РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ им. Патриса Лулумбы

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра теории вероятности и кибербезопасности

ОТЧЕТ

ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5

дисциплина: Математическое моделирование

Студент: Кармацкий Никита Сергеевич

Номер студ.билета: 1032210091

Группа: НФИбд-01-21

Москва

2024 г.

Цель работы:

Изучить модель Лотки-Вольтерры тип "Хищник - Жертва". Применить их на практике для решения задания лабораторной работы

Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Задание

Вариант 32

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-0.25x(t) + 0.025y(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (0.45y(t) - 0.045y(t)x(t)) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 11$. Найдите стационарное состояние системы.

Задачи:

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв

2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Основные этапы выполнения работы

Решение с помощью кода

1. Julia

Листинг первой программы на julia:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 8
y0 = 11

a = 0.25
b = 0.025
c = 0.45
d = 0.045

function ode_fn(du, u, p , t)
        x, y = u
        du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
        du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end
v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=300,
  legend=false)

plot!(
  plt,
  X,
  Y,
  label="Зависимость численности хищников от численности жертв",
  color=:red)
```

```
savefig(plt, "5_1.png")

plt2 = plot(
  dpi=300,
  legend=true)

plot!(
  plt2,
  T,
  X,
  label="Численность жертв",
  color=:green)

plot!(
  plt2,
  T,
  Y,
  label="Численность хищников",
  color=:red)

savefig(plt2, "5_2.png")
```

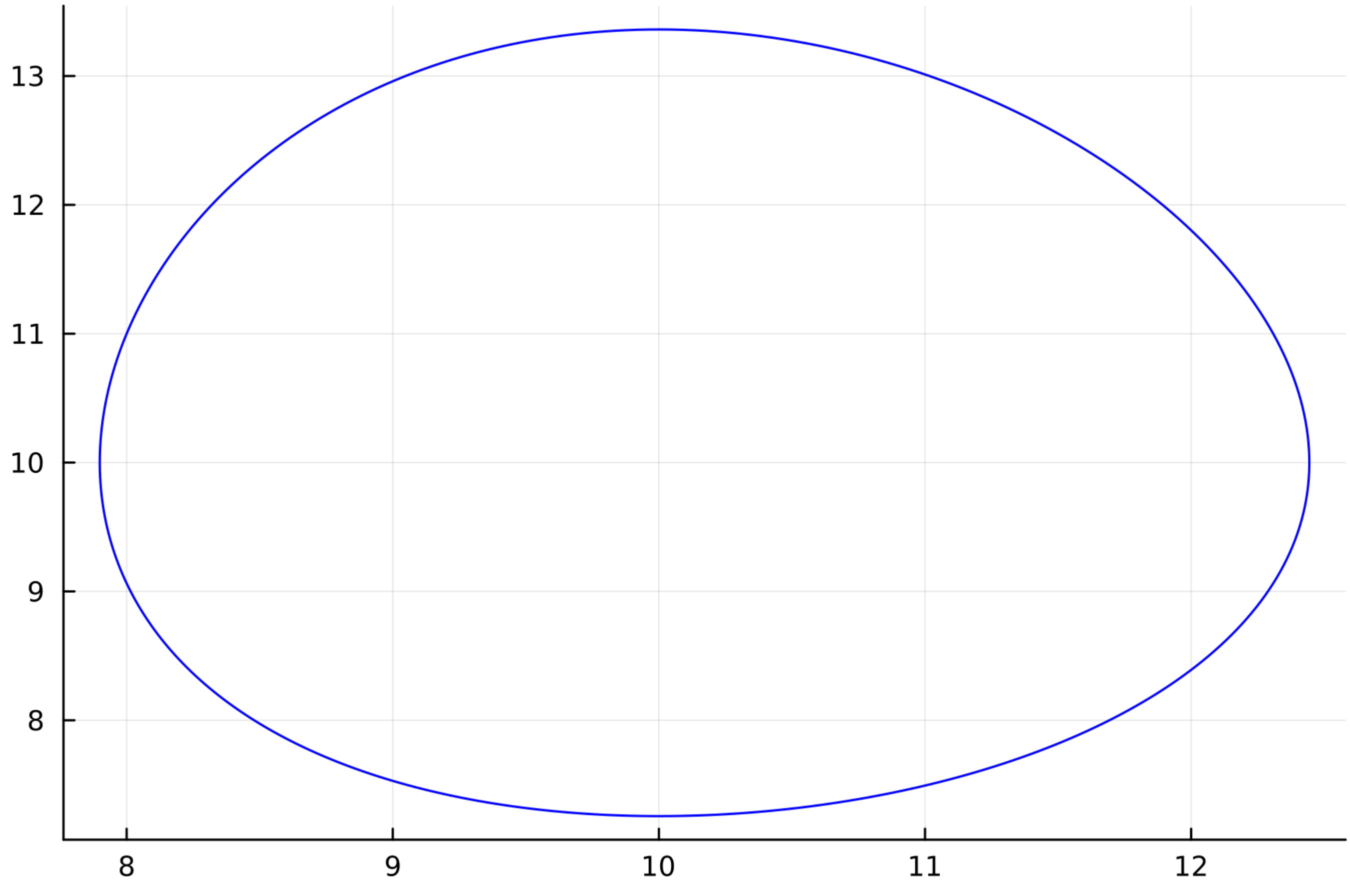

Рис.1 Зависимость от численности жертв на Julia

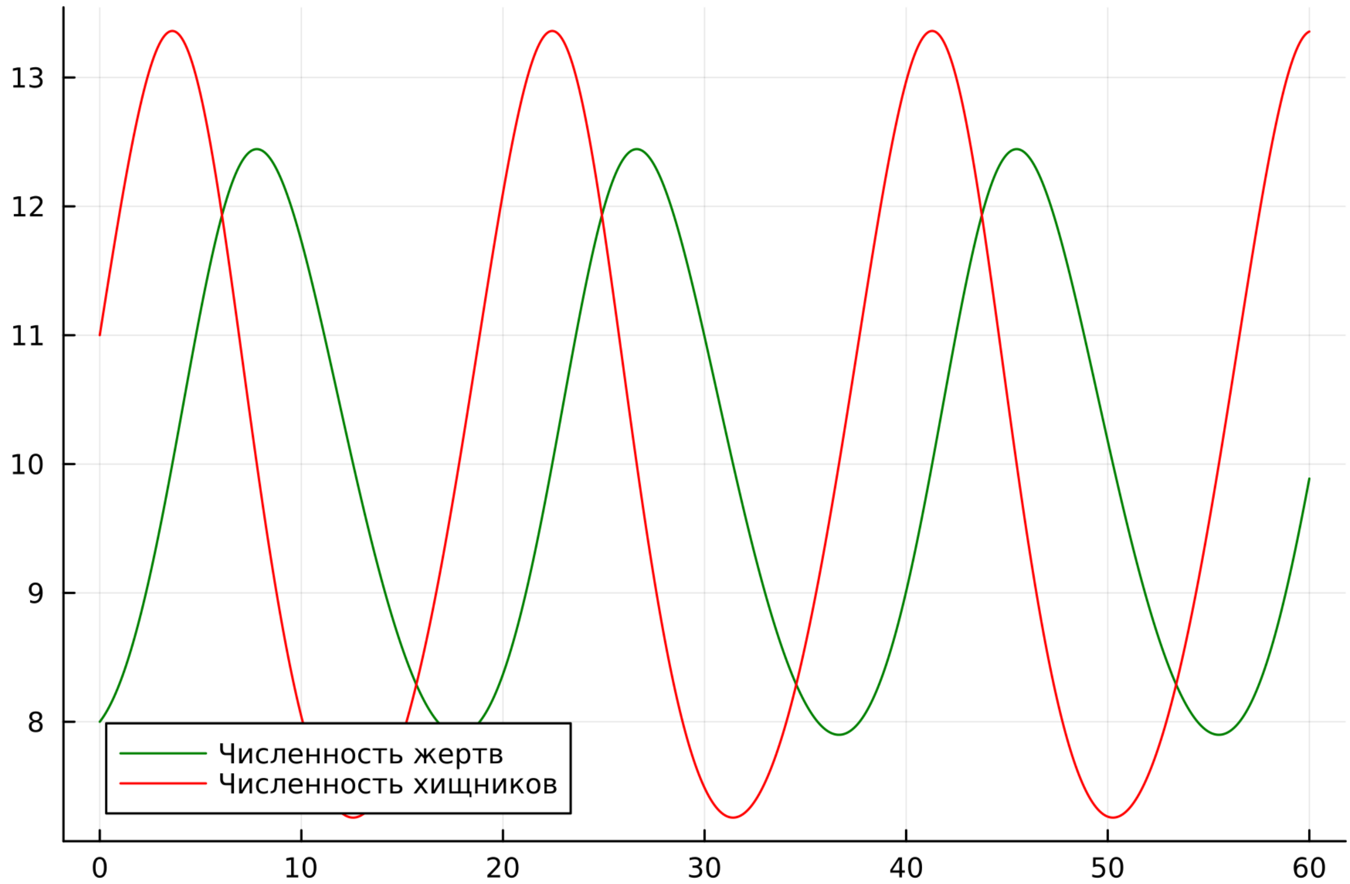

Рис.2 Зависимость от времени на Julia

Листинг второй программы на julia:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 8
y0 = 11

a = 0.25
b = 0.025
c = 0.45
d = 0.045

function ode_fn(du, u, p , t)
        x, y = u
        du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
        du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end
v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
```

```
plt = plot(
  dpi=300,
  legend=false)

plot!(
  plt,
  X,
  Y,
  label="Зависимость численности хищников от численности жертв",
  color=:red)

savefig(plt, "5_1.png")

plt2 = plot(
  dpi=300,
  legend=true)

plot!(
  plt2,
  T,
  X,
  label="Численность жертв",
  color=:green)

plot!(
  plt2,
  T,
  Y,
  label="Численность хищников",
  color=:red)

savefig(plt2, "5_2.png")
```

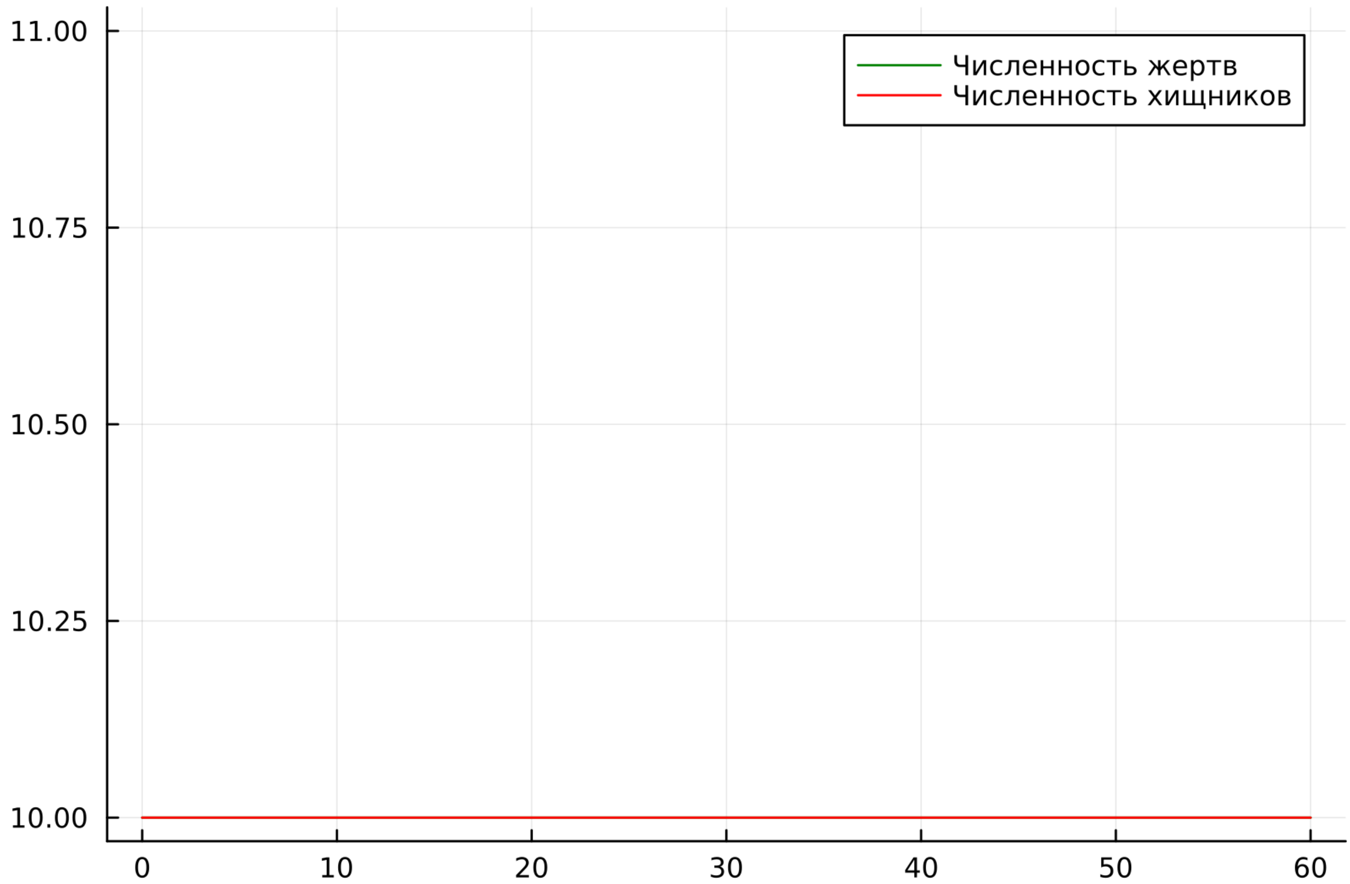

Рис.3 График стационарного состояния на Julia

2. OpenModelica

Первый листинг программы на OpenModelica

```
model Lab5_1
Real a = 0.25;
Real b = 0.025;
Real c = 0.45;
Real d = 0.045;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 8;
y = 11;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Interval = 0.05));
end Lab5_1;
```

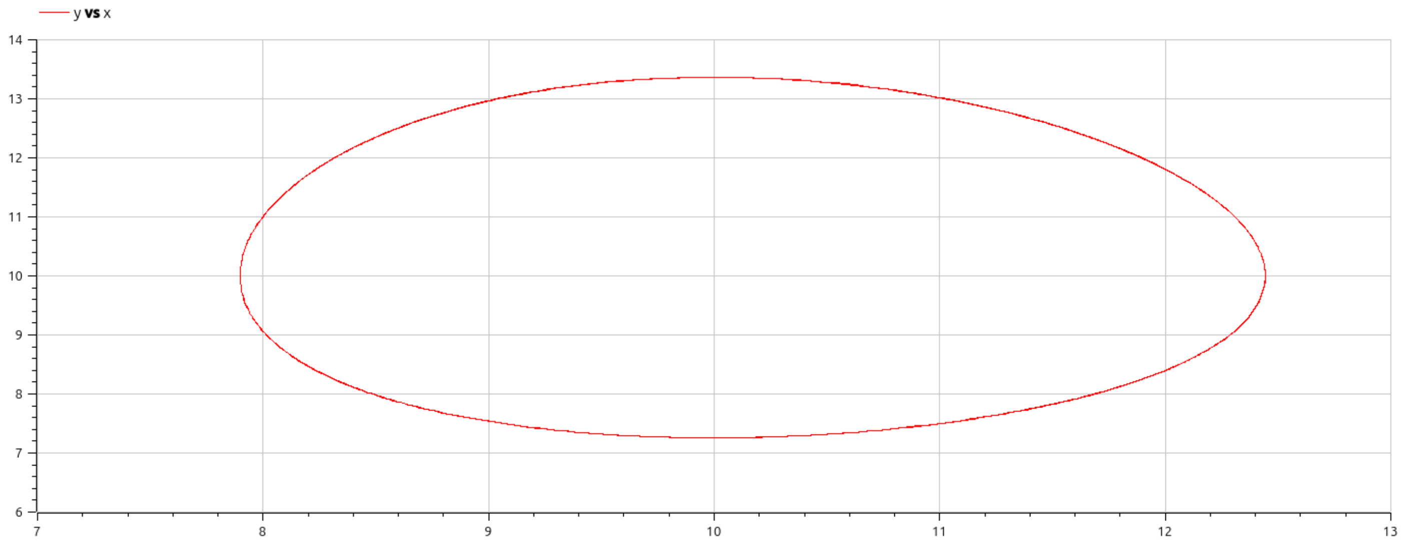

Рис.4 График зависимости числености хищников от жертв на OpenModelica

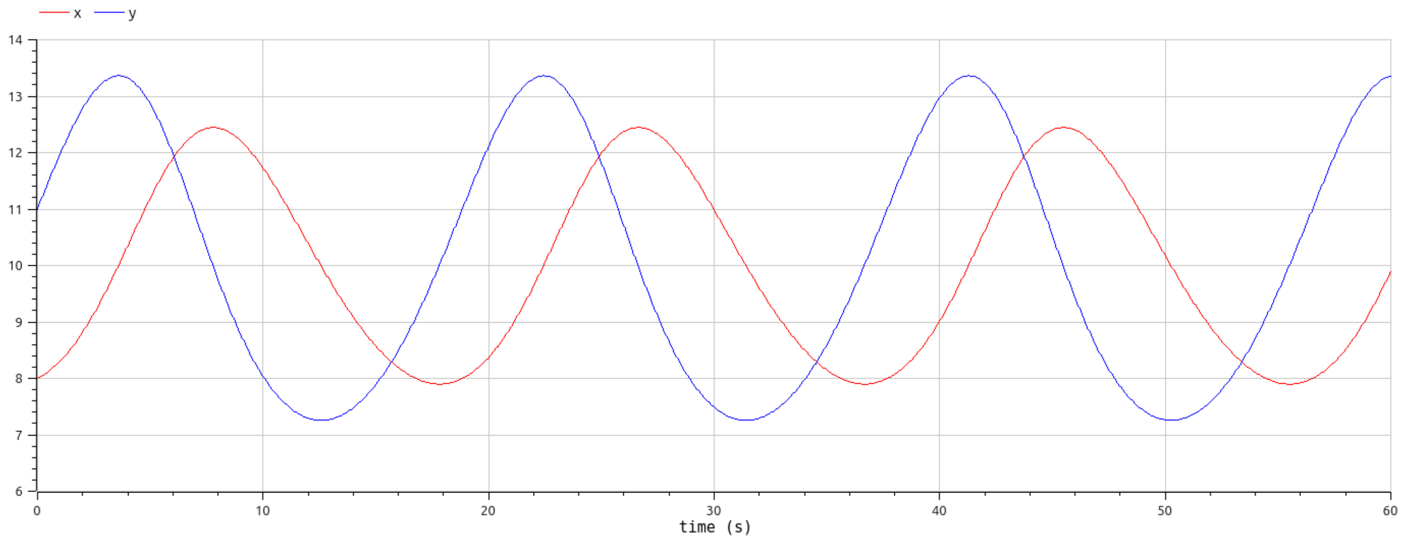

Рис.5 График зависимости от времени на OpenModelica

```
model Lab5_2
Real a = 0.25;
Real b = 0.025;
Real c = 0.45;
Real d = 0.045;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c/d;
y = a/b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
```

```
annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 60, Interval = 0.05));
end Lab5_2;
```

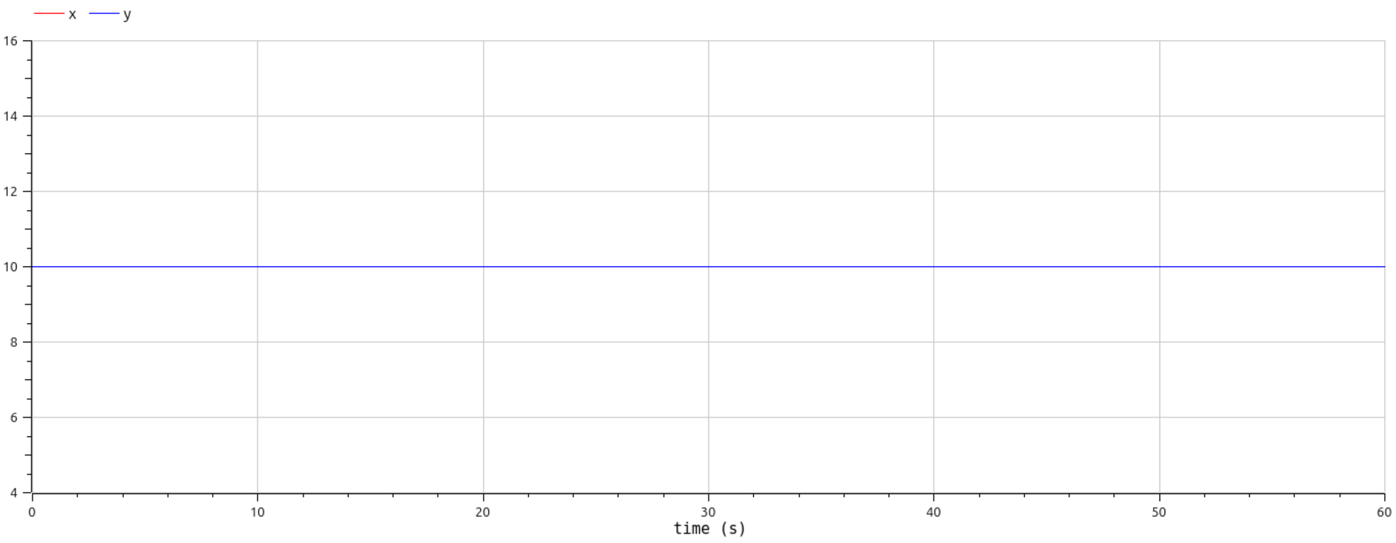

Рис.6 График стационарного случая на OpenModelica

Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография

- Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/
- Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/
- Решение дифференциальных уравнений: https://www.wolframalpha.com/

- Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/Lotka_Volterra.pdf