Matematik Aflevering 9

Jeppe Møldrup

9.310

På figuren ses en skæv glaspyramide indtegnet i et koordinatsystemmed enheden dm på akserne. Glaspyramidens bund er kvadratisk, og koordinatsættene for hjørnepunkterne er angivet på figuren. Pyramidens højeste punkt betegnes T. Linjen l, der går gennem punktet A og punktet T, har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

a. Bestem en ligning for den plan α, der indeholder glaspyramidens sideflade ATB.

linjen l er parallel med planet α, da linjen skærer to punkter der ligger på planet α. Så derfor vil linjen l's retningsvektor ligge på planet α. Derudover har jeg vektor $\vec{AB}$ der også ligger på planet. Så jeg finder krydsproduktet af de to vektorer, da krydsproduktet ville være parallelt med de to vektorer, og derfor også planet, og derfor er det en normalvektor til planet α.

Vektorerne er:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -16-16 \\ 16-16 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Krydsproduktet, eller α's normalvektor er

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -16 \cdot 0 - 23 \cdot 0 \\ 23 \cdot -32 - (-27 \cdot 0) \\ -27 \cdot 0 - (-16 \cdot -32) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 736 \\ 512 \end{pmatrix}$$

Nu indsætter jeg bare normalvektoren og et punkt i skabelonen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow 0(x-16) + 736(y-16) + 512(z-0) = 0$$

Så planet α's ligning er

$$736y + 512z - 11776$$

Den plan β, der indeholder sidefladen BCT, har ligningen

$$23x - 5z + 368 = 0$$

b. Bestem koordinatsættet til T, som er skæringspunktet mellem l og β.

Jeg ved at i punktet hvor linjen og planet skærer har de samme koordinater, så jeg indsætter bare alt min indformation og finder x, y og z vha. solve

$$solve(x = 16 - 27s \text{and} y = 16 - 16s \text{and} z = 23s \text{and} 23x - 5z + 368 = 0, x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Så punktet hvor linjen l og planet β skærer er $\begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$

c. Bestem den stumpe vinkel mellem α og β

Jeg ved at da normalvektoren for et plan sidder ret på planet vil vinklen mellem de to normalvektore være det samme som vinklen mellem de to planer. Normalvektoren for de to planer er

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 736 \\ 512 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Så jeg finder vinklen mellem dem med formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Så jeg indsætter mine værdier

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}\right) = 96.97°$$

Så den stumpe vinkel mellem planerne α og β er cirka $96.97°$

9.311

En funktion f er gi vet ved

$$f(x) = e^{-0.1 \cdot x} \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad x \geq 0$$

Funktionen f har i intervallet [0;3] to x-værdier x_1 ogr_2, hvori der er lokale maksima

a. Tegn grafen for f, og bestem k oordinatsættene til hvert af punkterne $A(x_1, f(x_1))$, og $B(x_2, f(x_2))$