**1. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность.**

**Линейное пространство** (или векторное пространство) — это множество V элементов (векторов), для которых определены операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие следующим аксиомам:

**1. Коммутативность сложения**: u + v = v + u для любых u, v ∈ V

**2.Ассоциативность сложения**: (u + v) + w = u + (v + w) для любых u, v, w ∈ V

**3.Существование нулевого вектора**: существует 0 ∈ V такой, что v + 0 = v для любого v ∈ V

**4.Существование противоположного вектора**: для любого v ∈ V существует -v ∈ V такой, что v + (-v) = 0

**5.Дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов**: a(u + v) = au + av для любого скаляра a и векторов u, v ∈ V

**6.Дистрибутивность умножения вектора на сумму скаляров**: (a + b)v = av + bv для любых скаляров a, b и вектора v ∈ V

**7.Ассоциативность умножения на скаляр**: a(bv) = (ab)v для любых скаляров a, b и вектора v ∈ V 8. 8.**Умножение на единицу**: 1v = v для любого v ∈ V

**Подпространство** линейного пространства V — это подмножество W ⊆ V, которое само является линейным пространством относительно тех же операций, что и V. Для проверки, является ли W подпространством, достаточно проверить:

1. W непусто (0 ∈ W)

2. Замкнутость относительно сложения: u, v ∈ W ⇒ u + v ∈ W

3. Замкнутость относительно умножения на скаляр: v ∈ W, a — скаляр ⇒ av ∈ W

**Линейная оболочка** множества векторов {v₁, v₂, ..., vₙ} — это минимальное подпространство, содержащее эти векторы, или, эквивалентно, множество всех линейных комбинаций этих векторов: span {v₁, v₂, ..., vₙ} = {α₁v₁ + α₂v₂ + ... + αₙvₙ | α₁, α₂, ..., αₙ — скаляры}

**Линейная независимость**: Векторы v₁, v₂, ..., vₙ называются линейно независимыми, если уравнение

α₁v₁ + α₂v₂ + ... + αₙvₙ = 0

имеет только тривиальное решение α₁ = α₂ = ... = αₙ = 0.

**Базис** линейного пространства — это линейно независимая система векторов, линейная оболочка которой совпадает со всем пространством. Базис позволяет однозначно представить любой вектор пространства в виде линейной комбинации базисных векторов.

**Размерность** линейного пространства — это количество векторов в любом его базисе. Размерность обозначается dim V.

**2. Теорема о ранге матрицы, ее приложение к теории систем линейных** **уравнений.**

**Ранг матрицы** — это максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы.

**Теорема о ранге матрицы**: Для любой матрицы A количество линейно независимых строк равно количеству линейно независимых столбцов, и это число равно рангу матрицы.

**Следствия теоремы о ранге**:

1. Ранг произведения матриц не превышает ранга каждого из множителей: rank(AB) ≤ min(rank(A), rank(B))

2. Если A — квадратная матрица размера n×n, то rank(A) = n тогда и только тогда, когда det(A) ≠ 0

**Приложение к теории систем линейных уравнений**:

Рассмотрим систему линейных уравнений Ax = b, где A — матрица коэффициентов размера m×n, x — вектор неизвестных размера n, b — вектор правых частей размера m.

Расширенная матрица системы (A|b) получается добавлением столбца b к матрице A.

**Теорема Кронекера-Капелли**: Система линейных уравнений Ax = b совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы (A|b):

rank(A) = rank(A|b)

Кроме того:

1. Если rank(A) = rank(A|b) = n, то система имеет единственное решение

2.Если rank(A) = rank(A|b) < n, то система имеет бесконечно много решений, и общее решение зависит от (n - rank(A)) произвольных параметров 3. Если rank(A) < rank(A|b), то система несовместна (не имеет решений)

**3. Собственные значения и собственные векторы линейного** **оператора. Условие приводимости матрицы к диагональному виду.**

**Жорданова нормальная форма матрицы.**

**Собственный вектор** линейного оператора A — это ненулевой вектор v такой, что Av = λv для некоторого скаляра λ.

**Собственное значение** λ — это скаляр, соответствующий собственному вектору v в уравнении Av = λv.

Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы A:

1. Составить характеристическое уравнение: det(A - λI) = 0

2. Найти корни характеристического уравнения — это собственные значения

3. Для каждого собственного значения λ найти собственные векторы, решая систему (A - λI)v = 0

**Условие приводимости матрицы к диагональному виду**:

Матрица A размера n×n приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда:

1. Характеристический многочлен матрицы A имеет n корней (с учетом кратности) в поле скаляров

2. Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности

Эквивалентное условие: матрица A диагонализируема тогда и только тогда, когда она имеет n линейно независимых собственных векторов.

**Жорданова нормальная форма**:

Если матрица не диагонализируема, она может быть приведена к жордановой нормальной форме. Жорданова нормальная форма матрицы A — это блочно-диагональная матрица, состоящая из жордановых клеток.

**Жорданова клетка** порядка k с собственным значением λ имеет вид:

J\_k(λ) = [λ 1 0 ... 0]

[0 λ 1 ... 0]

[0 0 λ ... 0]

[. . . ... .]

[0 0 0 ... λ]

Для каждого собственного значения λ с алгебраической кратностью m и геометрической кратностью k формируется m-k+1 жордановых клеток.

**4. Евклидово пространство. Ортогональные матрицы. Симметричные** **преобразования.**

**Евклидово пространство** — это линейное пространство V над полем действительных чисел, в котором определено скалярное произведение векторов, удовлетворяющее аксиомам:

1. (u, v) = (v, u) для всех u, v ∈ V (симметричность)

2. (u + v, w) = (u, w) + (v, w) для всех u, v, w ∈ V (линейность по первому аргументу)

3. (αu, v) = α(u, v) для всех u, v ∈ V и α ∈ℝ

4. (v, v) ≥ 0 для всех v ∈ V, причем (v, v) = 0 тогда и только тогда, когда v = 0 (положительная определенность)

В евклидовом пространстве можно определить понятия:

• **Норма вектора**: ||v|| = √(v, v)

• **Расстояние между векторами**: d(u, v) = ||u - v||

• **Угол между векторами**: cos(θ) = (u, v) / (||u|| · ||v||)

**Ортогональность векторов**: Векторы u и v называются ортогональными, если (u, v) = 0.

**Ортонормированный базис** — это базис из попарно ортогональных векторов единичной длины.

**Ортогональная матрица** — это квадратная матрица A, удовлетворяющая условию:

A^T · A = A · A^T = I

где A^T — транспонированная матрица, I — единичная матрица.

Свойства ортогональных матриц:

1. det(A) = ±1

2. Столбцы (и строки) ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис

3. Обратная матрица совпадает с транспонированной: A^(-1) = A^T

4. Произведение ортогональных матриц — ортогональная матрица

**Симметричное преобразование** (или самосопряженный оператор) в евклидовом пространстве — это линейный оператор A, удовлетворяющий условию:

(Au, v) = (u, Av)

для всех u, v ∈ V.

В матричном представлении симметричное преобразование описывается симметричной матрицей:

A^T = A

**Спектральная теорема для симметричных матриц**: Любая симметричная матрица над полем действительных чисел диагонализируема, и все ее собственные значения действительны. Более того, существует ортонормированный базис из собственных векторов матрицы.

**5. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Группа подстановок.** **Изоморфизм.**

**Группа** — это множество G с бинарной операцией ∗, удовлетворяющее аксиомам:

1. **Замкнутость**: для всех a, b ∈ G, a ∗ b ∈ G

2. **Ассоциативность**: для всех a, b, c ∈ G, (a ∗ b) ∗ c = a ∗ (b ∗ c)

**3.Существование нейтрального элемента**: существует e ∈ G такой, что для всех a ∈ G, e ∗ a = a ∗ e = a

**4.Существование обратного элемента**: для каждого a ∈ G существует a^(-1) ∈ G такой, что a ∗ a^(-1) = a^(-1) ∗ a = e

Если дополнительно выполняется a ∗ b = b ∗ a для всех a, b ∈ G, то группа называется **абелевой** **(коммутативной)**.

**Подгруппа** группы G — это подмножество H ⊆ G, которое само образует группу относительно той же операции.

Критерий подгруппы: непустое подмножество H ⊆ G является подгруппой тогда и только тогда, когда для всех a, b ∈ H, a ∗ b^(-1) ∈ H.

**Порядок группы** |G| — это количество элементов в группе G. **Порядок элемента** a ∈ G — это наименьшее положительное целое число n такое, что a^n = e.

**Теорема Лагранжа**: Если G — конечная группа и H — подгруппа G, то порядок H делит порядок G:

|G| = [G:H] · |H|, где [G:H] — индекс подгруппы H в группе G, равный числу смежных классов.

**Группа подстановок** (симметрическая группа) S\_n — это группа всех биекций множества {1, 2, ..., n} на себя с операцией композиции функций.

Свойства симметрической группы:

1. Порядок S\_n равен n!

2. Любая конечная группа изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы (теорема Кэли)

**Изоморфизм групп** — это биективное отображение φ: G → H, сохраняющее групповую операцию:

φ(a ∗ b) = φ(a) ⋄ φ(b) для всех a, b ∈ G, где ∗ и ⋄ — операции в группах G и H соответственно.

Две группы называются **изоморфными**, если существует изоморфизм между ними. Изоморфные группы имеют одинаковую алгебраическую структуру и отличаются только обозначениями элементов.