Matematik aflevering 18

Jeppe Møldrup

Opgave 9

a. Bestem $\angle A$, og bestem arealet af trekant ABC

Vi kender siderne a og c og vinklen mellem dem. Arealet af en trekant er givet ved

$$T = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(C)$$

Så vi indsætter

$$T = \frac{1}{2} \cdot 94 \cdot 58 \cdot \sin(89) = 2725.58$$

finder A ud fra cosinusrelationen

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(B)} \Leftrightarrow b = 109.59$$

$$A = \cos^{-1}(2725.58/(0.5 \cdot 58 \cdot 109.59)) = 59.05°$$

Så vinkel A er 59°

b. Bestem længden af medianen fra A på siden a

[Indsæt billede] Punktet D ligger på medianens skæringspunkte, og derfor er siden $|BD| = \frac{a}{2}$ Jeg bruger cosinusrelationen der er

$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cdot\cos(C) \Leftrightarrow |AD| = \sqrt{47^2 + 58^2 - 2 \cdot 47 \cdot 58 \cdot \cos(89)} = 74.01$$

Så Længden af medianen er 74

Opgave 10

a. Bestem en ligning for tangentil til grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = (x^2 + 5x + 500) \cdot e^{\frac{-x}{100}}$$

i punktet $P(0, f(0))$

Jeg starter med at finde den korrosponderende y-værdi til punktet P

$$f(0) = 500$$

Så punktet P er $(0, 500)$. Så differentierer jeg f

$$f'(x) = (39x \cdot 20^{-1} - x^2 \cdot 100^{-1}) \cdot e^{-x \cdot 100^{-1}}$$

Så finder jeg hældningen af grafen i punktet P idet det er tangenhældningen

$$a = f'(0) = 0$$

Så tangentens ligning er

$$y = 0x + b$$

Så indsætter jeg punktet P ind i ligningen

$$500 = 0 \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 500$$

Så tangentens ligning er

$$y = 500$$

b. Bestem monotoniforholdene for f, og tegn grafen for f i et passende vindue

For at bestemme monotoniforholdene finder jeg alle mulige ekstremaer, dvs. punkter hvor $f'(x) = 0$ vha. solve.

$$solve(f'(x) = 0, x) \rightarrow x = 0 \vee x = 195$$

Så kigger jeg på områderne før, efter og mellem punkterne for at finde ud af om de er maksimummer, minimummer eller vandrette vendetangenter

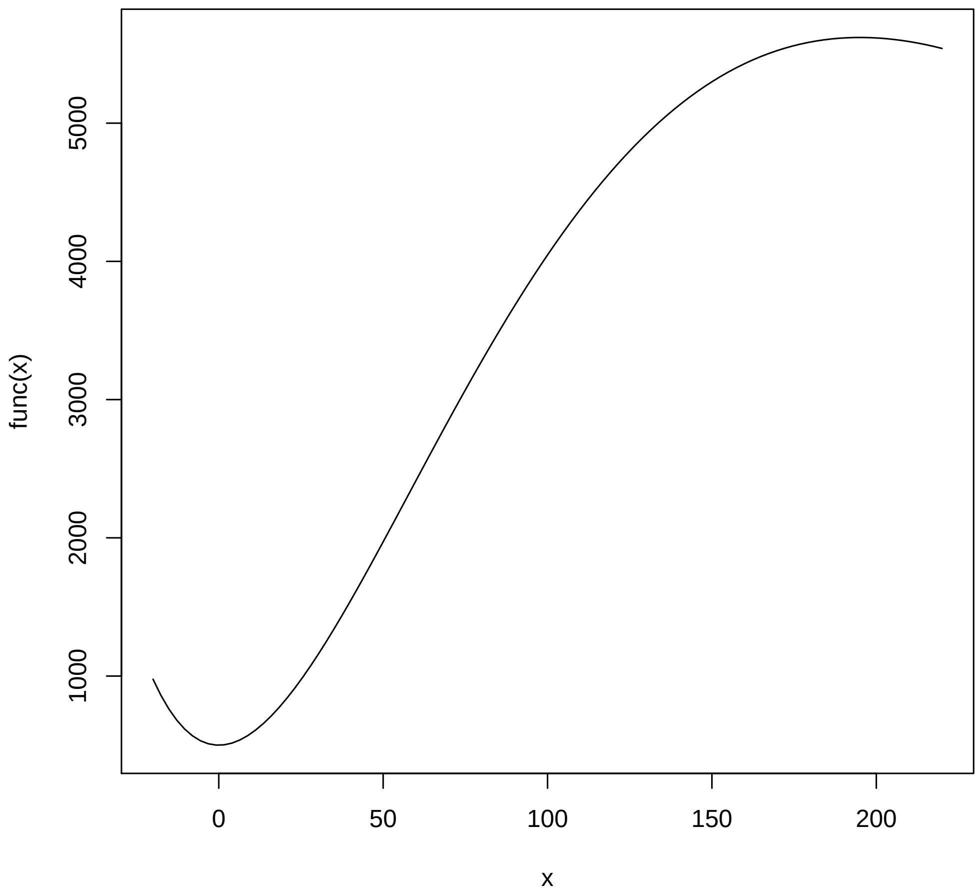
$$f'(-1) = -1.98$$

$$f'(1) = 1.92$$

$$f'(200) = -1.35$$

Så kan monotonilinjen tegnes

x		0		195	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$



Opgave 11

a. Benyt modellen

$$c(x) = \frac{12500 \cdot x - 2500 \cdot x^2}{150 + 7.8^x} + 90, \quad 0 \leq x \leq 7$$

til at bestemme det tidspunkt, hvor glukosekoncentrationen i personens plasma er maksimal

Jeg finder alle punkter hvor $c'(x) = 0$, dvs. alle mulige ekstremaer

$$solve(c'(x) = 0, x) \rightarrow x = 1.61955 \vee x = 5.53478$$

Så kigger jeg på områderne før, efter og mellem for at se om det er maksimummer, minimummer eller vandrette vendetangenter

$$c'(1) = 41.0941$$

$$c'(2) = -30.3123$$

$$c'(6) = 0.0589824$$

Så vi ved at ved $x = 1.62$ er der et maksimum. men grafen stiger også efter $x = 5.53$ så jeg kigger på ved om $x = 7$ for at se om det er højere end $x = 1.62$

$$c(1.62) = 166.959$$

$$c(7) = 89.9801$$

Her kan jeg se at ved $x = 1.62$ ligger højere end $x = 7$ Så det er maksimummet.

b. Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid glukosekoncentrationen i personens plasma ligger over 130 mg/dl.

Jeg finder alle punkter hvor $c(x)$ skærer $y = 130\ mg/dl$ vha. solve

$$solve(c(x) = 130, x) \rightarrow x = 0.5505316 \vee x = 2.665899$$

Jeg tager så de to tidspunkter og finder ændringen i tid, dvs. hvor lang til koncentrationen er over 130 mg/dl. Jeg ved at koncentrationen er over 130 i dette område idet maksimummet fra sidste opgave ligger mellem de to punkter

$$\Delta x = 2.665899 - 0.5505316 = 2.1153674$$

Så koncentrationen af glukose ligger over 130 mg/dl i 2.12 timer.

Opgave 12

a. Bestem volumen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen

Jeg bruger formlen for volumnet af omdrejningslegeme

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Så jeg indsætter

$$V = \pi \int_0^4 (x^3 - 6x^2 - 32)^2 \, dx = 4779.52$$

Så volumen af omdrejningslegemet er 4779.52

b. Bestem forholdet mellem arealerne af M og N.

For at finde forholdet mellem arealerne, skal jeg have en formel for begge arealer. Arealet M findes

$$T = \int_0^4 f(x) \, dx$$

Arealet af N findes ved at finde arealet under $y = 32$ fra 0 til 6 og trække arealet under $f(x)$ mellem 0 til 6 fra. dvs.

$$T = \int_0^6 y(x) \, dx - \int_0^6 f(x) \, dx$$

Så finder jeg forholdet

$$\frac{\int_0^4 f(x) \, dx}{\int_0^6 y(x) \, dx - \int_0^6 f(x) \, dx} = 0.59$$

Så forholdet mellem dem er 0.59, dvs.

$$M = 0.59 \cdot N$$

Opgave 13

a. Opstil en nulhypotese, der passer til forsøget, og bestem de forventede værdier.

	fork	ikke fork	sum
kold			90
ikke kold			90
sum	18	162	180

Jeg opstiller nulhypotesen H_0: Forkølelse er uafhængig af kolde fødder.

Jeg udregner de forventede værdier med formlen

$$Rækkesum \cdot \frac{Kolonnesum}{totalsum}$$

F.eks folk med kolde fødder der fik forkølelse

$$90 \cdot \frac{18}{180} = 9$$

Så får jeg tabellen

	fork	ikke fork	sum
kold	9	81	90
ikke kold	9	81	90
sum	18	162	180

b. Undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansnivau.

13 folk med kolde fødder fik forkølelse. Så jeg udregner de andre via summene

	fork	ikke fork	sum
kold	13	77	90
ikke kold	5	85	90
sum	18	162	180

Så kører jeg en χ^2 uafhængighedstest på tabellen for at se om den passer med min H_0
Jeg får resultatet

$$\chi^2 = 3.95 \quad p - value = 0.0469$$

Idet p¡0.05 skal H_0 forkastes. Så det betyder at forkølelse er afhængig af kolde fødder.

Opgave 14

a. Bestem en forskrift for V, og bestem personens vægt 45 dage efter slankekurens start.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{7700}(D - 40 \cdot V)$$

Jeg finder løsningen til differentialligningen vha. desolve jeg ved at han starter ved 95 kilo til $t = 0$ og hans daglige kalorieindtag er 2800 kcal.

$$desolve(V' = 7700^{-1}(2800{-}40V) and V(0) = 95, V, t) \rightarrow V(t) = 25{\cdot}e^{-2t \cdot 385^{-1}}{+}70$$

Så indsætter jeg 45 ind i funktionen for at finde hans vægt efter 45 dage.

$$V(45) = 89.79$$

Så efter 45 dage vejer han 89.79 kilo.

b. Benyt modellen til at bestemme, hvor stort denne persons daglige energiindtag skal være, for at ønsket kan opfyldes.

Personen vejer 100 kg, og ønsker at tabe 5 kilo efter 90 dage.

Jeg finder D til tidspunktet $V(90) = 95$ vha. solve

$$solve(V(90) = 95, D) \rightarrow D = 3464.46$$

Så hvis personen vil nå sit mål skal de indtage 3464.46 kcal om dagen.

Opgave 15

a. Gør rede for, at α er bestem ved ligningen $x + 2y + z = 9$

Jeg starter med at finde normalvektoren til α ved at finde krydsproduktet mellem vektoren fra A til B og vektoren fra A til C. Krydsproduktet ligger ret på de to vektorer og alle punkter ligger i planen så derfor ligge krydsproduktet ret på planen og er derfor en normalvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 4-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$crossp(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jeg kan forkorte krydsproduktet med -9, så jeg får

$$\vec{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så indsætter jeg den og punktet A ind i planens ligning

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$(x - 0) + 2(y - 3) + (z - 3) = 0$$
$$x + 2y + z - 9 = 0$$
$$x + 2y + z = 9$$

Så de er ens.

b. Bestem k så l ligger i planen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3k \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}$$

Hvis linjen skal ligge i planen, skal linjen ligge ret på planens normalvektor, dvs. prikproduktet mellem normalvektoren og linjens retningsvektor skal være 0. så jeg finder værdien af k hvor prikproduktet er 0 vha. solve

$$solve(dotp(\vec{r_l}, \vec{n_\alpha}) = 0, k) \rightarrow k = -1$$

Så k skal være -1 hvis linjen skal ligge i planen