Дифференциальные и разностные уравнения

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

Определение дифференциального уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция, y' — ее производная.

Часто дифференциальное уравнение записывают в явной форме:

$$y' = f(x, y)$$

Задача Коши

Задача Коши (начальная задача) для дифференциального уравнения первого порядка заключается в нахождении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего уравнению и начальному условию:

$$y(x_0) = y_0$$

Теорема о существовании и единственности решения

Теорема Пикара (о существовании и единственности решения): Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0). Тогда существует интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, в котором определено единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида:

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Решение:

1. Преобразовать к виду $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$
2. Проинтегрировать обе части: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$

2. Однородные уравнения

Уравнения вида:

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

Решение:

1. Сделать подстановку $y = ux$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция
2. Получить уравнение для u: $u' = \frac{f(u)-u}{x}$
3. Решить полученное уравнение с разделяющимися переменными

3. Линейные уравнения первого порядка

Уравнения вида:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Решение:

1. Найти интегрирующий множитель $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
2. Умножить уравнение на $\mu(x)$: $\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$
3. Левая часть становится производной произведения: $(\mu(x)y)' = \mu(x)Q(x)$
4. Проинтегрировать: $\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C$
5. Выразить $y = \frac{1}{\mu(x)}(\int \mu(x)Q(x)dx + C)$

4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнения вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Решение:

1. Найти функцию $U(x, y)$ такую, что $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$
2. Общее решение имеет вид $U(x, y) = C$

2. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ)

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — постоянные коэффициенты, $a_n = 0$.

Метод решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

1. Составить характеристическое уравнение:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

2. Найти корни характеристического уравнения $r_1, r_2, \dots, r_n$.
3. Составить общее решение в зависимости от типа корней:

a) Простые действительные корни r_k:

$$y_k = C_k e^{r_k x}$$

b) Кратные действительные корни r_k кратности m:

$$y_k = (C_{k1} + C_{k2}x + \dots + C_{km}x^{m-1})e^{r_k x}$$

c) Простые комплексные корни $r = \alpha \pm i\beta$:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

d) Кратные комплексные корни $r = \alpha \pm i\beta$ кратности m:

$$y = e^{\alpha x} \sum_{j=0}^{m-1} x^j (C_{j1} \cos \beta x + C_{j2} \sin \beta x)$$

4. Общее решение ЛОДУ является линейной комбинацией фундаментальной системы решений:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ)

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Общее решение ЛНДУ:

Общее решение ЛНДУ представляется в виде суммы общего решения соответствующего ЛОДУ и частного решения ЛНДУ:

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}}$$

где $y_{\text{одн}}$ — общее решение соответствующего ЛОДУ, $y_{\text{част}}$ — частное решение ЛНДУ.

Методы нахождения частного решения ЛНДУ:

1. **Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)**: a) Найти общее решение соответствующего ЛОДУ: $y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ b) Заменить

постоянные C_i на функции $C_i(x)$ c) Составить систему уравнений для нахождения производных $C_i'(x)$ d) Найти функции $C_i(x)$ интегрированием e) Подставить найденные функции в выражение для y

2. **Метод неопределенных коэффициентов** (применим, когда $f(x)$ — квазиполином):

   a) Если $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m:

   - Если α не является корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{част}} = Q_m(x)e^{\alpha x}$
   - Если α является корнем характеристического уравнения кратности k, то $y_{\text{част}} = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}$

   b) Если $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$:

   - Если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{част}} = e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$
   - Если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения кратности k, то $y_{\text{част}} = x^k e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$

   где $Q_m(x)$, $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами той же степени, что и $P_m(x)$.

Разностные уравнения

Разностное уравнение — это уравнение, связывающее значения неизвестной функции $y(n)$ для различных значений аргумента n.

Линейное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \ldots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = f(n)$$

Методы решения разностных уравнений аналогичны методам решения дифференциальных уравнений:

1. Составление характеристического уравнения
2. Нахождение общего решения однородного уравнения
3. Нахождение частного решения неоднородного уравнения
4. Суммирование общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения