Matematik Aflevering 9

Jeppe Møldrup

9.310

På figuren ses en skæv glaspyramide indtegnet i et koordinatsystemmed enheden dm på akserne. Glaspyramidens bund er kvadratisk, og koordinatsættene for hjørnepunkterne er angivet på figuren. Pyramidens højeste punkt betegnes T. Linjen l, der går gennem punktet A og punktet T, har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

a. Bestem en ligning for den plan α, der indeholder glaspyramidens sideflade ATB.

linjen l er parallel med planet α, da linjen skærer to punkter der ligger på planet α. Så derfor vil linjen l's retningsvektor ligge på planet α. Derudover har jeg vektor $\vec{AB}$ der også ligger på planet. Så jeg finder krydsproduktet af de to vektorer, da krydsproduktet ville være parallelt med de to vektorer, og derfor også planet, og derfor er det en normalvektor til planet α.

Vektorerne er:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -16 - 16 \\ 16 - 16 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Krydsproduktet, eller α's normalvektor er

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -16 \cdot 0 - 23 \cdot 0 \\ 23 \cdot -32 - (-27 \cdot 0) \\ -27 \cdot 0 - (-16 \cdot -32) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 736 \\ 512 \end{pmatrix}$$

Nu indsætter jeg bare normalvektoren og et punkt i skabelonen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow 0(x - 16) + 736(y - 16) + 512(z - 0) = 0$$

Så planet α's ligning er

$$736y + 512z - 11776$$

Den plan β, der indeholder sidefladen BCT, har ligningen

$$23x - 5z + 368 = 0$$

b. Bestem koordinatsættet til T, som er skæringspunktet mellem l og β.

Jeg ved at i punktet hvor linjen og planet skærer har de samme koordinater, så jeg indsætter bare alt min indformation og finder x, y og z vha. solve

$$solve(x = 16 - 27s\text{and}y = 16 - 16s\text{and}z = 23s\text{and}23x - 5z + 368 = 0, x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Så punktet hvor linjen l og planet β skærer er $\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$

c. Bestem den stumpe vinkel mellem α og β

Jeg ved at da normalvektoren for et plan sidder ret på planet vil vinklen mellem de to normalvektore være det samme som vinklen mellem de to planer. Normalvektoren for de to planer er

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 736 \\ 512 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Så jeg finder vinklen mellem dem med formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow v = \cos^{-1}(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$$

Så jeg indsætter mine værdier

$$v = \cos^{-1}(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}\ | \cdot |\vec{\beta}\ |}) = 96.97°$$

Så den stumpe vinkel mellem planerne α og β er cirka $96.97°$

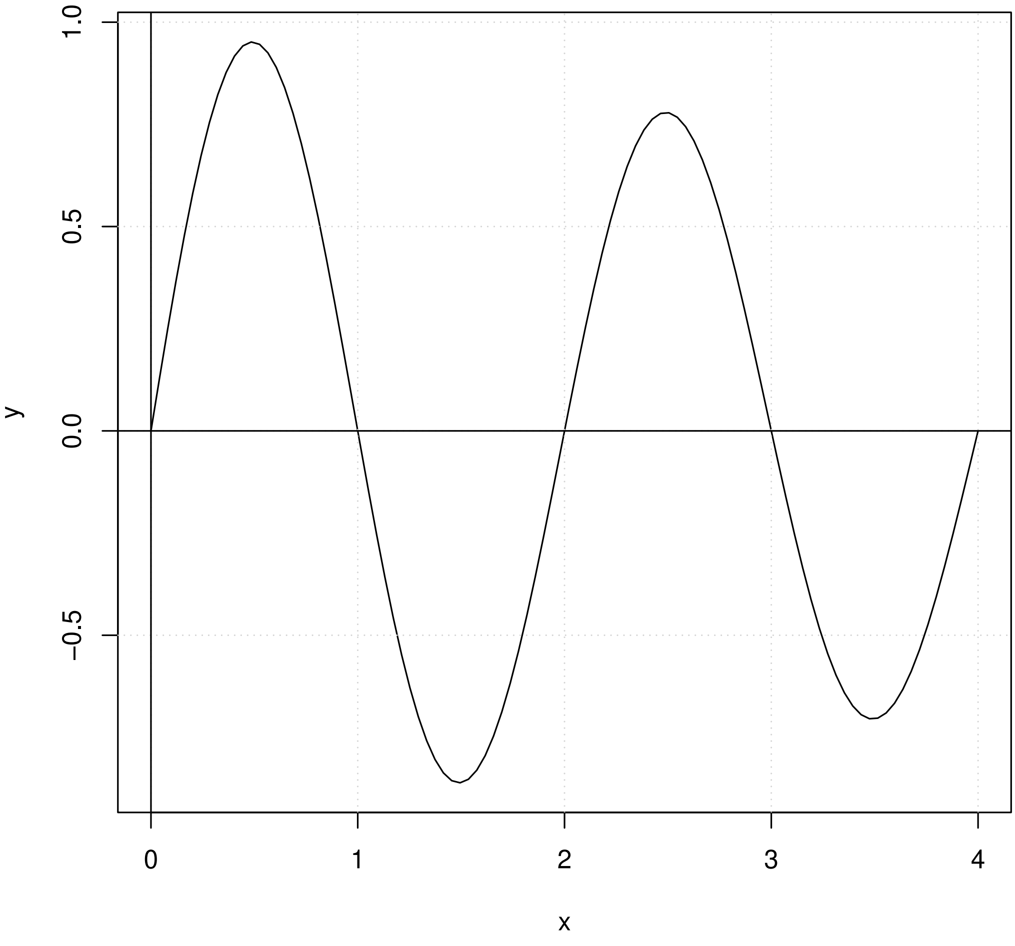
9.311

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{-0.1 \cdot x} \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad x \geq 0$$

Funktionen f har i intervallet [0;3] to x-værdier x_1 og x_2, hvori der er lokale maksima

a. Tegn grafen for f, og bestem koordinatsættene til hvert af punkterne $A(x_1, f(x_1))$, og $B(x_2, f(x_2))$



For at finde koordinaterne til de lokale maksima, finder jeg alle mulige ekstremaer i intervallet $x = 0$ til $x = 3$, dvs. der hvor $f'(x) = 0$ vha. solve

$$solve(f'(x) = 0, x)|0 \leq x \leq 3 \rightarrow x = 0.489871 \vee x = 1.48987 \vee x = 2.48987$$

Jeg kan se på grafen at det første og det sidste punkt er x-værdierne for de lokale maksima. Så jeg indsætter de x-værdier i funktionen og finder de tilsvarende y-værdier.

$$f(0.489871) = e^{-0.1 \cdot 0.489871} \cdot \sin(\pi \cdot 0.489871) = 0.981711$$

$$f(2.48987) = e^{-0.1 \cdot 2.48987} \cdot \sin(\pi \cdot 2.48987) = 0.779195$$

Så de to punkter A og B er

$$A: \quad (0.489871, 0.981711)$$

$$B: \quad (2.48987, 0.779195)$$

b. Bestem en forskrift for den eksponentialfunktion $g(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem A og B

Jeg bruger formlen

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

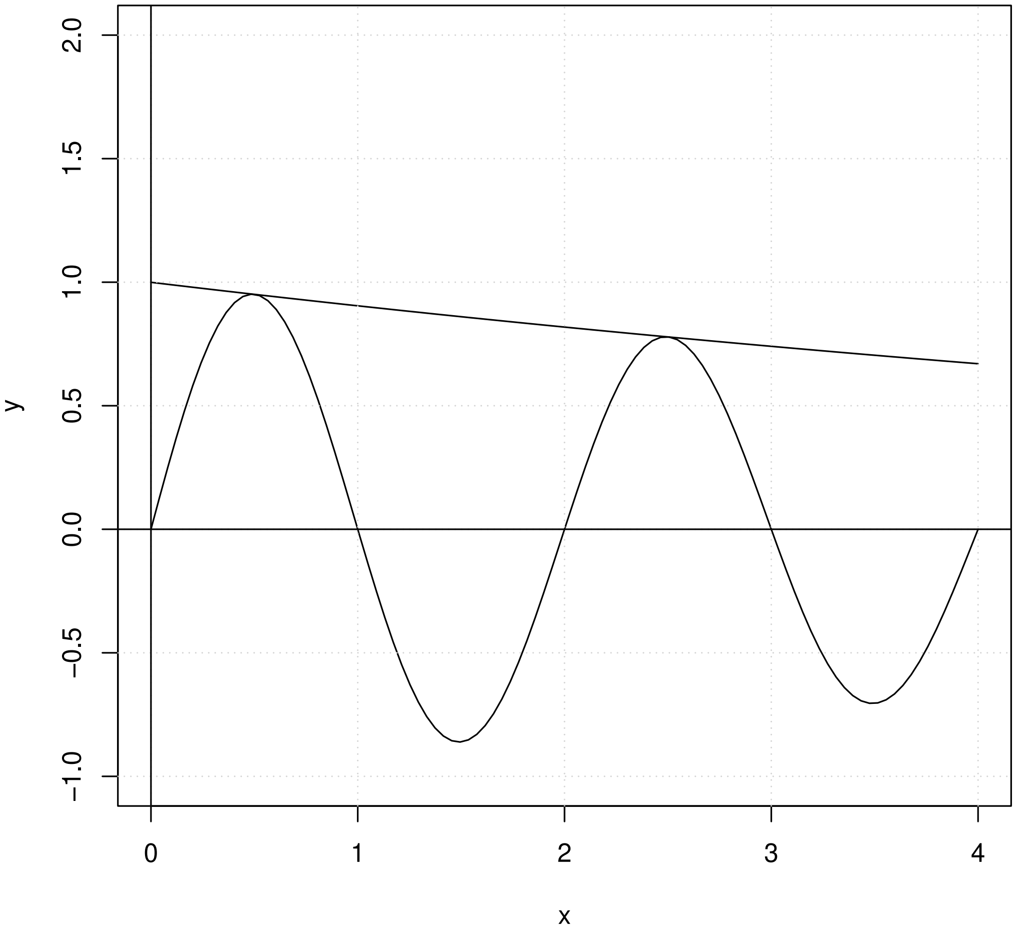
og indsætter punkterne A og B

$$a = \sqrt[2.48987-0.489871]{\frac{0.779195}{0.981711}} = 0.904837$$

Nu kan jeg bruge min værdi for a sammen med et punkt til at finde b

$$b = \frac{0.981711}{0.904837^{0.489871}} = 0.999494$$

Nu kan jeg plotte det sammen med den anden funktion



$$g(x) = 0.999494 \cdot 0.904837^x$$

Graferne for de to funktioner f og g afgrænser i intervallet $[x_1; x_2]$ et område M, der har et areal

c. Bestem arealet af M

For at finde arealet bruger jeg formlen

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x) \, \mathrm{d}x \right|$$

Så jeg indsætter værdierne

$$A = \left| \int_{0.489871}^{2.48987} (0.999484 \cdot 0.904837^x) - (e^{-0.1 \cdot x} \cdot \sin(\pi \cdot x)) \, \mathrm{d}x \right| = 1.72165$$

Så arealet af M er cirka 1.72

9.312

I en model for en bestem kemisk reaktion omdannes et stof A. Mængden af stoffen A som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2$$

hvor k er en konstant, og M er mængden (målt i mg) af stoffen A til tidspunktet t (målt i minutter). Til tidspunktet $t = 0$ er der 70 mg af stoffet A, og til tidspunktet $t = 60$ er der 20 mg tilbage af stoffet A

a. Bestem en forskrift for $M(t)$, og bestem konstanten k.

Jeg bestemmer en forskrift vha. desolve

$$desolve(M' = -k \cdot M^2 \text{and} M(0) = 70, m, t) \to M(t) = \frac{70}{70 \cdot k \cdot t + 1}$$

For så at finde værdien af k indsætter jeg punktet $M(60) = 20$ ind i solve

$$solve\left(20 = \frac{70}{70 \cdot k \cdot 60 + 1}, k\right) \to k = \frac{1}{1680}$$

Så hele forskriften er

$$M(t) = 67318 \cdot t$$

b. Bestem $M'(60)$, og gør rede for betydningen af dette tal

Jeg ved at $M(60) = 20$ så jeg tager denne værdi og indsætter i differentialligningen, da $\frac{dM}{dt}$ er hældningen af grafen

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2 \Leftrightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{-1}{1680} \cdot 20^2 = -0.2381$$

Så hældningen af grafen til tiden $t = 60$ er cirka 0.2381, dette betyder at mængden af stoffet A aftager med 0.2381 mg per minut efter 60 minutter

9.315*

En funktion f er bestem ved

$$f(x) = e^x + 2$$

Grafen for f, de to koordinatakser og linjen med ligningen $x = 1$ afgrænser i 1.kvadrant en punktmængde M (se figur).

Bestem arealet af M

Jeg ved at arealet af M er integralet af f mellem 0 og 1, Så jeg integrerer bare f mellem de to grænser

$$\int_0^1 e^x + 2 \, dx = [e^x + 2x]_0^1 = (e^1 + 2 \cdot 1) - (e^0 + 2 \cdot 0) = e^1 + 2 = 2$$

Så arealet af punktmængden M er 2

9.316*

For en kugle med radius r og volumen V gælder, at $v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ En bestemt kugle har rumfanget $\frac{32}{3} \cdot \pi$

Bestem radius for denne kugle

Jeg starter med at splitte brøken op i to dele, en der er $\frac{4}{3}$ og den anden $\frac{32-4}{3}$

$$\frac{32}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi = \frac{96}{12} \cdot \pi = \frac{32}{4} \cdot \pi = 8 \cdot \pi$$

Så $r^3 = 8$ dvs $r = \sqrt[3]{8} = 2$, så radius af kuglen er 2