Теория вероятностей и математическая статистика

1. Случайный эксперимент и случайные события. σ-алгебра событий

Случайный эксперимент (испытание) - это эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее с полной определенностью даже при соблюдении одинаковых условий проведения. Примерами могут служить бросание игральной кости, измерение времени обслуживания клиента или определение срока службы электрической лампочки.

Основные понятия:

- **Элементарное событие (ω)** - неразложимый результат эксперимента, который нельзя представить как совокупность других более простых исходов. Например, при бросании игральной кости выпадение конкретного числа от 1 до 6.
- **Пространство элементарных событий (Ω)** - множество всех возможных элементарных событий данного эксперимента. Например, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} при бросании игральной кости.
- **Случайное событие (A)** - подмножество пространства элементарных событий ($A \subseteq \Omega$), некоторое условие, которое может выполниться или не выполниться в результате эксперимента. Например, "выпадение четного числа" = {2, 4, 6}.

Операции над событиями:

- **Сумма (объединение) событий $A \cup B$** - событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B.
- **Произведение (пересечение) событий $A \cap B$** - событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B одновременно.
- **Разность событий A \ B** - событие, состоящее в наступлении события A и ненаступлении события B.
- **Противоположное событие $\bar{A}$** - событие, состоящее в ненаступлении события A.

σ-алгебра событий:

Система подмножеств F пространства Ω является σ-алгеброй, если выполняются следующие условия:

1. Пустое множество принадлежит F: $\varnothing \in F$
2. С любым событием A система содержит и противоположное ему: если $A \in F$, то $\bar{A} \in F$
3. Система замкнута относительно счетного объединения: если $A_1, A_2, \ldots \in F$, то $\cup A_n \in F$

Из этих условий также следует, что:

- Все пространство Ω принадлежит F: $\Omega \in F$
- Система замкнута относительно счетного пересечения: если $A_1, A_2, \ldots \in F$, то $\cap A_n \in F$

Понятие σ-алгебры имеет фундаментальное значение для аксиоматического построения теории вероятностей, так как именно на σ-алгебре определяется вероятностная мера.

Аксиоматическое определение:

Вероятностным пространством называется тройка (Ω, F, P), где:

- Ω - пространство элементарных событий
- F - σ-алгебра подмножеств Ω (алгебра событий)
- P - вероятностная мера на F

Функция P, определенная на σ-алгебре F, называется вероятностью, если выполняются следующие аксиомы Колмогорова:

1. **Неотрицательность**: $P(A) \geq 0$ для любого $A \in F$
2. **Нормированность**: $P(\Omega) = 1$
3. **Счетная аддитивность**: для любой последовательности попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots$ из F имеем $P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$

Свойства вероятности:

1. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$
2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$ (монотонность вероятности)
3. Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. Формула сложения вероятностей для двух событий: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. Вероятность события находится в интервале от 0 до 1: $0 \leq P(A) \leq 1$ для любого $A \in F$
6. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$
7. Формула включения-исключения: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cap A_j) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

Классическая и геометрическая вероятности:

Классическая вероятность (для конечного числа равновозможных исходов): $P(A) = m/n$, где m - число благоприятных исходов, n - общее число исходов

Этот подход применим, когда:

- Число элементарных исходов конечно
- Все исходы равновозможны
- Каждый исход можно однозначно классифицировать как благоприятный или неблагоприятный

Геометрическая вероятность (для непрерывного случая): $P(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$, где μ - мера множества (длина, площадь, объем и т.д.)

Применяется, когда элементарные исходы можно отождествить с точками некоторого геометрического пространства.

2. Условная вероятность и независимость событий

Условная вероятность:

Вероятность события A при условии, что произошло событие B (при $P(B) > 0$): $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

Условная вероятность выражает "переоценку" вероятности события A после получения дополнительной информации о том, что произошло событие B.

Свойства условной вероятности:

1. $P(A|B) \geq 0$ для любого события A
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Если $A_1, A_2, \ldots$ - попарно несовместные события, то $P(\cup A_n|B) = \sum P(A_n|B)$
4. $P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B) \times P(A_2|A_1 \cap B)$

Независимость событий:

События A и B называются независимыми, если: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Эквивалентные определения:

- $P(A|B) = P(A)$ (при $P(B) > 0$)
- $P(B|A) = P(B)$ (при $P(A) > 0$)

Интуитивно, события независимы, если наступление одного из них не меняет вероятность наступления другого.

Понятие независимости может быть обобщено на произвольное число событий:

- События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми, если для любых $i \neq j$: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$
- События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества индексов $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \ldots \times P(A_{i_k})$

Формулы сложения, полной вероятности и Байеса:

Формула сложения вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Формула полной вероятности: $P(A) = \sum P(A|H_n) \times P(H_n)$, где $H_1, H_2, \ldots$ - полная группа несовместных событий (т.е. $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\cup H_n = \Omega$)

Формула Байеса: $P(H_i|A) = [P(A|H_i) \times P(H_i)] / \sum [P(A|H_n) \times P(H_n)]$

Формула Байеса позволяет "переоценить" вероятности гипотез H_i после наблюдения события A. Исходные вероятности $P(H_i)$ называются априорными, а вероятности $P(H_i|A)$ -

апостериорными.

3. Схема Бернулли и предельные теоремы

Схема Бернулли:

Последовательность независимых испытаний, в каждом из которых вероятность успеха равна p, а неудачи q = 1-p, называется схемой Бернулли. Эта схема моделирует ситуации, когда:

- Проводится фиксированное число n одинаковых испытаний
- Испытания независимы друг от друга
- В каждом испытании возможны только два исхода: "успех" и "неудача"
- Вероятность успеха p постоянна во всех испытаниях

Вероятность k успехов в n испытаниях вычисляется по формуле Бернулли: $P_{(n)}(k) = C(n,k) \times p^k \times q^{(n-k)}$, где $C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)$ - число сочетаний из n по k

Предельные теоремы:

Локальная теорема Муавра-Лапласа: При $n \to \infty$ и фиксированном p ($0 < p < 1$): $P_{(n)}(k) \approx \varphi(x) / \sqrt{(npq)}$, где $x = (k-np)/\sqrt{(npq)}$, $\varphi(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{(2\pi)}$

Эта теорема аппроксимирует вероятность ровно k успехов при больших n с помощью плотности нормального распределения.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа: $P_{(n)}(a \le k \le b) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, где

- $\alpha = (a-0.5-np)/\sqrt{(npq)}$
- $\beta = (b+0.5-np)/\sqrt{(npq)}$
- $\Phi(x) = \int\varphi(t)dt$ от $-\infty$ до x - функция Лапласа

Эта теорема аппроксимирует вероятность того, что число успехов лежит в интервале [a,b], с помощью функции нормального распределения.

Теорема Пуассона: При $n \to \infty$, $p \to 0$, $\lambda = np = const$: $P_{(n)}(k) \approx e^{(-\lambda)} \times \lambda^k/k!$

Эта теорема применяется, когда число испытаний очень велико, а вероятность успеха в каждом испытании очень мала, при этом их произведение λ = np остается постоянным. Теорема Пуассона хорошо подходит для моделирования редких событий, таких как число вызовов в call-центр, число аварий на участке дороги и т.п.

Распределение Пуассона имеет математическое ожидание и дисперсию, равные λ, что упрощает его практическое применение.

4. Случайные величины (СВ). Свойства функции распределения (ФР).

Случайные величины

Случайная величина (СВ) — это функция $X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая числовые значения. По сути, случайная величина сопоставляет каждому исходу эксперимента некоторое число.

Формально, случайной величиной называется измеримая функция $X: \Omega \to \mathbb{R}$, то есть такая, что для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ множество $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре F.

Случайные величины классифицируются на:

- **Дискретные** — принимают конечное или счетное множество значений
- **Непрерывные** — принимают значения из некоторого интервала
- **Смешанные** — сочетают свойства дискретных и непрерывных

Функция распределения случайной величины

Функция распределения (ФР) случайной величины X определяется как: $F(x) = P(X \le x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$

Функция распределения полностью характеризует вероятностные свойства случайной величины.

Свойства функции распределения:

1. **Монотонность**: если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$
2. **Ограниченность**: $0 \le F(x) \le 1$ для всех x
3. **Нормированность**: $\lim(x\to-\infty)\ F(x) = 0$, $\lim(x\to+\infty)\ F(x) = 1$
4. **Непрерывность справа**: $\lim(h\to0+)\ F(x+h) = F(x)$
5. **Вероятность попадания в интервал**: $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
6. **Вероятность конкретного значения**: $P(X = a) = F(a) - F(a-0)$, где $F(a-0) = \lim(h\to0+)\ F(a-h)$

5. Дискретные СВ: определение, построение функции распределения, примеры основных распределений

Определение дискретной случайной величины

Случайная величина X называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n, ...$, где $p_i = P(X = x_i)$ и $\sum p_i = 1$.

Дискретная СВ полностью задается своим законом распределения — совокупностью возможных значений и соответствующих им вероятностей:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P(X)	p_1	p_2	...	p_n	...

Построение функции распределения дискретной СВ

Функция распределения дискретной СВ имеет вид: $F(x) = \sum(p_i)$ для всех $x_i \leq x$

Графически ФР дискретной СВ представляет собой ступенчатую функцию, имеющую скачки величиной p_i в точках x_i.

Основные дискретные распределения:

1. **Распределение Бернулли** (принимает значения 0 и 1):
   - $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1-p$
   - Математическое ожидание: $E(X) = p$
   - Дисперсия: $D(X) = p(1-p)$
   - Применение: моделирование одиночного испытания с двумя исходами
2. **Биномиальное распределение** (число успехов в n независимых испытаниях):
   - $P(X = k) = C(n,k) \times p^k \times (1-p)^{(n-k)}$, $k = 0,1,\dots,n$
   - Математическое ожидание: $E(X) = np$
   - Дисперсия: $D(X) = np(1-p)$
   - Применение: моделирование числа успехов в схеме Бернулли
3. **Геометрическое распределение** (число испытаний до первого успеха):
   - $P(X = k) = (1-p)^{(k-1)} \times p$, $k = 1,2,\dots$
   - Математическое ожидание: $E(X) = 1/p$
   - Дисперсия: $D(X) = (1-p)/p^2$
   - Применение: моделирование ожидания редких событий
4. **Распределение Пуассона** (число событий за фиксированный интервал):
   - $P(X = k) = (\lambda^k \times e^{(-\lambda)})/k!$, $k = 0,1,2,\dots$
   - Математическое ожидание: $E(X) = \lambda$
   - Дисперсия: $D(X) = \lambda$
   - Применение: моделирование редких событий (число звонков в колл-центр, число дефектов в материале)

6. Непрерывные СВ (определение и примеры основных распределений), свойства плотности распределения непрерывных СВ

Определение непрерывной случайной величины

Случайная величина X называется непрерывной, если её функция распределения F(x) является непрерывной функцией и существует неотрицательная функция f(x) (плотность распределения), такая что:

$F(x) = \int f(t)dt$ от $-\infty$ до x

Важное свойство непрерывных СВ: $P(X = a) = 0$ для любого значения a.

Свойства плотности распределения:

1. **Неотрицательность**: $f(x) \geq 0$ для всех x
2. **Нормированность**: $\int f(x)dx$ от $-\infty$ до $+\infty = 1$
3. **Связь с функцией распределения**: $f(x) = F'(x)$ (в точках, где $F(x)$ дифференцируема)
4. **Вероятность попадания в интервал**: $P(a \leq X \leq b) = \int f(x)dx$ от a до b

Основные непрерывные распределения:

1. **Равномерное распределение** на отрезке [a,b]:
    - Плотность: $f(x) = 1/(b-a)$ при $a \leq x \leq b$, $f(x) = 0$ вне [a,b]
    - Функция распределения: $F(x) = 0$ при $x < a$, $F(x) = (x-a)/(b-a)$ при $a \leq x \leq b$, $F(x) = 1$ при $x > b$
    - Математическое ожидание: $E(X) = (a+b)/2$
    - Дисперсия: $D(X) = (b-a)^2/12$
    - Применение: моделирование случайных величин с равновероятными значениями
2. **Нормальное распределение** (распределение Гаусса):
    - Плотность: $f(x) = (1/(\sigma\sqrt{(2\pi)})) \times \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$
    - Функция распределения: $F(x) = (1/2) \times [1 + \mathrm{erf}((x-\mu)/(\sigma\sqrt{2}))]$
    - Математическое ожидание: $E(X) = \mu$
    - Дисперсия: $D(X) = \sigma^2$
    - Применение: моделирование суммы большого числа независимых случайных величин
3. **Показательное распределение**:
    - Плотность: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, $f(x) = 0$ при $x < 0$
    - Функция распределения: $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$
    - Математическое ожидание: $E(X) = 1/\lambda$
    - Дисперсия: $D(X) = 1/\lambda^2$
    - Применение: моделирование времени между событиями в пуассоновском потоке

7. Многомерные СВ – определение. ФР – определение и свойства.

Многомерные случайные величины

Многомерной случайной величиной (или случайным вектором) называется упорядоченный набор случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, определенных на одном вероятностном пространстве.

С геометрической точки зрения, многомерная случайная величина представляет собой случайную точку в n-мерном пространстве, координаты которой являются случайными величинами.

Функция распределения многомерной случайной величины

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, определяющая вероятность того, что все компоненты случайного вектора одновременно не превосходят соответствующих значений:

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n)$

Свойства функции распределения многомерной случайной величины:

1. **Ограниченность**: $0 \le F(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1$
2. **Монотонность**: функция F не убывает по каждому аргументу, т.е. если $x_i \le y_i$ для всех $i = 1,2,...,n$, то $F(x_1, x_2, ..., x_n) \le F(y_1, y_2, ..., y_n)$
3. **Предельные свойства**:
   - Если хотя бы один из аргументов стремится к минус бесконечности, то $F \to 0$
   - Если все аргументы стремятся к плюс бесконечности, то $F \to 1$
4. **Непрерывность справа**: функция F непрерывна справа по каждому аргументу
5. **Вероятность попадания в прямоугольник**: вероятность попадания в прямоугольник $(a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times ... \times (a_n,b_n]$ равна:

   $P(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2, ..., a_n < X_n \le b_n) = = \sum (-1)^s F(c_1, c_2, ..., c_n)$

   где суммирование ведется по всем наборам $(c_1, c_2, ..., c_n)$, где c_i равно либо a_i, либо b_i, а s — число компонент, равных a_i
6. **Связь с одномерными функциями распределения**: одномерные функции распределения компонент можно получить как предельные значения совместной функции распределения:

   $F_i(x_i) = F(\infty, ..., \infty, x_i, \infty, ..., \infty)$

8. Дискретные многомерные СВ – определение, способ задания, вывод распределений одномерных случайных величин

Дискретные многомерные случайные величины

Многомерная случайная величина $(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется дискретной, если все её компоненты $X_1, X_2, ..., X_n$ являются дискретными случайными величинами, то есть каждая из них принимает значения из конечного или счетного множества с определенными вероятностями.

Способ задания дискретной многомерной СВ

Дискретная многомерная СВ задается с помощью совместного закона распределения — таблицы, содержащей все возможные комбинации значений компонент и соответствующие им вероятности:

$P(X_1 = x_{1k}, X_2 = x_{2l}, \ldots, X_n = x_{nm}) = p_{kl\ldots m}$

где сумма всех вероятностей $p_{kl\ldots m}$ равна 1.

Для двумерной случайной величины (X, Y) закон распределения можно представить в виде таблицы:

X\Y	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

Вывод распределений одномерных случайных величин

Зная совместное распределение многомерной дискретной СВ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, можно найти распределение любой её компоненты X_i, используя формулу:

$P(X_i = x_{ik}) = \sum P(X_1 = x_{1\,j\,1}, X_2 = x_{2\,j\,2}, \ldots, X_i = x_{ik}, \ldots, X_n = x_{n\,j\,n})$

где суммирование ведется по всем возможным наборам значений $j_1, j_2, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_n$.

Для двумерной случайной величины (X, Y):

- $P(X = x_i) = \sum_k P(X = x_i, Y = y_k)$ — суммирование по строке
- $P(Y = y_j) = \sum_k P(X = x_k, Y = y_j)$ — суммирование по столбцу

Условные распределения и независимость

Условное распределение компоненты X_i при условии, что остальные компоненты приняли определенные значения:

$P(X_i = x_{ik} \mid X_1 = x_{1\,j\,1}, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1\,j\,i-1}, X_{i+1} = x_{i+1\,j\,i+1}, \ldots, X_n = x_{n\,j\,n}) = = P(X_1 = x_{1\,j\,1}, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1\,j\,i-1}, X_i = x_{ik}, X_{i+1} = x_{i+1\,j\,i+1}, \ldots, X_n = x_{n\,j\,n}) / P(X_1 = x_{1\,j\,1}, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1\,j\,i-1}, X_{i+1} = x_{i+1\,j\,i+1}, \ldots, X_n = x_{n\,j\,n})$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются **независимыми**, если для любых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется:

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \ldots \times P(X_n = x_n)$

Для двумерной случайной величины (X, Y) независимость означает, что: $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$ для всех i, j.

Функции дискретной многомерной СВ (одномерный и двумерный случай)

Если $(X_1, X_2, ..., X_n)$ — дискретная многомерная СВ и $Z = g(X_1, X_2, ..., X_n)$, то Z также является случайной величиной.

Для нахождения распределения Z:

1. Определить множество всех возможных значений Z
2. Для каждого значения z найти вероятность $P(Z = z) = P(g(X_1, X_2, ..., X_n) = z)$

Для двумерной СВ (X, Y) и $Z = g(X, Y)$: $P(Z = z) = \sum P(X = x_i, Y = y_j)$, где суммирование ведется по всем парам (x_i, y_j), для которых $g(x_i, y_j) = z$.

9. Непрерывные многомерные СВ – определение, свойства плотности распределения

Непрерывные многомерные случайные величины

Многомерная случайная величина $(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется непрерывной, если существует неотрицательная функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (плотность распределения), такая что функция распределения представима в виде:

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, ..., t_n)\, dt_1\, dt_2 ... dt_n$

Свойства плотности распределения:

1. **Неотрицательность**: $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ для всех $(x_1, x_2, ..., x_n)$
2. **Нормированность**: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n = 1$
3. **Связь с функцией распределения**: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)/\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n$ (в точках, где F дифференцируема)
4. **Вероятность попадания в область**: $P((X_1, X_2, ..., X_n) \in D) = \int\int...\int_D f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n$

Вывод распределений одномерных случайных величин

Плотность распределения компоненты X_i (маргинальная плотность) можно найти как:

$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_{i-1}\, dx_{i+1} ... dx_n$

Для двумерной случайной величины (X, Y) с плотностью f(x, y):

- Плотность распределения X: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$
- Плотность распределения Y: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$

Условные распределения и независимость

Условная плотность распределения компоненты X_i при условии, что остальные компоненты приняли определенные значения:

$f(x_i | x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) / f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$

где $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ — совместная плотность всех компонент кроме X_i.

Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ называются **независимыми**, если их совместная плотность распределения представима в виде произведения одномерных плотностей:

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times ... \times f_n(x_n)$

Для двумерной случайной величины (X, Y) независимость означает, что: $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ для всех x, y.

Функции непрерывной многомерной СВ (одномерный и двумерный случай)

Если $(X_1, X_2, ..., X_n)$ — непрерывная многомерная СВ и $Z = g(X_1, X_2, ..., X_n)$, то Z также является случайной величиной.

Для нахождения плотности распределения Z используются специальные методы, такие как:

- Метод функции распределения
- Метод характеристических функций
- Метод якобиана преобразования (для взаимно однозначных преобразований)

10. Формула свертки для многомерных непрерывных случайных величин

Формула свертки для суммы независимых случайных величин

Если X и Y — независимые непрерывные случайные величины с плотностями распределения f_X(x) и f_Y(y) соответственно, то плотность распределения их суммы Z = X + Y определяется формулой свертки:

f_Z(z) = ∫_{-∞}^{∞} f_X(z-y) · f_Y(y) dy = ∫_{-∞}^{∞} f_X(x) · f_Y(z-x) dx

Этот результат можно обобщить на сумму n независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Для $Z = X_1 + X_2 + ... + X_n$ плотность распределения находится посредством последовательного применения формулы свертки.

Свертка для линейных комбинаций

Для линейной комбинации $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$, где $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые непрерывные случайные величины, а $a_1, a_2, ..., a_n$ — константы, плотность распределения Z вычисляется с помощью обобщенной формулы свертки.

Примеры применения формулы свертки:

1. **Сумма двух равномерно распределенных случайных величин**:
   Если $X \sim U[0,a]$ и $Y \sim U[0,b]$ — независимые случайные величины с равномерным распределением, то их сумма $Z = X + Y$ имеет плотность распределения вида «трапеции»:

   f_Z(z) = { z/ab, если 0 ≤ z < min(a,b) min(a,b)/ab, если min(a,b) ≤ z < max(a,b) (a+b-z)/ab, если max(a,b) ≤ z < a+b 0, во всех остальных случаях }

2. **Сумма двух независимых нормальных случайных величин**:
   Если $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ и $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, то $Z = X + Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

11. Определение и свойства математического ожидания, дисперсии. Моменты высших порядков.

Математическое ожидание

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины X — это число, характеризующее среднее значение случайной величины.

Для дискретной случайной величины: $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$

Для непрерывной случайной величины: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

Свойства математического ожидания:

1. **Линейность**: $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$, где a и b — константы
2. **Константа**: $E(c) = c$, где c — константа
3. **Независимость**: Если X и Y независимы, то $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
4. **Монотонность**: Если $X \le Y$, то $E(X) \le E(Y)$
5. **Ограниченность**: Если $a \le X \le b$, то $a \le E(X) \le b$

Дисперсия

Дисперсия случайной величины X — это мера разброса значений случайной величины вокруг её математического ожидания:

$D(X) = Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

Для дискретной случайной величины: $D(X) = \sum [x_i - E(X)]^2 \cdot P(X = x_i) = \sum x_i^2 \cdot P(X = x_i) - [E(X)]^2$

Для непрерывной случайной величины: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - [E(X)]^2$

Стандартное отклонение $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$ имеет размерность, совпадающую с размерностью случайной величины.

Свойства дисперсии:

1. **Неотрицательность**: $D(X) \geq 0$
2. **Константа**: $D(c) = 0$, где c — константа
3. **Линейное преобразование**: $D(aX + b) = a^2 \cdot D(X)$, где a и b — константы
4. **Сумма независимых СВ**: Если X и Y независимы, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

Моменты высших порядков

Момент k-го порядка случайной величины X относительно начала координат (начальный момент): $\mu_k = E(X^k)$

Центральный момент k-го порядка (относительно математического ожидания): $\mu_k' = E[(X - E(X))^k]$

Особое значение имеют:

- Третий центральный момент $\mu_3' = E[(X - E(X))^3]$, характеризующий асимметрию распределения
- Четвертый центральный момент $\mu_4' = E[(X - E(X))^4]$, характеризующий островершинность распределения

Коэффициент асимметрии (skewness): $\gamma_1 = \mu_3' / \sigma^3$

Коэффициент эксцесса (kurtosis): $\gamma_2 = \mu_4' / \sigma^4 - 3$

Коэффициент эксцесса показывает, насколько распределение «островершинно» по сравнению с нормальным распределением, для которого $\gamma_2 = 0$.

12. Многомерные СВ и их ФР. Дискретные и непрерывные многомерные СВ. Независимые СВ.

Многомерные случайные величины и их функции распределения

Многомерная случайная величина (случайный вектор) — это упорядоченный набор случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$, определенных на одном вероятностном пространстве.

Функция распределения n-мерной случайной величины: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n)$

Дискретные многомерные СВ

Дискретная многомерная СВ принимает значения из конечного или счетного множества точек n-мерного пространства.

Закон распределения дискретной многомерной СВ задается таблицей значений и соответствующих вероятностей: $P(X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j}, ..., X_n = x_{nk}) = p_{ij...k}$

Для двумерной СВ (X,Y):

- **Одномерные распределения**: $P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$, $P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$
- **Условные распределения**: $P(X = x_i \mid Y = y_j) = p_{ij} / P(Y = y_j)$

Непрерывные многомерные СВ

Непрерывная многомерная СВ имеет плотность распределения $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, такую что: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, ..., t_n)\, dt_1\, dt_2 ... dt_n$

Свойства плотности распределения многомерной СВ аналогичны свойствам одномерного случая.

Для двумерной СВ (X,Y):

- **Одномерные (маргинальные) плотности**: $f\_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$, $f\_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$
- **Условные плотности**: $f(x|y) = f(x,y) / f\_Y(y)$, $f(y|x) = f(x,y) / f\_X(x)$

Независимые случайные величины

Случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ называются независимыми, если для любых значений $x_1, x_2, ..., x_n$ выполняется:

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot ... \cdot F_n(x_n)$

где $F_i(x_i)$ — функция распределения i-й компоненты.

Для дискретных СВ независимость означает: $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot ... \cdot P(X_n = x_n)$

Для непрерывных СВ независимость означает: $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot ... \cdot f_n(x_n)$

13. Моменты многомерных СВ. Ковариация и коэффициент корреляции – определения и свойства.

Моменты многомерных случайных величин

Для многомерной случайной величины $(X_1, X_2, ..., X_n)$ определяются следующие типы моментов:

Смешанный момент порядка $(k_1 + k_2 + ... + k_n)$: $E[X_1^{k_1} \cdot X_2^{k_2} \cdot ... \cdot X_n^{k_n}]$

Смешанный центральный момент: $E[(X_1 - E(X_1))^{k_1} \cdot (X_2 - E(X_2))^{k_2} \cdot ... \cdot (X_n - E(X_n))^{k_n}]$

Ковариация

Ковариация случайных величин X и Y — это мера их совместной изменчивости: $Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

Для дискретных СВ: $Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y))P(X = x_i, Y = y_j)$

Для непрерывных СВ: $Cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))(y - E(Y))f(x,y)\,dx\,dy$

Свойства ковариации:

1. **Симметричность**: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. **Самоковариация**: $Cov(X,X) = D(X)$
3. **Линейность**: $Cov(aX + bY, Z) = a\cdot Cov(X,Z) + b\cdot Cov(Y,Z)$, где a и b — константы
4. **Независимость**: Если X и Y независимы, то $Cov(X,Y) = 0$ (обратное неверно!)
5. **Дисперсия суммы**: $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\cdot Cov(X,Y)$

Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции (корреляция Пирсона) — это нормированная ковариация, характеризующая степень линейной зависимости между случайными величинами:

$\rho(X,Y) = Cov(X,Y) / (\sigma_X \cdot \sigma_Y) = Cov(X,Y) / \sqrt{D(X) \cdot D(Y)}$

Свойства коэффициента корреляции:

1. **Ограниченность**: $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$
2. **Независимость**: Если X и Y независимы, то $\rho(X,Y) = 0$ (обратное неверно!)
3. **Линейная зависимость**:
   - $\rho(X,Y) = 1$, если $Y = aX + b$, $a > 0$ (прямая линейная зависимость)
   - $\rho(X,Y) = -1$, если $Y = aX + b$, $a < 0$ (обратная линейная зависимость)
4. **Инвариантность к линейным преобразованиям**: $\rho(aX + b, cY + d) = \mathrm{sign}(ac)\cdot\rho(X,Y)$, где a, b, c, d — константы, $ac \ne 0$

Интерпретация коэффициента корреляции:

- $|\rho| < 0.3$: слабая линейная связь
- $0.3 \le |\rho| < 0.7$: умеренная линейная связь
- $|\rho| \ge 0.7$: сильная линейная связь

Важно помнить, что коэффициент корреляции измеряет только линейную зависимость между случайными величинами. Отсутствие корреляции не означает независимость.

14. Определение и основные свойства характеристических функций (ХФ). ХФ основных распределений.

Определение характеристической функции

Характеристическая функция случайной величины X определяется как математическое ожидание комплексной экспоненты:

$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx$

где i — мнимая единица, t — вещественный параметр.

Для дискретной СВ: $\phi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} P(X = x_k)$

Основные свойства характеристических функций:

1. **Нормированность**: $\phi_X(0) = 1$
2. **Ограниченность**: $|\phi_X(t)| \leq 1$ для всех t
3. **Непрерывность**: $\phi_X(t)$ непрерывна по t
4. **Эрмитова симметрия**: $\phi_X(-t) = \phi_X^*(t)$, где ϕ_X^* — комплексно-сопряженная функция
5. **Единственность**: Каждому распределению соответствует единственная ХФ и наоборот
6. **Связь с моментами**: Если существует $E(X^n)$, то $\phi_X(t)$ n раз дифференцируема и $\phi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n)$
7. **Независимость**: Если X и Y независимы, то $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$
8. **Линейное преобразование**: $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \phi_X(at)$

Характеристические функции основных распределений:

1. **Дискретное равномерное распределение** на множестве {a, a+1, ..., b}: $\phi_X(t) = (e^{ita} - e^{it(b+1)}) / ((b-a+1)(1-e^{it}))$

2. **Непрерывное равномерное распределение** на отрезке [a,b]: $\phi_X(t) = (e^{itb} - e^{ita}) / (it(b-a))$

3. **Биномиальное распределение** Bin(n,p): $\phi_X(t) = (pe^{it} + q)^n$, где $q = 1-p$

4. **Распределение Пуассона** с параметром λ: $\phi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$

5. **Нормальное распределение** $N(\mu,\sigma^2)$: $\phi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)$

6. **Показательное распределение** с параметром λ: $\phi_X(t) = \lambda/(\lambda-it)$

7. **Распределение Коши** с параметрами a и b: $\phi_X(t) = \exp(iat - b|t|)$

8. **Гамма-распределение** с параметрами α и λ: $\phi_X(t) = (1 - it/\lambda)^{-\alpha}$

15. Неравенство Чебышева и закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева устанавливает верхнюю границу для вероятности того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания более чем на заданную величину:

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2$ для любого $\varepsilon > 0$

Эквивалентная форма: $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2$

Неравенство Чебышева показывает, что случайная величина с маленькой дисперсией сконцентрирована вблизи своего математического ожидания.

Закон больших чисел

Закон больших чисел — фундаментальный результат теории вероятностей, утверждающий, что среднее арифметическое большого числа независимых и одинаково распределенных случайных величин стремится к их математическому ожиданию.

Теорема Хинчина (Слабый закон больших чисел):

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и конечной дисперсией $D(X_i) = \sigma^2$, то для любого $\varepsilon > 0$:

$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$

где $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ — выборочное среднее.

Это означает, что при увеличении объема выборки средняя арифметическая наблюдаемых значений сходится по вероятности к теоретическому среднему.

Теорема Колмогорова (Усиленный закон больших чисел):

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$, то:

$P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$

Это означает, что выборочное среднее сходится к математическому ожиданию с вероятностью 1 (почти наверное).

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема (ЦПТ) утверждает, что сумма большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, независимо от распределения исходных величин.

Теорема Ляпунова:

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(X_i) = \mu$ и дисперсией $D(X_i) = \sigma^2$, то при $n \to \infty$:

$(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n}) \to N(0,1)$

где сходимость понимается как сходимость по распределению.

В эквивалентной форме для выборочного среднего: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \to N(0,1)$

Это означает, что распределение нормированной суммы (или выборочного среднего) при большом n приближается к стандартному нормальному распределению.

ЦПТ объясняет, почему нормальное распределение так часто встречается в природе — многие случайные величины можно представить как сумму большого числа малых независимых случайных факторов.

16. Основные понятия математической статистики: выборка, вариационный ряд, эмпирическая ФР, гистограмма и полигон частот. Выборочные моменты.

Основные понятия математической статистики

Математическая статистика — раздел математики, занимающийся методами сбора, анализа и интерпретации эмпирических данных для выявления закономерностей случайных явлений.

Генеральная совокупность — множество всех объектов, относительно которых делаются выводы.

Выборка — подмножество элементов генеральной совокупности, отобранных для исследования.

Случайная выборка объема n — набор независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Повторная выборка — выборка, при которой отобранный элемент возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторная выборка — выборка, при которой отобранный элемент не возвращается в генеральную совокупность.

Вариационный ряд

Вариационный ряд — выборка, элементы которой упорядочены по возрастанию: $X_{(1)} \le X_{(2)} \le ... \le X_{(n)}$

где $X_{(i)}$ — i-я порядковая статистика.

Статистический ряд — таблица, содержащая различные значения признака и соответствующие им частоты (или относительные частоты).

Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения (ЭФР) определяется как: $\hat{F}_n(x) = n_{(x)}/n$

где $n_{(x)}$ — число элементов выборки, меньших или равных x, а n — объем выборки.

Свойства ЭФР аналогичны свойствам теоретической функции распределения.

Теорема Гливенко-Кантелли утверждает, что ЭФР сходится к теоретической функции распределения F(x) равномерно по x при $n \to \infty$, т.е.: $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \to 0$ по вероятности при $n \to \infty$

Гистограмма и полигон частот

Гистограмма — графическое представление распределения данных, состоящее из прямоугольников, площади которых пропорциональны частотам соответствующих интервалов.

Построение гистограммы:

1. Разбить диапазон данных на k интервалов одинаковой длины h
2. Подсчитать число наблюдений n_i, попадающих в каждый интервал
3. Высота столбца гистограммы над i-м интервалом равна $n_i/(n \cdot h)$

При $n \to \infty$ и $h \to 0$ (так что $n \cdot h \to \infty$) гистограмма сходится к плотности распределения.

Полигон частот — ломаная линия, соединяющая точки, абсциссы которых равны значениям признака, а ординаты — соответствующим частотам или относительным частотам.

Для построения полигона частот:

1. По оси абсцисс откладываются значения признака
2. По оси ординат — соответствующие частоты или относительные частоты
3. Полученные точки соединяются отрезками прямых

Выборочные моменты

Выборочные моменты — статистические оценки теоретических моментов распределения.

Выборочное среднее (оценка математического ожидания): $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$

Выборочная дисперсия: $S^2 = (1/n) \cdot \sum(X_i - \bar{X})^2 = (1/n) \cdot \sum X_i^2 - \bar{X}^2$

Исправленная выборочная дисперсия (несмещенная оценка): $S^2_{ispr} = (n/(n-1)) \cdot S^2 = (1/(n-1)) \cdot \sum(X_i - \bar{X})^2$

Выборочное стандартное отклонение: $S = \sqrt{S^2}$

Исправленное выборочное стандартное отклонение: $S_{ispr} = \sqrt{S^2_{ispr}}$

Выборочные центральные моменты k-го порядка: $\hat{m}_k = (1/n) \cdot \sum(X_i - \bar{X})^k$

Выборочный коэффициент асимметрии: $g_1 = \hat{m}_3 / (\hat{m}_2)^{(3/2)}$

Выборочный коэффициент эксцесса: $g_2 = \hat{m}_4 / (\hat{m}_2)^2 - 3$

17. Классификация оценок. Эффективность оценок. Метод моментов Функция правдоподобия и оценки максимального правдоподобия.

Классификация оценок

Статистическая оценка — функция от выборки, используемая для приближенного определения неизвестного параметра распределения.

Точечная оценка — оценка, представленная одним числом (например, выборочное среднее).

Интервальная оценка — оценка в виде интервала, содержащего истинное значение параметра с заданной вероятностью (например, доверительный интервал).

Свойства точечных оценок:

1. **Несмещенность**: оценка $\hat{\theta}$ параметра θ называется несмещенной, если $E(\hat{\theta}) = \theta$. Если $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, то оценка смещенная, а величина $bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ называется смещением.
2. **Состоятельность**: оценка $\hat{\theta}$ называется состоятельной, если она сходится по вероятности к истинному значению параметра при увеличении объема выборки, т.е. $\hat{\theta} \to \theta$ при $n \to \infty$.
3. **Асимптотическая нормальность**: оценка $\hat{\theta}$ асимптотически нормальна, если распределение $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ стремится к нормальному распределению при $n \to \infty$.

Эффективность оценок

Эффективность — свойство оценки, характеризующее её точность по сравнению с другими несмещенными оценками.

Для несмещенных оценок эффективность определяется как отношение минимально возможной дисперсии к дисперсии данной оценки:

$$eff(\hat{\theta}) = D_0(\hat{\theta}) / D(\hat{\theta})$$

где $D_0(\hat{\theta})$ — нижняя граница дисперсии любой несмещенной оценки (граница Крамера-Рао).

Граница Крамера-Рао: Дисперсия любой несмещенной оценки $\hat{\theta}$ не может быть меньше величины $1/I(\theta)$, где $I(\theta)$ — информация Фишера:

$$I(\theta) = E[(\partial \ln f(X,\theta)/\partial\theta)^2]$$

Эффективная оценка — несмещенная оценка, дисперсия которой равна границе Крамера-Рао.

Метод моментов

Метод моментов — метод построения оценок, основанный на приравнивании выборочных моментов к теоретическим.

Процедура метода моментов:

1. Выразить теоретические моменты через неизвестные параметры

2. Приравнять теоретические моменты к соответствующим выборочным
3. Решить полученную систему уравнений относительно параметров

Например, для нормального распределения $N(\mu,\sigma^2)$: $E(X) = \mu$ и $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

Приравнивая эти выражения к выборочным моментам, получаем оценки: $\hat{\mu} = \bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2 = (1/n)\cdot\sum(X_i - \bar{X})^2$

Функция правдоподобия и оценки максимального правдоподобия

Функция правдоподобия — функция, выражающая совместную плотность (или вероятность) выборки как функцию параметра:

$L(\theta) = f(X_1,X_2,\ldots,X_n|\theta)$

Для независимых наблюдений: $L(\theta) = \prod_i f(X_i|\theta)$

Логарифмическая функция правдоподобия: $l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_i \ln f(X_i|\theta)$

Метод максимального правдоподобия (ММП) заключается в выборе оценки $\hat{\theta}$, максимизирующей функцию правдоподобия:

$\hat{\theta} = \arg\max L(\theta) = \arg\max l(\theta)$

Для нахождения оценки максимального правдоподобия (ОМП) обычно решают уравнение правдоподобия: $\partial l(\theta)/\partial\theta = 0$

Свойства оценок максимального правдоподобия:

1. Состоятельность
2. Асимптотическая нормальность
3. Асимптотическая эффективность
4. Инвариантность относительно параметризации

Преимущества ММП:

- Универсальность
- Хорошие асимптотические свойства
- Инвариантность

Недостатки ММП:

- Иногда сложно найти решение уравнения правдоподобия
- Оценки могут быть смещенными

18. Проверка статистических гипотез. Уровень значимости и мощность критерия. Ошибки 1-го и 2-го рода.

Проверка статистических гипотез

Статистическая гипотеза — предположение о виде или параметрах распределения генеральной совокупности.

Проверка статистической гипотезы — процедура принятия решения о справедливости или несправедливости выдвинутой гипотезы на основе выборочных данных.

Нулевая гипотеза (H_0) — гипотеза, которая считается верной до тех пор, пока не будет доказано обратное.

Альтернативная гипотеза (H_1) — гипотеза, которая противопоставляется нулевой.

Статистический критерий — правило, по которому принимается решение о принятии или отклонении нулевой гипотезы.

Критическая область — множество значений статистики критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется.

Область принятия гипотезы — множество значений статистики критерия, при которых нулевая гипотеза не отклоняется.

Ошибки 1-го и 2-го рода

Ошибка 1-го рода — отклонение нулевой гипотезы, когда она верна (ложное отклонение).

Ошибка 2-го рода — принятие нулевой гипотезы, когда она неверна (ложное принятие).

Решение \ Реальность	H_0 верна	H_0 неверна
Принять H_0	Верное решение	Ошибка 2-го рода (β)
Отклонить H_0	Ошибка 1-го рода (α)	Верное решение

Уровень значимости и мощность критерия

Уровень значимости (α) — вероятность совершить ошибку 1-го рода: $\alpha = P(\text{отклонить } H_0 \mid H_0 \text{ верна})$

Обычно используются стандартные уровни значимости: 0.01, 0.05, 0.1.

Мощность критерия ($1-\beta$) — вероятность отклонить нулевую гипотезу, когда она неверна: $1-\beta = P(\text{отклонить } H_0 \mid H_0 \text{ неверна})$

где β — вероятность ошибки 2-го рода.

p-значение — наименьший уровень значимости, при котором нулевая гипотеза отклоняется для данной выборки:

- Если p-значение $< \alpha$, то H_0 отклоняется
- Если p-значение $\geq \alpha$, то H_0 не отклоняется

Общая схема проверки гипотез:

1. Формулировка нулевой и альтернативной гипотез
2. Выбор статистики критерия
3. Определение уровня значимости α
4. Определение критической области
5. Вычисление значения статистики критерия по выборке
6. Принятие решения: если значение статистики попадает в критическую область, H_0 отклоняется; в противном случае H_0 не отклоняется

19. Критерий отношения правдоподобия. Критерий согласия Пирсона.

Критерий отношения правдоподобия

Критерий отношения правдоподобия (КОП) — универсальный метод построения статистических критериев, основанный на отношении функций правдоподобия при альтернативной и нулевой гипотезах.

Отношение правдоподобия: $\lambda = L(H_1) / L(H_0)$

где $L(H_0)$ и $L(H_1)$ — значения функции правдоподобия при параметрах, соответствующих нулевой и альтернативной гипотезам.

Или в логарифмической форме: $\ln \lambda = \ln L(H_1) - \ln L(H_0)$

Статистика критерия: $\Lambda = -2 \ln \lambda$

Согласно теореме Вилкса, при справедливости H_0 и некоторых условиях регулярности, статистика Λ асимптотически (при $n \to \infty$) имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным разности размерностей параметрических пространств H_1 и H_0.

Правило принятия решения:

- Если $\Lambda > \chi^2_{(\alpha,k)}$, то H_0 отклоняется на уровне значимости α
- Если $\Lambda \leq \chi^2_{(\alpha,k)}$, то H_0 не отклоняется

где $\chi^2_{(\alpha,k)}$ — критическое значение χ^2-распределения с k степенями свободы.

Критерий согласия Пирсона (χ^2)

Критерий согласия Пирсона (χ^2) — критерий для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения теоретическому.

Статистика критерия: $\chi^2 = \sum(n_i - np_i)^2 / (np_i)$

где:

- n_i — фактические частоты в i-м интервале
- p_i — теоретические вероятности попадания в i-й интервал

- n — объем выборки

При справедливости нулевой гипотезы статистика χ^2 асимптотически имеет χ^2-распределение с k-r-1 степенями свободы, где:

- k — число интервалов группировки
- r — число параметров распределения, оцененных по выборке

Правило принятия решения:

- Если $\chi^2 > \chi^2_{(\alpha,k-r-1)}$, то H_0 отклоняется на уровне значимости α
- Если $\chi^2 \le \chi^2_{(\alpha,k-r-1)}$, то H_0 не отклоняется

Процедура применения критерия Пирсона:

1. Разбить диапазон данных на k интервалов
2. Подсчитать фактические частоты n_i попадания в каждый интервал
3. Рассчитать теоретические вероятности p_i (на основе проверяемого распределения)
4. Рассчитать статистику χ^2
5. Сравнить χ^2 с критическим значением и принять решение

Рекомендации:

- Число интервалов k должно быть не менее 7-8
- Теоретическая частота np_i в каждом интервале должна быть не менее 5
- При необходимости соседние интервалы объединяются

Преимущества критерия χ^2:

- Универсальность
- Применимость к дискретным и непрерывным распределениям
- Возможность проверки сложных гипотез

Недостатки критерия χ^2:

- Проверяет только приближенное соответствие
- Чувствительность к выбору интервалов
- Требует большого объема выборки