Matematik aflevering 14

Jeppe Møldrup

Opgave 9

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 0.25 \cdot \sqrt{9 - 16x^2}, \quad -0.75 \leq x \leq 0$$

$$g(x) = -0.055x + 0.75, \quad 0 \leq x \leq 11$$

Graferne for f og g afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen x = 11 i første og anden kvadran et område M, der har et areal.

a. Gør rede for, at $f(0) = g(0)$, og bestem arealet af M.

Jeg udregner begge funktioner ved punktet $x = 0$

$$f(0) = 0.25 \cdot \sqrt{9 - 16 \cdot 0^2} = 0.75 \qquad g(0) = -0.055 \cdot 0 + 0.75 = 0.75$$

De giver begge 0.75 og skærer derfor y-aksen i samme punkt. For at finde arealet M integrerer jeg begge i deres definerede områder

$$M = \int_{-0.75}^{0} 0.25 \cdot \sqrt{9 - 16x^2}\ dx + \int_{0}^{11} -0.055x + 0.75\ dx = 8.6918$$

Så arealet af M er cirka 8.7

En skulptur har samme form som det omdrejningslegeme, der fremkommer når M drejes 360° om førsteaksen. Enheden på koordinatsystemets akser er meter.

b. Bestem skulpturens rumfang

For at finde skulpturens rumfang bruger jeg formlen

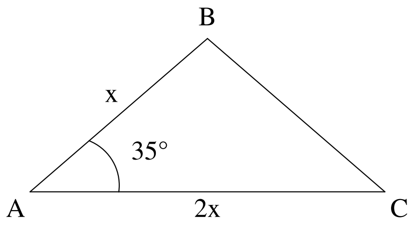
$$V = \pi \int_{a}^{b} (f(x))^2\ dx$$

Igen skal jeg gøre dette for både $f(x)$ og $g(x)$ i deres respektive definerede områder

$$V = \pi \int_{-0.75}^{0} (0.25 \cdot \sqrt{9 - 16x^2})^2\ dx + \pi \int_{0}^{11} (-0.055x + 0.75)^2\ dx = 8.858 \text{ m}^2$$

Så rumfanget af skulpturen er cirka 8.9 m^2

Opgave 10



I trekant ABC er $|AB| = x$, $|AC| = 2x$ og $\angle = 35°$

a. Bestem x, når $|BC| = 5$.

Jeg benytter cosinusrelationen idet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(c) \Leftrightarrow |BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos(35°)$$

Jeg ved at $|AB| = x$ og $|AC| = 2x$ så derfor finder jeg x vha. solve

$$solve(5^2 = x^2 + (2x)^2 - 2x^2 \cdot \cos(35°), x) \rightarrow x = 2.727$$

Så x vil være 2.727 hvis $|BC|$ var 5

b. Bestem x, når arealet af trekant ABC er 20.

Her benytter jeg formlen

$$T = \frac{1}{2}ab\sin(C)$$

Så indsætter jeg værdierne og udregner x

$$50 = \frac{1}{2}2x^2 \cdot \sin(35°) \rightarrow 20 = x^2 \cdot sin(35°) \rightarrow x = 5.905$$

Så hvis arealet skulle være 20 ville sidelængden $|BC|$ være 5.9

Opgave 11

I en bestem kommune ønsker man at undersøge, om antallet af hjemmeboende børn i en husstand afhænger af om der er kæledyr i husstanden. Man har derfor udtaget en stikprøve på 470 husstande. Resultatet fremgår af tabellen

	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr
Ingen hjemmeboende børn	133	202
Et hjemmeboende barn	24	28
To eller flere	46	37

a. Opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at teste, om der er sammenhæng mellem kæledyr i husstanden og antallet af hjemmeboende børn i hustanden, og opstil på grundlag heraf en tabel over de forventede værdier

H_0: Antallet af hjemmeboende børn er uafhængig af om der er kæledyr i husstanden

For at udregne de forventede værdier tager jeg summen af alle kolonner og rækker i tabellen

	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr	sum
Ingen hjemmeboende børn	133	202	335
Et hjemmeboende barn	24	28	52
To eller flere	46	37	83
sum	203	267	470

Idet min H_0 siger at antallet af børn ikke er afhængig af antallet af kæledyr forventer jeg at de to kolonner er fordelt ligelidt. Så for hver celle skal jeg tage produktet af kollonesummen og rækkesummen og dividerer med den totale sum

Forventede værdier	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr
Ingen hjemmeboende børn	144.69	190.31
Et hjemmeboende barn	22.46	29.54
To eller flere	35.85	47.15

b. Bestem χ^2-teststørrelsen, og undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau

Jeg har fået følgende resultat fra min χ^2-uafhængighedstest

$$\chi^2 = 6,\ p - value = 0.1991$$

Så idet p>0.05 bliver jeg nødt til at forkaste H_0 og konkludere på et 5% signifikansniveau at antallet af børn i husstanden er afhængig af om der er kæledyr i husstanden eller ej.

Opgave 12

En persons alkoholpromille afhænger af flere faktorer, bl.a. af mængden af indtaget alkohol, tiden efter indtaget, personen køn og personens vægt.

I en model er alkoholpromillen $P(x)$ for kvinder til tidspunktet x(målt i timer efter indtagelse af alkohol) givet ved

$$P(x) = -0.15x + 20 \cdot \frac{a}{M}$$

Hvor M er kvindens vægt, og a er antallet af genstande, som indtaget til tiden $x = 0$.

Anne vejer 70 kg, og bente vejer 50 kg. De to kvinger indtager samtidigt hver 4 genstande.

a. Benyt modellen til at bestemme, hvor meget længere det varer for Bente end for Anne at få en alkoholpromille på under 0.5

Jeg indsætter værdierne og finder deres x værdier vha. solve

$$solve(0.5 = -0.15x + 20 \cdot \frac{4}{50}, x) \rightarrow x_1 = 7.\bar{3}$$

$$solve(0.5 = -0.15x + 20 \cdot \frac{4}{70}, x) \rightarrow x_2 = 4.2857$$

Så skal jeg bare finde forskellen på de to

$$\Delta x = 7.\bar{3} - 4.2857 = 3.0476\bar{3}$$

Så det tager cirka 3 timer mere for bente, end det gør for anne at nå en alkoholpromille på under 0.5

b. Benyt modellen til at bestemme, hvor mange genstande Anne højst kan indtage, hvis hun ønsker en alkoholpromille på 0 efter 3 timer

Jeg opstiller en ligning og finder a vha. solve

$$solve(0 = -0.15 \cdot 3 + 20 \cdot \frac{a}{70}, a) \rightarrow a = 1.575$$

Så Anne kan drikke cirka halvanden genstande hvis hendes alkoholpromille skal være 0 efter 3 timer

Opgave 13

Planen α gennemskærer klodsens kanter i punkterne A, B, C og D.

Det oplyses, at punkterne A, B og C ligger henholdsvis 4, 3 og 1 enheder over xy-planen

a. Gør rede for, at planen α er bestemt ved ligningen $2x + y + 3z = 12$, og bestem koordinatsættet til D.

Punkterne har koordinatsættene

$$A: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B: \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så jeg starter med at finder vektorerne fra B til henholdsvis A og C

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-3 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Så finder jeg krydsproduktet af de to vektorer idet de begger ligger i planen α og krydsproduktet vil ligge ret på begge vektorer og derfor være en normalvektor til planen

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = crossp(\vec{BC}, \vec{BC}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Denne vektor kan jeg forkorte med 3

$$\vec{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Så indsætter jeg den vektor og punktet A ind i planens ligning

$$2(x-0) + 1(y-0) + 3(z-4) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3z = 12$$

Så de to ligninger for planen er ens.

Jeg ved fra figuren at D har $x = 3$ og $y = 0$, så jeg indsætter de to ind i planens ligning og finder z da D ligger i planen

$$2 \cdot 3 + 0 + 3 \cdot z = 12 \Leftrightarrow z = \frac{6}{3} = 2$$

Så koordinatsættet til D er

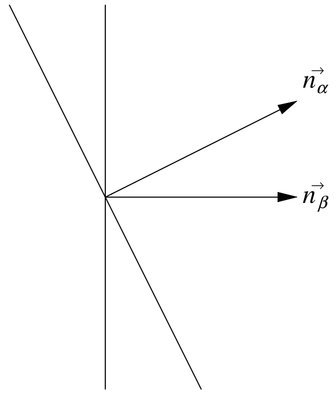
$$D: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b. Bestem den stumpe vinkel mellem α og xz-planen

Jeg ved at normalvektoren til xz-planen(som jeg kalder β) er parallel med y-aksen. Så jeg laver normalvektoren

$$\vec{n_\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Så finder jeg vinklen mellem de to normalvektorer idet de bare er forskudt med 90° fra planen



Her er planerne som set fra siden med deres normalvektorer

Jeg finder vinklen med formlen

$$cos(v) = \frac{\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|} = \frac{dotp(\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta})}{norm(\vec{n_\alpha}) \cdot norm(\vec{n_\beta})} \rightarrow cos(v) = 0.267262 \rightarrow v = 74.4986°$$

Dette er den spidse vinkel, så jeg trækker den fra 180° for at finde den stumpe vinkel

$$180° - 74.4986° = 105.5014°$$

Så den stumpe vinkel mellem de to planer er 105.5°