Matematik aflevering 4

9.212, 9.218, 9.219, 9.222, 9.225

9.212

I et koordinatsystem i rummet er en kugle givet ved ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 + 2z + 2 = 0$$

Bestem kugles radius og koordinatsættet til dens centrum

Kugles ligning er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Så i ligningen har de udregnet alle kvadratsætningerne og trukket alle konstanterne fra de kunne. Så jeg skal regne kvadratsætningerne tilbage mens jeg finder konstanterne x_0, y_0 og z_0

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + x_0^2 + y^2 + 6y + y_0^2 + z^2 + 2z + z_0^2 + 2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 + 2 &= -1 + 9 + 1 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Cirklens centrum ligger i $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, så den er $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og radiussen er $r^2 = 9 \Leftrightarrow r = 3$

9.218

a. Bestem en ligning for den plan α, der indeholder tagfladen ABT.

   Jeg starter med at finde krydsproduktet mellem $\vec{TA}$ og $\vec{TB}$ da de begge ligger parallelt med planen og derfor er deres krydsprodukt en normalvektor til planen

$$\vec{TA} = A(400, 0, 200) - T(0, 0, 520) = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -320 \end{pmatrix}$$

$$\vec{TB} = B(280, 280, 200) - T(0, 0, 520) = \begin{pmatrix} 280 \\ 280 \\ -320 \end{pmatrix}$$

$$\vec{TA} \times \vec{TB} = \begin{pmatrix} 280 \cdot -320 - (-320) \cdot 0 \\ -320 \cdot 400 - 280 \cdot -320 \\ 280 \cdot -320 - (-320) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89600 \\ 38400 \\ 112000 \end{pmatrix}$$

Nu hvor jeg har et punkter og en normalvektor for planen kan jeg opstille planens ligning

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Med mine værdier bliver det

$$89600(x - 280) + 38400(y - 280) + 112000(z + 200) = 0$$

Det oplyses, at tagfladen BCT ligger i planen β med ligningen

$$12x + 28y + 35z = 18200$$

b. Bestem afstanden fra $O(0, 0, 0)$ til planen β

Jeg bruger formlen

$$dist(\beta, P) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

For at finde afstanden mellem origo og planen β
Så jeg indsætter mine værdier

$$dist(\beta, O) = \frac{|12 \cdot 0 + 28 \cdot 0 + 35 \cdot 0 - 18200|}{\sqrt{12^2 + 28^2 + 35^2}} = 392.24$$

Så afstanden mellem punktet $O(0, 0, 0$ og planen β er 392.2

c. Bestem vinklen mellem tagfladerne ABT og BCT

For at bestemme vinklen mellem to planer skal jeg bare finde vinklen mellem deres normalvektorer da de bare er forskudt med 90° i forhold til planen.
Og for at finde vinklen mellem to vektorer bruger jeg formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Så med mine værdier

$$\cos(v) = \frac{89600 \cdot 12 + 38400 \cdot 28 + 112000 \cdot 35}{\sqrt{89600^2 + 38400^2 + 112000^2} \cdot \sqrt{12^2 + 28^2 + 35^2}} \Leftrightarrow v = 28.2°$$

Så vinklen mellem tagfladerne ABT og BCT er cirka 28.2°

9.219

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 50\ln(x), \qquad x > 0$$

a. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $p(3, f(3))$

Jeg starter med at finde hældningen til tangenten i punktet $p(3, f(3))$ ved at differentiere funktionen og indsætte 3 i funktionen

$$f'(x) = (x^2 - 50\ln(x))' = 2x - \frac{50}{x}, \qquad x > 0$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - \frac{50}{3} = -10.\overline{6}$$

Nu kender jeg hældningen af grafen så jeg bruger formlen

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$t(x) = 10.\overline{6} \cdot (x - 3) - 45.93 = 10.\overline{6}x - 32 - 45.93$$

Så funktionen for tangenten til punktet $p(3, f(3))$ er $t(x) = 10.\overline{6}x - 77.93$

b. Bestem monotoniforholdene for f

For at finde monotoniforholdene for f finder jeg alle mulige ekstremaer, dvs. alle steder hvor

$$f'(x) = 0$$

$$solve(2x - \frac{50}{x} = 0, x) \to x = 5$$

Så kigger jeg så på området før og efter punktet for at finde om punktet er et maksimum, minimum eller en vandret vendetangent

$$2 \cdot 2 - \frac{50}{2} = -21$$

$$2 \cdot 10 - \frac{50}{10} = 15$$

Så området før punktet er aftagende og området efter er voksende, så det er et maksimum vi har med at gøre. Nu kan monotonilinjen tegnes

x	2	5	10
$f'(x)$	-21	0	15
$f(x)$	$\searrow$	minimum	$\nearrow$

Det oplyses, at der netop er én værdi af x_0, således at linjen med ligningen $y = f'(x_0) \cdot x$ er en tangent til grafen for f

c. Bestem denne værdi af x_0

I punktet hvor linjen tangerer har f og linjen de samme værdier for x og y, desuden har x_0 og x også den samme værdi i tangeringspunktet da x_0 i dette tilfælde er defineret til at være x-værdien for tangeringspunktet. Så jeg sætter de to ligninger(for linjen og for f) lig med hindanden og finder værdien af x vha. solve

$$solve(x^2 - 50\ln(x) = f'(x) \cdot x, x) \rightarrow x = 2.42$$

Så værdien af x_0 ville være 2.42

9.222

I en model, hvor alle enheder er målt i meter, følger buen den positive den af grafen for funktionen

$$f(x) = 211.4885 - 10.4801(e^{0.0329x} + e^{-0.0329x})$$

a. Bestem buens bredde ved jordoverfladen

   Jeg skal bare finde den tilhørende x-værdi til y-værdien 0 og fordoble den da x = 0 er midten af buen. Jeg finder x-værdien vha. solve.

$$solve(0 = 211.4885 - 10.4801(e^{0.0329x} + e^{-0.0329x}, x)|x > 0 \rightarrow x = 91.25$$

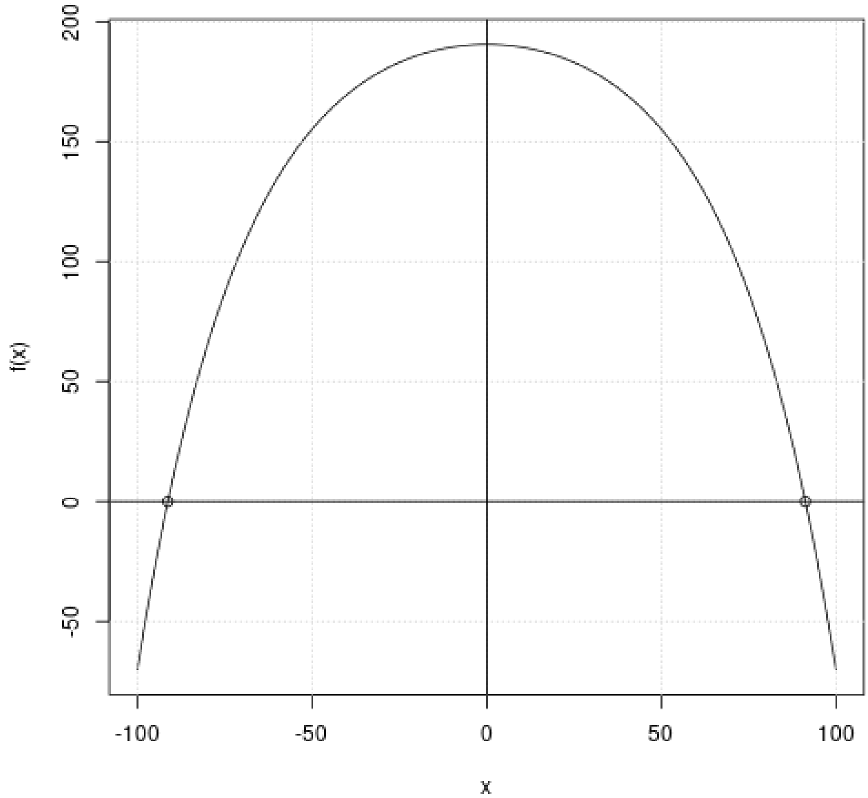

Figure 1: plot of chunk unnamed-chunk-1

Så buens bredde ved jordoverfladen er $2x = 2 \cdot 91.25 = 182.5\ m$

Det oplyses, at buelængden af grafen for en differentiabel funktion f i et interval $[a;b]$ kan bestemmes ved

$$l = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\ dx$$

b. Bestem buens længde

Jeg tager bare og indsætter de to skæringspunkter med x-aksen jeg har fundet i opgave 1 ind i formlen for buelængden

$$l = \int_{91.25}^{91.25} \sqrt{f'(x)^2 + 1}\ dx = 1603.1$$

Så buen er cirka $1603.1\ m$ lang

9.225

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjerne l og m, der er givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} l:&\ \ 2x - 3y = 1 \\ m:&\ \ x + 6y = 8 \end{aligned}$$

Jeg ved at skæringspunktet er hvor x og y for de to linjer er ens, så jeg bruger substitution ved at isolere x i m's ligning og indsætte det i l's ligning

$$x = 8 - 6y \rightarrow 2(8 - 6y) - 3y = 1 \Leftrightarrow 16 - 12y - 3y = 1 \Leftrightarrow 15y = 15 \Leftrightarrow y = 1$$

Nu kan jeg indsætter værdien af y ind på m's ligning for at finde den tilhørernde x-værdi

$$x + 6 \cdot 1 = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Så koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjerne l og m er $(2, 1)$