Matematik aflevering 8

Opgave 5

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = (2x+1) \cdot \ln(x), \qquad x > 0$$
$$g(x) = \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln(x), \qquad x > 0$$

Undersøg, om f er stamfunktion til g.

Jeg starter med at integrere g

$$\int \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln(x)\ dx = \ln(x) + 2x\ln(x) - x$$

så skiver jeg f om

$$(2x+1) \cdot \ln(x) = 2x\ln(x) + \ln(x) \neq \ln(x) + 2x\ln(x) - x$$

Så f er ikke stamfunktion til g

Opgave 9

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$$

a. Bestem nulpunkterne for f

Nulpunkterne er de punkter hvor grafen skærer x-aksen, dvs. der hvor $y = 0$. Så jeg finder dem vha. solve

$$solve(0 = x^3 - 5x^2 + 4x, x) \rightarrow x = 0 \lor x = 1 \lor x = 4$$

Så grafen for funktionen f skærer x-aksen 3 steder i $x = 0$ $x = 1$ og $x = 4$

b. Bestem monotoniforholdene for f

For at bestemme monotoniforholdene for f, skal jeg finde alle mulige ekstremaer. Dvs. de steder hvor hældningen er 0 eller $f'(x) = 0$, jeg finde disse ekstremaer vha. solve

$$solve(0 = 3x^2 - 10x + 4, x) \rightarrow x = 0.46482 \lor x = 2.8685$$

Så undersøger jeg områderne imellem de to punkter for at se om det er maksimummer, minimummer eller vandrette vendetangenter

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 4 = 4$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 4 = -4$$
$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 4 = 1$$

Så jeg ved at punktet i $x = 0.46482$ er et maksimum, mens punktet i $x = 2.8685$ er et minimum. Så nu kan monotonilinjen tegnes

x		0.46482		2.8685	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Linjen l med ligningen $y = x - 9$ er tangent til grafen for f i punktet $P(3, f(3))$. En anden linje m er parallel med linjen l og tangerer grafen for f i punktet Q.

c. Bestem førstekoordinaten til punktet Q

Jeg ved at linjen l's hældning er 1, dvs. at linjen m skal have samme hældning. For at kunne tangere grafen for f skal det være i et punkte med samme hældning. Så jeg finder alle punkter hvor hældningen er 1, dvs. der hvor $f'(x) = 1$

$$solve(f'(x) = 1, x) \to x = \frac{1}{3} \vee x = 3$$

linjen l tangerer i punktet med x-værdien $x = 3$ og det eneste andet punkt hvor hældningen er 1 er punktet med x-værdien $x = \frac{1}{3}$ så det må være punktet Q's førstekoordinat.

Opgave 11

Figuren viser et foto og en model af atradiusbygningen i Amsterdam indtegnet i et koordinatsystem i rummet. Koordinatsættene til punkterne A, B, C, D og E er angivet på figuren. Alle mål er i meter

a. Benyt modellen til at bestemmme arealet af glasfladen CDE

Koordinaterne til punkterne er

$$\begin{aligned} C: &\quad (18, 68, 32) \\ D: &\quad (18, 0, 32) \\ E: &\quad (27, 0, 43) \end{aligned}$$

Jeg stater med at finde de to vektorer $\vec{DC}$ og $\vec{DE}$ og finde arealet af parralellogrammet de udspænder, som er længden af krydsproduktet mellem de to vektorer.

$$\vec{DC} = (18, 68, 32) - (18, 0, 32) = \begin{pmatrix} 0 \\ 68 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = (27, 0, 43) - (18, 0, 32) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 68 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \right| = 966.462 \ m^2$$

Så skal jeg halvere det da det er for parallelogrammet, og jeg gerne vil finde det for trekanten

$$\frac{966.462 \ m^2}{2} = 483.231 \ m^2$$

Så arealet af trekanten CDE er 483.231 m^2

b. Benyt modellen til at bestemme vinklen mellem glasfladen CDE og et gulvplan i bygningen

Jeg starter med at finde normal vektoren for planen der lidder på fladen CDE ved at tage krydsproduktet af $\vec{DC}$ og $\vec{DE}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 68 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 748 \\ 0 \\ -612 \end{pmatrix}$$

Så ved jeg at gulvplanen er vandret med jorden, dvs at den vil have en normalvektor hvor x og y koordinaterne er 0. Så jeg vælger normalvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu skal jeg bare finde vinklen mellem dem, da det er vinklen mellem de to planer. Det gør jeg med formlen

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Så indsætter jeg mine værdier

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 748 \\ 0 \\ -612 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 748 \\ 0 \\ -612 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}\right) = 129.289°$$

Dette er den store vinkel, så jeg trækker det fra 180 for at finde den mindre vinkel

$$180° - 129.289° = 50.711°$$

Så vinklen mellem glasfladen CDE og et gulvplan i bygningen er 50.711°

På glasfladen $ABCD$ skal der monteres en stålwire fra A til C og en stålwire fra B til D.

c. Benyt modellen til at bestemme koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to stålwirer.

Punkterne har koordinaterne

$$\begin{aligned} A: &\quad (22, 0, 0) \\ B: &\quad (22, 62, 0) \\ C: &\quad (18, 68, 32) \\ D: &\quad (18, 0, 32) \end{aligned}$$

Jeg stater med at finde vector $\vec{AC}$ og $\vec{BD}$

$$\vec{AC} = (18, 68, 32) - (22, 0, 0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BD} = (18, 0, 32) - (22, 62, 0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -62 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Nu kan jeg opstille parameterfremstillingen for linjerne der går gennem henholdsvis AC og BD

$$AC: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$BD: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -62 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Nu skal jeg bare finde det punkt hvor de to linjer skærer hinanden, Så jeg opstiller begge linjers ligning for y koordinaten

$$\begin{aligned} AC: &\quad y = 68 + 68t \\ BD: &\quad y = -62t \end{aligned}$$

Så finder jeg værdien for t vha. solve

$$solve(y = 68 + 68t \ and \ y = -62t, t) \rightarrow t = -0.52308$$

Så udregner jeg x, y og z koordinaterne for punktet

$$\begin{aligned} x &= 18 - 0.52308 \cdot (-4) = 20.09232 \ m \\ y &= -62 \cdot (-0.52308) = 32.43096 \ m \\ z &= 32 + 32 \cdot (-0.52308) = 15.26144 \ m \end{aligned}$$

Så stålwirerne skærer i punktet $(20.1, 32.4, 15.3)$

Opgave 12

I en model kan udviklingen af klorkencentrationen i et bestem svømmebassin beskrives ved differentialligningen

$$y'(t) = -0.03 \cdot y(t)$$

hvor $y(t)$ betegner klorkoncentrationen (målt i mg/liter) til tidspunktet t(målt i timer

Det oplyses, at klorkoncentrationen i badevandet er 1.8 mg/liter til tidspunktet $t = 0$.

a. Bestem den hastighed, som klorkoncentrationen aftager med, når klorkoncentrationen er på 1.2 mg/liter.

   Jeg indsætter 1.2 mg/liter ind i differentialligningen da $y'(t)$ er klorkencentrationen hastighed

   $$y'(t) = -0.03 \cdot 1.2\ mg/liter = -0.036$$

   Så klorkoncentrationen aftager med 0.036 mg/liter pr time når koncentrationen er på 1.2 mg/liter.

b. Bestem klorkoncentrationen $y(t)$ som funktion af tiden t, og bestem klorkoncentrationen i vandet til tidspunktet $t = 24$

   Differentialligningen har formen

   $$\frac{dy}{dx} = ay$$

   dvs. løsningen er

   $$y = ce^{ax} \Leftrightarrow y = ce^{-0.03t}$$

   Jeg ved at til tiden $t = 0$ er $y = 1.8$

   $$1.8 = ce^{-0.03 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 1.8$$

   Så hele forskriften for funktionen er

   $$y(t) = 1.8 \cdot e^{-0.03t}$$

   Så indsætter jeg 24 ind og udregner klorkoncentrationen

   $$y(24) = 1.8 \cdot e^{-0.03 \cdot 24} = 0.8761541$$

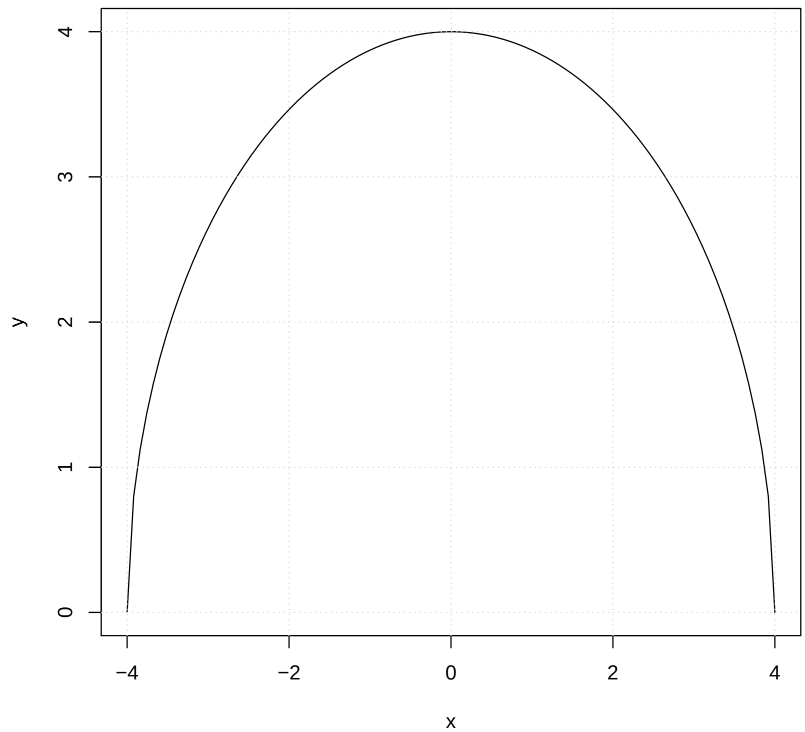
   Så koncentrationen af klor efter 24 timer er cirka 0.86 mg/liter

Opgave 14

En funktion f er givet ved forskriften

$$f'(x) = \sqrt{4^2 - x^2}, \qquad -4 \leq x \leq 4$$

a. Tegn grafen for f, og bestem $\int_{-4}^{4} f(x)\, dx$.



Jeg integrerer funktionen f mellem -4 og 4

$$\int_{-4}^{4} \sqrt{4^2 - x^2}\ dx = 25.16274$$

Så integralet er 25.16274

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a$$

hvor a er et positivt tal

Grafen for g og førsteaksen afgrænser en punktmængde M, der har et areal

b. Bestem a, så arealet af M er 4

Jeg ved at der hvor g skærer x-aksen er der hvor $x = a$ fordi x er trukket fra a, Så jeg finder a vha. solve

$$solve(4 = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}, a) \rightarrow a = 1.595$$

Så hvis arealet af M skal være 4 skal a være cirka 1.6