**Вычислительные методы**

**1. Постановка задачи интерполяции, интерполяция полиномами**

Задача интерполяции состоит в построении функции из заданного класса, которая принимает известные значения в заданных точках.

**Формальная постановка задачи:**

Пусть заданы n+1 различных точек x₀, x₁, ..., xₙ (узлы интерполяции) и соответствующие значения функции y₀, y₁, ..., yₙ, где y = f(x). Требуется найти функцию P(x) из заданного класса функций такую, что:

P(x) = y, i = 0, 1, ..., n

**Полиномиальная интерполяция:**

Задача полиномиальной интерполяции заключается в построении интерполяционного многочлена Pₙ(x) степени не выше n, удовлетворяющего условиям:

Pₙ(x) = y, i = 0, 1, ..., n

**Теорема об интерполяционном многочлене:** Для любых n+1 различных точек x₀, x₁, ..., xₙ и любых значений y₀, y₁, ..., yₙ существует и единственен многочлен Pₙ(x) степени не выше n, удовлетворяющий условиям Pₙ(x) = y для всех i = 0, 1, ..., n.

**Формы представления интерполяционного полинома:**

1. **Стандартная форма:**

Pₙ(x) = a₀ + a₁x + a₂x² + ... + aₙxⁿ, где коэффициенты a₀, a₁, ..., aₙ находятся из системы линейных уравнений.

**2. Форма Лагранжа** Pₙ(x) = ∑yL(x), где L(x) - базисные полиномы Лагранжа, которые определяются формулой:

L(x) = ∏(x-xⱼ)/(x-xⱼ)

**3. Форма Ньютона:**

Pₙ(x) = f[x₀] + f[x₀,x₁](x-x₀) + f[x₀,x₁,x₂](x-x₀)(x-x₁) + ... + f[x₀,x₁,...,xₙ](x-x₀)(x-x₁)...(x-xₙ₋₁) где f[x₀,x₁,...,xₖ] - разделенные разности.

**Погрешность интерполяции:**

Если функция f(x) имеет непрерывную производную (n+1)-го порядка на отрезке [a,b], содержащем все узлы интерполяции и точку x, то погрешность интерполяции равна:

R(x) = f(x) - Pₙ(x) = f⁽ⁿ⁺¹⁾(ξ)/(n+1)! × ∏(x-x)

где ξ - некоторая точка на отрезке [a,b], зависящая от x.

**2. Постановка задачи интерполяции, интерполяционный полином в** **форме Лагранжа**

**Интерполяционный полином в форме Лагранжа:**

Интерполяционный полином Лагранжа представляет собой линейную комбинацию базисных полиномов:

Pₙ(x) = ∑yL(x)

где L(x) - базисные полиномы Лагранжа, которые определяются формулой:

L(x) = ∏(x-xⱼ)/(x-xⱼ)

где произведение берется по всем j от 0 до n, кроме j=i.

**Свойства базисных полиномов Лагранжа:**

1. L(xⱼ) = 1, если i = j

2. L(xⱼ) = 0, если i ≠ j

3. ∑L(x) = 1 для любого x

4. Степень L(x) равна n

**Алгоритм построения интерполяционного полинома Лагранжа:**

1. Для каждого узла x строится базисный полином L(x)

2. Каждый базисный полином умножается на соответствующее значение функции y

3. Результаты суммируются

**Пример:**

Для узлов x₀ = 1, x₁ = 2, x₂ = 3 и значений y₀ = 2, y₁ = 3, y₂ = 6 построим интерполяционный полином Лагранжа.

Базисные полиномы:

L₀(x) = (x-2)(x-3)/((1-2)(1-3)) = (x-2)(x-3)/2

L₁(x) = (x-1)(x-3)/((2-1)(2-3)) = (x-1)(x-3)/(-1)

L₂(x) = (x-1)(x-2)/((3-1)(3-2)) = (x-1)(x-2)/2

Интерполяционный полином:

P₂(x) = 2·L₀(x) + 3·L₁(x) + 6·L₂(x) = 2·(x-2)(x-3)/2 - 3·(x-1)(x-3) + 6·(x-1)(x-2)/2 = x² - 1

**Преимущества и недостатки формы Лагранжа:**

**Преимущества:**

• Простая структура, легко вычислять

• Теоретическая ясность и наглядность

**Недостатки:**

• Неэффективна при добавлении новых узлов (требуется полный пересчет)

• Вычислительная сложность O(n²)

• Плохая обусловленность при большом числе узлов

|  |
| --- |
| 1. |

**3. Численное интегрирование. Квадратурные формулы численного** **интегрирования: формула прямоугольников, формула трапеций,** **формула Симпсона**

Численное интегрирование применяется для приближенного вычисления определенных интегралов вида:

∫ₐ f(x)dx

когда первообразная функции f(x) не может быть найдена аналитически или ее вычисление слишком сложно.

**Квадратурные формулы:**

Квадратурная формула имеет вид:

∫ₐ f(x)dx ≈ ∑ Af(x)

где x - узлы квадратурной формулы, A - веса.

**Формула прямоугольников:**

**Метод левых прямоугольников:**

∫ₐ f(x)dx ≈ h·∑f(a+ih)

где h = (b-a)/n, i = 0, 1, ..., n-1.

**Метод правых прямоугольников:**

∫ₐ f(x)dx ≈ h·∑f(a+ih)

где h = (b-a)/n, i = 1, 2, ..., n.

**Метод средних прямоугольников:**

∫ₐ f(x)dx ≈ h·∑f(a+(i+1/2)h)

где h = (b-a)/n, i = 0, 1, ..., n-1.

**Погрешность:** O(h) для левых и правых прямоугольников, O(h²) для средних прямоугольников.

**Формула трапеций:**

∫ₐ f(x)dx ≈ h/2·[f(a) + f(b) + 2·∑f(a+ih)]

где h = (b-a)/n, сумма берется по i от 1 до n-1.

**Погрешность:** O(h²).

**Формула Симпсона (парабол):**

∫ₐ f(x)dx ≈ h/3·[f(a) + f(b) + 4·∑f(a+(2i-1)h) + 2·∑f(a+2ih)]

где h = (b-a)/(2n), первая сумма берется по i от 1 до n, вторая - по i от 1 до n-1.

**Погрешность:** O(h⁴).

**Сравнение методов:**

1. **Метод прямоугольников:** простейший метод, но наименее точный

2. **Метод трапеций:** компромисс между простотой и точностью

3. **Метод Симпсона:** более сложный, но значительно более точный

Для всех методов точность повышается при увеличении числа разбиений n.

**4. Численное решение ОДУ. Метод Эйлера**

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) применяются для нахождения приближенного решения задачи Коши:

y' = f(x,y), y(x₀) = y₀

**Метод Эйлера:**

Метод Эйлера - простейший численный метод решения задачи Коши. Он основан на аппроксимации производной разностным отношением.

**Алгоритм метода Эйлера:**

1. Разбиваем отрезок [x₀, xₙ] на n равных частей с шагом h = (xₙ - x₀)/n

2.Обозначаем точки разбиения: x₁ = x₀ + h, x₂ = x₀ + 2h, ..., xₙ = x₀ + nh

3.Вычисляем приближенные значения решения в точках разбиения по формуле: y₊₁ = y + h·f(x,y),где i = 0, 1, 2, ..., n-1.

**Геометрическая интерпретация:**

Метод Эйлера заменяет кривую решения ломаной линией, каждый сегмент которой имеет направление, определяемое производной в начальной точке сегмента.

**Погрешность метода Эйлера:**

Локальная погрешность (на одном шаге): O(h²) Глобальная погрешность (на всем отрезке): O(h)

**Модификации метода Эйлера:**

1. **Усовершенствованный метод Эйлера (метод Эйлера-Коши):**

ŷ₊₁ = y + h·f(x,y)

y₊₁ = y + h/2·[f(x,y) + f(x₊₁,ŷ₊₁)]

Глобальная погрешность: O(h²)

2. **Модифицированный метод Эйлера:**

y₊₁ = y + h·f(x+h/2, y+h/2·f(x,y))

Глобальная погрешность: O(h²)

**Достоинства и недостатки метода Эйлера:**

**Достоинства:**

• Простота реализации

• Низкие вычислительные затраты на каждом шаге

**Недостатки:**

• Низкая точность

• Условная устойчивость

• Требует малого шага для достижения приемлемой точности

**5. Численное решение ОДУ. Метод Рунге-Кутта второго порядка**

Методы Рунге-Кутта - семейство явных и неявных методов для численного решения задачи Коши:

y' = f(x,y), y(x₀) = y₀

Они обеспечивают более высокую точность по сравнению с методом Эйлера.

**Общая форма методов Рунге-Кутта:**

Методы Рунге-Кутта используют несколько промежуточных вычислений производной для получения более точной аппроксимации решения.

**Метод Рунге-Кутта второго порядка:**

Существует несколько вариантов метода Рунге-Кутта второго порядка. Общая форма:

y₊₁ = y + h·(α₁k₁ + α₂k₂)

где:

k₁ = f(x, y)

k₂ = f(x + p₁h, y + p₂hk₁)

Коэффициенты α₁, α₂, p₁, p₂ должны удовлетворять условиям:

α₁ + α₂ = 1

α₂p₁ = 1/2

α₂p₂ = 1/2

**Популярные варианты метода Рунге-Кутта второго порядка:**

1. **Метод Хойна:**

k₁ = f(x, y)

k₂ = f(x + h, y + h·k₁)

y₊₁ = y + h/2·(k₁ + k₂)

2. **Модифицированный метод Эйлера:**

k₁ = f(x, y)

k₂ = f(x + h/2, y + h/2·k₁)

y₊₁ = y + h·k₂

3. **Метод Ральстона:**

k₁ = f(x, y)

k₂ = f(x + 2h/3, y + 2h/3·k₁)

y₊₁ = y + h·(k₁/4 + 3k₂/4)

**Погрешность метода Рунге-Кутта второго порядка:**

Локальная погрешность: O(h³) Глобальная погрешность: O(h²)

**Сравнение с методом Эйлера:**

Метод Рунге-Кутта второго порядка имеет глобальную погрешность O(h²), в то время как метод Эйлера имеет глобальную погрешность O(h). Это означает, что при уменьшении шага в 2 раза погрешность метода Рунге-Кутта уменьшается примерно в 4 раза, а погрешность метода Эйлера - только в 2 раза.

**Методы более высоких порядков:**

Существуют методы Рунге-Кутта более высоких порядков, наиболее популярным из которых является классический метод Рунге-Кутта четвертого порядка (RK4).

**6. Метод Гаусса**

Метод Гаусса - это алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

a₁₁x₁ + a₁₂x₂ + ... + a₁ₙxₙ = b₁

a₂₁x₁ + a₂₂x₂ + ... + a₂ₙxₙ = b₂

...

aₘ₁x₁ + aₘ₂x₂ + ... + aₘₙxₙ = bₘ

или в матричной форме: Ax = b.

**Алгоритм метода Гаусса:**

Метод Гаусса состоит из двух этапов:

1. Прямой ход - приведение матрицы системы к треугольному виду

2. Обратный ход - нахождение неизвестных последовательно, начиная с последнего

**Прямой ход:**

1. На k-м шаге (k = 1, 2, ..., n-1) выбирается k-й ведущий элемент aₖₖ

2. Если aₖₖ = 0, выполняется перестановка строк для выбора ненулевого элемента

3. Для каждой строки i (i = k+1, k+2, ..., m) вычисляется множитель μₖ = aₖ/aₖₖ

4. Элементы i-й строки заменяются на aⱼ = aⱼ - μₖ·aₖⱼ для j = k, k+1, ..., n

5. Правая часть заменяется на b = b - μₖ·bₖ

**Обратный ход:**

Вычисление xₙ = bₙ/aₙₙ

Для i = n-1, n-2, ..., 1 вычисляется: x = (b - ∑aⱼxⱼ)/a, где сумма берется по j от i+1 до n.

**Модификации метода Гаусса:**

1. **Метод Гаусса с выбором главного элемента**:

◦ Частичный выбор (по столбцу)

◦ Полный выбор (по всей матрице)

2. **Метод LU-разложения**:

Представление матрицы A в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы U

Позволяет эффективно решать системы с одной матрицей и разными правыми частями

**Вычислительная сложность:**

• Прямой ход: O(n³)

• Обратный ход: O(n²)

• Общая сложность: O(n³)

**Практические аспекты:**

**Вырожденные системы**: Если на каком-то шаге все возможные ведущие элементы равны нулю, это означает, что система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений.

**Плохо обусловленные системы**: Если матрица A плохо обусловлена (имеет большое число обусловленности), небольшие ошибки округления могут привести к значительным ошибкам в решении.

**Устойчивость**: Метод Гаусса с выбором главного элемента более устойчив к ошибкам округления, чем стандартный метод Гаусса.