kan hatte retningsvektoren for at få en normalvektor og så opstille linjens ligning

$$\vec{n} = \hat{\vec{n_l}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-4(x-2) + 3(y+1) = 0$$

Jeg isolerer y i linjens ligning

$$-4x + 8 + 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow -4x + 3y = -11 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{4}$$

Nu kan jeg indsætte det på y's plads i cirklens formel

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 100 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{11}{4} + 1)^2 = 100$$

Nu har jeg en lidt uoverskuelig ligning som jeg løser vha. solve

$$solve((x-2)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{11}{4} + 1)^2 = 100, x) \rightarrow x = -4.4309 \vee x = 7.5509$$

Nu kan jeg indsætte de to x-værdier ind i linjens ligning for at få de tilsvarende y-værdier

$$y = \frac{4}{3} \cdot -4.4309 - \frac{11}{4} = -8.65786 \vee y = \frac{4}{3} \cdot 7.5509 - \frac{11}{4} = 7.31786$$

Så de to skæringspunkter er henholdsvis $(-4.43, -8.66)$ og $(7.55, 7.32)$

9.237

I en model kan udviklingen i et barns højde de første 48 måneder beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 5.24 - 0.045 \cdot h, \qquad 0 \leq t \leq 48$$

hvor t er barnets alder(målt i måneder), og h er barnets højde(målt i cm), I modellen er et barn 50 cm højt ved fødslen.

a. Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden, når barnet er 100 cm højt.

Jeg indsætter 100 cm ind i differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 5.24 - 0.045 \cdot 100 = 0.74 \frac{cm}{måned}$$

Så væksthastigheden når barnet er 100 cm højt er 0.74 cm pr måned

b. Bestem en forskrift for h, og benys denne til at bestemme barnets alder, når det er 100 cm højt

Differentialligningen følger formen

$$\frac{dy}{dx} = b - ay$$

Så løsning kommer til at være

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Så jeg indsætter værdierne

$$h = \frac{5.24}{0.045} + c \cdot e^{-0.045 \cdot t}$$

Jeg ved at i modellen er et barn 50 cm højt ved fødslen så jeg indsætter det og finder værdien af c

$$50 = \frac{5.24}{0.045} + c \cdot e^{-0.045 \cdot 0} = \frac{5.24}{0.045} + c \Leftrightarrow c = 50 - \frac{5.24}{0.045} = -66.4$$

Så den fulde løsning til differentialligningen er

$$h = \frac{5.24}{0.045} - 66.4 \cdot e^{-0.045 \cdot t}$$

Så indsætter jeg 100 cm ind i højden og finder den tilsvarende alder vha. solve

$$solve(100 = \frac{5.24}{0.045} - 66.4 \cdot e^{-0.045 \cdot t}, t) \to t = 31$$

Så når et barn er 100 cm højt er det cirka 31 måneder gammelt