Дискретная математика

1. Типы выборок k элементов из n

При выборе k элементов из множества из n элементов возможны различные типы выборок в зависимости от того, учитывается ли порядок элементов и допускаются ли повторения.

Перестановки

Перестановка - это упорядоченное расположение всех n элементов множества (т.е. k = n).

Формула для вычисления числа перестановок из n элементов:

$P(n) = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Перестановки с повторениями

Если имеется n элементов, среди которых есть повторяющиеся (n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа и т.д., причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), то число различных перестановок вычисляется по формуле:

$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n! / (n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!)$

Размещения

Размещение - это упорядоченный набор из k элементов, выбранных из множества из n элементов ($k \leq n$).

Формула для вычисления числа размещений из n элементов по k:

$A(n, k) = n! / (n-k)! = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$

Размещения с повторениями

Если при составлении размещений допускаются повторения элементов, то число таких размещений:

$\bar{A}(n, k) = n^k$

Сочетания

Сочетание - это неупорядоченный набор из k элементов, выбранных из множества из n элементов ($k \leq n$).

Формула для вычисления числа сочетаний из n элементов по k:

$C(n, k) = n! / (k! \times (n-k)!) = A(n, k) / k!$

$C^k_n = C(n, k) = (n\ k) = n! / (k! \times (n-k)!)$

Сочетания с повторениями

Если при составлении сочетаний допускаются повторения элементов, то число таких сочетаний:

$\bar{C}(n, k) = C(n+k-1, k) = (n+k-1)! / (k! \times (n-1)!)$

Сводная таблица типов выборок

Тип выборки	Формула
Перестановки	$P(n) = n!$
Перестановки с повторениями	$P(n_1, n_2, \ldots) = n! / (n_1! \times n_2! \times \ldots)$
Размещения	$A(n, k) = n! / (n-k)!$
Размещения с повторениями	$\bar{A}(n, k) = n^k$
Сочетания	$C(n, k) = n! / (k! \times (n-k)!)$
Сочетания с повторениями	$\bar{C}(n, k) = C(n+k-1, k)$

2. Бином Ньютона, следствия

Бином Ньютона

Бином Ньютона - это формула для разложения бинома $(x + y)^n$ в многочлен:

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) \times x^{n-k} \times y^k = C(n, 0) \times x^n + C(n, 1) \times x^{n-1} \times y + \ldots + C(n, n) \times y^n$

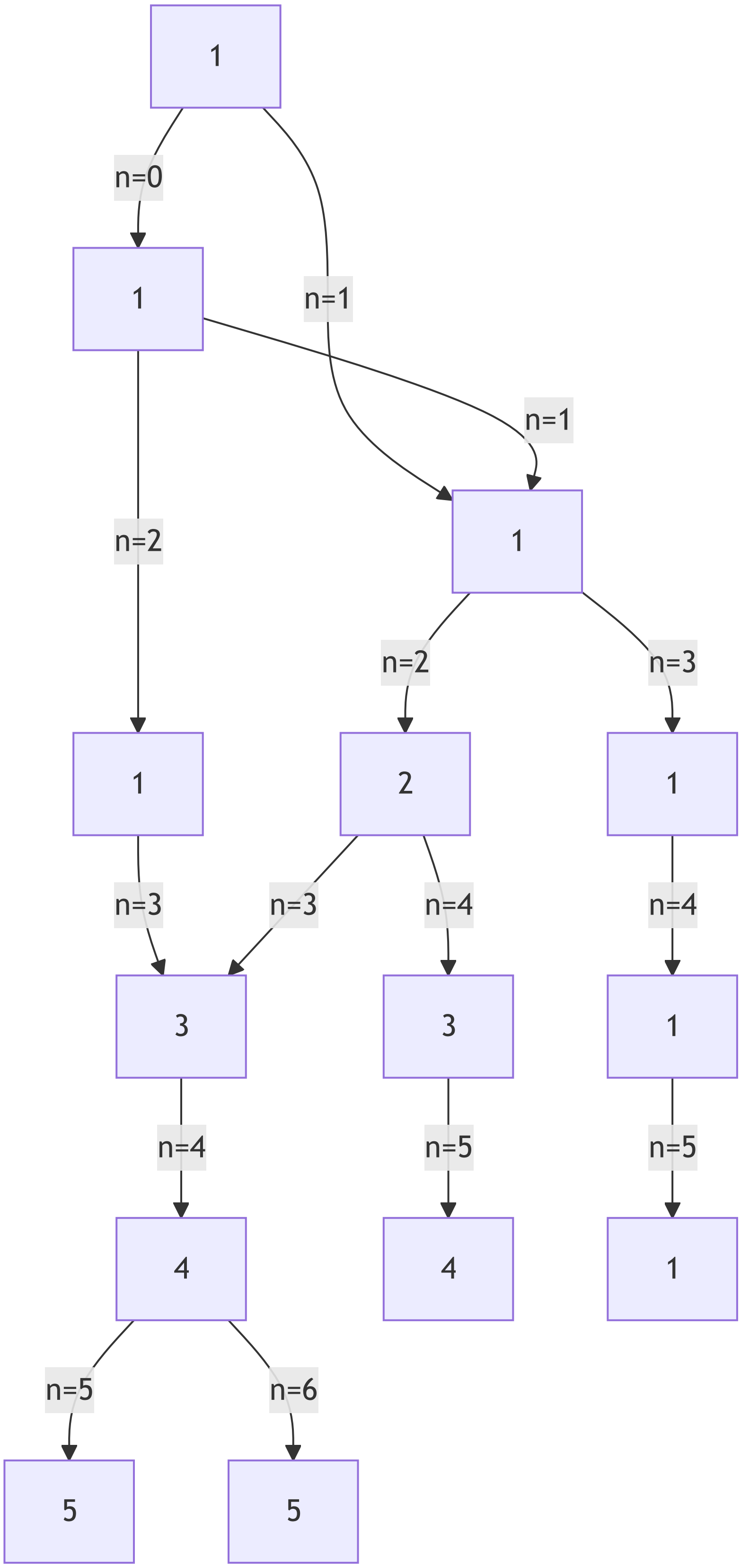
где $C(n, k)$ - биномиальные коэффициенты (числа сочетаний).

Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C(n, 0) = C(n, n) = 1$
2. $C(n, k) = C(n, n-k)$
3. $C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$
4. $\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$
5. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \times C(n, k) = 0$
6. $\sum_{k=0}^n k \times C(n, k) = n \times 2^{n-1}$

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля - это треугольное расположение биномиальных коэффициентов $C(n, k)$, где n - номер строки (начиная с 0), k - номер элемента в строке (начиная с 0).



Каждое число в треугольнике равно сумме двух чисел, расположенных над ним: C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)

Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема является обобщением бинома Ньютона и позволяет разложить выражение $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k1+k2+\ldots+km=n} (n! / (k_1! \times k_2! \times \ldots \times k_m!)) \times x_1^{k1} \times x_2^{k2} \times \ldots \times x_m^{km}$$

где сумма берется по всем наборам неотрицательных целых чисел ($k_1, k_2, \ldots, k_m$), удовлетворяющих условию $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Коэффициент при $x_1^{k1} \times x_2^{k2} \times \ldots \times x_m^{km}$ называется полиномиальным коэффициентом и обозначается:

$C(n; k_1, k_2, \ldots, k_m) = n! / (k_1! \times k_2! \times \ldots \times k_m!)$

3. Разбиение множества

Разбиением множества A называется такое семейство непустых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$ множества A, что:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$ (объединение всех подмножеств дает исходное множество)
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$ (подмножества попарно не пересекаются)

Числа Стирлинга II рода

Число Стирлинга второго рода S(n, k) определяет количество способов разбить множество из n элементов на k непустых непересекающихся подмножеств.

Рекуррентное соотношение для вычисления чисел Стирлинга II рода:

$S(n, k) = k \times S(n-1, k) + S(n-1, k-1), n > 0, k > 0$

с граничными условиями:

- $S(n, 0) = 0$ для $n > 0$
- $S(0, 0) = 1$
- $S(n, k) = 0$ для $k > n$

Числа Белла

Число Белла B(n) определяет общее количество различных разбиений множества из n элементов (на любое количество подмножеств).

Связь с числами Стирлинга II рода:

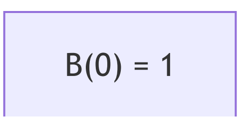
$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$

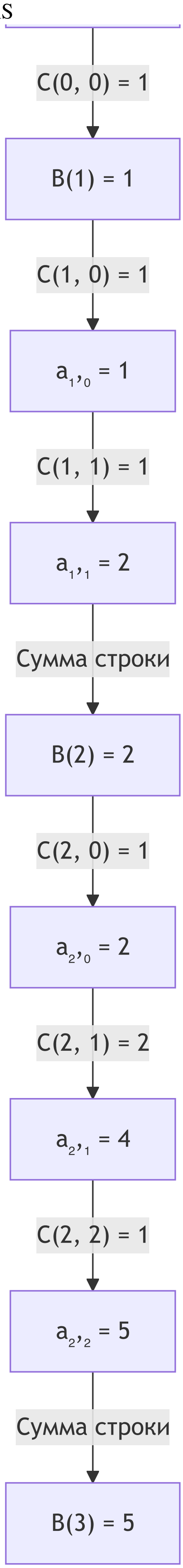
Рекуррентное соотношение для чисел Белла

Числа Белла можно вычислить по следующему рекуррентному соотношению:

$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \times B(k)$

Также для чисел Белла существует треугольная схема вычисления:




C(0, 0) = 1
B(1) = 1
C(1, 0) = 1
a₁,₀ = 1
C(1, 1) = 1
a₁,₁ = 2
Сумма строки
B(2) = 2
C(2, 0) = 1
a₂,₀ = 2
C(2, 1) = 2
a₂,₁ = 4
C(2, 2) = 1
a₂,₂ = 5
Сумма строки
B(3) = 5

где $a_{i,j}$ вычисляются по формуле:

- $a_{i,0} = B(i)$
- $a_{i,j} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j-1}$

4. Формула включений и исключений

В терминах множеств

Формула включений и исключений позволяет вычислить мощность объединения нескольких конечных множеств.

Для двух множеств: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Для трех множеств: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Для n множеств: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

или в более компактной форме: $|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$

В терминах свойств

Если U - универсальное множество, а A_i - множество элементов, обладающих свойством i, то формула включений и исключений позволяет найти количество элементов, обладающих хотя бы одним из n свойств:

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$

где $N(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ - количество элементов, обладающих свойствами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ одновременно.

Формула для вычисления числа элементов, обладающих ровно k свойствами

Пусть $N_{=k}$ - количество элементов, обладающих ровно k свойствами из n. Тогда:

$N_{=k} = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \times C(i, k) \times N_i$

где N_i - количество элементов, обладающих по крайней мере i свойствами.

Альтернативно, можно выразить через количество элементов, обладающих ровно i свойствами:

$N_{=k} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \times C(n-k, j) \times N(k+j)$

где N(i) - количество элементов, обладающих всеми i указанными свойствами.

Формула для вычисления числа элементов, обладающих не менее чем k свойствами

Пусть $N_{\geq k}$ - количество элементов, обладающих не менее чем k свойствами из n. Тогда:

$N_{\geq k} = \sum_{i=k}^{n} N_{=i} = \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \times C(n-i, j) \times N(i+j)$

Используя формулу включений и исключений:

$N_{\geq k} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \times C(i-1, k-1) \times N(i)$

где N(i) - количество элементов, обладающих всеми i указанными свойствами.

5. Производящие функции

Производящая функция для последовательности $\{a_n\}_{n=0}$^∞ - это формальный степенной ряд:

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$

Свойства производящих функций

Сложение

Если $G_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times x^n$ и $G_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times x^n$, то:

$G_1(x) + G_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \times x^n$

Умножение

Если $G_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times x^n$ и $G_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times x^n$, то:

$G_1(x) \times G_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \times x^n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k}$

Это соответствует свертке последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Дифференцирование

Если $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times x^n$, то:

$G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times a_n \times x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \times a_{n+1} \times x^n$

Это позволяет извлечь коэффициенты с весами n.

Интегрирование

Если $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times x^n$, то:

$\int G(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \times x^{n+1}/(n+1) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \times x^n/n$

где C - константа интегрирования.

Примеры применения производящих функций

Последовательность Фибоначчи

Для последовательности Фибоначчи $\{F_n\}_{n=0}$^∞, где $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, производящая функция:

$G(x) = x / (1 - x - x^2)$

Биномиальные коэффициенты

Производящая функция для биномиальных коэффициентов C(n, k) при фиксированном n:

$G(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) \times x^k$

6. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Линейные рекуррентные соотношения

Линейное рекуррентное соотношение порядка k - это соотношение вида:

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ - константы, $c_k \neq 0$, а f(n) - заданная функция.

Однородные линейные рекуррентные соотношения

Если f(n) = 0, то рекуррентное соотношение называется однородным:

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$

Характеристическое уравнение

Для решения однородного линейного рекуррентного соотношения порядка k используется характеристическое уравнение:

$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_k = 0$

Теорема об общем виде решения однородного линейного рекуррентного соотношения порядка k

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_s$ - различные корни характеристического уравнения с кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_s$ соответственно ($m_1 + m_2 + \ldots + m_s = k$).

Тогда общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения порядка k имеет вид:

$a_n = \sum_{i=1}^s (\alpha_{1i} + \alpha_{2i}n + \alpha_{3i}n^2 + \ldots + \alpha_{m_ii}n^{m_i-1}) \times r_i^n$

где $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{m_ii}$ - произвольные константы, определяемые из начальных условий.

Частные случаи:

1. Если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_k$ различны (все m_i = 1), то общее решение: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$
2. Если есть кратные корни, то для корня r_i кратности m_i соответствующая часть решения: $(\alpha_{1i} + \alpha_{2i}n + \alpha_{3i}n^2 + \ldots + \alpha_{m_i i}n^{m_i-1}) \times r_i^n$

Неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Для неоднородного линейного рекуррентного соотношения:

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$

общее решение представляется в виде:

$a_n = a_n' + a_n''$

где a_n' - общее решение соответствующего однородного уравнения, а a_n'' - частное решение неоднородного уравнения.

Для нахождения частного решения используются методы:

1. Метод неопределенных коэффициентов (если f(n) - многочлен, экспонента или их произведение)
2. Метод вариации произвольных постоянных
3. Использование производящих функций