Теория конечных графов

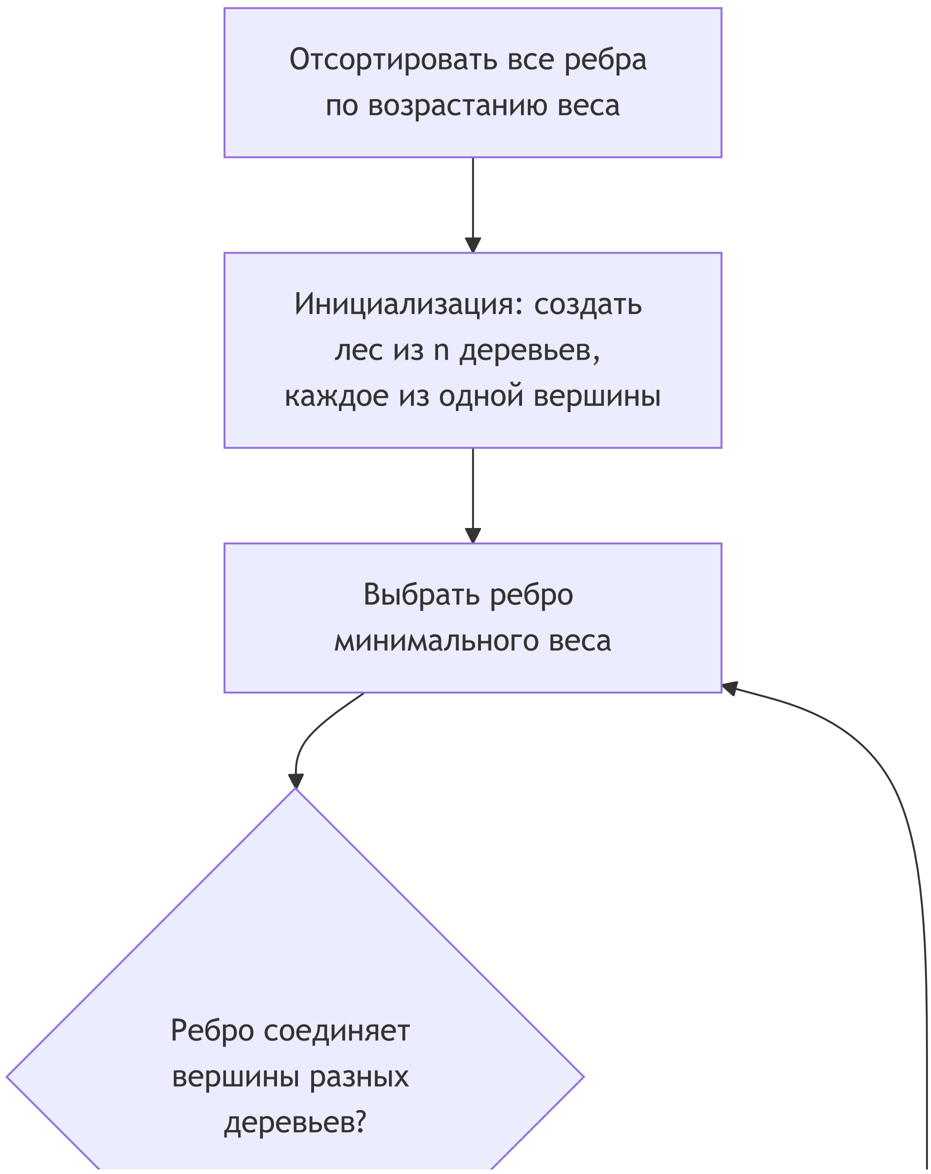
1. Построение минимального покрывающего дерева по алгоритму Краскала

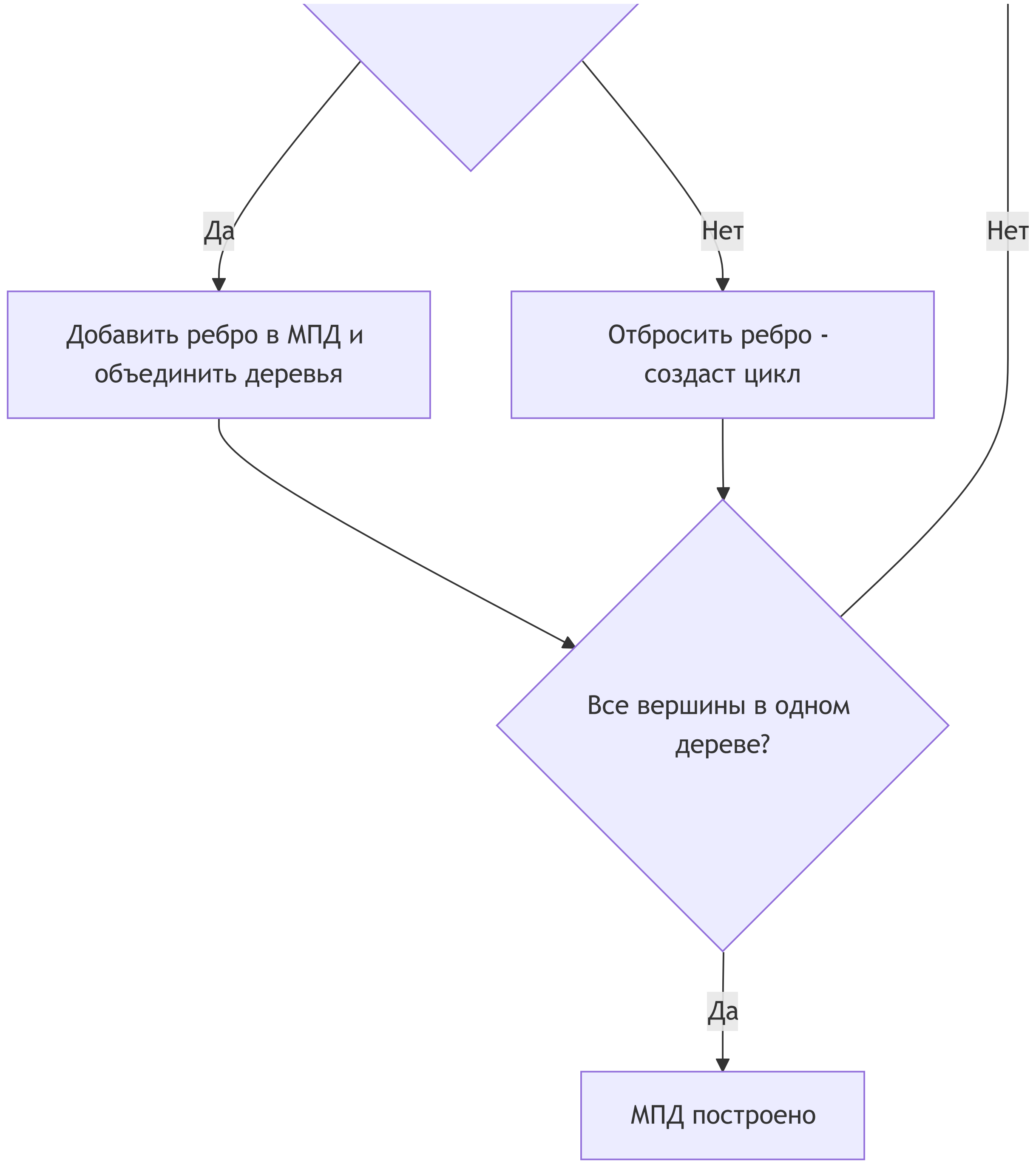
Минимальное покрывающее (остовное) дерево (МПД) для взвешенного графа — это ациклический связный подграф, содержащий все вершины исходного графа и имеющий минимальную возможную суммарную стоимость ребер.

Основные понятия

- **Связный граф** — граф, в котором существует путь между любыми двумя вершинами.
- **Дерево** — связный ациклический граф.
- **Покрывающее дерево** — подграф графа G, являющийся деревом и содержащий все вершины G.

Алгоритм Краскала для построения МПД





Алгоритм по шагам

1. **Инициализация**:
    - Отсортировать все ребра графа G = (V, E) по неубыванию веса.
    - Создать лес F из |V| деревьев, каждое состоящее из одной вершины.
    - Создать пустое множество A, в котором будут храниться ребра МПД.
2. **Построение**:
    - Пока в F больше одного дерева и есть неиспользованные ребра:
        - Выбрать ребро (u, v) с минимальным весом из оставшихся.
        - Если u и v принадлежат разным деревьям в F, то:
            - Добавить ребро (u, v) в множество A.
            - Объединить деревья, содержащие u и v, в одно дерево в F.
        - Иначе отбросить ребро, так как оно образует цикл.

3. **Завершение**:
   - Когда в F останется только одно дерево или все ребра будут проверены, алгоритм завершается.
   - Результирующее множество ребер A образует минимальное покрывающее дерево.

Реализация с использованием системы непересекающихся множеств

Для эффективной реализации алгоритма Краскала используется структура данных "система непересекающихся множеств" (Union-Find) с операциями:

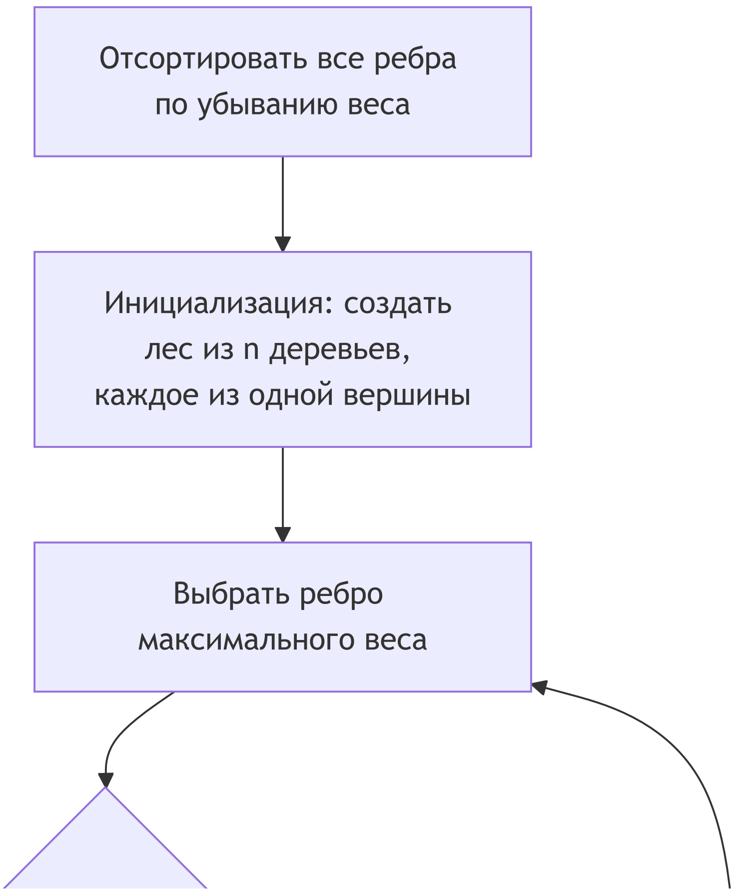
- **MakeSet(x)** — создание нового множества, содержащего только элемент x.
- **Find(x)** — определение, к какому множеству принадлежит элемент x.
- **Union(x, y)** — объединение множеств, содержащих элементы x и y.

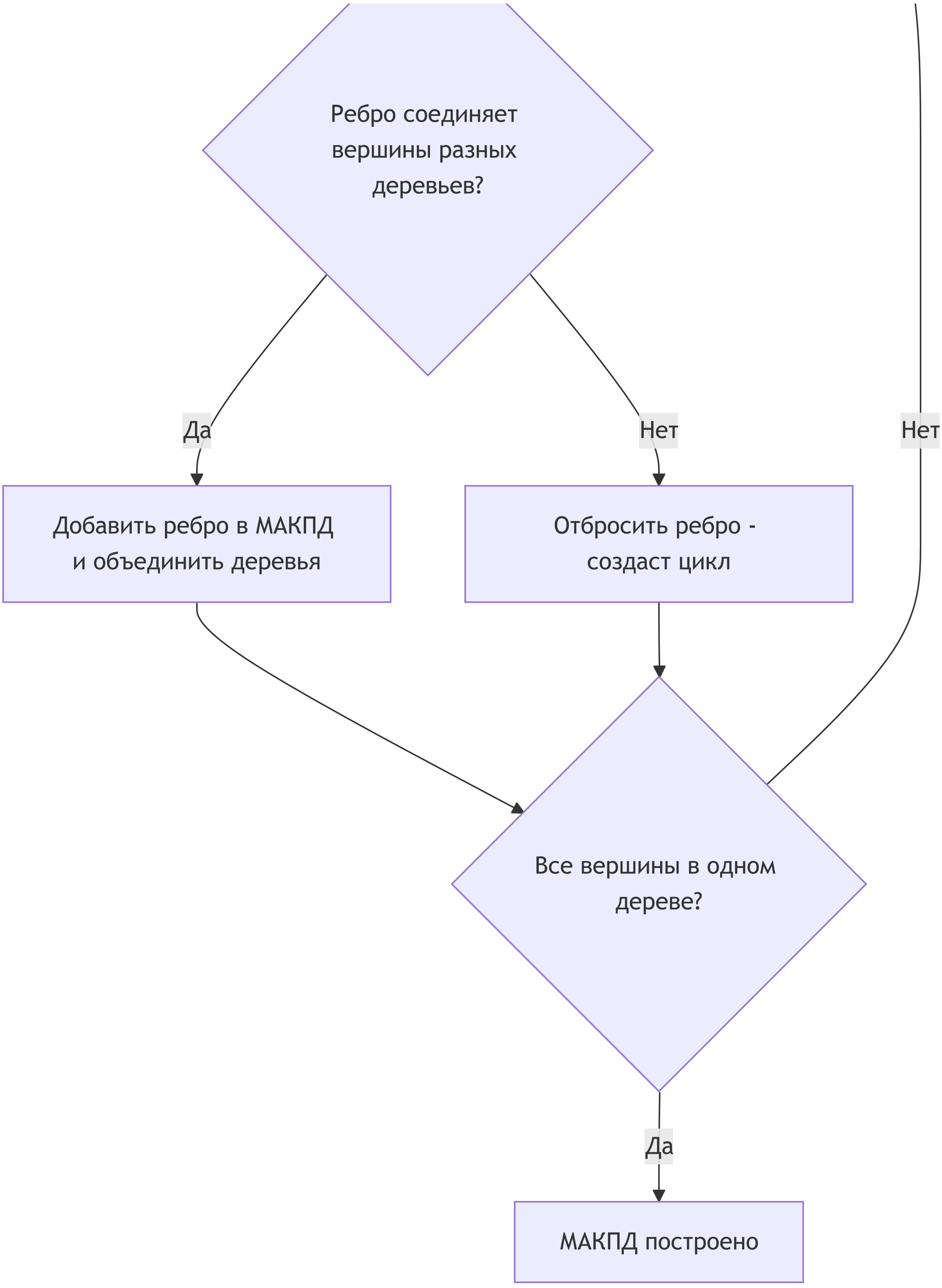
2. Построение максимального покрывающего дерева по алгоритму Краскала

Максимальное покрывающее дерево (МАКПД) — это покрывающее дерево с максимально возможной суммарной стоимостью ребер.

Алгоритм Краскала для построения МАКПД

Алгоритм Краскала для построения максимального покрывающего дерева аналогичен алгоритму для минимального дерева, с одним ключевым отличием: ребра сортируются по убыванию веса, а не по возрастанию.





Алгоритм по шагам

1. **Инициализация**:
    - Отсортировать все ребра графа G = (V, E) по неубыванию веса (в порядке убывания).
    - Создать лес F из |V| деревьев, каждое состоящее из одной вершины.
    - Создать пустое множество A, в котором будут храниться ребра МАКПД.
2. **Построение**:

- Пока в F больше одного дерева и есть неиспользованные ребра:
  - Выбрать ребро (u, v) с максимальным весом из оставшихся.
  - Если u и v принадлежат разным деревьям в F, то:
    - Добавить ребро (u, v) в множество A.
    - Объединить деревья, содержащие u и v, в одно дерево в F.
  - Иначе отбросить ребро, так как оно образует цикл.

3. **Завершение**:

   - Когда в F останется только одно дерево или все ребра будут проверены, алгоритм завершается.
   - Результирующее множество ребер A образует максимальное покрывающее дерево.

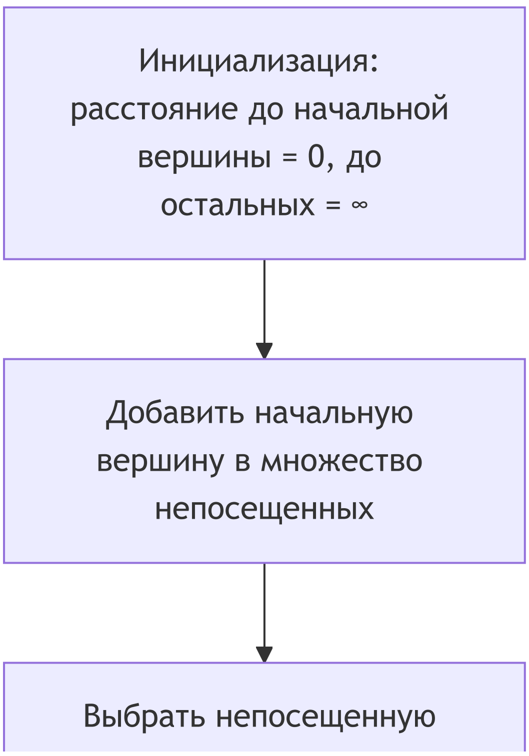
3. Поиск маршрута и наименьшей длины по алгоритму Дейкстры

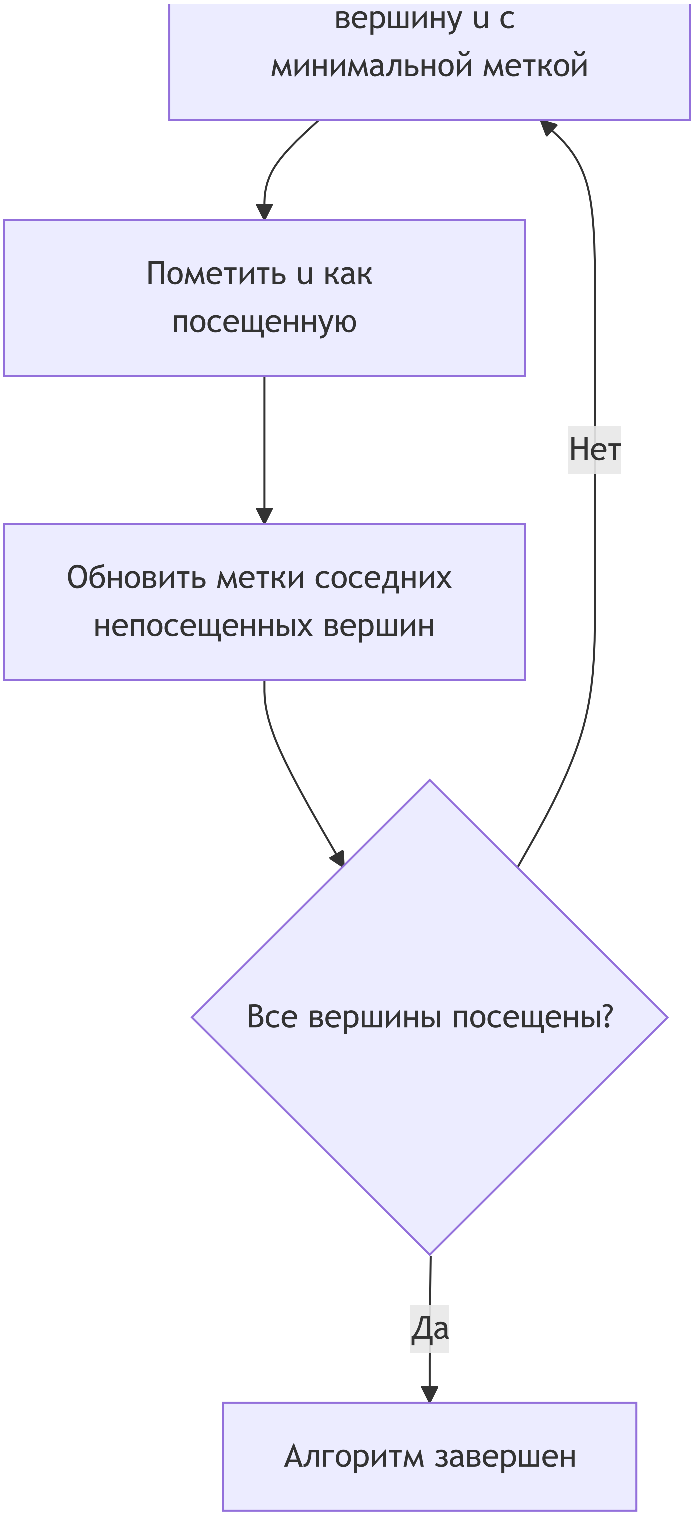
Алгоритм Дейкстры решает задачу поиска кратчайших путей от одной вершины до всех остальных в графе с неотрицательными весами ребер.

Основные понятия

- **Кратчайший путь** — путь между двумя вершинами с минимальной суммарной длиной.
- **Метка вершины** — текущая оценка длины кратчайшего пути от начальной вершины.
- **Предшественник вершины** — вершина, из которой осуществляется оптимальный вход в текущую.

Алгоритм Дейкстры





Алгоритм по шагам

1. **Инициализация**:
    - Установить метку начальной вершины s равной 0: dist[s] = 0.
    - Для всех остальных вершин v установить метки равными бесконечности: dist[v] = ∞.
    - Создать множество непосещенных вершин, содержащее все вершины графа.
    - Инициализировать массив предшественников pred[v] = null для всех вершин.
2. **Основной цикл**:
    - Пока множество непосещенных вершин не пусто:

        - Выбрать из непосещенных вершину u с минимальной меткой dist[u].
        - Пометить u как посещенную (удалить из множества непосещенных).
        - Для каждой непосещенной соседней вершины v вершины u:
            - Рассчитать новое расстояние через u: newDist = dist[u] + weight(u, v).
            - Если newDist < dist[v], то обновить dist[v] = newDist и pred[v] = u.

3. **Восстановление путей**:
    - После завершения алгоритма для каждой вершины v значение dist[v] содержит длину кратчайшего пути от s до v.
    - Путь можно восстановить, следуя от v к s через предшественников в массиве pred.

Ограничения

- Алгоритм Дейкстры не работает корректно с графами, содержащими ребра отрицательного веса.
- Для графов с отрицательными весами, но без отрицательных циклов, следует использовать алгоритм Беллмана-Форда.

4. Особенности i-й строки и i-столбца для Алгоритма Уоршалла-Флойда

Алгоритм Уоршалла-Флойда используется для нахождения длин кратчайших путей между всеми парами вершин взвешенного графа. Особое значение в алгоритме имеют i-я строка и i-й столбец матрицы расстояний на каждой итерации.

Особенности i-й строки и i-столбца

Рассмотрим матрицу расстояний D, где D[u][v] представляет длину кратчайшего пути от вершины u до вершины v.

На итерации k алгоритма Уоршалла-Флойда:

- **i-я строка** содержит длины кратчайших путей от вершины i до всех вершин, с использованием вершин {0, 1, ..., k-1} в качестве промежуточных.
- **i-й столбец** содержит длины кратчайших путей от всех вершин до вершины i, с использованием вершин {0, 1, ..., k-1} в качестве промежуточных.

Доказательство особенностей

На итерации k алгоритм Уоршалла-Флойда обновляет элементы матрицы расстояний по формуле: D[i][j] = min(D[i][j], D[i][k] + D[k][j])

Если рассмотреть i-ю строку (фиксированное i, переменное j), то элементы D[i][j] обновляются на основе элемента D[i][k], который принадлежит i-й строке, и элементов D[k][j], которые принадлежат k-й строке.

Аналогично для i-го столбца (фиксированное j = i, переменное s), элементы D[s][i] обновляются на основе элементов D[s][k] из k-го столбца и элемента D[k][i], который принадлежит i-му столбцу.

Таким образом, на итерации k значения в i-й строке и i-м столбце зависят от:

1. Их предыдущих значений на итерации k-1.
2. Значений в k-й строке и k-м столбце на итерации k-1.

Практическое значение особенностей

Эта особенность алгоритма Уоршалла-Флойда имеет важное практическое значение:

- Она позволяет оптимизировать алгоритм для параллельных вычислений, поскольку обновления в разных строках и столбцах могут выполняться независимо.
- Понимание этой особенности помогает в доказательстве корректности алгоритма и в анализе его сложности.

5. Особенности i-й строки и i-столбца для Алгоритма поиска транзитивного замыкания

Алгоритм поиска транзитивного замыкания определяет для каждой пары вершин (i, j) графа существует ли путь из i в j. Как и в алгоритме Уоршалла-Флойда, i-я строка и i-й столбец имеют специфические особенности.

Определение транзитивного замыкания

Транзитивное замыкание графа G — это граф G', такой что между вершинами i и j существует ребро в G' тогда и только тогда, когда в G существует путь из i в j.

Алгоритм поиска транзитивного замыкания

Алгоритм использует булеву матрицу смежности R, где R[i][j] = true, если существует прямое ребро или путь из i в j, и false в противном случае.

```
Parse error on line 5:
...o n-1]    D --> E[R[i][j] = R[i][j] или
----------------------^
Expecting 'SQE', 'DOUBLECIRCLEEND', 'PE', '-)', 'STADIUMEND',
'SUBROUTINEEND', 'PIPE', 'CYLINDEREND', 'DIAMOND_STOP', 'TAGEND',
'TRAPEND', 'INVTRAPEND', 'UNICODE_TEXT', 'TEXT', 'TAGSTART', got
'SQS'
```

Особенности i-й строки и i-столбца

В контексте алгоритма поиска транзитивного замыкания:

1. **i-я строка** матрицы R на итерации k содержит информацию о том, в какие вершины можно попасть из вершины i, используя пути, проходящие через вершины с номерами не больше k.
2. **i-й столбец** матрицы R на итерации k содержит информацию о том, из каких вершин можно попасть в вершину i, используя пути, проходящие через вершины с номерами не больше k.

Доказательство особенностей

На итерации k алгоритм обновляет элементы матрицы R по формуле: R[i][j] = R[i][j] ∨ (R[i][k] ∧ R[k][j])

Для i-й строки (фиксированное i, переменное j):

- R[i][j] обновляется на основе элемента R[i][k] (принадлежит i-й строке) и элементов R[k][j] (принадлежат k-й строке).

Для i-го столбца (фиксированное j = i, переменное s):

- R[s][i] обновляется на основе элементов R[s][k] (принадлежат k-му столбцу) и элемента R[k][i] (принадлежит i-му столбцу).

Таким образом, на итерации k значения в i-й строке и i-м столбце зависят от:

1. Их предыдущих значений на итерации k-1.
2. Значений в k-й строке и k-м столбце на итерации k-1.

6. Поиск максимального потока в графе

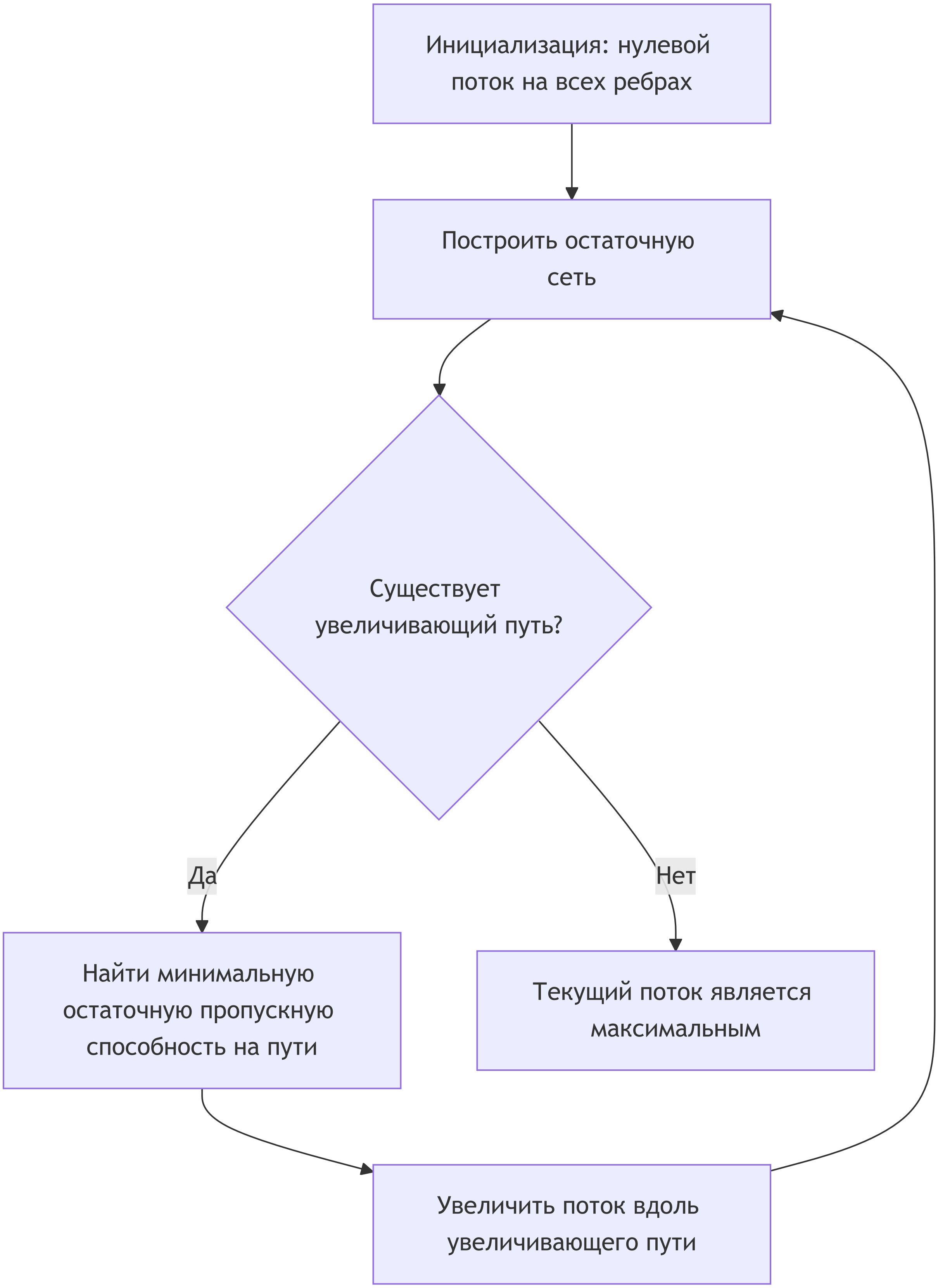
Задача о максимальном потоке в сети состоит в нахождении потока наибольшей величины из источника s в сток t при соблюдении ограничений на пропускную способность ребер.

Основные понятия

- **Поток** — функция f: E → R, приписывающая каждому ребру (u, v) величину потока f(u, v), удовлетворяющая следующим условиям:
  - **Ограничение пропускной способности**: 0 ≤ f(u, v) ≤ c(u, v), где c(u, v) — пропускная способность ребра.
  - **Сохранение потока**: для каждой вершины v, кроме источника s и стока t, сумма входящего потока равна сумме исходящего.
- **Остаточная сеть** — граф, показывающий возможности изменения потока. Для каждого ребра (u, v) с потоком f(u, v) в остаточной сети есть:
  - Прямое ребро (u, v) с остаточной пропускной способностью c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v).
  - Обратное ребро (v, u) с остаточной пропускной способностью c_f(v, u) = f(u, v).

- **Увеличивающий путь** — путь от источника s к стоку t в остаточной сети.

Алгоритм поиска максимального потока (алгоритм Форда-Фалкерсона)



Алгоритм по шагам

1. **Инициализация**:

   - Установить нулевой поток f(u, v) = 0 для всех ребер (u, v).
   - Построить начальную остаточную сеть G_f.

2. **Основной цикл**:

   - Пока существует увеличивающий путь p от s до t в остаточной сети G_f:
     - Найти минимальную остаточную пропускную способность c_f(p) вдоль пути p.
     - Для каждого ребра (u, v) на пути p:
       - Если (u, v) — исходное ребро сети, увеличить поток: f(u, v) += c_f(p).
       - Если (u, v) — обратное ребро, уменьшить поток на соответствующем исходном ребре: f(v, u) -= c_f(p).
     - Обновить остаточную сеть G_f.

3. **Завершение**:

   - Когда больше нет увеличивающих путей, текущий поток является максимальным.

Реализации алгоритма Форда-Фалкерсона

1. **Базовый алгоритм Форда-Фалкерсона**:

   - Поиск увеличивающего пути можно выполнять любым алгоритмом поиска пути (например, DFS).
   - Не гарантирует полиномиальное время работы для нецелых пропускных способностей.

2. **Алгоритм Эдмондса-Карпа**:

   - Использует BFS для поиска увеличивающего пути (всегда находит кратчайший путь).
   - Время работы $O(VE^2)$, где V — число вершин, E — число ребер.

3. **Алгоритм Диница**:

   - Использует концепцию уровневых графов для ускорения поиска увеличивающих путей.
   - Время работы $O(V^2E)$.

7. Поиск гамильтонова цикла в орграфе

Гамильтонов цикл — это цикл в графе, проходящий через каждую вершину ровно один раз и возвращающийся в исходную вершину. Задача нахождения гамильтонова цикла в орграфе является NP-полной.

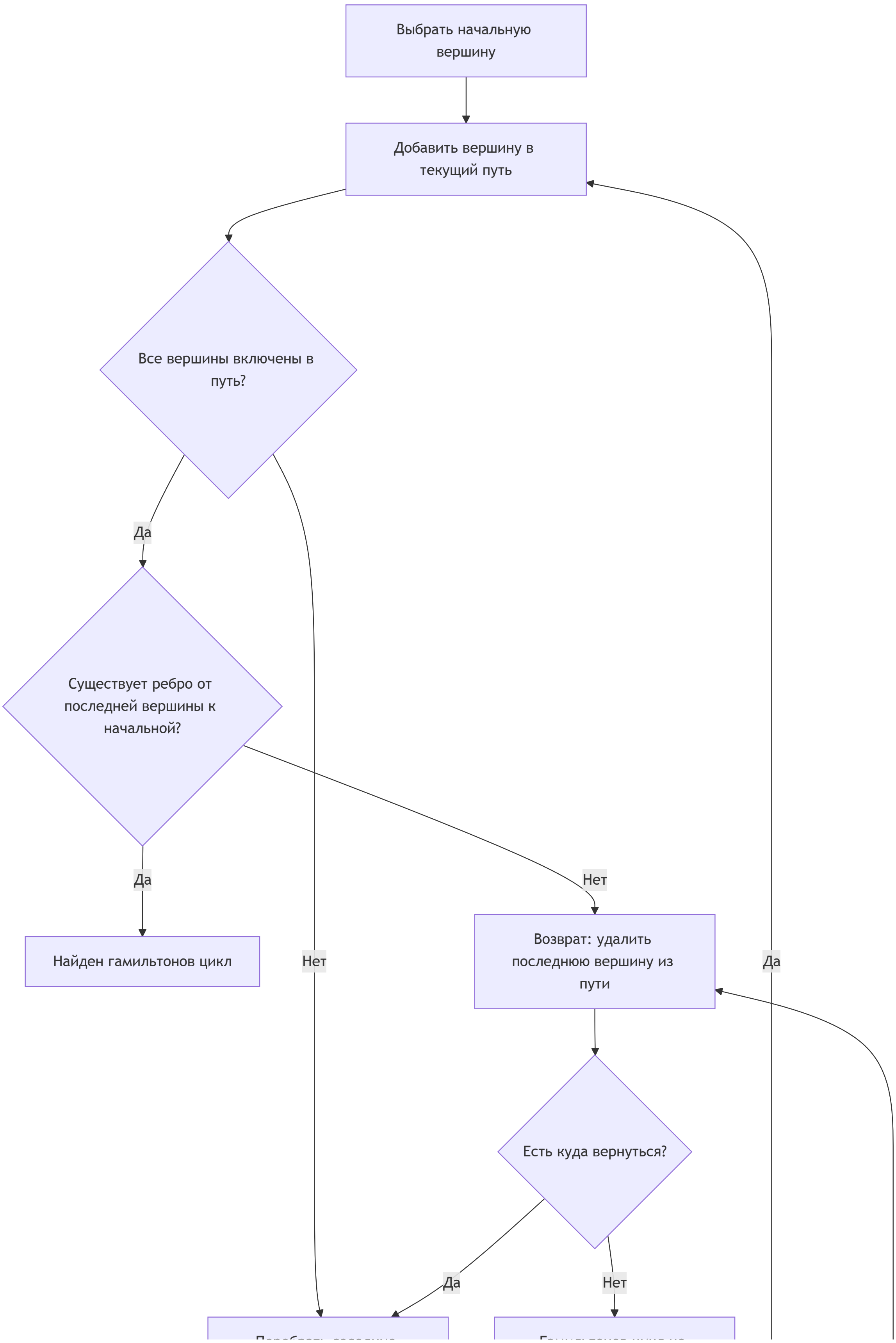
Основные понятия

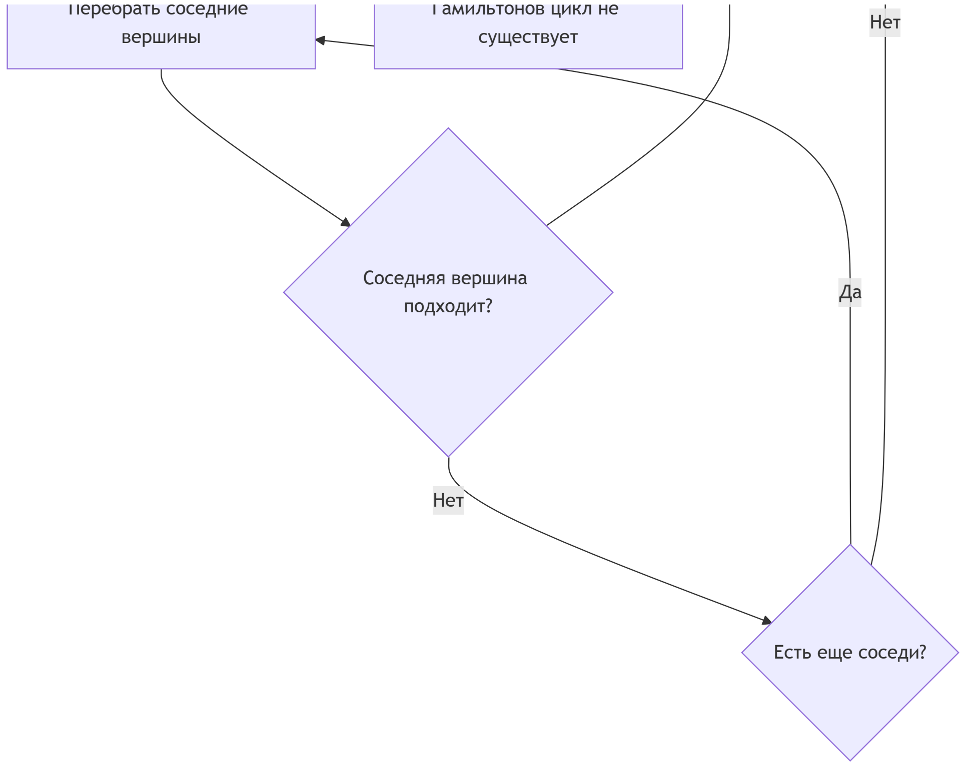
- **Гамильтонов цикл** — цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз.

- **Гамильтонов путь** — путь, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз.
- **Орграф (ориентированный граф)** — граф, в котором ребра имеют направление.

Алгоритм поиска гамильтонова цикла с упрощением

Для поиска гамильтонова цикла в орграфе можно использовать алгоритм с возвратом (backtracking) с применением эвристик для ускорения.





Алгоритм по шагам с упрощением

1. **Инициализация**:
    - Выбрать произвольную начальную вершину v_0.
    - Инициализировать путь $P = [v_0]$.
    - Отметить v_0 как посещенную.
2. **Рекурсивный поиск**:
    - Функция HamiltonianCycle(P, visited):
        - Если |P| = |V| (все вершины включены в путь):
            - Проверить, существует ли ребро от последней вершины пути к начальной.
            - Если да, то $P + v_0$ образует гамильтонов цикл.
        - Иначе:
            - Для каждой непосещенной вершины v, смежной с последней вершиной пути:
                - Добавить v в путь P.
                - Отметить v как посещенную.
                - Рекурсивно вызвать HamiltonianCycle(P, visited).
                - Если найден гамильтонов цикл, вернуть true.
                - Иначе удалить v из пути и отметить как непосещенную (backtracking).
            - Если после перебора всех смежных вершин цикл не найден, вернуть false.
3. **Упрощения и эвристики**:
    - **Проверка локальных условий**: Если вершина имеет меньше двух ребер, гамильтонов цикл не существует.

  - **Проверка связности**: Если граф не является сильно связным, гамильтонов цикл не существует.
  - **Упорядочивание вершин**: Сначала рассматривать вершины с меньшей степенью.
  - **Проверка на отсечение**: Если добавление вершины v в путь отрезает некоторые непосещенные вершины от оставшихся, то v не следует добавлять.

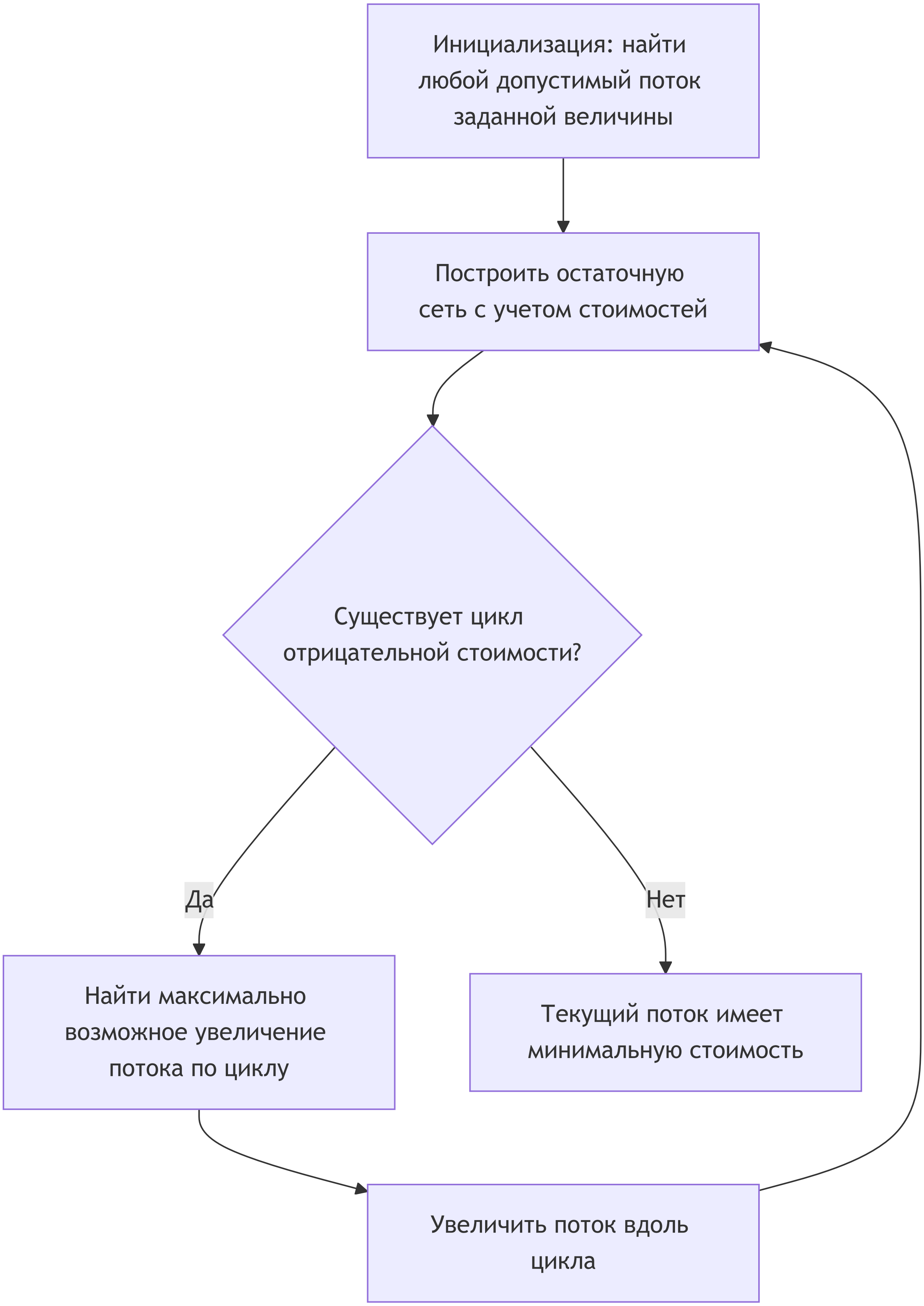
8. Поиск потока минимальной стоимости

Задача о потоке минимальной стоимости заключается в нахождении потока заданной величины из источника s в сток t с минимальной общей стоимостью пересылки потока по ребрам.

Основные понятия

- **Стоимость ребра** — цена пересылки единицы потока по данному ребру.
- **Стоимость потока** — сумма произведений величин потока по каждому ребру на стоимость этого ребра.
- **Циркуляция** — поток, в котором для каждой вершины входящий поток равен исходящему.

Алгоритм поиска потока минимальной стоимости



Алгоритм по шагам

1. **Инициализация**:
    - Найти любой допустимый поток f величины F от источника s к стоку t (например, с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона).
    - Построить остаточную сеть G_f, включая обратные ребра.

- Для каждого ребра (u, v) определить его стоимость в остаточной сети:
  - Для исходного ребра: cost_f(u, v) = cost(u, v).
  - Для обратного ребра: cost_f(v, u) = -cost(u, v).

2. **Основной цикл**:
   - Пока в остаточной сети существует цикл отрицательной стоимости:
     - Найти цикл отрицательной стоимости (например, с помощью алгоритма Беллмана-Форда).
     - Определить максимально возможное увеличение потока δ вдоль цикла (минимальную остаточную пропускную способность на цикле).
     - Увеличить поток вдоль цикла на величину δ.
     - Обновить остаточную сеть G_f.
3. **Завершение**:
   - Когда больше нет циклов отрицательной стоимости, текущий поток имеет минимальную стоимость среди всех потоков величины F.

Альтернативные алгоритмы

1. **Алгоритм последовательного кратчайшего пути**:
   - Начиная с нулевого потока, итеративно увеличивать поток по кратчайшему пути от s до t в остаточной сети, где длина ребра равна его стоимости.
   - Повторять, пока не будет достигнута требуемая величина потока.
2. **Алгоритм эффективного преобразования стоимостей**:
   - Использовать потенциалы вершин для преобразования стоимостей ребер, чтобы они стали неотрицательными.
   - Применять алгоритмы кратчайшего пути с неотрицательными весами (например, Дейкстры) для поиска увеличивающих путей.
3. **Симплекс-метод для сетей**:
   - Специализированная версия симплекс-метода линейного программирования для задачи о потоке минимальной стоимости.
   - Эффективно ищет и обновляет базисные решения, соответствующие допустимым потокам.