Алгебра. Аналитическая геометрия

1. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность.

Линейное пространство (или векторное пространство) — это множество V элементов (векторов), для которых определены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. **Коммутативность сложения**: $u + v = v + u$ для любых $u, v \in V$
2. **Ассоциативность сложения**: $(u + v) + w = u + (v + w)$ для любых $u, v, w \in V$
3. **Существование нулевого вектора**: существует $0 \in V$ такой, что $v + 0 = v$ для любого $v \in V$
4. **Существование противоположного вектора**: для любого $v \in V$ существует $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = 0$
5. **Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов**: $a(u + v) = au + av$ для любого скаляра a и векторов $u, v \in V$
6. **Дистрибутивность умножения вектора на сумму скаляров**: $(a + b)v = av + bv$ для любых скаляров a, b и вектора $v \in V$
7. **Ассоциативность умножения на скаляр**: $a(bv) = (ab)v$ для любых скаляров a, b и вектора $v \in V$
8. **Умножение на единицу**: $1v = v$ для любого $v \in V$

Подпространство линейного пространства V — это подмножество $W \subseteq V$, которое само является линейным пространством относительно тех же операций, что и V. Для проверки, является ли W подпространством, достаточно проверить:

1. W непусто ($0 \in W$)
2. Замкнутость относительно сложения: $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
3. Замкнутость относительно умножения на скаляр: $v \in W$, a — скаляр $\Rightarrow av \in W$

Линейная оболочка множества векторов $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ — это минимальное подпространство, содержащее эти векторы, или, эквивалентно, множество всех линейных комбинаций этих векторов:

```
span{v₁, v₂, ..., vₙ} = {α₁v₁ + α₂v₂ + ... + αₙvₙ | α₁, α₂, ..., αₙ — скаляры}
```

Линейная независимость: Векторы $v_1, v_2, ..., v_n$ называются линейно независимыми, если уравнение

```
α₁v₁ + α₂v₂ + ... + αₙvₙ = 0
```

имеет только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Базис линейного пространства — это линейно независимая система векторов, линейная оболочка которой совпадает со всем пространством. Базис позволяет однозначно представить любой вектор пространства в виде линейной комбинации базисных векторов.

Размерность линейного пространства — это количество векторов в любом его базисе. Размерность обозначается dim V.

2. Теорема о ранге матрицы, ее приложение к теории систем линейных уравнений.

Ранг матрицы — это максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы.

Теорема о ранге матрицы: Для любой матрицы A количество линейно независимых строк равно количеству линейно независимых столбцов, и это число равно рангу матрицы.

Следствия теоремы о ранге:

1. Ранг произведения матриц не превышает ранга каждого из множителей: rank(AB) ≤ min(rank(A), rank(B))
2. Если A — квадратная матрица размера n×n, то rank(A) = n тогда и только тогда, когда det(A) ≠ 0

Приложение к теории систем линейных уравнений:

Рассмотрим систему линейных уравнений Ax = b, где A — матрица коэффициентов размера m×n, x — вектор неизвестных размера n, b — вектор правых частей размера m.

Расширенная матрица системы (A|b) получается добавлением столбца b к матрице A.

Теорема Кронекера-Капелли: Система линейных уравнений Ax = b совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы (A|b):

```
rank(A) = rank(A|b)
```

Кроме того:

1. Если rank(A) = rank(A|b) = n, то система имеет единственное решение
2. Если rank(A) = rank(A|b) < n, то система имеет бесконечно много решений, и общее решение зависит от (n - rank(A)) произвольных параметров
3. Если rank(A) < rank(A|b), то система несовместна (не имеет решений)

3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Условие приводимости матрицы к

диагональному виду. Жорданова нормальная форма матрицы.

Собственный вектор линейного оператора A — это ненулевой вектор v такой, что Av = λv для некоторого скаляра λ.

Собственное значение λ — это скаляр, соответствующий собственному вектору v в уравнении Av = λv.

Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A:

1. Составить характеристическое уравнение: det(A - λI) = 0
2. Найти корни характеристического уравнения — это собственные значения
3. Для каждого собственного значения λ найти собственные векторы, решая систему (A - λI)v = 0

Условие приводимости матрицы к диагональному виду:

Матрица A размера n×n приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда:

1. Характеристический многочлен матрицы A имеет n корней (с учетом кратности) в поле скаляров
2. Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности

Эквивалентное условие: матрица A диагонализируема тогда и только тогда, когда она имеет n линейно независимых собственных векторов.

Жорданова нормальная форма:

Если матрица не диагонализируема, она может быть приведена к жордановой нормальной форме. Жорданова нормальная форма матрицы A — это блочно-диагональная матрица, состоящая из жордановых клеток.

Жорданова клетка порядка k с собственным значением λ имеет вид:

```
J_k(λ) = [λ 1 0 ... 0]
         [0 λ 1 ... 0]
         [0 0 λ ... 0]
         [. . . ... .]
         [0 0 0 ... λ]
```

Для каждого собственного значения λ с алгебраической кратностью m и геометрической кратностью k формируется m-k+1 жордановых клеток.

4. Евклидово пространство. Ортогональные матрицы. Симметричные преобразования.

Евклидово пространство — это линейное пространство V над полем действительных чисел, в котором определено скалярное произведение векторов, удовлетворяющее аксиомам:

1. (u, v) = (v, u) для всех u, v ∈ V (симметричность)
2. (u + v, w) = (u, w) + (v, w) для всех u, v, w ∈ V (линейность по первому аргументу)
3. (αu, v) = α(u, v) для всех u, v ∈ V и α ∈ ℝ
4. (v, v) ≥ 0 для всех v ∈ V, причем (v, v) = 0 тогда и только тогда, когда v = 0 (положительная определенность)

В евклидовом пространстве можно определить понятия:

- **Норма вектора**: ||v|| = √(v, v)
- **Расстояние между векторами**: d(u, v) = ||u - v||
- **Угол между векторами**: cos(θ) = (u, v) / (||u|| · ||v||)

Ортогональность векторов: Векторы u и v называются ортогональными, если (u, v) = 0.

Ортонормированный базис — это базис из попарно ортогональных векторов единичной длины.

Ортогональная матрица — это квадратная матрица A, удовлетворяющая условию:

```
A^T · A = A · A^T = I
```

где A^T — транспонированная матрица, I — единичная матрица.

Свойства ортогональных матриц:

1. det(A) = ±1
2. Столбцы (и строки) ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис
3. Обратная матрица совпадает с транспонированной: A^(-1) = A^T
4. Произведение ортогональных матриц — ортогональная матрица

Симметричное преобразование (или самосопряженный оператор) в евклидовом пространстве — это линейный оператор A, удовлетворяющий условию:

```
(Au, v) = (u, Av)
```

для всех u, v ∈ V.

В матричном представлении симметричное преобразование описывается симметричной матрицей:

```
A^T = A
```

Спектральная теорема для симметричных матриц: Любая симметричная матрица над полем действительных чисел диагонализируема, и все ее собственные значения действительны. Более того, существует ортонормированный базис из собственных векторов матрицы.

5. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Группа подстановок. Изоморфизм.

Группа — это множество G с бинарной операцией ∗, удовлетворяющее аксиомам:

1. **Замкнутость**: для всех a, b ∈ G, a ∗ b ∈ G
2. **Ассоциативность**: для всех a, b, c ∈ G, (a ∗ b) ∗ c = a ∗ (b ∗ c)
3. **Существование нейтрального элемента**: существует e ∈ G такой, что для всех a ∈ G, e ∗ a = a ∗ e = a
4. **Существование обратного элемента**: для каждого a ∈ G существует a^(-1) ∈ G такой, что a ∗ a^(-1) = a^(-1) ∗ a = e

Если дополнительно выполняется a ∗ b = b ∗ a для всех a, b ∈ G, то группа называется **абелевой (коммутативной)**.

Подгруппа группы G — это подмножество H ⊆ G, которое само образует группу относительно той же операции.

Критерий подгруппы: непустое подмножество H ⊆ G является подгруппой тогда и только тогда, когда для всех a, b ∈ H, a ∗ b^(-1) ∈ H.

Порядок группы |G| — это количество элементов в группе G. **Порядок элемента** a ∈ G — это наименьшее положительное целое число n такое, что a^n = e.

Теорема Лагранжа: Если G — конечная группа и H — подгруппа G, то порядок H делит порядок G:

```
|G| = [G:H] · |H|
```

где [G:H] — индекс подгруппы H в группе G, равный числу смежных классов.

Группа подстановок (симметрическая группа) S_n — это группа всех биекций множества {1, 2, ..., n} на себя с операцией композиции функций.

Свойства симметрической группы:

1. Порядок S_n равен n!
2. Любая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы (теорема Кэли)

Изоморфизм групп — это биективное отображение ф: G → H, сохраняющее групповую операцию:

```
φ(a ∗ b) = φ(a) · φ(b)
```

для всех a, b ∈ G, где ∗ и ⋅ — операции в группах G и H соответственно.

Две группы называются **изоморфными**, если существует изоморфизм между ними. Изоморфные группы имеют одинаковую алгебраическую структуру и отличаются только обозначениями элементов.