Matematik aflevering 13

Jeppe Møldrup

9.317

En funktion f er bestem ved

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7$$

Bestem monotoniforholdene for f

For at finde monotoniforholdene skal jeg finde alle mulige ekstremaer, dvs. punktor hvor $f'(x) = 0$. Så jeg starter med at differentiere funktionen f

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$$

Dette er en andengradsligning, så jeg finder diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 81$$

Så rødderne findes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{3 \pm 9}{6} \rightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Så kigger jeg på områderne før, mellem og efter de to punkter for at se om det er maksimummer, minimummer eller vandrette vendetangenter

$$f'(-2) = 12$$

$$f'(0) = -6$$

$$f'(3) = 12$$

Så det første punkt($x = -1$) er et maksimum, og det andet punkt($x = 2$) er et minimum. Nu kan monotonilinjen tegnes

x		-1		2	
f'	+	0	-	0	+
$f(x)$	voks.	lok.maks.	aft.	lok.min.	voks.

f er voksende i $x \leq -1$

f er aftagende i $-1 \leq x \leq 2$

f er voksende i $2 \leq x$

9.318

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 5$$

Grafen for f går gennem punktet $P(1,4)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Jeg ved at jeg kan finde hældningen med differentialligningen da $\frac{dy}{dx}$ er hældningen til f

$$a = 3 \cdot 4 + 5 = 17$$

Så jeg ved at forskriften til tangenten er

$$y = 17x + b$$

Så kan jeg indsætte punktet og udregne b

$$4 = 17 \cdot 1 + b \rightarrow b = 4 - 17 = -13$$

Så ligning for tangentil til grafen for f i punktet P er

$$y = 17x - 13$$

9.319

Nedenstående tabel viser en opgørelse over det årlige antal reklametimer, der bliv vist på de danske tv-kanaler i perioden 2000-2010.

år	2000	2005	2008	2009	2010
Reklametimer	4963	8249	10296	12459	13661

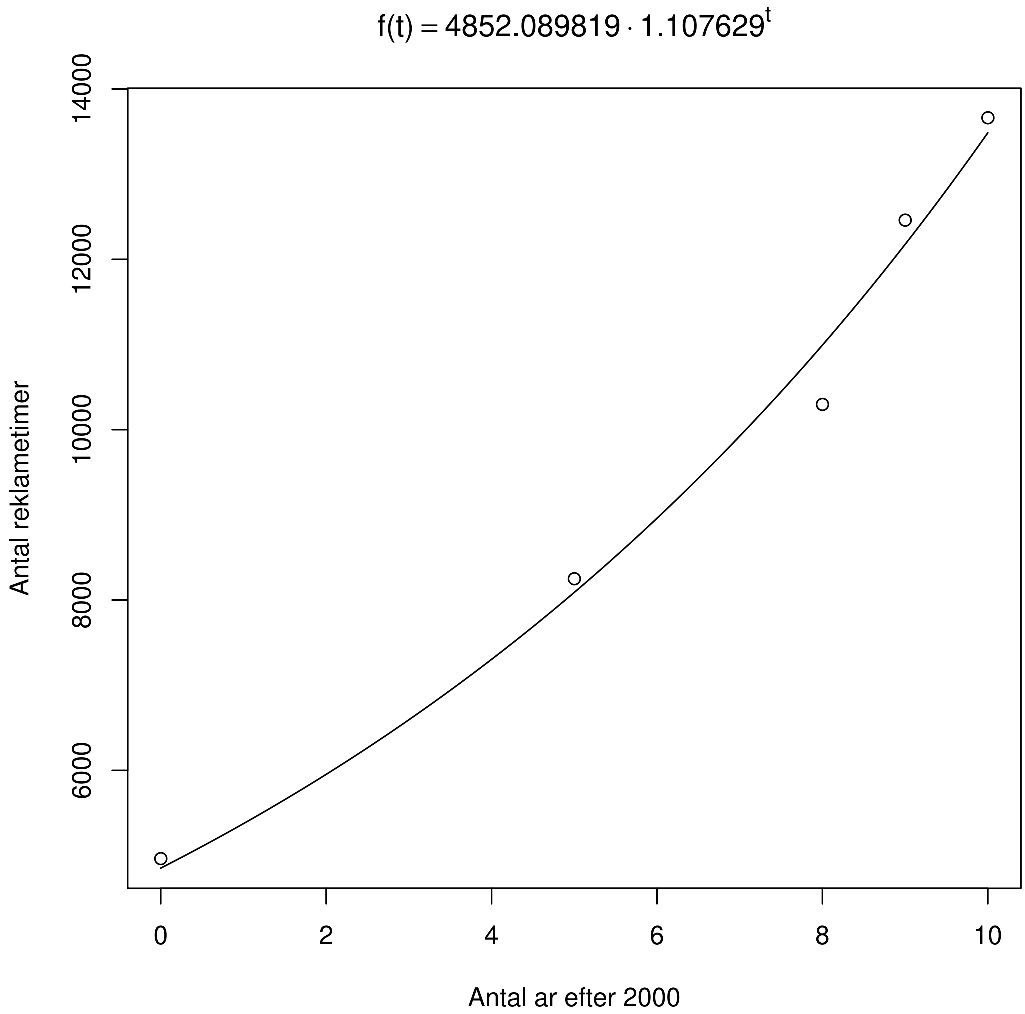
I en model kan udviklingen i det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler beskrives ved

$$f(t) = b \cdot a^t$$

hvor $f(t)$ er det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler, og t er antal år efter 2000.

a. Benyt tabellens data til at bestemme a og b

Jeg finder a og b ved at udfører eksponentiel regression på dataet



Jeg får a og b til at være

$$a = 1.107629 \quad b = 4852.089819$$

b. Bestem den tid, der går, før det årlige antal reklametimer er fordoblet.

For at finde fordoblingstiden eller fordoblingskonstanten i en eksponentiel funktion bruger man formlen

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Så jeg indsætter værdierne

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1.108)} = 6.781$$

Så fordoblingstiden er 6.781, det betyder at der går omkring 6.781 år før antallet af reklametimer vist på de danske tv-kanaler er fordoblet

c. Bestem $f'(6)$, og giv en fortolkning af dette tal.

$$f'(6) = 915.878$$

Dette tal angiver den årlige ændring i antallet af reklametimer for 2006.

9.320

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a. Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

For at bestemme vinklen bruger jeg formlen

$$cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{dotp(\vec{a}, \vec{b})}{norm(\vec{a}) \cdot norm(\vec{b})} \rightarrow v = 170.838°$$

Så vinklen mellem de to vektorer er 171°

b. Bestem arealet af den trekant, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Jeg finder arealet af trekanten ved at finde halvdelen af arealet af parallelogrammet, idet arealet af parallelogrammet er givet ved den numeriske værdi af determinanten for de to vectorer

$$A = 0.5 \cdot det(\vec{a}, \vec{b}) = 2.5$$

Så arealet af trekanten er 2.5

9.323

En forsker vil undersøge, om en persons efterlønsalder er uafhængig af, om personen lever sammen med en partner eller ej. Derfor udtages der en tilfældig stikprøve på 253 personer med følgende resultat

	60 år	61-65 år
Ja	28	62
Nej	73	90

a. Formuler forskerens nulhypotese, og opstil med udgangspunkt heri en tabel over de forventede værdier.

Min nulhypotese er H_0 = en persons efterlønsalder er uafhængig af om personen lever med en partner eller ej.

Jeg starter med at tage summen af alle rækker og kolonner

	60 år	61-65 år	sum
Ja	28	62	90
Nej	73	90	163
sum	101	152	253

Så tager jeg summen af den samme alder og dividerer med det totale antal og ganger med summen af folk der har svaret enten Ja eller Nej for at finde mine forventede værdier

	60 år	61-65 år
Ja	35.93	57.07
Nej	65.07	97.93

Nu kan jeg lave en χ^2 uafhængighedstest for at se om det nu passer.

b. Afgør på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes

Jeg fik følgende resultat fra min χ^2 uafhængighedstest på min H_0 fra sidste opgave

$$\chi^2 = 4.5205,\ \ df = 1,\ \ p - value = 0.03349$$

Så der er altså signifikant forskel og derfor må vi forkaste hypotisen og konkludere at efterlønsalderen er afhængig af, om personen lever sammen med en partner eller ej.

9.327

To funktioner f og g er bestemt ved

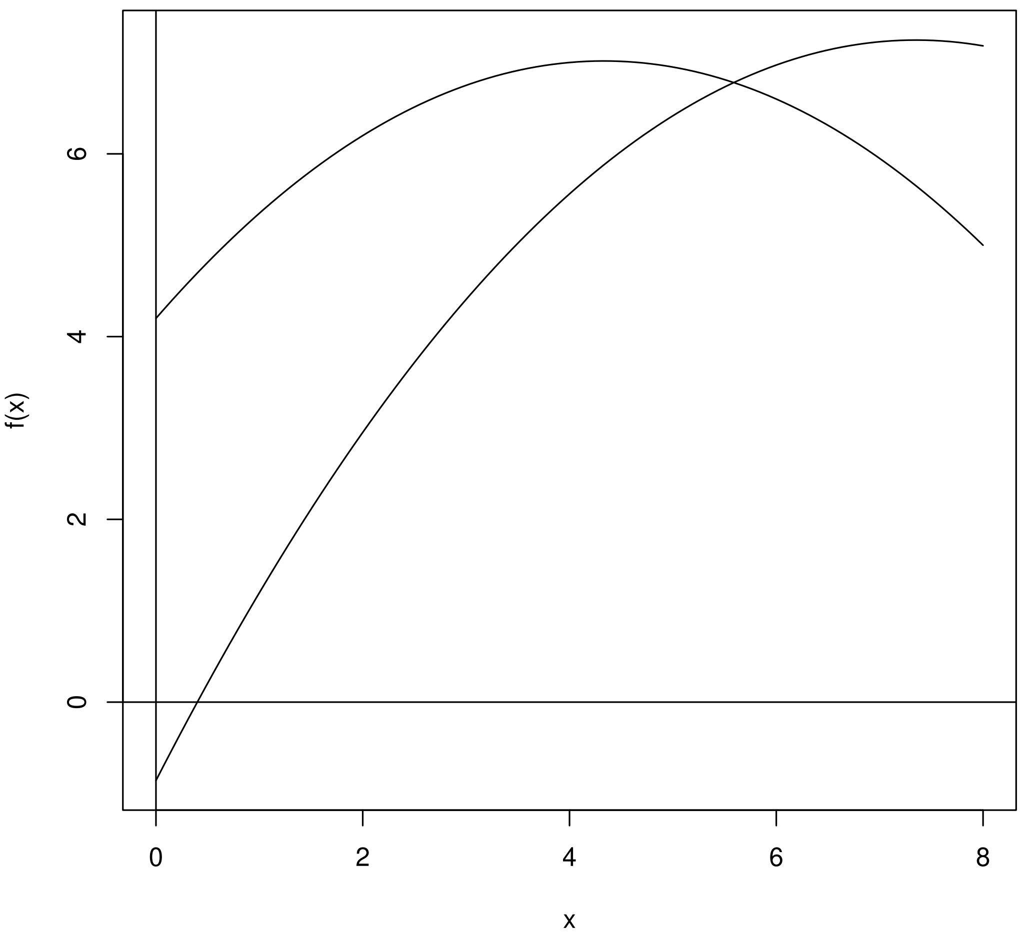
$$f(x) = -0.15x^2 + 2.205x - 0.858$$

$$g(x) = -0.12x^2 + 1.3x + 4.2$$

Graferne for f og g afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant et område M, hvor $g(x) \geq f(x)$

En træskål har for som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om førstaksen. Enheden er på begge akser cm.

a. Tegn graferne for f og g, og bestem skålens højde



Jeg fandt højden af skålen, dvs. der hvor de to grafer skærer hinanden vha. solve til at være

$$solve(f(x) = g(x), x) \rightarrow x = 5.58895$$

dvs. træskålen er 5.59 cm høj

b. Hvor stort er rumfanget af det træ, der udgør skålen?

For at finde det bruger jeg formlen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (g(x) - f(x))^2 \mathrm{d}x$$

Så jeg indsætter

$$V = \pi \cdot \int_0^{5.58895} ((-0.12x^2 + 1.3x + 4.2) - (-0.15x^2 + 2.205x - 0.858))^2 \mathrm{d}x = 166.687 \text{ cm}^2$$

Så rumfanget af træet i skålen er 166.687 cm^2