Matematik eksamens opgaver

Opgave 1

Figuren viser to ensvinklede og retvinklede trekanter ΔABC og ΔAEF. Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem $|EF|$ og $|AB|$

De to trekanter er ligedannet, derfor har de en skalafaktor mellem sidelængderne. Vi kan finde denne skalafaktor ved at finde forholdet mellem siderne $|AF|$ og $|AC|$.

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Nu kan jeg så finde siden $|EF|$ ved at gange siden $|CB|$ med skalafaktoren

$$12 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

Nu kan jeg finde side $|AF|$ med pythagoras da det er en retvinklet trekant

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow |AE| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

Så siden $|EF|$ er 4 og siden $|AB|$ er 15

Opgave 2

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + y - 11 &= 0 \\ 2x - 3y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Jeg isolerer y i den første ligning

$$3x + y - 11 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 11$$

Så substituerer jeg det ind på y's plads i den anden ligning

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 11 = 0 &\Leftrightarrow 2x - 3(-3x + 11) + 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 9x - 33 + 11 = 0 \Leftrightarrow 11x = 22 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Nu hvor jeg kender x kan jeg indsætte det i min isolerede formel og finde y

$$y = -3x + 11 \Leftrightarrow y = -3 \cdot 2 + 11 = 5$$

Så x er 2 og y er 5 i ligningssystemet

Opgave 3

En funktion f er løsning til differentielligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot (x-1)$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3,5)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Jeg løser differentialligningen vha. seperation af de variable

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot (x-1) \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\ dy = \int x - 1\ dx$$
$$\int \frac{1}{y}\ dy = \ln(y)$$
$$\int x - 1\ dx = \frac{1}{2}x^2 - x + k$$
$$\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 - x + k$$
$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 - x + k}$$

Så ved jeg at $f(3) = 2$ dvs.

$$3 = e^{\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 + k} \Leftrightarrow$$
$$3 = e^{\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2} \cdot e^k \Leftrightarrow 3 = e^0 \cdot e^k \Leftrightarrow k = \ln(3)$$

Så forskriften for funktionen f er

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(3)}$$

Opgave 4

I 2004 indsamlede man i et bestemt område 5382 malariamyg. Det årlige antal indsamlede malariamyg faldt herefter med 70% om året frem til år 2009.

Indfør passende variable, og opstil en eksponentiel model, der beskriver udviklingen i det årlige antal indsamlede malariamyg som funktion af antal år efter 2004

Jeg indfører variablen x som år efter 2004 og y som antallet af malariamyg. Funktionen for en eksponentiel sammenhæng har formen

$$y = a + (1+r)^x$$

r er den procentvise tilvækst, dvs. den er

$$r = -70\% = -0.70$$

Og a er start værdien, her ville det være de 5382 malariamyg de indsamlede første år.
Så eksponentialfunktionen vil have forskriften

$$f(x) = 5382 + (0.30)^x$$