

Matematik aflevering 3

1.005, 1.006, 1.049, 1.074, 9.217, 9.234, 9.237

1.005

En cirkel C og en linje l er bestemt ved

$$C : x^2 - 4x + y^2 + 2y = 11$$

$$l : y = x + 1$$

Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem l og C

Jeg ved at ved skæringspunkterne er både x og y værdierne ens for l og C . Og da l er bestemt ved $y = x + 1$ kan jeg bare indsætte $x + 1$ ind på y 's plads i cirklen C .

$$x^2 - 4x + \underbrace{(x + 1)^2}_{\text{Kvadratsætning}} + 2(x + 1) = 11$$

$$x^2 - 4x + x^2 + 1 + 2x + 2x + 2 = 11$$

$$2x^2 - 4x + 4x = 8$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Så x værdierne til de to punkter er henholdsvis 2 og -2 . Nu kan jeg indsætte dem ind i linjens ligning for at finde de tilhørende y -værdier

$$y = x + 1 \Leftrightarrow y = 2 + 1 = 3 \vee y = -2 + 1 = -1$$

Så de to punkter hvor cirklen og linjen skærer hinanden er $(2, 3)$ og $(-2, -1)$

1.006

En cirkel har centrum i punktet $C(3, -2)$ og gå gennem punktet $P(0, 2)$. Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet P .

Jeg ved fra afstandsfunktionen mellem en cirkels centrum og en linje at linjen mellem centrum og punktet P ligger retvinklet på tangenten til punktet P . Så jeg kan bruge vektor \vec{PC} som min normalvektor. Og så kan jeg bruge skabelonen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Hvor a og b er koordinaterne til min normalvektor.

$$3(x - 0) - 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 2$$

Så linjens ligning vil være $y = \frac{3}{4}x + 2$

1.049

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 7 \ln(x) - 2x^2$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$

Jeg starter med at differentiere funktionen f

$$f'(x) = (7 \ln(x) - 2x^2)' = \frac{7}{x} - 4x$$

Så indsætter jeg 1 ind i den differentierede funktion for at finde hældningen til punktet P

$$f'(x) = \frac{7}{1} - 4 \cdot 1 = 7 - 4 = 3$$

Så hældningen til ligningen for tangenten til punktet P er 3

Så jeg indsætter det i en formel for lineær vækst

$$y = 3x + b$$

Nu finder jeg den tilhørende y -værdi til x -værdien 1 ved at indsætte 1 ind i funktion f

$$f(1) = 7 \ln(1) - 2 \cdot 1^2 = -2$$

Så punktet P er altså $P(1, -2)$

Jeg indsætter det i den lineære formel og isolerer b

$$-2 = 3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -5$$

Så ligningen for tangenten til grafen for f i punktet P er $y = 3x - 5$

1.074

Gøre rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion

Den røde graf hører til $f(x)$ fordi den blå graf har en negativ hældning i starten mens den røde graf aldrig kommer under 0 på y -aksen så den kan ikke være den afledte funktion til den blå.

9.217

Ved genoptræning af en patient efter en korsbåndsoperation i knæet anvendes en maskine, som bøjer patientens knæ. I tabellen ses sammenhørende værdier af den vinkel, som knæet køjes med, og den kraftpåvirkning, der registreres i det nye korsbånd.

Vinkel(grader)	20	40	60	80
Kraftpåvirkning(N)	0.035	0.063	0.085	0.10

I en model antages des, at kraftpåvirkningen i korsbåndet som funktion af vinklen er af typen

$$f(x) = b \cdot x^a, \quad 0 \leq x \leq 90$$

hvor $f(x)$ betegner kraftpåvirkningen(målt i N) ved vinklen x (målt i grader).

- a. Bestem a og b

Jeg laver potensregression på dataet

$$a = 0.726 \text{ og } b = 0.00422$$

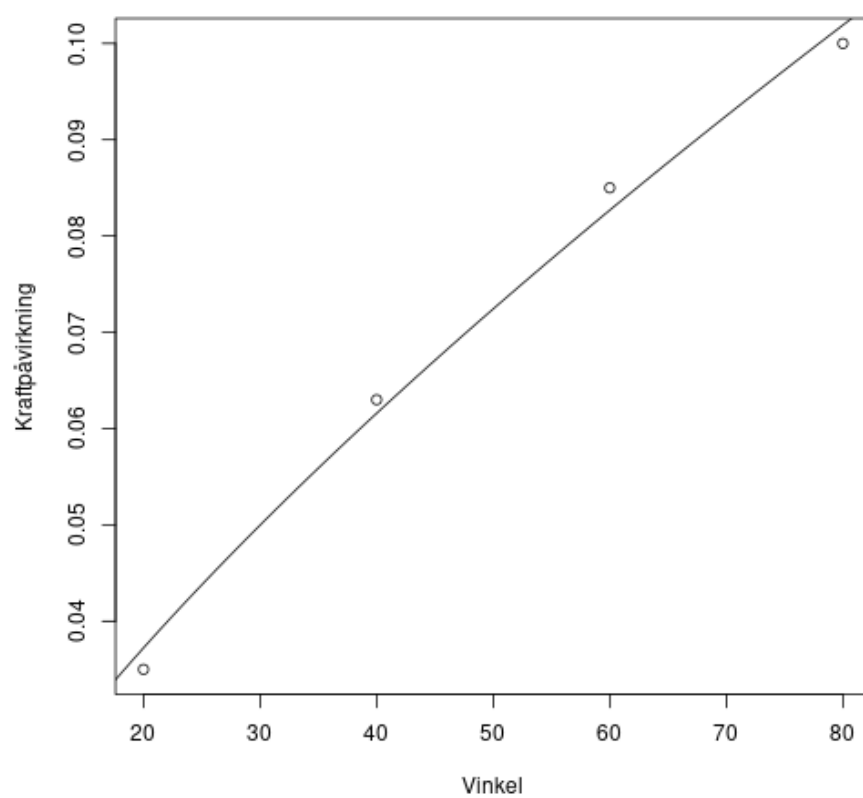


Figure 1: plot of chunk unnamed-chunk-1

b. Jeg indsætter bare 45° ind i funktionen

[1] 0.06709623

$$f(45^\circ) = 0.0671 \text{ N}$$

c. Bestem hvor meget kraftpåvirkningen øges, når vinklen øges med 30%

Da det er en potensfunktion kan jeg bruge formlen

$$F_y = F_x^a$$

hvor F er fremskrivningsfaktoren for henholdsvis x og y

$$0.30^{0.726} \cdot 100\% = 11.8138\%$$

Så for hver gang vinklen øges med 30% så øges kraftpåvirkningen med 12%

9.234

En cirkel er givet ved ligningen

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 100$$

og en linje l er givet ved ligningen

$$3x + 4y - 7 = 0$$

a. Bestem afstanden fra cirkelns centrum til linjen l

Jeg har cirkelns ligning i formen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

hvor (x_0, y_0) er cirkelns centrum og r er cirkelns radius

Så cirkelns centrum er $C(2, -1)$

Nu kan jeg bare bruge formlen for afstanden mellem et punkt og en linje

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Så jeg indsætter punktet og linjen

$$\text{dist}(C, l) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot -1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

Så afstanden mellem cirkelns centrum og linjen l er 1

Linjen m går gennem cirkelns centrum og er vinkelret på l

- b. Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen m og cirklen.

Linjen l har normalvektoren

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Og da m ligger ret på l betyder det at \vec{n} er retningsvektor for m , og m går gennem cirklen centrum. så vi har en retningsvektor og et punkt for m , så vi kan have retningsvektoren for at få en normalvektor og så opstille linjens ligning

$$\vec{n} = \hat{n}_l = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-4(x-2) + 3(y+1) = 0$$

Jeg isolerer y i linjens ligning

$$-4x + 8 + 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow -4x + 3y = -11 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{4}$$

Nu kan jeg indsætte det på y 's plads i cirkelns formel

$$(x-2)^2 + (\textcolor{red}{y}+1)^2 = 100 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (\textcolor{red}{\frac{4}{3}x - \frac{11}{4}} + 1)^2 = 100$$

Nu har jeg en lidt uoverskuelig ligning som jeg løser vha. solve

$$\text{solve}((x-2)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{11}{4} + 1)^2 = 100, x) \rightarrow x = -4.4309 \vee x = 7.5509$$

Nu kan jeg indsætte de to x -værdier ind i linjens ligning for at få de tilsvarende y -værdier

$$y = \frac{4}{3} \cdot -4.4309 - \frac{11}{4} = -8.65786 \vee y = \frac{4}{3} \cdot 7.5509 - \frac{11}{4} = 7.31786$$

Så de to skæringspunkter er henholdsvis $(-4.43, -8.66)$ og $(7.55, 7.32)$

9.237

I en model kan udviklingen i et barns højde de første 48 måneder beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 5.24 - 0.045 \cdot h, \quad 0 \leq t \leq 48$$

hvor t er barnets alder(målt i måneder), og h er barnets højde(målt i cm), I modellen er et barn 50 cm højt ved fødslen.

- a. Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden, når barnet er 100 cm højt.

Jeg indsætter 100 cm ind i differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 5.24 - 0.045 \cdot 100 = 0.74 \frac{cm}{måned}$$

Så væksthastigheden når barnet er 100 cm højt er 0.74 cm pr måned

- b. Bestem en forskrift for h , og benys denne til at bestemme barnets alder, når det er 100 cm højt

Differentialligningen følger formen

$$\frac{dy}{dx} = b - ay$$

Så løsning kommer til at være

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Så jeg indsætter værdierne

$$h = \frac{5.24}{0.045} + c \cdot e^{-0.045 \cdot t}$$

Jeg ved at i modellen er et barn 50 cm højt ved fødslen så jeg indsætter det og finder værdien af c

$$50 = \frac{5.24}{0.045} + c \cdot e^{-0.045 \cdot 0} = \frac{5.24}{0.045} + c \Leftrightarrow c = 50 - \frac{5.24}{0.045} = -66.4$$

Så den fulde løsning til differentialligningen er

$$h = \frac{5.24}{0.045} - 66.4 \cdot e^{-0.045 \cdot t}$$

Så indsætter jeg 100 cm ind i højden og finder den tilsvarende alder vha. solve

$$\text{solve}(100 = \frac{5.24}{0.045} - 66.4 \cdot e^{-0.045 \cdot t}, t) \rightarrow t = 31$$

Så når et barn er 100 cm højt er det cirka 31 måneder gammelt