Математическая логика и теория алгоритмов

1. Класс функций T0

Определение класса T0

Класс функций T0 (класс функций, сохраняющих константу 0) — это множество всех булевых функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые принимают значение 0, когда все переменные равны 0:

$f(0, 0, ..., 0) = 0$

Другими словами, класс T0 состоит из всех булевых функций, которые отображают нулевой набор в 0.

Доказательство замкнутости класса T0

Для доказательства замкнутости класса T0 относительно операции суперпозиции нужно показать, что любая суперпозиция функций из T0 также принадлежит классу T0.

1. **Замкнутость относительно подстановки констант**: Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T0$ и некоторые переменные заменяются константами, то полученная функция также принадлежит T0.

   Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T0$, то $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

   При подстановке констант в некоторые аргументы получается функция g от меньшего числа переменных. Для набора (0, 0, ..., 0) значение g совпадает со значением f на наборе, где подставленные константы остаются, а все остальные аргументы равны 0. Поскольку $f \in T0$, то g также принадлежит T0.

2. **Замкнутость относительно перестановки переменных**: Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T0$, то любая перестановка аргументов (например, $f(x_2, x_1, ..., x_n)$) также дает функцию из T0.

   Это очевидно, так как $f(0, 0, ..., 0) = 0$, и при перестановке аргументов набор (0, 0, ..., 0) перейдет в себя.

3. **Замкнутость относительно суперпозиции**: Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in T0$ и $g_1, g_2, ..., g_n \in T0$, то $h(x) = f(g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$ также принадлежит T0.

   Если все $g_i \in T0$, то $g_i(0, 0, ..., 0) = 0$ для всех i.

   Тогда $h(0, 0, ..., 0) = f(g_1(0, 0, ..., 0), g_2(0, 0, ..., 0), ..., g_n(0, 0, ..., 0)) = f(0, 0, ..., 0) = 0$.

   Следовательно, $h \in T0$.

Таким образом, класс функций T0 замкнут относительно операции суперпозиции.

2. Класс функций T1

Определение класса T1

Класс функций T1 (класс функций, сохраняющих константу 1) — это множество всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые принимают значение 1, когда все переменные равны 1:

$f(1, 1, \ldots, 1) = 1$

Другими словами, класс T1 состоит из всех булевых функций, которые отображают единичный набор в 1.

Доказательство замкнутости класса T1

Для доказательства замкнутости класса T1 относительно операции суперпозиции нужно показать, что любая суперпозиция функций из T1 также принадлежит классу T1.

1. **Замкнутость относительно подстановки констант**: Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T1$ и некоторые переменные заменяются константами, то полученная функция также принадлежит T1.

   Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T1$, то $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

   При подстановке констант в некоторые аргументы получается функция g от меньшего числа переменных. Однако, если константы отличны от 1, то это не гарантирует, что $g \in T1$. Поэтому нужно рассмотреть случай, когда все подстановки равны 1.

   Если подставляются только константы 1, то при наборе (1, 1, ..., 1) значение g совпадает со значением f на наборе из одних единиц. Поскольку $f \in T1$, то g также принадлежит T1.

2. **Замкнутость относительно перестановки переменных**: Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T1$, то любая перестановка аргументов (например, $f(x_2, x_1, \ldots, x_n)$) также дает функцию из T1.

   Это очевидно, так как $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, и при перестановке аргументов набор (1, 1, ..., 1) перейдет в себя.

3. **Замкнутость относительно суперпозиции**: Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T1$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n \in T1$, то $h(x) = f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$ также принадлежит T1.

   Если все $g_i \in T1$, то $g_i(1, 1, \ldots, 1) = 1$ для всех i.

   Тогда $h(1, 1, \ldots, 1) = f(g_1(1, 1, \ldots, 1), g_2(1, 1, \ldots, 1), \ldots, g_n(1, 1, \ldots, 1)) = f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

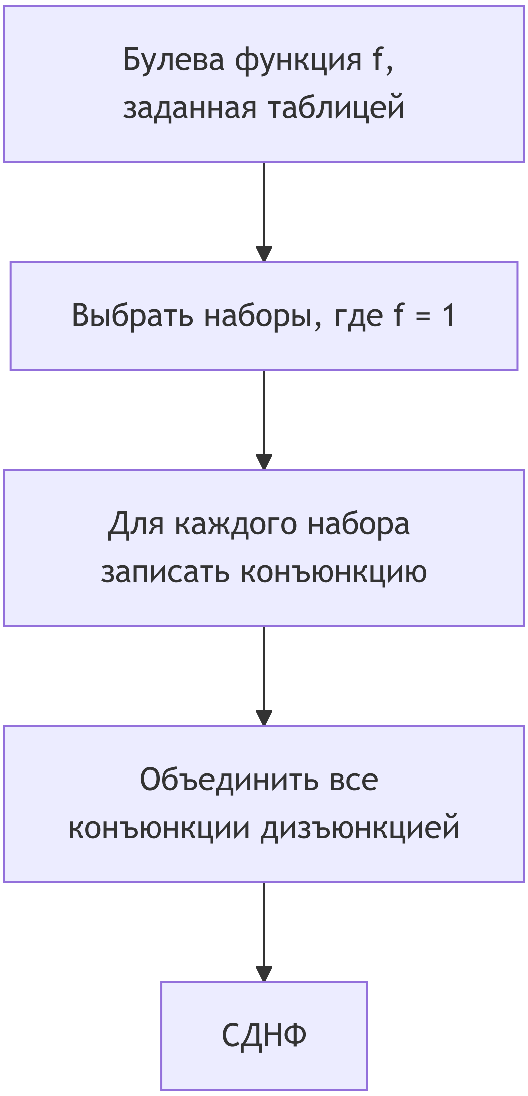
   Следовательно, $h \in T1$.

Таким образом, класс функций T1 замкнут относительно операции суперпозиции.

3. Построение СДНФ для функции, заданной таблицей

Определение СДНФ

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — это дизъюнкция элементарных конъюнкций, каждая из которых соответствует набору значений переменных, на котором функция принимает значение 1. При этом в каждую элементарную конъюнкцию входят все переменные либо в прямом, либо в инверсном виде.



Алгоритм построения СДНФ

1. **Выявление наборов, на которых функция равна 1**: По таблице истинности выбираются все наборы значений переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, на которых функция f принимает значение 1.
2. **Формирование элементарных конъюнкций**: Для каждого такого набора $(a_1, a_2, ..., a_n)$ формируется элементарная конъюнкция, в которую входят все переменные:
   - Если $a_i = 1$, то в конъюнкцию включается x_i
   - Если $a_i = 0$, то в конъюнкцию включается $\neg x_i$
3. **Построение СДНФ**: СДНФ получается путем объединения всех полученных элементарных конъюнкций операцией дизъюнкции (логическое ИЛИ).

Пример построения СДНФ

Пусть задана функция $f(x_1, x_2, x_3)$ следующей таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

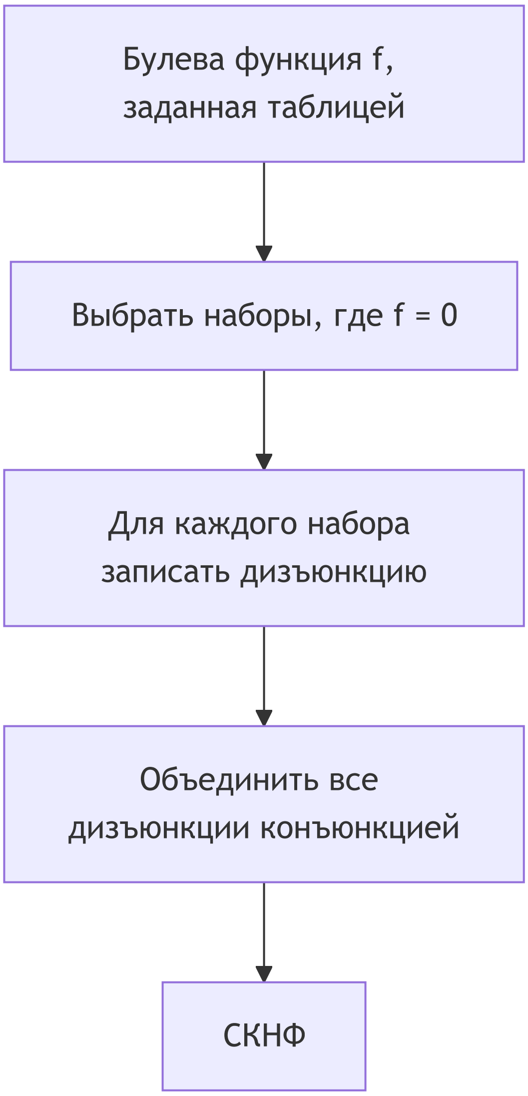
1. Выбираем наборы, на которых f = 1:
   - (0, 0, 1)
   - (1, 0, 0)
   - (1, 1, 0)
   - (1, 1, 1)
2. Формируем элементарные конъюнкции:
   - Для набора (0, 0, 1): $\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
   - Для набора (1, 0, 0): $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$
   - Для набора (1, 1, 0): $x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
   - Для набора (1, 1, 1): $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
3. Строим СДНФ: $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

Используя стандартные обозначения: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$

4. Построение СКНФ для функции, заданной таблицей

Определение СКНФ

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — это конъюнкция элементарных дизъюнкций, каждая из которых соответствует набору значений переменных, на котором функция принимает значение 0. При этом в каждую элементарную дизъюнкцию входят все переменные либо в прямом, либо в инверсном виде.



Алгоритм построения СКНФ

1. **Выявление наборов, на которых функция равна 0**: По таблице истинности выбираются все наборы значений переменных (x_1, x_2, ..., x_n), на которых функция f принимает значение 0.
2. **Формирование элементарных дизъюнкций**: Для каждого такого набора (a_1, a_2, ..., a_n) формируется элементарная дизъюнкция, в которую входят все переменные:
   - Если $a_i = 0$, то в дизъюнкцию включается x_i
   - Если $a_i = 1$, то в дизъюнкцию включается $\neg x_i$
3. **Построение СКНФ**: СКНФ получается путем объединения всех полученных элементарных дизъюнкций операцией конъюнкции (логическое И).

Пример построения СКНФ

Используем ту же функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, что и в предыдущем примере:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	f
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1. Выбираем наборы, на которых f = 0:
   - (0, 0, 0)
   - (0, 1, 0)
   - (0, 1, 1)
   - (1, 0, 1)
2. Формируем элементарные дизъюнкции:
   - Для набора (0, 0, 0): $x_1 \vee x_2 \vee x_3$
   - Для набора (0, 1, 0): $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
   - Для набора (0, 1, 1): $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$
   - Для набора (1, 0, 1): $\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$
3. Строим СКНФ: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$

5. Определение логического следствия и теоремы

Определение логического следствия

Логическое следствие — это отношение между формулами (высказываниями) в логике, при котором одна формула (следствие) обязательно истинна, если истинны другие формулы (посылки).

Формально: формула B является логическим следствием формул $A_1, A_2, ..., A_n$ (обозначается $A_1, A_2, ..., A_n \models B$), если для любой интерпретации I, в которой все формулы $A_1, A_2, ..., A_n$ истинны, формула B также истинна.

В терминах теории моделей: B является логическим следствием $A_1, A_2, ..., A_n$, если любая модель множества формул $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ является также моделью формулы B.

Теорема 1 о логическом следствии

Теорема 1: Формула B является логическим следствием формул $A_1, A_2, ..., A_n$ тогда и только тогда, когда формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \to B$ является тавтологией.

Доказательство:

1. Пусть B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Нужно доказать, что $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ — тавтология.

   Предположим, что $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ не является тавтологией. Тогда существует интерпретация I, в которой $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ истинно, а B ложно. Но это противоречит тому, что B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$, так как по определению, если все посылки истинны, то и следствие должно быть истинным.

2. Пусть $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ — тавтология. Нужно доказать, что B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

   Пусть I — произвольная интерпретация, в которой все формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ истинны. Тогда в этой интерпретации конъюнкция $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ также истинна. Поскольку $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ — тавтология, то в интерпретации I формула B также истинна. Таким образом, B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Теорема 2 о логическом следствии

Теорема 2: Формула B является логическим следствием формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тогда и только тогда, когда формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ противоречива (невыполнима).

Доказательство:

1. Пусть B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Нужно доказать, что $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ противоречива.

   Предположим, что формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ выполнима. Тогда существует интерпретация I, в которой эта формула истинна. Это означает, что в I все формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ истинны, а B ложна. Но это противоречит тому, что B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$, так как по определению, если все посылки истинны, то и следствие должно быть истинным.

2. Пусть $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ противоречива. Нужно доказать, что B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

   Пусть I — произвольная интерпретация, в которой все формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ истинны. Предположим, что в этой интерпретации формула B ложна. Тогда в I формула $\neg B$ истинна, а значит, истинна и конъюнкция $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$. Но это противоречит тому, что $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ невыполнима. Следовательно, в интерпретации I формула B истинна, что и доказывает, что B является логическим следствием $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

6. Алгоритм Куайна-МакКлоски для перечисления простых импликантов

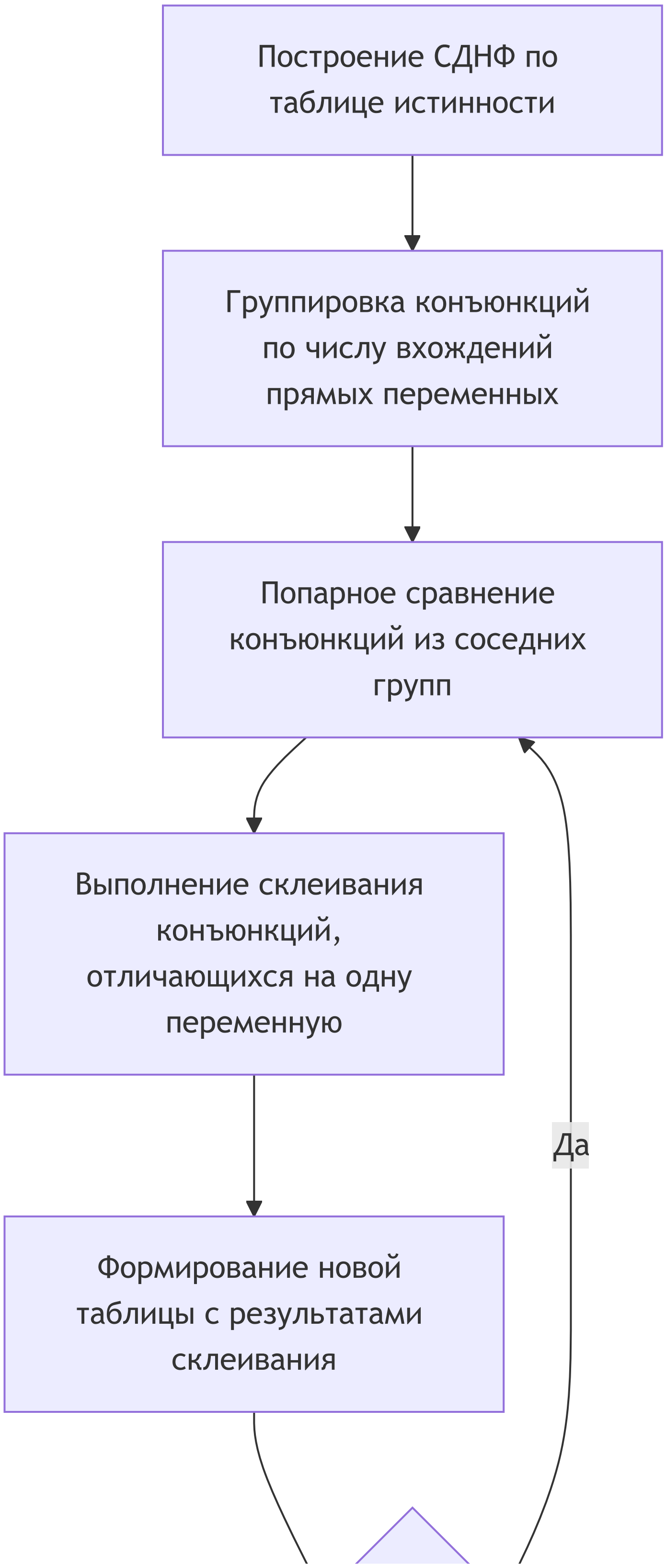
Определение импликанты и простой импликанты

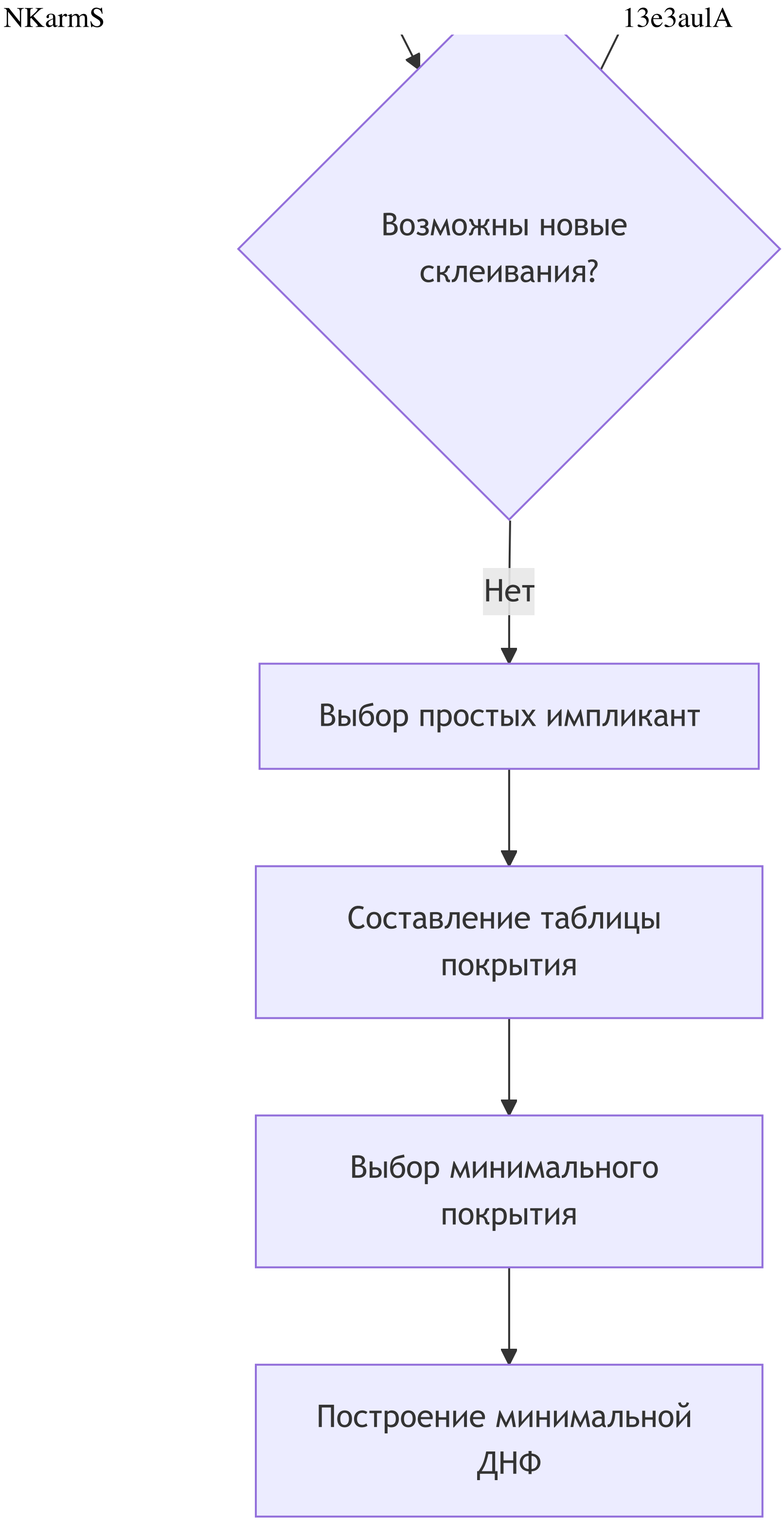
Импликанта булевой функции f — это конъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), такая что если эта конъюнкция истинна, то и функция f истинна.

Простая импликанта булевой функции f — это такая импликанта, что удаление любого литерала из неё приводит к конъюнкции, которая уже не является импликантой для f.

Алгоритм Куайна-МакКлоски

Алгоритм Куайна-МакКлоски используется для нахождения всех простых импликант булевой функции и последующего построения минимальной ДНФ.





Шаги алгоритма в общем виде

1. **Построение СДНФ**: Для заданной булевой функции f строится совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).

2. **Инициализация**: Конъюнкции из СДНФ группируются по числу вхождений прямых переменных (т.е. переменных без отрицания).

3. **Этап 1: Нахождение простых импликант**: a. Конъюнкции из соседних групп (отличающихся на 1 по числу прямых переменных) попарно сравниваются. b. Если две конъюнкции отличаются только в одной переменной (одна содержит переменную, другая — её отрицание), то выполняется операция склеивания:

образуется новая конъюнкция, не содержащая этой переменной. c. Исходные конъюнкции помечаются как использованные в склеивании. d. Процесс продолжается до тех пор, пока возможны новые склеивания. e. Все конъюнкции, не помеченные как использованные в склеивании, являются простыми импликантами.

4. **Этап 2: Построение минимальной ДНФ**: a. Составляется таблица покрытия, где строки соответствуют простым импликантам, а столбцы — наборам значений переменных, на которых функция f принимает значение 1. b. В ячейке таблицы ставится отметка, если соответствующая простая импликанта принимает значение 1 на соответствующем наборе. c. Выбираются обязательные простые импликанты (те, которые единственные покрывают хотя бы один набор). d. Для оставшихся непокрытыми наборов решается задача о минимальном покрытии.
5. **Построение результата**: Минимальная ДНФ получается как дизъюнкция выбранных простых импликант.

7. Предваренная нормальная форма (ПНФ) и алгоритм преобразования

Определение предваренной нормальной формы

Предваренная нормальная форма (ПНФ) — это форма записи формулы логики предикатов, в которой все кванторы вынесены в начало формулы (образуют префикс), а за ними следует бескванторная часть (матрица).

Общий вид ПНФ: $Q_1x_1\ Q_2x_2\ \ldots\ Q_nx_n\ M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — кванторы (∀ или ∃), а M — бескванторная формула, называемая матрицей.

10 правил преобразования для ПНФ

1. **Устранение импликации**: $A \to B$ эквивалентно $\neg A \vee B$
2. **Устранение эквивалентности**: $A \leftrightarrow B$ эквивалентно $(A \to B) \wedge (B \to A)$, или после устранения импликации: $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
3. **Ограничение области действия отрицания**:
    - $\neg(A \wedge B)$ эквивалентно $\neg A \vee \neg B$ (закон де Моргана)
    - $\neg(A \vee B)$ эквивалентно $\neg A \wedge \neg B$ (закон де Моргана)
    - $\neg\neg A$ эквивалентно A (закон двойного отрицания)
4. **Переименование связанных переменных**: Если x связана квантором и в формуле есть другая переменная с тем же именем, то x переименовывается для устранения конфликта имен.
5. **Устранение отрицания перед кванторами**:
    - $\neg(\forall x\, A(x))$ эквивалентно $\exists x\, \neg A(x)$
    - $\neg(\exists x\, A(x))$ эквивалентно $\forall x\, \neg A(x)$

6. **Вынесение кванторов за скобки**:
   - $(\forall x\ A(x)) \wedge B$ эквивалентно $\forall x\ (A(x) \wedge B)$, если x не входит свободно в B
   - $(\exists x\ A(x)) \wedge B$ эквивалентно $\exists x\ (A(x) \wedge B)$, если x не входит свободно в B
   - $(\forall x\ A(x)) \vee B$ эквивалентно $\forall x\ (A(x) \vee B)$, если x не входит свободно в B
   - $(\exists x\ A(x)) \vee B$ эквивалентно $\exists x\ (A(x) \vee B)$, если x не входит свободно в B
7. **Объединение одноименных кванторов**:
   - $\forall x\ \forall y\ A(x, y)$ эквивалентно $\forall y\ \forall x\ A(x, y)$
   - $\exists x\ \exists y\ A(x, y)$ эквивалентно $\exists y\ \exists x\ A(x, y)$
8. **Распределение кванторов над конъюнкцией и дизъюнкцией**:
   - $\forall x\ (A(x) \wedge B(x))$ эквивалентно $(\forall x\ A(x)) \wedge (\forall x\ B(x))$
   - $\exists x\ (A(x) \vee B(x))$ эквивалентно $(\exists x\ A(x)) \vee (\exists x\ B(x))$
9. **Выделение области действия квантора**:
   - $\forall x\ (A(x) \vee B)$ эквивалентно $(\forall x\ A(x)) \vee B$, если x не входит свободно в B
   - $\exists x\ (A(x) \wedge B)$ эквивалентно $(\exists x\ A(x)) \wedge B$, если x не входит свободно в B
10. **Преобразование матрицы к КНФ или ДНФ**: После вынесения всех кванторов матрица преобразуется к конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной форме.

Алгоритм преобразования формул в ПНФ

1. **Устранение импликации и эквивалентности**: Заменить все вхождения $A \rightarrow B$ на $\neg A \vee B$ и все вхождения $A \leftrightarrow B$ на $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.
2. **Ограничение области действия отрицания**: С помощью законов де Моргана и двойного отрицания преобразовать формулу так, чтобы отрицания стояли только перед атомарными формулами или кванторами.
3. **Переименование связанных переменных**: Переименовать связанные переменные так, чтобы каждая переменная была связана только одним квантором и не совпадала по имени со свободными переменными.
4. **Устранение отрицания перед кванторами**: Заменить $\neg\forall x\ A(x)$ на $\exists x\ \neg A(x)$ и $\neg\exists x\ A(x)$ на $\forall x\ \neg A(x)$.
5. **Вынесение кванторов за скобки**: Вынести все кванторы в начало формулы, используя правила вынесения кванторов за скобки и правила распределения кванторов.
6. **Преобразование матрицы**: Преобразовать бескванторную часть (матрицу) к конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной форме.

8. Скулемовская стандартная форма и процедура преобразования

Определение скулемовской стандартной формы

Скулемовская стандартная форма — это предваренная нормальная форма, в которой:

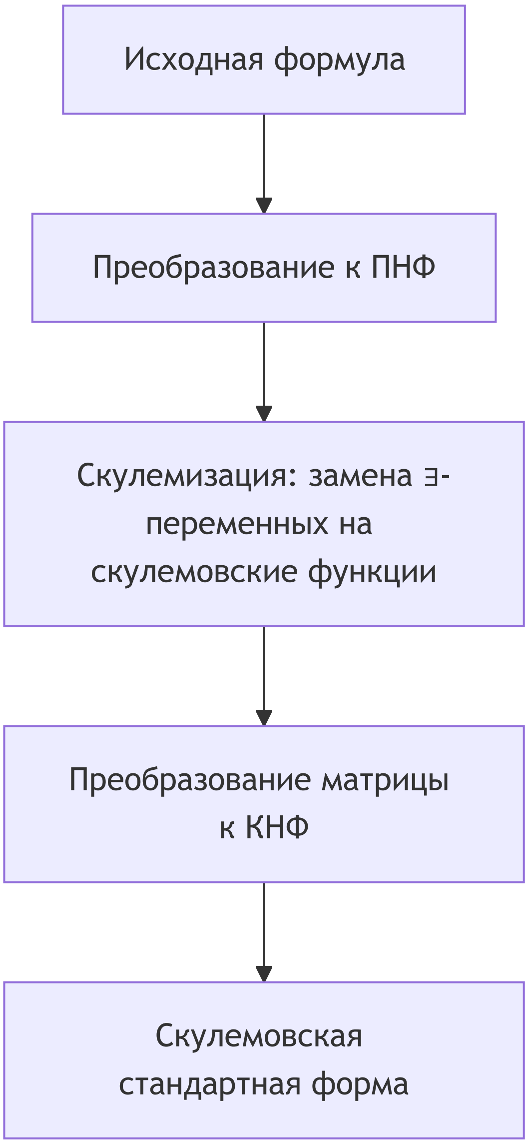
1. Все кванторы вынесены в начало формулы.
2. Все кванторы существования (∃) устранены путем их замены на функции (скулемовские функции) от переменных, связанных кванторами всеобщности (∀), которые предшествуют данному квантору существования.
3. Префикс содержит только кванторы всеобщности (∀).
4. Матрица преобразована к конъюнктивной нормальной форме.

Процедура преобразования формул в скулемовскую стандартную форму

1. **Преобразование к предваренной нормальной форме**: Преобразовать формулу к предваренной нормальной форме с помощью алгоритма, описанного выше.

2. **Скулемизация** (устранение кванторов существования): a. Если квантор существования ∃y не находится в области действия ни одного квантора всеобщности, то переменная y заменяется на новую константу c (скулемовскую константу). b. Если квантор существования ∃y находится в области действия кванторов всеобщности $\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n$, то переменная y заменяется на терм $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где f — новая функциональная константа (скулемовская функция). c. После замены квантор ∃y удаляется из префикса.

3. **Преобразование матрицы к КНФ**: Преобразовать бескванторную часть (матрицу) к конъюнктивной нормальной форме.



Пример преобразования

Рассмотрим формулу: $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x, y))$

1. Устранение импликации: $\forall x\ (\neg P(x) \vee \exists y\ Q(x, y))$
2. Преобразование к ПНФ (вынесение кванторов): $\forall x\ \exists y\ (\neg P(x) \vee Q(x, y))$
3. Скулемизация: $\exists y$ находится в области действия $\forall x$, поэтому y заменяется на $f(x)$, где f — новая скулемовская функция: $\forall x\ (\neg P(x) \vee Q(x, f(x)))$
4. Префикс содержит только кванторы $\forall$, а матрица уже находится в КНФ.

Итоговая скулемовская стандартная форма: $\forall x\ (\neg P(x) \vee Q(x, f(x)))$