**Дискретная математика**

**1. Типы выборок k элементов из n**

При выборе k элементов из множества из n элементов возможны различные типы выборок в зависимости от того, учитывается ли порядок элементов и допускаются ли повторения.

**Перестановки**

Перестановка — это упорядоченное расположение всех n элементов множества (т.е. k = n).

Формула для вычисления числа перестановок из n элементов:

P(n) = n! = n × (n-1) × (n-2) × ... × 2 × 1

**Перестановки с повторениями**

Если имеется n элементов, среди которых есть повторяющиеся (n₁ элементов первого типа, n₂ элементов второго типа и т.д., причем n₁ + n₂ + ... + nₖ = n), то число различных перестановок вычисляется по формуле:

P(n₁, n₂, ..., nₖ) = n! / (n₁! × n₂! × ... × nₖ!)

**Размещения**

Размещение - это упорядоченный набор из k элементов, выбранных из множества из n элементов (k ≤ n).

Формула для вычисления числа размещений из n элементов по k:

A(n, k) = n! / (n-k)! = n × (n-1) × ... × (n-k+1)

**Размещения с повторениями**

Если при составлении размещений допускаются повторения элементов, то число таких размещений:

Ā(n, k) = n

**Сочетания**

Сочетание - это неупорядоченный набор из k элементов, выбранных из множества из n элементов (k ≤ n).

Формула для вычисления числа сочетаний из n элементов по k:

C(n, k) = n! / (k! × (n-k)!) = A(n, k) / k!

Cₙ = C(n, k) = (n k) = n! / (k! × (n-k)!)

**Сочетания с повторениями**

Если при составлении сочетаний допускаются повторения элементов, то число таких сочетаний:

C̄(n, k) = C(n+k-1, k) = (n+k-1)! / (k! × (n-1)!)

**2. Бином Ньютона, следствия** **Бином Ньютона**

Бином Ньютона — это формула для разложения бинома (x + y)ⁿ в многочлен:

(x + y)ⁿ = ∑ₖ₌₀ⁿ C(n, k) × xⁿ⁻ × y = C(n, 0) × xⁿ + C(n, 1) × xⁿ⁻¹ × y + ... + C(n, n) × yⁿ

где C(n, k) - биномиальные коэффициенты (числа сочетаний).

**Свойства биномиальных коэффициентов**

1. C(n, 0) = C(n, n) = 1

2. C(n, k) = C(n, n-k)

3. C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)

4. ∑ₖ₌₀ⁿ C(n, k) = 2ⁿ

5. ∑ₖ₌₀ⁿ (-1) × C(n, k) = 0

6. ∑ₖ₌₀ⁿ k × C(n, k) = n × 2ⁿ⁻¹

**Треугольник Паскаля**

Треугольник Паскаля - это треугольное расположение биномиальных коэффициентов C(n, k), где n - номер строки (начиная с 0), k - номер элемента в строке (начиная с 0).

Каждое число в треугольнике равно сумме двух чисел, расположенных над ним: C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)

**Полиномиальная теорема**

Полиномиальная теорема является обобщением бинома Ньютона и позволяет разложить выражение (x₁ + x₂ + ...

+ xₘ)ⁿ:

(x₁ + x₂ + ... + xₘ)ⁿ = ∑ₖ₁₊ₖ₂₊...₊ₖₘ₌ₙ (n! / (k₁! × k₂! × ... × kₘ!)) × x₁¹ × x₂² × ... × xₘ

где сумма берется по всем наборам неотрицательных целых чисел (k₁, k₂, ..., kₘ), удовлетворяющих условию k₁ + k₂ + ... + kₘ = n.

Коэффициент при x₁¹ × x₂² × ... × xₘ называется полиномиальным коэффициентом и обозначается:

C(n; k₁, k₂, ..., kₘ) = n! / (k₁! × k₂! × ... × kₘ!)

**3. Разбиение множества**

Разбиением множества A называется такое семейство непустых подмножеств A₁, A₂, ..., Aₖ множества A, что:

1. A₁∪ A₂∪ ... ∪ Aₖ = A (объединение всех подмножеств дает исходное множество)

2. A ∩ Aⱼ = ∅ для всех i ≠ j (подмножества попарно не пересекаются)

**Числа Стирлинга II рода**

Число Стирлинга второго рода S(n, k) определяет количество способов разбить множество из n элементов на k непустых непересекающихся подмножеств.

Рекуррентное соотношение для вычисления чисел Стирлинга II рода:

S(n, k) = k × S(n-1, k) + S(n-1, k-1), n > 0, k > 0

с граничными условиями:

• S(n, 0) = 0 для n > 0

• S(0, 0) = 1

• S(n, k) = 0 для k > n

**Числа Белла**

Число Белла B(n) определяет общее количество различных разбиений множества из n элементов (на любое количество подмножеств).

Связь с числами Стирлинга II рода:

B(n) = ∑ₖ₌₁ⁿ S(n, k)

**Рекуррентное соотношение для чисел Белла**

Числа Белла можно вычислить по следующему рекуррентному соотношению:

B(n+1) = ∑ₖ₌₀ⁿ C(n, k) × B(k)

Также для чисел Белла существует треугольная схема вычисления, где a,ⱼ вычисляются по формуле:

• a,₀ = B(i)

• a,ⱼ = a,ⱼ₋₁ + a₋₁,ⱼ₋₁

**4. Формула включений и исключений**

**В терминах множеств**

Формула включений и исключений позволяет вычислить мощность объединения нескольких конечных множеств.

Для двух множеств: |A ∪ B| = |A| + |B| - |A ∩ B|

Для трех множеств: |A ∪ B ∪ C| = |A| + |B| + |C| - |A ∩ B| - |A ∩ C| - |B ∩ C| + |A ∩ B ∩ C|

Для n множеств: |A₁∪ A₂∪ ... ∪ Aₙ| = ∑ |A| - ∑<ⱼ |A ∩ Aⱼ| + ∑<ⱼ<ₖ |A ∩ Aⱼ ∩ Aₖ| - ... + (-1)ⁿ⁺¹ |A₁ ∩ A₂ ∩ ... ∩ Aₙ|

или в более компактной форме: |∪₌₁ⁿ A| = ∑ₖ₌₁ⁿ (-1)⁺¹ ∑₁≤₁<₂<...<ₖ≤ₙ |A₁ ∩ A₂ ∩ ... ∩ Aₖ|

**В терминах свойств**

Если U - универсальное множество, а A - множество элементов, обладающих свойством i, то формула включений и исключений позволяет найти количество элементов, обладающих хотя бы одним из n свойств:

|A₁∪ A₂∪ ... ∪ Aₙ| = ∑ₖ₌₁ⁿ (-1)⁺¹ ∑₁≤₁<₂<...<ₖ≤ₙ N(₁, ₂, ..., ₖ)

где N(₁, ₂, ..., ₖ) - количество элементов, обладающих свойствами i₁, i₂, ..., iₖ одновременно.

**Формула для вычисления числа элементов, обладающих ровно k свойствами**

Пусть N₌ₖ - количество элементов, обладающих ровно k свойствами из n. Тогда:

N₌ₖ = ∑₌ₖⁿ (-1)ⁱ⁻ × C(i, k) × N

где N - количество элементов, обладающих по крайней мере i свойствами.

Альтернативно, можно выразить через количество элементов, обладающих ровно i свойствами:

N₌ₖ = ∑ⱼ₌₀ⁿ⁻ (-1)ʲ × C(n-k, j) × N(k+j)

где N(i) - количество элементов, обладающих всеми i указанными свойствами.

**Формула для вычисления числа элементов, обладающих не менее чем k свойствами**

Пусть N≥ₖ - количество элементов, обладающих не менее чем k свойствами из n. Тогда:

N≥ₖ = ∑₌ₖⁿ N₌ = ∑₌ₖⁿ ∑ⱼ₌₀ⁿ⁻ (-1)ʲ × C(n-i, j) × N(i+j)

Используя формулу включений и исключений:

N≥ₖ = ∑₌ₖⁿ (-1)ⁱ⁻ × C(i-1, k-1) × N(i)

где N(i) - количество элементов, обладающих всеми i указанными свойствами.

**5. Производящие функции**

Производящая функция для последовательности {aₙ}ₙ₌₀^∞ - это формальный степенной ряд:

G(x) = ∑ₙ₌₀^∞ aₙ × xⁿ = a₀ + a₁x + a₂x² + a₃x³ + ...

**Свойства производящих функций**

**Сложение**

Если G₁(x) = ∑ₙ₌₀^∞ aₙ × xⁿ и G₂(x) = ∑ₙ₌₀^∞ bₙ × xⁿ, то:

G₁(x) + G₂(x) = ∑ₙ₌₀^∞ (aₙ + bₙ) × xⁿ

**Умножение**

Если G₁(x) = ∑ₙ₌₀^∞ aₙ × xⁿ и G₂(x) = ∑ₙ₌₀^∞ bₙ × xⁿ, то:

G₁(x) × G₂(x) = ∑ₙ₌₀^∞ cₙ × xⁿ, где cₙ = ∑ₖ₌₀ⁿ aₖ × bₙ₋ₖ

Это соответствует свертке последовательностей {aₙ} и {bₙ}.

**Дифференцирование**

Если G(x) = ∑ₙ₌₀^∞ aₙ × xⁿ, то:

G'(x) = ∑ₙ₌₁^∞ n × aₙ × xⁿ⁻¹ = ∑ₙ₌₀^∞ (n+1) × aₙ₊₁ × xⁿ

Это позволяет извлечь коэффициенты с весами n.

**Интегрирование**

Если G(x) = ∑ₙ₌₀^∞ aₙ × xⁿ, то:

∫G(x)dx = C + ∑ₙ₌₀^∞ aₙ × xⁿ⁺¹/(n+1) = C + ∑ₙ₌₁^∞ aₙ₋₁ × xⁿ/n

где C - константа интегрирования.

**Примеры применения производящих функций**

**Последовательность Фибоначчи**

Для последовательности Фибоначчи {Fₙ}ₙ₌₀^∞, где F₀ = 0, F₁ = 1, Fₙ₊₂ = Fₙ₊₁ + Fₙ, производящая функция:

G(x) = x / (1 - x - x²)

**Биномиальные коэффициенты**

Производящая функция для биномиальных коэффициентов C(n, k) при фиксированном n:

G(x) = (1 + x)ⁿ = ∑ₖ₌₀ⁿ C(n, k) × x

**6. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения**

**Линейные рекуррентные соотношения**

Линейное рекуррентное соотношение порядка k - это соотношение вида:

aₙ = c₁aₙ₋₁ + c₂aₙ₋₂ + ... + cₖaₙ₋ₖ + f(n)

где c₁, c₂, ..., cₖ - константы, cₖ ≠ 0, а f(n) - заданная функция.

**Однородные линейные рекуррентные соотношения**

Если f(n) = 0, то рекуррентное соотношение называется однородным:

aₙ = c₁aₙ₋₁ + c₂aₙ₋₂ + ... + cₖaₙ₋ₖ

**Характеристическое уравнение**

Для решения однородного линейного рекуррентного соотношения порядка k используется характеристическое уравнение:

r - c₁r⁻¹ - c₂r⁻² - ... - cₖ = 0

**Теорема об общем виде решения однородного линейного рекуррентного соотношения** **порядка k**

Пусть r₁, r₂, ..., rₛ - различные корни характеристического уравнения с кратностями m₁, m₂, ..., mₛ соответственно (m₁ + m₂ + ... + mₛ = k).

Тогда общее решение однородного линейного рекуррентного соотношения порядка k имеет вид:

aₙ = ∑₌₁ˢ (α₁ + α₂n + α₃n² + ... + αₘnⁱ⁻¹) × rⁿ

где α₁, α₂, ..., αₘ - произвольные константы, определяемые из начальных условий.

Частные случаи:

1. Если все корни r₁, r₂, ..., rₖ различны (все m\_i = 1), то общее решение: aₙ = α₁r₁ⁿ + α₂r₂ⁿ + ... + αₖrₖⁿ

2.Если есть кратные корни, то для корня r кратности m соответствующая часть решения: (α₁ + α₂n + α₃n² + ... + αₘnⁱ⁻¹) × rⁿ

**Неоднородные линейные рекуррентные соотношения**

Для неоднородного линейного рекуррентного соотношения:

aₙ = c₁aₙ₋₁ + c₂aₙ₋₂ + ... + cₖaₙ₋ₖ + f(n)

общее решение представляется в виде:

aₙ = aₙ' + aₙ''

где aₙ' - общее решение соответствующего однородного уравнения, а aₙ'' - частное решение неоднородного уравнения.

Для нахождения частного решения используются методы:

1. Метод неопределенных коэффициентов (если f(n) - многочлен, экспонента или их произведение)

2. Метод вариации произвольных постоянных

3. Использование производящих функций