Математический анализ

1. Непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывных функций

Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x_0, если выполняются следующие условия:

- Функция определена в точке x_0
- Существует предел функции при $x \to x_0$
- Этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim(x \to x_0)\ f(x) = f(x_0)$

Формально непрерывность можно записать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Или через ε-δ определение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Свойства непрерывных функций:

1. Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x_0, то их сумма, разность, произведение и частное (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в этой точке.
2. Композиция непрерывных функций непрерывна.
3. **Теорема Вейерштрасса**: Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном интервале [a,b], достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом интервале.
4. **Теорема о промежуточном значении**: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и $f(a) \neq f(b)$, то для любого числа C между f(a) и f(b) существует точка $c \in [a,b]$, такая что $f(c)=C$.
5. Непрерывная функция переводит связное множество в связное множество.

Пример задачи:

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

Решение: Функция не определена при x = 2, т.к. знаменатель обращается в ноль. Проверим, существует ли предел функции при $x \to 2$.

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$

Функция имеет предел при $x \to 2$, но не определена в самой точке x = 2. Поэтому она не является непрерывной в этой точке. Это точка **устранимого разрыва**.

Функция непрерывна на множестве R{2}.

2. Функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл

Функция нескольких переменных $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ отображает точки n-мерного пространства в действительные числа.

Частные производные

Частная производная функции по переменной x_i — это производная функции по одной переменной при фиксированных остальных переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h}$$

Полный дифференциал

Полный дифференциал функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяется как:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Геометрический смысл полного дифференциала

Для функции $z = f(x,y)$ двух переменных полный дифференциал представляет приращение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Уравнение касательной плоскости:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Градиент

Градиент функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — это вектор, компонентами которого являются частные производные функции:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции, а его модуль равен скорости роста функции в этом направлении.

Достаточные условия дифференцируемости

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке, если все её частные производные существуют и непрерывны в некоторой окрестности этой точки.

Пример задачи:

Найти полный дифференциал функции $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ в точке (1,2).

Решение: Вычислим частные производные: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y$

В точке (1,2): $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$

Полный дифференциал: $df = 8\,dx - 1\,dy$

3. Экстремум функций нескольких переменных; необходимые и достаточные условия

Точка x_0 называется точкой **локального максимума** (минимума) функции f(x), если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $x \in U(x_0)$ выполняется $f(x) \leq f(x_0)$ (или $f(x) \geq f(x_0)$).

Необходимые условия экстремума:

Если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то все частные производные первого порядка в этой точке равны нулю или не существуют:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n$$

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума, называются **стационарными точками**.

Достаточные условия экстремума для функции двух переменных:

Пусть функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки (x_0,y_0). Обозначим:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$\Delta = AC - B^2$$

Тогда:

1. Если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке (x_0,y_0) функция имеет локальный максимум.
2. Если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0,y_0) функция имеет локальный минимум.
3. Если $\Delta < 0$, то в точке (x_0,y_0) экстремума нет (седловая точка).
4. Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Для функций большего числа переменных:

Используется критерий Сильвестра на основе главных миноров матрицы Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Пример задачи:

Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 10y$.

Решение: Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4x - 10 = 0$

Решим систему уравнений: $2x + 4y = 6$ $4x + 2y = 10$

Умножим первое уравнение на 2: $4x + 8y = 12$ $4x + 2y = 10$

Вычтем второе уравнение из первого: $6y = 2$ $y = \frac{1}{3}$

Подставим в первое уравнение: $2x + 4 \cdot \frac{1}{3} = 6$ $2x = 6 - \frac{4}{3} = \frac{18-4}{3} = \frac{14}{3}$ $x = \frac{7}{3}$

Получаем стационарную точку $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$.

Найдем частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

Для точки $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$: $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$ $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 4^2 = 4 - 16 = -12 < 0$

Поскольку Δ < 0, в точке $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ экстремума нет, это седловая точка.

4. Числовые ряды, виды сходимости. Достаточные признаки сходимости. Свойства абсолютно сходящихся рядов

Числовой ряд — это выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, где a_n — числа.

Основные понятия:

- **Частичная сумма ряда**: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
- Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.
- Ряд называется **расходящимся**, если предел последовательности его частичных сумм не существует или бесконечен.

Виды сходимости:

1. **Абсолютная сходимость**: ряд $\sum |a_n|$ сходится
2. **Условная сходимость**: ряд $\sum a_n$ сходится, но ряд $\sum |a_n|$ расходится

Достаточные признаки сходимости:

1. **Необходимый признак сходимости**: если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. **Признак сравнения**: если $0 \le a_n \le b_n$ и ряд $\sum b_n$ сходится, то ряд $\sum a_n$ тоже сходится
3. **Признак Даламбера**: если для ряда $\sum a_n$ с положительными членами $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то:
   - при L < 1 ряд сходится
   - при L > 1 ряд расходится
   - при L = 1 требуется дополнительное исследование
4. **Признак Коши**: если для ряда $\sum a_n$ с положительными членами $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, то:
   - при L < 1 ряд сходится
   - при L > 1 ряд расходится
   - при L = 1 требуется дополнительное исследование
5. **Интегральный признак Коши**: если f(x) — непрерывная, положительная, невозрастающая функция на [1,∞) и $a_n = f(n)$, то ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$

Свойства абсолютно сходящихся рядов:

1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и обычным образом
2. Сумма и произведение абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходятся
3. Члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять в произвольном порядке, и сумма ряда не изменится

Пример задачи:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{3^n}$

Решение: Применим признак Даламбера: $a_n = \frac{n}{3^n}$ $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то по признаку Даламбера ряд абсолютно сходится.

5. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов

Функциональный ряд — это выражение вида $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$, где $f_n(x)$ — функции, определенные на некотором множестве D.

Основные понятия:

- Для каждого фиксированного x∈D получаем числовой ряд. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд сходится в точке x.
- **Область сходимости ряда** - множество всех точек, в которых ряд сходится.

- **Сумма функционального ряда** - функция S(x), значение которой в каждой точке x из области сходимости равно сумме соответствующего числового ряда: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Равномерная сходимость:

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **равномерно сходится** на множестве D к функции S(x), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ \forall x \in D\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ - частичная сумма ряда.

Другими словами, ряд сходится равномерно, если остаток ряда можно сделать сколь угодно малым одновременно для всех x из D, выбрав достаточно большой номер n.

Признак Вейерштрасса:

Если на множестве D существуют такие числа $M_n \geq 0$, что $|f_n(x)| \leq M_n$ для всех $x \in D$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на D.

Свойства равномерно сходящихся рядов:

1. **Непрерывность суммы**: Если функции $f_n(x)$ непрерывны на D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на D, то сумма ряда S(x) также непрерывна на D.
2. **Интегрирование**: Если функции $f_n(x)$ непрерывны на [a,b], и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на [a,b], то $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$
3. **Дифференцирование**: Если функции $f_n(x)$ имеют непрерывные производные на (a,b) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ равномерно сходится на (a,b), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке интервала (a,b), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на (a,b) и $\frac{d}{dx}S(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Пример задачи:

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ на множестве $D = [0, +\infty)$.

Решение: Применим признак Вейерштрасса. Для $x \in [0, +\infty)$ найдем максимум функции $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$:

$$f_n'(x) = \frac{n^2+x^2-x\cdot 2x}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

Приравняем производную к нулю: $n^2 - x^2 = 0\ x = n$

Проверим, что это точка максимума: $f_n''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right) = \frac{-2x(n^2+x^2)^2-(n^2-x^2)2(n^2+x^2)2x}{(n^2+x^2)^4}$

При $x = n$: $f_n''(n) < 0$, значит это точка максимума.

$$f_n(n) = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

Таким образом, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$ для всех $x \in [0, +\infty)$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, умноженный на $\frac{1}{2}$, который расходится.

Поскольку мажорирующий ряд расходится, признак Вейерштрасса неприменим.

Необходимо проверить равномерную сходимость другими методами, например, с помощью критерия Коши равномерной сходимости. Но это выходит за рамки текущего анализа.

6. Степенные ряды. Свойства степенных рядов. Разложение элементарных функций

Степенной ряд — это функциональный ряд вида: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$ где a_n — числа (коэффициенты ряда), x_0 — фиксированное число (центр ряда).

Радиус и интервал сходимости:

Для степенного ряда существует число R ≥ 0 (радиус сходимости), такое что:

- Ряд абсолютно сходится при $|x-x_0| < R$
- Ряд расходится при $|x-x_0| > R$
- В точках $|x-x_0| = R$ требуется дополнительное исследование

Радиус сходимости можно найти по формуле: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ если предел существует.

Интервал сходимости: $(x_0 - R, x_0 + R)$

Свойства степенных рядов:

1. Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, где $0 < r < R$.
2. Сумма степенного ряда S(x) является непрерывной функцией на интервале сходимости.
3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать в пределах интервала сходимости.
   - Дифференцирование: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$
   - Интегрирование: $\int S(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$
4. Радиус сходимости ряда, полученного дифференцированием или интегрированием, равен радиусу сходимости исходного ряда.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора:

Функцию f(x), имеющую производные всех порядков в окрестности точки x_0, можно представить в виде ряда Тейлора: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Наиболее часто используемые разложения (в окрестности $x_0 = 0$, ряды Маклорена):

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $R = \infty$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$
4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $R = 1$
5. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$, $R = 1$

Пример задачи:

Найти радиус сходимости и исследовать сходимость на границе интервала сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}(x + 2)^n$

Решение: Для определения радиуса сходимости используем формулу с отношением коэффициентов:

$a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$ $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|(-1)^n|}{n \cdot 3^n}}{\frac{|(-1)^{n+1}|}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{n+1}{n} = 3 \cdot 1 = 3$

Интервал сходимости: $|x + 2| < 3$ или $-5 < x < 1$

Проверим сходимость на границах: При $x = -5$ имеем $|x + 2| = |-5 + 2| = 3$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Это знакочередующийся гармонический ряд, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем $|x + 2| = |1 + 2| = 3$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Это тот же знакочередующийся гармонический ряд, который сходится.

Таким образом, область сходимости ряда: $-5 \leq x \leq 1$.

7. Определенный интеграл, интегрируемость непрерывной функции. Определение кратного интеграла

Определенный интеграл

Определенный интеграл функции f(x) на отрезке [a,b] определяется как предел интегральных сумм: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ — разбиение отрезка [a,b], $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Функция f(x) называется **интегрируемой** на отрезке [a,b], если этот предел существует.

Интегрируемость непрерывной функции

Теорема: Всякая непрерывная на отрезке [a,b] функция является интегрируемой на этом отрезке.

Более общий случай: **Теорема (Интегрируемость по Риману):** Функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b] тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке и множество точек разрыва функции имеет меру нуль.

Свойства определенного интеграла:

1. Линейность: $\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$
2. Аддитивность: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ для любого $c \in [a, b]$
3. Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен: если $f(x) \geq 0$ на [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
4. Если $f(x) \leq g(x)$ на [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Кратный интеграл

Двойной интеграл функции f(x,y) по области D определяется как: $\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ где область D разбивается на n малых частей с площадями ΔS_i, а точки (ξ_i, η_i) выбираются внутри этих частей.

Для вычисления двойного интеграла часто используют повторные интегралы: $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy)\, dx$ где область D задана неравенствами $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$.

Аналогично определяются тройные и многомерные интегралы.

Пример задачи:

Вычислить двойной интеграл $\iint_D xydxdy$, где D - прямоугольник $[0, 1] \times [0, 2]$.

Решение: Используем повторный интеграл:

$\iint_D xydxdy = \int_0^1 (\int_0^2 xydy)\, dx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x\cdot 4}{2} - \frac{x\cdot 0}{2}\right) dx = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$

8. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорана

Интеграл Коши

В теории функций комплексного переменного интеграл Коши для функции f(z), аналитической внутри и на простом замкнутом контуре C, имеет вид: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ где z_0 — точка внутри контура C.

Формула Коши для n-й производной: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

Ряд Тейлора

Аналитическую функцию f(z) в окрестности точки z_0 можно представить в виде ряда Тейлора: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$

Используя формулу Коши для производных, получаем: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right)(z - z_0)^n$

Ряд Тейлора сходится в круге $|z-z_0| < R$, где R — расстояние от точки z_0 до ближайшей особой точки функции f(z).

Ряд Лорана

Если функция f(z) аналитична в кольцевой области $r < |z-z_0| < R$, то её можно представить в виде ряда Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$

Коэффициенты ряда Лорана определяются формулой: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ где C — любой замкнутый контур внутри кольца $r < |z-z_0| < R$, обходящий точку z_0 в положительном направлении.

Классификация особых точек:

1. **Устранимая особая точка:** Если $a_{-1} = a_{-2} = ... = 0$, т.е. в разложении Лорана отсутствуют отрицательные степени.
2. **Полюс порядка m:** Если $a_{-m} \neq 0$, но $a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = ... = 0$, т.е. имеется конечное число отрицательных степеней.
3. **Существенно особая точка:** Если имеется бесконечное число членов с отрицательными степенями.

Пример задачи:

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки z = 0.

Решение: Представим функцию в виде суммы простейших дробей: $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$

Приводя к общему знаменателю: $\frac{A(z-1)+Bz}{z(z-1)} = \frac{1}{z(z-1)}$

Отсюда: $A(z - 1) + Bz = 1$ Подставим z = 0: $-A = 1$, откуда $A = -1$ Подставим z = 1: $B = 1$

Таким образом: $f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1}$

Для разложения в ряд Лорана в окрестности z = 0 первое слагаемое уже в нужной форме, а второе преобразуем: $\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -1 - z - z^2 - z^3 - ...$ при $|z| < 1$.

Итоговое разложение: $f(z) = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - ... = \frac{-1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Это разложение справедливо в кольце $0 < |z| < 1$.

9. Линейные непрерывные функционалы. Линейные операторы

Линейные функционалы

Линейный функционал — это отображение f из линейного пространства X в поле скаляров K (обычно R или C), удовлетворяющее условию линейности: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для всех векторов x, y из X и всех скаляров α, β из K.

Линейный функционал называется **непрерывным** в точке x_0, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0, что из $||x - x_0|| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Для линейного функционала непрерывность в какой-либо точке эквивалентна непрерывности во всех точках пространства.

Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности): Линейный функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такая константа M > 0, что |f(x)| ≤ M||x|| для всех x из X.

Норма линейного функционала определяется как: $||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)| = \sup_{x=0} \frac{|f(x)|}{||x||}$

Линейные операторы

Линейный оператор — это отображение A из линейного пространства X в линейное пространство Y, удовлетворяющее условию линейности: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ для всех векторов x, y из X и всех скаляров α, β.

Линейный оператор называется **непрерывным** в точке x_0, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0, что из $||x - x_0|| < \delta$ следует $||A(x) - A(x_0)|| < \varepsilon$.

Для линейного оператора непрерывность в какой-либо точке эквивалентна непрерывности во всех точках пространства.

Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности): Линейный оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такая константа M > 0, что ||A(x)|| ≤ M||x|| для всех x из X.

Норма линейного оператора определяется как: $||A|| = \sup_{||x||=1} ||A(x)|| = \sup_{x=0} \frac{||A(x)||}{||x||}$

Сопряженный оператор

Пусть A: X → Y — линейный оператор между гильбертовыми пространствами. Сопряженный оператор A*: Y → X определяется соотношением: $(Ax, y)_Y = (x, A^* y)_X$ для всех x из X и y из Y.

Самосопряженный оператор

Линейный оператор A: X → X в гильбертовом пространстве называется самосопряженным (или эрмитовым), если A = A*, т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех x, y из X.

Пример задачи:

Проверить, является ли линейный функционал $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3$ на пространстве R^3 со стандартной евклидовой нормой непрерывным, и найти его норму.

Решение: Покажем, что функционал ограничен: $|f(x)| = |x_1 + 2x_2 - 3x_3| \leq |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 6||x||$

Таким образом, $|f(x)| \leq 6||x||$, следовательно, функционал ограничен и, значит, непрерывен.

Найдем точную норму функционала: $||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)| = \sup_{||x||=1} |x_1 + 2x_2 - 3x_3|$

По неравенству Коши-Буняковского: $|x_1 + 2x_2 - 3x_3| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = ||x|| \cdot \sqrt{14} = \sqrt{14}$

Причем равенство достигается, когда вектор x пропорционален вектору (1, 2, -3), т.е. при $x = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1 + 4 + 9) = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$

Следовательно, $||f|| = \sqrt{14} \approx 3.74$.