Matematik Aflevering 10

Jeppe Møldrup

9.228*

Gør rede for, at funktionen $f(x) = (x+1) \cdot e^x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x+1}$$

Jeg differentierer $f(x)$ med produktregnereglen

$$f'(x) = (x+1) \cdot e^x + e^x$$

Så indsætter jeg $f(x)$ ind på y's plads i differentialligningen for at gøre prøve

$$\frac{dy}{dx} = (x+1) \cdot e^x + \frac{(x+1) \cdot e^x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (x+1) \cdot e^x + e^x$$

Så funktionen $f(x)$ er løsning til differentialligningen

9.231

En funktion f er bestem ved

$$f(x) = (x^3 - 8) \cdot \ln(x), \quad x > 0$$

a. Løs ligningen $f(x) = 0$

Jeg løser ligningen vha. solve

$$solve((x^3 - 8) \cdot \ln(x) = 0, x) \to x = 1 \vee x = 2$$

Så løsningerne til ligningen er $x = 1 \vee x = 2$

b. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$

Jeg starter med at differentiere funktionen $f(x)$ og derefter finder jeg hældningen af punktet til $x = 1$

$$f'(x) = \frac{x^3 + 3x^3 \ln(x) - 8}{x} \Leftrightarrow f'(1) = -7$$

Så hældningen af tangenten er -7. Nu kan jeg udregne værdien af b

$$y = -7x + b \Leftrightarrow 0 = -7 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 7$$

Så hele ligningen for tangentil til punktet hvor $x = 1$ er

$$y = -7x + 7$$

9.232

Tabellen viser antallet af Facebook-brugere i hele verden for en række år i perioden 2004-2010

Arstal	2004	2005	2006	2009	2010
Antal brugere (mio.)	1	5.5	12	350	600

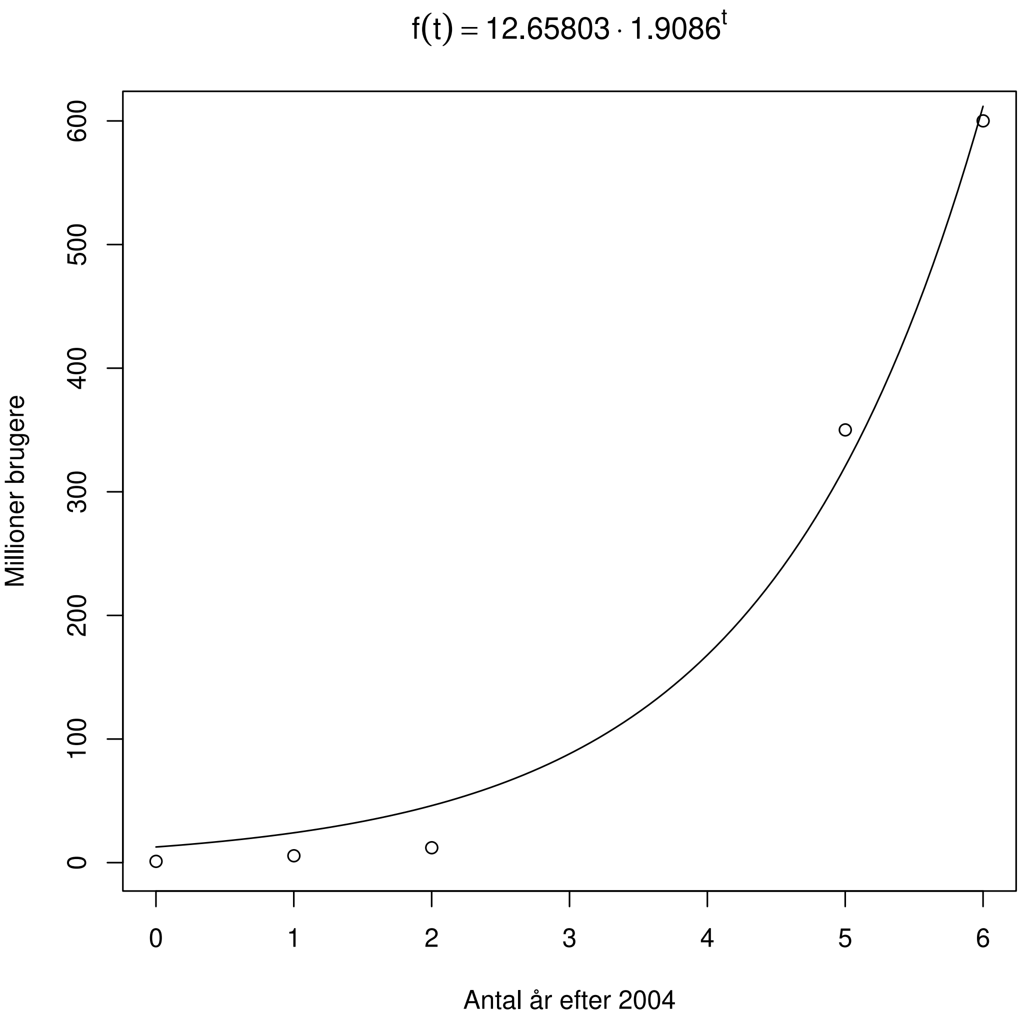
I en model antages det, at udviklingen i antallet af Facebook-brugere i verden kan beskrives ved en funktion af typen

$$f(t) = b \cdot a^t$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af Facebook-brugere i verden (målt i mio.) t år efter 2004.

a. Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b

Jeg laver eksponentiel regression på dataet



Så værdierne er $a = 1.9$ og $b = 12.66$

b. Bestem fordoblingstiden

Jeg bruger formlen

$$T_2 = \frac{log(2)}{log(a)}$$

Jeg indsætter mine værdier

$$T_2 = \frac{log(2)}{log(1.9)} = 1.07236906471$$

Så der går lidt over et år mellem fordoblingerne af brugere på Facebook

c. Benyt modellen til at beregne antallet af Facebook-brugere i 2008, og gør rede for, hvad tallet a fortæller om udviklingen i antallet af Facebook-brugere

Jeg indsætter 4 i funktionen

$$f(4) = 12.66 \cdot 1.9^4 = 167.967708967$$

Så der er omkring 168 mio. brugere i år 2008. Værdien af a er fremskrivningsfaktoren, dvs.

$$f = 1 + r \Leftrightarrow 1.9 = 1 + r \Leftrightarrow = r = 90\%$$

Så mængden af brugere øges med cirka 90% hvert år

9.236

Figuren viser en model af Denver Museum indtegnet i et koordinatsystem. Alle enheder er i feet.

a. Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, B og C

For at finde planen α's normalvektor tager jeg krydsproduktet af vektorerne $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ da krydsproduktet ligger ret på begge vektorer og vektorerne ligger langs planen

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 52 - 106 \\ 109 - 141 \\ 0 - 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 \\ -32 \\ -68 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 25 - 106 \\ 117 - 141 \\ 0 - 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 \\ -24 \\ -68 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{pmatrix} 544 \\ 1836 \\ -1296 \end{pmatrix}$$

Jeg kender et punkt på planen α, så jeg indsætter bare værdierne i skabelonen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$544(x - 106) + 1836(y - 141) - 1296(x - 68) = 0$$

Så planen α's ligning er

$$544x + 1836y - 1296x = 228412$$

Det oplyses, at planen β, der indeholder punkterne C, D og F, har ligningen

$$326x + 75y + 135z = 16923$$

b. Bestem vinklen mellem α og β

For at bestemme vinklen mellem to planer finder jeg bare vinklen mellem deres normalvektorer da normalvektorerne bare er forskudt med 90° i forhold til planen. For at bestemme vinklen mellem to vektorer bruger jeg formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|}$$

Så jeg indsætter bare mine værdier

$$\cos(v) = \frac{544 \cdot 326 + 1836 \cdot 75 + 1296 \cdot 135}{\sqrt{326^2 + 75^2 + 135^2} \cdot \sqrt{544^2 + 1836^2 + 1296^2}} \Leftrightarrow v = 54.02°$$

Jeg kan se på tegningen at vinklen mellem dem er stump så jeg trækker vinklen fra 180 for at finde den stumpe vinkel

$$180° - 54.02° = 125.98°$$

Så der er 125.98 grader mellem de to planer

c. Undersøg, om $\vec{AE}$ er parallel med $\vec{GI}$, og bestem arealet af tagfladen $AEIG$

For at undersøge om to vektorer er parallelle tager jeg krydsproduktet mellem dem, da den ville være 0

$$\vec{AE} = \begin{pmatrix} 65 - 106 \\ 169 - 141 \\ 85 - 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GI} = \begin{pmatrix} 47 - 87 \\ 37 - 25 \\ 103 - 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AE} \times \vec{GI} = \begin{pmatrix} 300 \\ 58 \\ 628 \end{pmatrix}$$

Så krydsproduktet mellem dem er ikke en nulvektor, så derfor er vektorerne ikke parallelle. Dvs. at tagfladen $AEIG$ ikke er en regulær firkant. Derfor skal jeg opløse den i to trekanter og finde deres individuelle arealer, dette gør jeg ved at finde to a hver trekant sider som vektorer, og finde længden af de to vektorers krydsprodukt, da den ville være lig med parallellogrammet de udspænder. Så halverer jeg det og ligger det sammen med den anden trekant

$$\frac{|\vec{AE} \times \vec{AG}|}{2} = 2919.57$$

$$\frac{|\vec{GI} \times \vec{EI}|}{2} = 3044.72$$

Så arealet af tagfladen $AEIG$ er $2919.57 + 3044.72 = 5964.29$

9.241*

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestem arealet af det parallelogram, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder.

Jeg finder den numeriske værdi af determinanten af de to vektorer da det er arealet af parallelogrammet

$$\det(avec, bvec) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) = 15 - (-4) = 19$$

Så arealet af parallelogrammet som de to vektorer udspænder er 19

9.242*

En funktion F er givet ved

$$F(x) = x^6 \cdot \mathrm{e}^x + 3$$

Gør rede for, hvilken af nedenstående funktioner F er stamfunktion til.

$$f_1(x) = 6x^5 \cdot \mathrm{e}^x$$

$$f_2(x) = 6x^5 \cdot \mathrm{e}^x + x^6 \cdot \mathrm{e}^x$$

$$f_3(x) = 6x^5 \cdot \mathrm{e}^x + x^6$$

Jeg differentierer $F(x)$ i forhold til produktregnereglen

$$F(x) = x^6 \cdot \mathrm{e}^x + 3$$

$$F'(x) = 6x^5 \cdot \mathrm{e}^x + x^6 \cdot \mathrm{e}^x$$

Så det var f_2 som F er stamfunktion til