



CHAPITRE 2: TRANSMISSION EN BANDE DE BASE

Module: **Transmission Numérique**

Niveau: 1^{ère} année du cycle ingénieur (II-1)

Enseignante: *Dr. Leïla Nasraoui*

leila.nasraoui@ensi-uma.tn; leila.nasraoui@supcom.tn

Transmission en BdB: Codes en ligne

Introduction

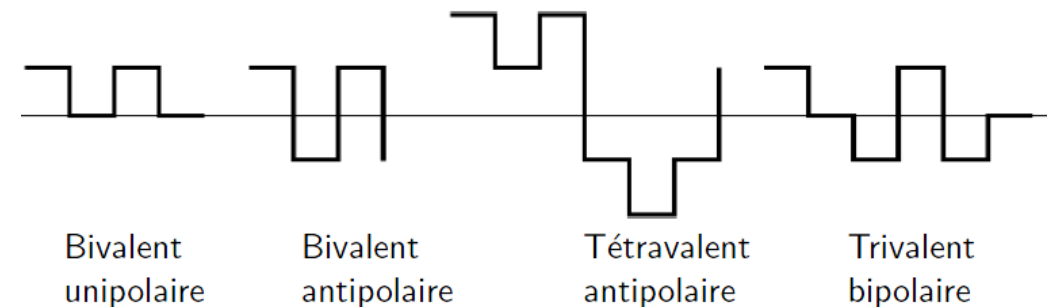
- Pour pouvoir être transmis, un signal doit être conforme aux caractéristiques du canal de transmission. Les signaux numériques sont à temps discret alors que les canaux de transmission sont à temps continu. Il est donc nécessaire d'associer un signal analogique à une suite binaire finie

$$(a_1 \dots a_N) \rightarrow s(t, a_1 \dots a_N)$$

- On doit donc prévoir 2^N signaux différents pour coder les différents N -uplet binaires.
- Ces 2^N signaux permettent de présenter les éléments binaires par des **impulsions** sans translation fréquentielle (sans onde porteuse)
 - Forme des impulsions : quelconque *a priori*, ex : rectangulaire.
- Modulation d'Impulsion en Amplitude (MIA): Application qui fait correspondre à une suite de symboles numériques (message), un signal continu, capable de traverser le canal de transmission (signal modulé).
- Les **codes en ligne** sont des MIA particulières choisies afin de vérifier certaines propriétés.

Codes en ligne- principe

- Les codes en ligne permettent la transmission des messages constitués d'éléments binaires α_k de durée T_b chacun, émis aux instants kT_b , indépendants et identiquement distribués (i.i.d) sur l'alphabet $\{0,1\} \rightarrow p_0 = \Pr\{\alpha_k = 0\}$ et $p_1 = \Pr\{\alpha_k = 1\} \rightarrow p_0 = p_1 = 1/2$
 \rightarrow Le codage en ligne permet d'associer à chaque élément α_k un signal continu de durée T_b (le symbole α_k n'existe que pendant la durée T_b)
- Paramètres:
 - Débit binaire $D = 1/T_b$
 - Symbole: succession de n bits
 - Durée de symbole $T = nT_b$
 - Débit symbole $R = 1/T$
(rapidité de modulation) exprimé en Baud
 - Polarité : signe possible du signal
 - Valence: Nombre d'états significatifs du signal numérique.



Codes en ligne- principe

- **Codage en ligne binaire** : associer au bit 0 (resp. 1) un signal $S_0(t)$ (resp. $S_1(t)$) de durée T_b tel que

$$S_i(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, T_b[\quad ; \quad i = 0, 1$$

D'où, à

$$\alpha_k = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{émission de } S_0(t - kT_b)$$

$$\alpha_k = 1 \quad \leftrightarrow \quad \text{émission de } S_1(t - kT_b)$$

- A la suite $\{\alpha_k\}$, le codeur en ligne associe le signal $e(t)$ suivant

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{i(k)}(t - kT_b)$$

où $i(k) = 0$ (resp. 1) si $\alpha_k = 0$ (resp. 1)

- En pratique, $S_0(t)$ et $S_1(t)$ s'expriment en fonction d'une forme d'onde unique $h(t)$ de durée T_b , tel que: $S_i(t) = a_i h(t)$, $i \in \{0,1\}$

Codes en ligne- principe

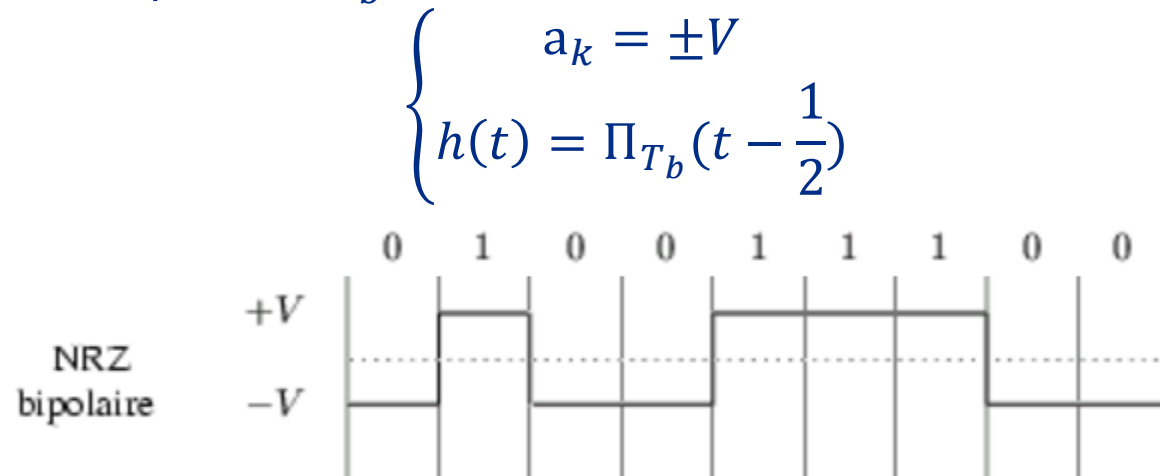
- Le signal en sortie du codeur en ligne s'écrit alors:

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i(k)} h(t - kT_b) = \sum_k a_k h(t - kT_b)$$

où a_i est un symbole binaire prenant ses valeurs dans $\{A_0, A_1\}$; $a_k = A_0$ (resp. A_1) si $\alpha_k = 0$ (resp. 1)

- Exemple: code NRZ (Non Return to Zero)

Principe : très proche du codage binaire de base, il code un 1 par $+V$, un 0 par $-V$. La forme d'onde est une porte de période T_b



Codes en ligne- principe

- **Codage en ligne M-aire:** à n éléments binaires (n -uplet) issus du message, on associe un signal $S_i(t)$ de durée $T = nT_b$ choisi parmi $M = 2^n$ signaux en fonction de la valeur du n -uplet

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{i(k)}(t - kT)$$

où $i(k) = 0, 1, \dots, (M - 1)$ et $S_i(t) = a_i h(t)$

- Dans ce cas, le signal en sortie du codeur a la même expression que pour le cas binaire:

$$e(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$$

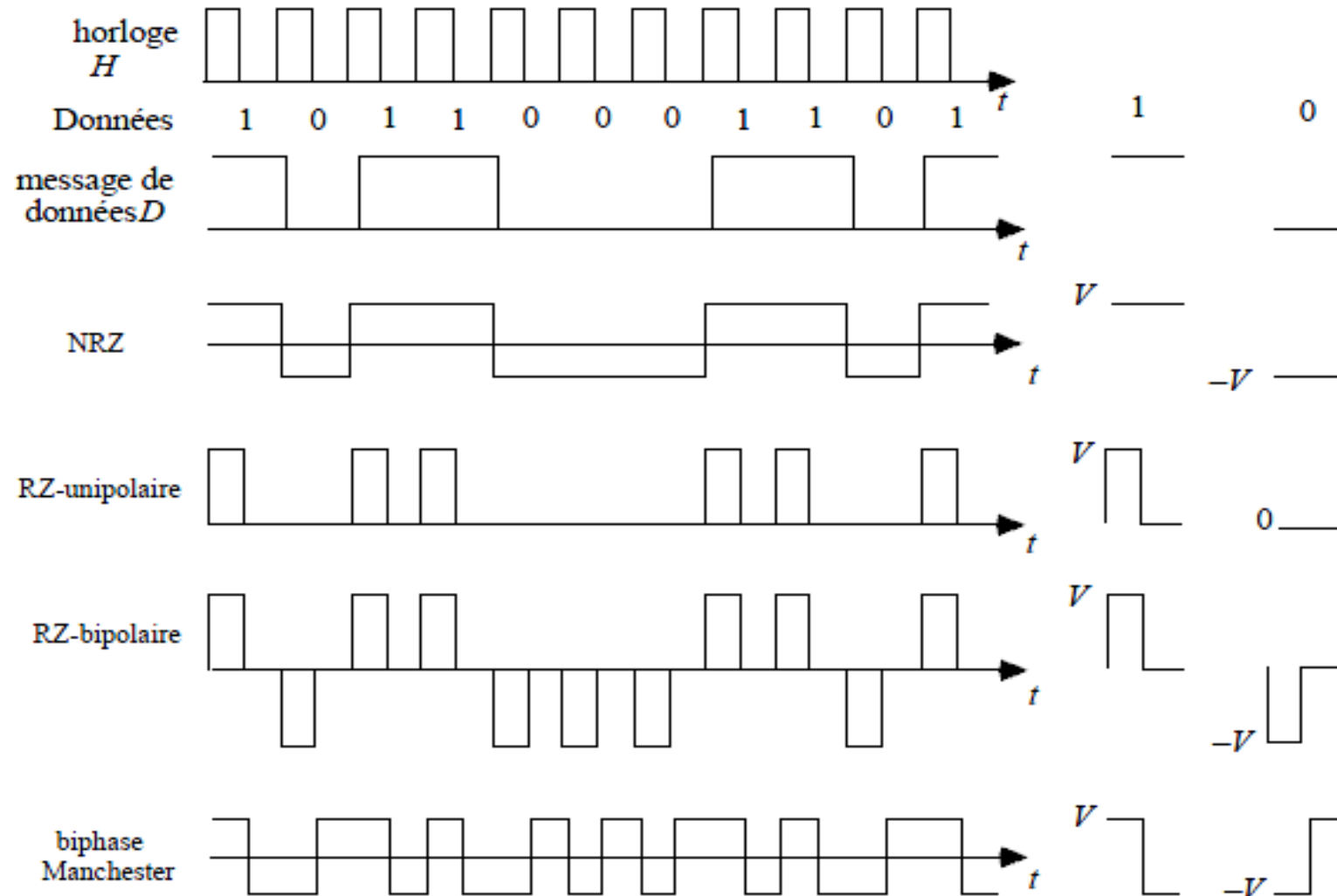
où a_k sont des symboles M -aire, prenant leurs valeurs dans l'alphabet $\{A_0, A_1, \dots, A_{M-1}\}$, ex: $\{\pm 1, \pm 3, \dots \pm (M - 1)\}$

- Avantage des symboles M -aire : à débit binaire D fixé, la rapidité de modulation R se réduit à:

$$R = \frac{D}{\log_2(M)}$$

Codes en ligne- exemples

- Quelques exemples de codes en ligne binaire:



Codes en ligne- choix

- En transmission en bande de base, le milieu est caractérisé par sa bande passante (câble). Le code en ligne doit être choisi pour assurer la compatibilité entre le débit D à transmettre et la bande passante du milieu de transmission: choix de M .
- Selon le code choisi, le spectre du signal émis change. Ainsi pour être adapté à un support de transmission donné, un choix judicieux du code doit être fait:
 - Pour la transmission sur grande distance, le spectre du code en ligne doit être nul au voisinage de zéro, pour éviter toute interférence avec le courant continu de télé-alimentation des répéteur-régénérateur, utile pour *régénérer périodiquement le signal et compenser l'atténuation et la distorsion dues au câble.*
 - *Pour d'autre application, l'énergie doit être concentrée autour de certaine fréquence*
 - *La présence d'une raie à la fréquence $1/T$ dans le spectre du code en ligne facilite la récupération du rythme de transmission en réception (l'horloge)*
 - *En imposant certaines règles au codage des symboles a_k , le récepteur peut détecter la présence d'erreurs de transmission et estimer la qualité de liaison*
- Puisque le choix d'un code en ligne dépend principalement de ses propriétés spectrales, il est important d'étudier la **Densité Spectrale de Puissance** (DSP) du code.

Signaux aléatoires- rappel

- Un **signal aléatoire** (ou processus stochastique) est un signal qui ne se répète pas à l'identique lorsque l'on réitère l'expérience qui le produit.

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f .

- **Espérance mathématique:** l'espérance d'une variable aléatoire $E[X]$ correspond à la moyenne des valeurs possibles de X , pondérées par les probabilités associées à ces valeurs (moment d'ordre 1).
 - V.A. discrète : $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i$
 - V.A. continue : $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- **Variance:** $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$ (moment centré d'ordre 2)
- Variable aléatoire centrée et réduite:
 - Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E[X] = 0$
 - Une variable aléatoire X est dite **réduite** si $V[X] = 1$

Signaux aléatoires- rappel

■ Caractérisation temporelle (moments temporels):

- Moyenne temporelle: $\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$
- Autocorrélation temporelle $\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t - \tau) dt$

■ Caractérisation statistique:

- Moyenne statistique: $E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)p(x(t))dx(t)$
- Autocorrélation statistique $\Gamma_{xx}(t, t - \tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)]$

■ Stationnarité: un signal aléatoire **stationnaire** est un signal dont les statistiques (moyenne d'ensemble, moyenne quadratique, variance, autocorrélation,...) ne dépendent pas du temps

- Un signal est stationnaire au premier ordre si sa valeur moyenne ne dépendent pas du temps $E[x(t)] = m_x = \text{Cste}$
- Un signal est stationnaire au second ordre si sa valeur moyenne est constante et si sa fonction d'autocorrélation est fonction du retard τ : $\Gamma_{xx}(t, t - \tau) = \Gamma_{xx}(\tau)$

Signaux aléatoires- rappel

- **Ergodicité:** un signal aléatoire stationnaire est **ergodique** si ses caractéristiques temporelles et celles statistiques sont égales

- 1^{er} ordre: moyennes statistiques et temporelles sont égales

$$E[x(t)] = \overline{x(t)} = m_X$$

- 2nd ordre: les fonctions d'autocorrélation statistiques et temporelles sont égales

$$E[x(t)x^*(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

- Remarque:

- Les caractéristiques des signaux aléatoires sont mesurées sur des temps d'observation finie. En pratique, la stationnarité ou l'ergodicité sont considérées sur la fenêtre d'observation
 - En pratique, on est toujours obligé de faire l'hypothèse de la stationnarité pour des raisons d'estimation
 - Ergodicité \Rightarrow Stationnarité
Stationnarité \nRightarrow Ergodicité

Densité Spectrale de Puissance

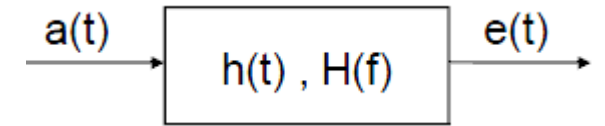
- La DSP d'un signal représente la répartition de la puissance d'un signal sur l'axe des fréquences. Dans la théorie des processus aléatoires, cette définition constitue le théorème suivant:

Théorème de Wiener-Kintchine: la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire dont la valeur moyenne et la fonction d'autocorrélation sont invariantes dans le temps (stationnarité au sens large) est égale à la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation statistique.

Densité Spectrale de Puissance

- Le signal en sortie du codeur en ligne peut être interprété comme étant le résultat d'un filtrage d'un signal $a(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ (forme d'onde $h(t)$)

$$e(t) = a(t) * h(t)$$



avec le signal continu $a(t)$:

$$a(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$$

On a alors

$$e(t) = h(t) * \sum_k a_k \delta(t - kT) = \sum_k a_k h(t - kT)$$

- La DSP du signal codé:

$$\gamma_e(f) = \gamma_a(f) |H(f)|^2$$

Où:

- γ_a densité spectrale de puissance du signal $a(t)$ qui ne dépend que des propriétés statistiques des symboles a_k
- $|H(f)|$ transformée de Fourier de $h(t)$

Densité Spectrale de Puissance

- Dans le cas général de symboles a_k corrélés, la DSP est donnée par (formule de Bennett):

$$\gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{2\sigma_a^2}{T} \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma'_a(k) \cos 2\pi k f T + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- Où m_a , σ_a^2 et $\Gamma'_a(k)$ désignent respectivement la moyenne, la variance et la fonction d'autocorrélation normalisée des symboles a_k .
- Les symboles étant stationnaires, nous avons donc:

$$m_a = E[a_n], \quad \forall n$$

$$\sigma_a^2 = E[(a_n - m_a)^2], \quad \forall n$$

$$\Gamma'_a(k) = \frac{E[(a_n - m_a)(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2}, \quad \forall n, k$$

Densité Spectrale de Puissance

- La DSP $\gamma_e(f)$ du signal codé dépend de $H(f)$ et des statistiques des symboles a_k .
- Elle comprend une partie continue :

$$\gamma_e^c(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{2\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma'_a(k) \cos 2\pi k f T$$

et une partie discrète constituée par un ensemble de raies aux fréquences $\frac{k}{T}$:

$$\gamma_e^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- La DSP de $e(t)$ est la somme de deux parties.

$$\gamma_e(f) = \gamma_e^c(f) + \gamma_e^d(f)$$

- Le spectre de raies permet de récupérer l'horloge: les instants de transmission de symbole. Il est nulle si la moyenne $m_a = 0$.

Densité Spectrale de Puissance

- Lorsque les symboles a_k sont centrés, leur valeur moyenne est donc nulle ($m_a = 0$), la densité spectrale de puissance se réduit à sa partie continue :

$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{2\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma'_a(k) \cos 2\pi k f T$$

→ l'horloge ne peut pas être récupéré à partir du signal codé

- Lorsque les symboles a_k sont indépendants (non corrélés), la densité spectrale de puissance prend la forme:

$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- Et donc lorsque les symboles sont centrés et non corrélés, la DSP se réduit à:

$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2$$

- Si $H(0) = \int_0^T h(0) dt = 0$, la DSP $\gamma_e(0) = 0 \rightarrow$ pas d'interférence avec le courant de télé-alimentation.

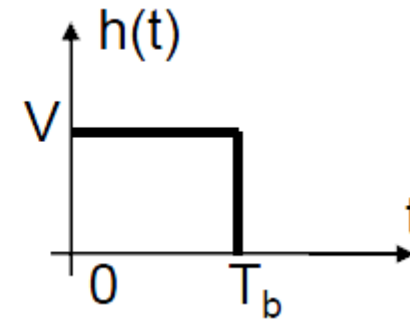
Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-NRZ

- Les symboles a_k sont donc indépendants et identiquement distribués (iid): on a alors $\Gamma'_a(k) = 0, \forall k \neq 0$. Alors

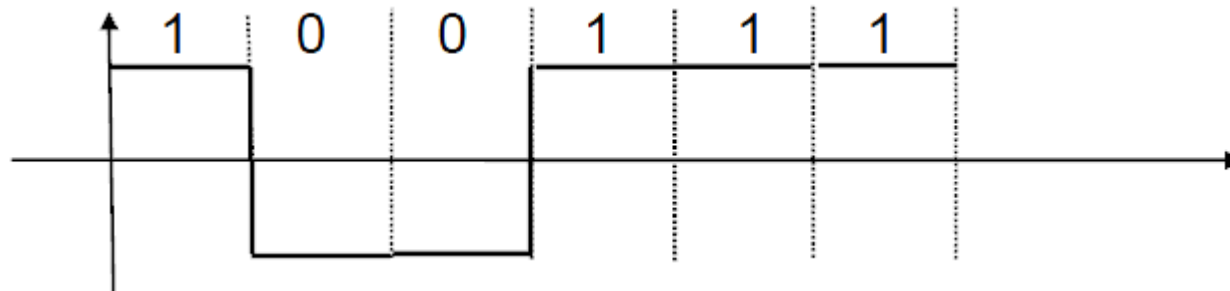
$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(\frac{k}{T})|^2 \delta(f - \frac{k}{T})$$

- Code **Non-Return to Zero** (NRZ) binaire

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} V & \forall t \in [0, T_b[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Exemple:



Les symboles a_k sont supposés non corrélés et prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{1, -1\}$.

- $m_a = 0$
- $\sigma_a^2 = 1$

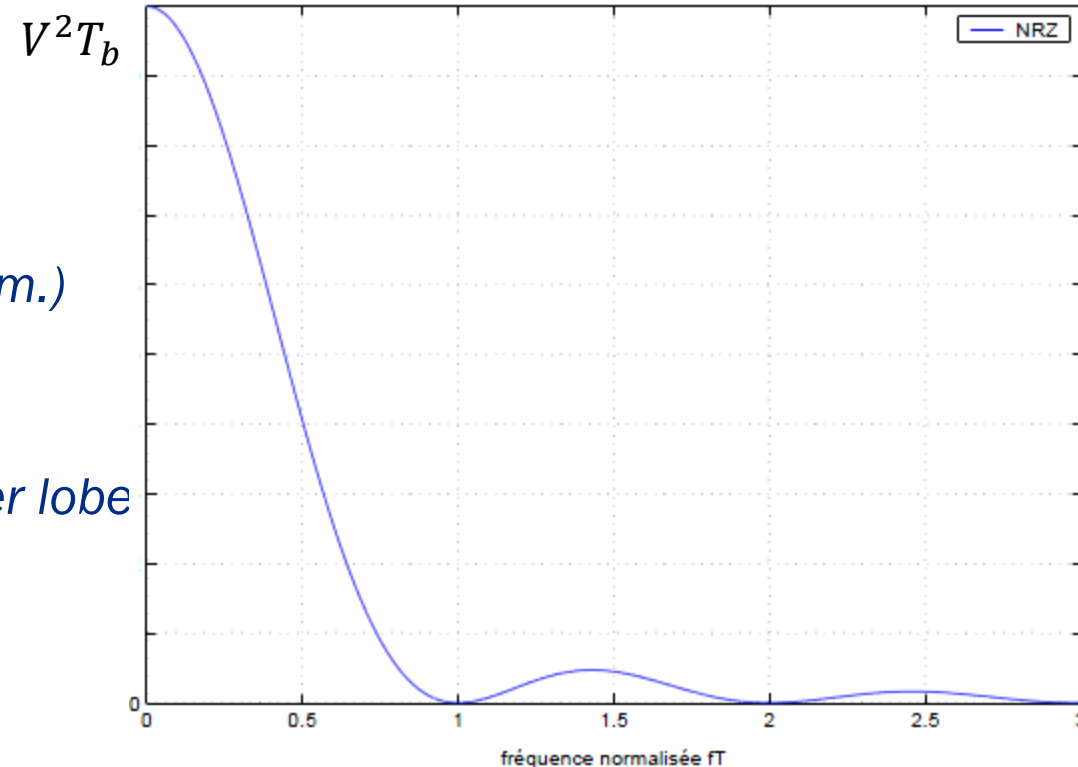
Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-NRZ

■ DSP du code NRZ binaire:

TF de la forme d'onde: $H(f) = VT_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right) e^{-j\pi f T_b}$

Expression finale de la DSP

$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 = V^2 T_b \left(\frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 = V^2 T_b \text{Sinc}^2(\pi f T_b)$$



■ Remarques:

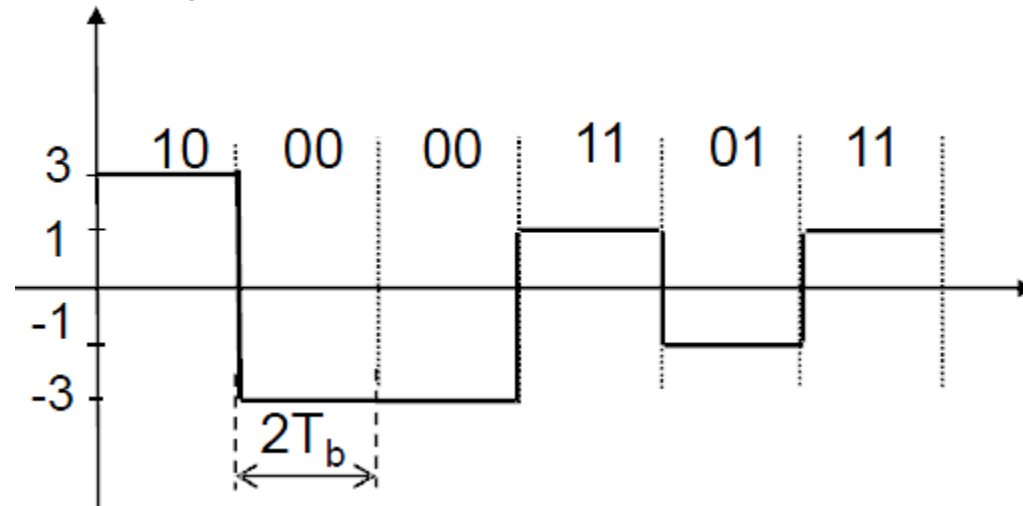
- Annulation du spectre tous les $\frac{k}{T_b}$ (k : freq norm.)
- largeur du lobe principal : $\frac{1}{T_b}$ (1: freq norm.)
- 90% de l'énergie est contenue dans le premier lobe
- lobes secondaires : bande passante infinie

Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-NRZ

■ Code NRZ M-aire:

- $h(t)$: fonction rectangle désignant la forme d'onde de durée $T = nT_b$
- Les symboles a_k prennent leurs valeurs dans l'alphabet: $\{\pm 1, \pm 3, \dots \pm (M - 1)\}$.

■ Exemple d'un code quaternaire



Exemple de codage de Gray

α_k	a_k
00	-3
01	-1
11	+1
10	+3

■ On montre que si les a_k sont iid:

- $m_a = 0$
- $\sigma_a^2 = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{\left(\frac{M}{2}\right)-1} (2p + 1)^2 = \frac{M^2 - 1}{3}$

Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-NRZ

■ DSP du code NRZ M-aire :

TF de la forme d'onde: $H(f) = VT \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right) e^{-j\pi f T}$

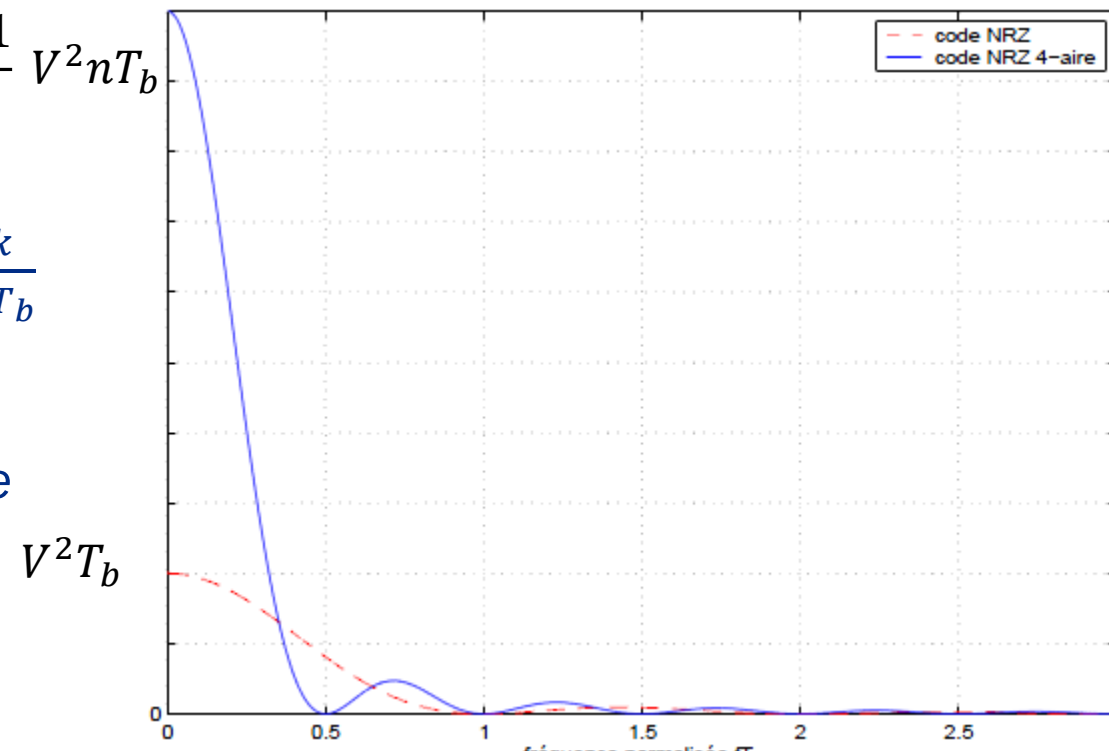
Expression finale de la DSP

$$\gamma_e(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |H(f)|^2 = \frac{M^2 - 1}{3} V^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 = \frac{M^2 - 1}{3} V^2 T \text{Sinc}^2(\pi f T)$$

$$\frac{M^2 - 1}{3} V^2 n T_b$$

■ Remarques:

- Annulation du spectre tous les $\frac{k}{T} = \frac{k}{nT_b} = \frac{k}{2T_b}$
- Largeur du lobe principal : $\frac{1}{nT_b}$
- Lobes secondaires : bande passante infinie

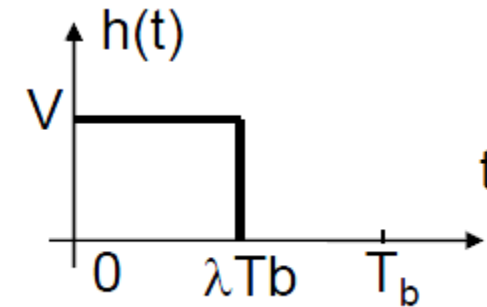


Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-RZ

■ Code RZ binaire:

- Les symboles prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{0, 1\}$ et la forme d'onde $h(t)$ est une porte de période $[0, \lambda T_b]$.

$$\begin{cases} a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \\ a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} V & \forall t \in [0, \lambda T_b[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- On a: $m_a = 1/2$ et $\sigma_a^2 = 1/4$

■ DSP: sous les mêmes hypothèses que NRZ, la DSP de ce code est

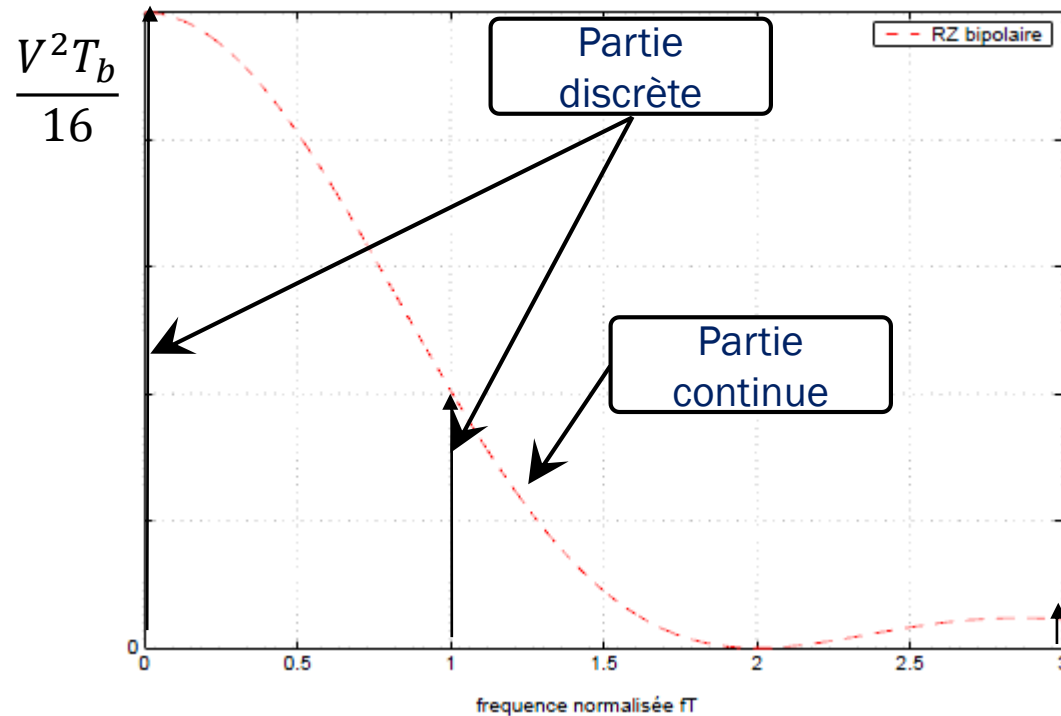
$$\gamma_e(f) = \frac{V^2 \lambda^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(f \lambda T_b) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{V^2 \lambda^2}{4} \text{sinc}^2(k \lambda) \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

■ En pratique, le format RZ est utilisé avec $\lambda = 0.5$. La DSP devient alors

$$\gamma_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right) + \frac{V^2}{16} \delta(f) + \sum_{k \neq 0} \frac{V^2}{4\pi^2 (2k+1)^2} \delta\left(f - \frac{2k+1}{T_b}\right)$$

Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-RZ

■ DSP du Code RZ binaire:

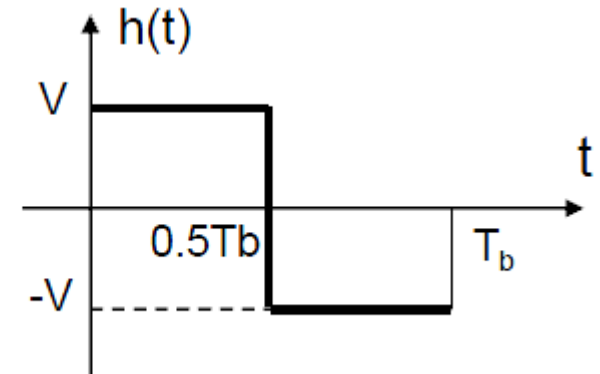


■ Remarquons que:

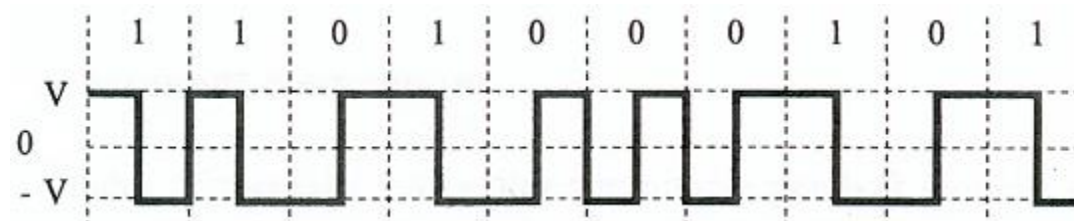
- Seules les raies aux fréquences impaires ($2k + 1$) *apparaissent*
- La présence de la raie en $1/T$ facilite la récupération du rythme en réception
- La présence d'une raie en $f = 0$, *peut causer une interférence avec la composante continue.*
- *Occupation spectrale plus élevée que le code NRZ*

Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-Manchester

- Tous les codes à codage de phase ou les codes biphasés requièrent une transition pendant l'intervalle T_b et ce, autant pour l'information 0 que pour l'information 1
- **Code biphasé binaire (Manchester):**
 - Les symboles prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{-1, 1\}$ et la forme d'onde $h(t)$ divise T_b en deux intervalles égaux

$$\begin{cases} a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \\ a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} +V & \forall t \in \left[0, \frac{T_b}{2}\right[\\ -V & \forall t \in \left[\frac{T_b}{2}, T_b\right[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$


- Exemple



Exemple de codes en ligne à symboles indépendants-Manchester

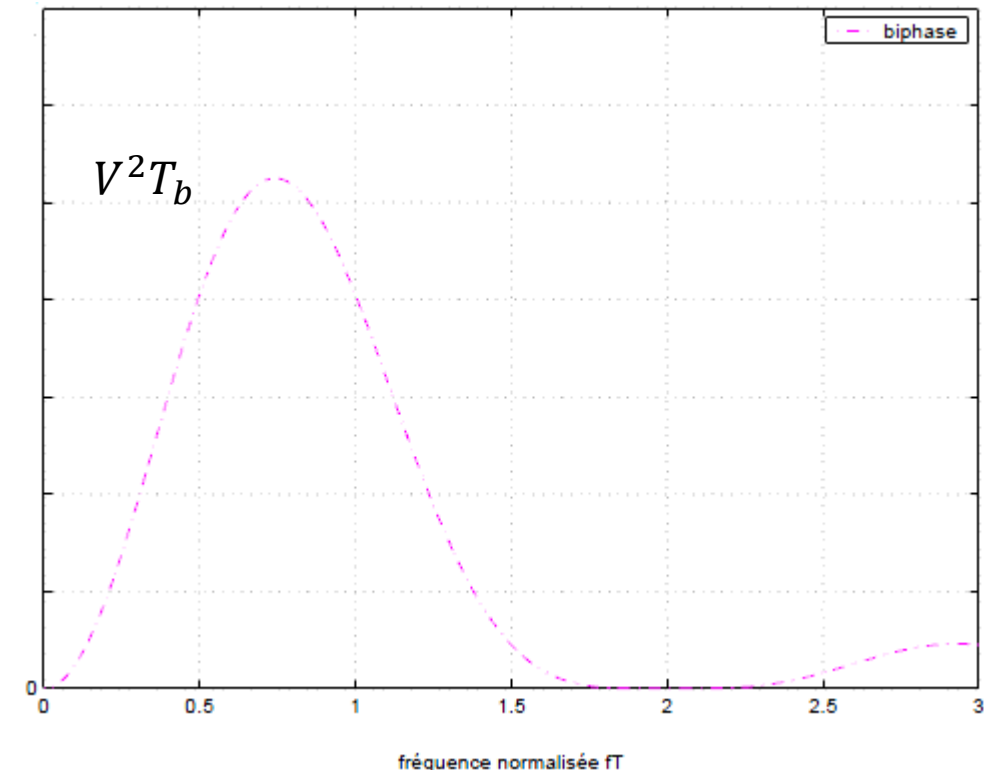
- Le code Manchester applique la même règle de codage que le code NRZ (donc mêmes propriétés statistiques)
 - $m_a = 0$
 - $\sigma_a^2 = 1$

- La DSP a pour expression

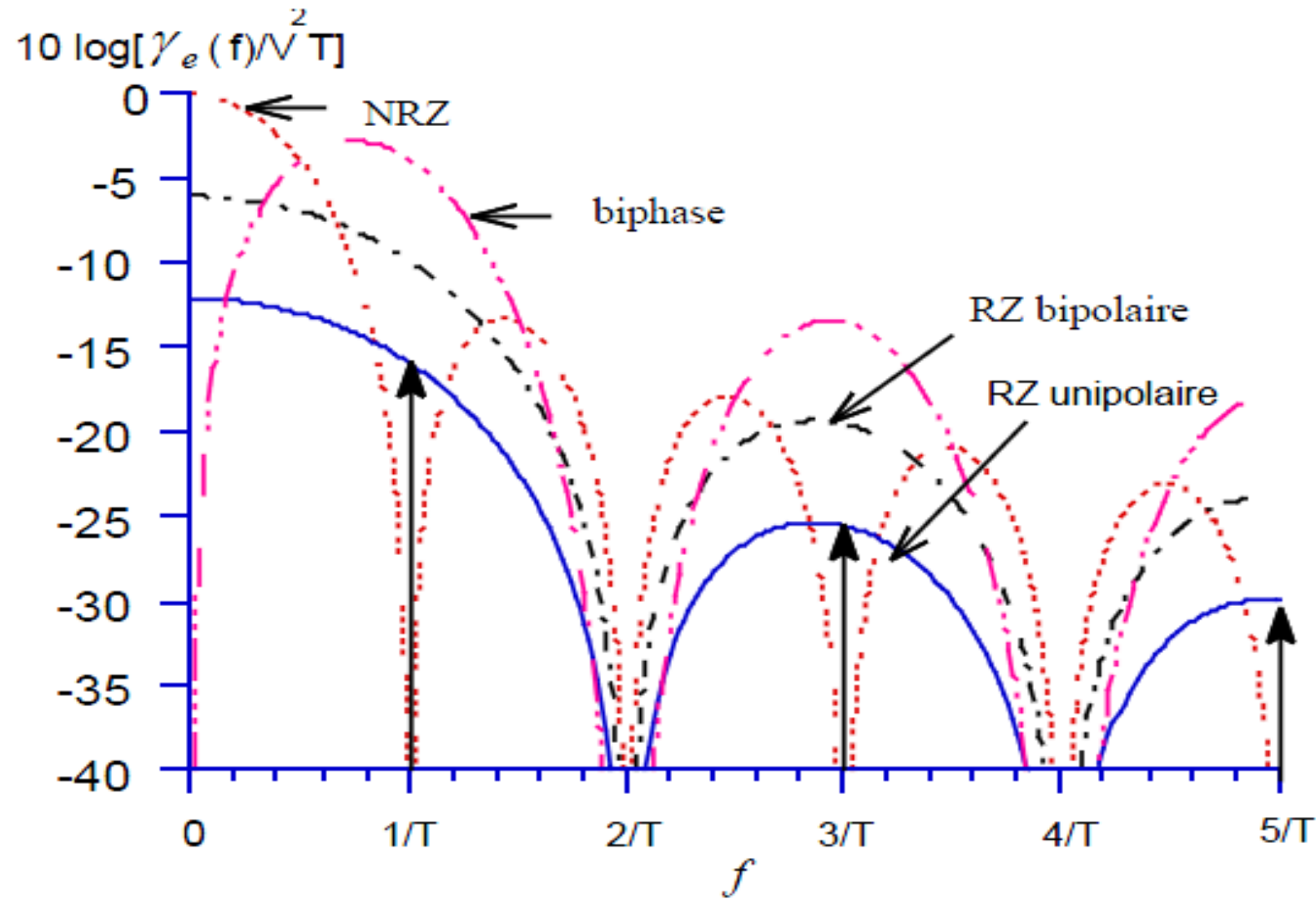
$$\gamma_e(f) = V^2 T_b \text{Sin}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \text{Sinc}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right)$$

- Remarques:
 - *DSP nulle à $f = 0$*
→ *Pas d'interférence avec la DC*
 - *Absence de la partie discrète*
→ *Pas la restitution de l'horloge*

- Ce code est utilisé pour le réseau Ethernet



DSP des codes NRZ, RZ et biphase



Transmission en BdB sur un canal idéal (à bande illimitée)

Position du problème

■ Objectif:

Pour un message numérique transmis en bande de base à travers un canal donné, on cherche à trouver la structure du récepteur le plus performant (en terme de probabilité d'erreurs) permettant la reconstitution de ce message.

■ Hypothèses:

- *Source du message : binaire, i.i.d et de débit D bits/s*
- *Signal obtenu à la sortie du codeur en ligne, $e(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$
où a_k : symbole binaire ou M -aire et $h(t)$: forme d'onde de durée T*
- **Canal idéal et Bruit Blanc Additif Gaussien** centré stationnaire (BBAG)

■ Canal idéal:

- *le canal est supposé à bande illimitée. Cela veut dire qu'il n'introduit aucun filtrage sur le signal transmis.*
- *Cette condition est satisfaite si la bande passante du canal est très supérieure au débit symbole D .*

→ le canal est un **filtre à bande passante infinie** (l'approximation d'un canal à bande passante large par rapport au spectre du signal émis)

Position du problème

- Bien que le canal n'effectue aucun filtrage sur le signal à transmettre, la présence d'autres sources qui partagent le même canal (signaux émis sur le même canal) perturbent le signal utile. Le bruit thermique des appareils peut aussi gêner la transmission.
→ Cette interférence est souvent modélisée par un bruit additif Gaussien, grâce au théorème de la limite centrale. On suppose également que ce bruit est stationnaire, blanc et centré.

- On rappelle que la densité de probabilité d'une variable aléatoire Gaussienne X est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

Avec: $m_x = E(X)$ et $\sigma_x^2 = E[(X - m_x)^2]$

- Théorème de Limite Centrale (TLC):

Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ayant une espérance $E(X_i) = m_x$ et une variance $E(X_i) = \sigma_x^2$. Alors la variable aléatoire

$Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm_x}{\sigma\sqrt{n}}$ suit approximativement une loi normale $N(0,1)$ si n grand.

Pour $n \rightarrow \infty$: $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(nm_x, n\sigma_x^2)$

Position du problème

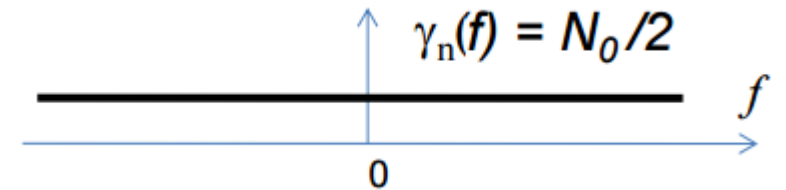
- BBAG (AWGN: Additive White Gaussian Noise):

- *Fonction d'autocorrelation*

$$\Gamma_e(t) = \frac{N_0}{2} \delta(t)$$

- *Densité spectrale de puissance*

$$\gamma_e(f) = \frac{N_0}{2}$$

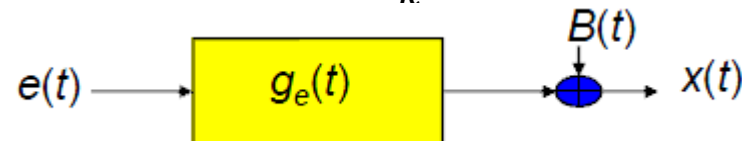


- **Blanc:** la DSP est indépendante de la fréquence
- **Gaussien:** le bruit B est une variable aléatoire de distribution Gaussienne de moyenne m_B et de variance σ_B^2 .

- On considère une chaîne de transmission en BdB comprenant un codeur en ligne de forme d'onde $h_e(t)$ suivi d'un filtre d'émission de réponse impulsionnelle $g_e(t)$. Le signal à l'entrée du récepteur est

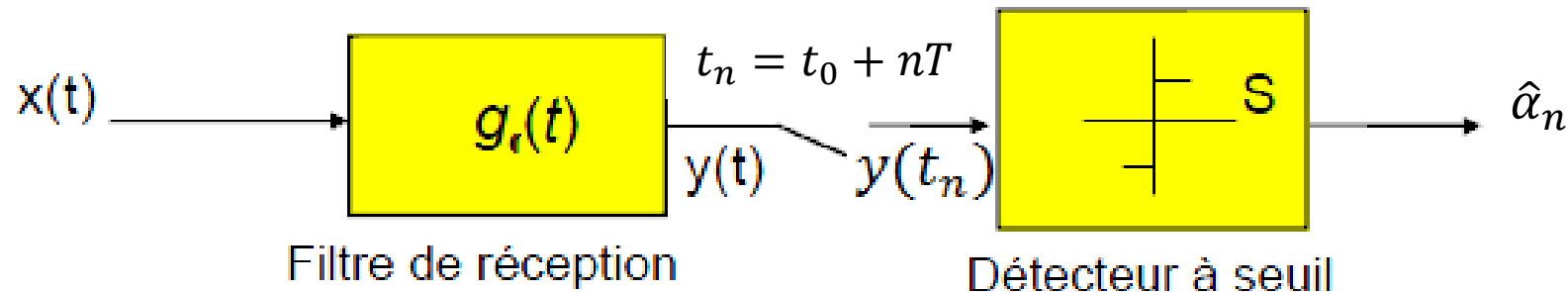
$$x(t) = e(t) * g_e(t) + B(t) = \sum_k a_k h(t - kT) + B(t)$$

où $h(t) = g_e(t) * h_e(t)$



Réception optimale

- Le récepteur est composé d'un filtre de réception de réponse impulsionnelle $g_r(t)$ (RF: $G(f)$) suivi d'un échantillonneur à la cadence $1/T$ ($t_n = t_0 + nT$) et d'un comparateur à seuil.



- Règle de décision: l'échantillon $y(t_n)$, prélevé à l'instant t_n en sortie du filtre de réception est comparé à un seuil S (cas binaire) et une décision concernant la valeur de l'élément α_n est prise:

$$\hat{\alpha}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } y(t_n) \geq S \\ 0 & \text{si } y(t_n) < S \end{cases}$$

- Récepteur optimal: choisir le filtre et le seuil pour réaliser le compromis entre la réduction de la puissance du bruit et la dégradation du signal utile, dans le but de minimiser la probabilité d'erreur.

$$P_e = \Pr(\hat{\alpha}_n \neq \alpha_n)$$

Calcul de la probabilité d'erreur

- On considère la transmission d'un symbole unique binaire a_0 valant ± 1 (codeur **NRZ**). Le signal reçu s'écrit alors

$$x(t) = a_0 h(t) + B(t)$$

- Le signal à la sortie du filtre de réception

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * g_r(t) = (a_0 h(t) + B(t)) * g_r(t) = a_0 h(t) * g_r(t) + B(t) * g_r(t) \\ &= a_0 r(t) + b(t) \end{aligned}$$

où: $r(t) = h(t) * g_r(t)$ et $b(t) = B(t) * g_r(t)$

- L'échantillon prélevé à l'instant t_0 en sortie du filtre est

$$Y = y(t_0) = a_0 r(t_0) + b(t_0)$$

- Probabilité d'erreur: on dit qu'il y a une erreur si on prend $\tilde{\alpha}_0 = 0$ alors que $\alpha_0 = 1$ ou inversement:

Si $p_i = \Pr(\tilde{\alpha}_n = i), i = 0,1$

alors:

$$P_e = \overbrace{p_0 \Pr(\tilde{\alpha}_0 = 1 / \alpha_0 = 0)}^{P_{e0}} + \overbrace{p_1 \Pr(\tilde{\alpha}_0 = 0 / \alpha_0 = 1)}^{P_{e1}}$$

Calcul de la probabilité d'erreur

- Conditionnellement à une valeur de l'élément binaire α_k (0,1), Y est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $m = a_0 r(t_0)$ et de variance $\sigma^2 = E[b^2(t_0)]$.

- La densité de probabilité conditionnelle est, dans ce cas, donnée par:

$$P_{Y/\alpha_0 \rightarrow a_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(Y - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

- Les densités de probabilités conditionnelles de la variable aléatoire Y lorsque l'élément binaire α_0 est égal à 0 ou 1 sont les suivantes:

$$P_{Y|\alpha_0=1} = P_{Y|a_0=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(y - r(t_0))^2}{2\sigma^2} \right)$$

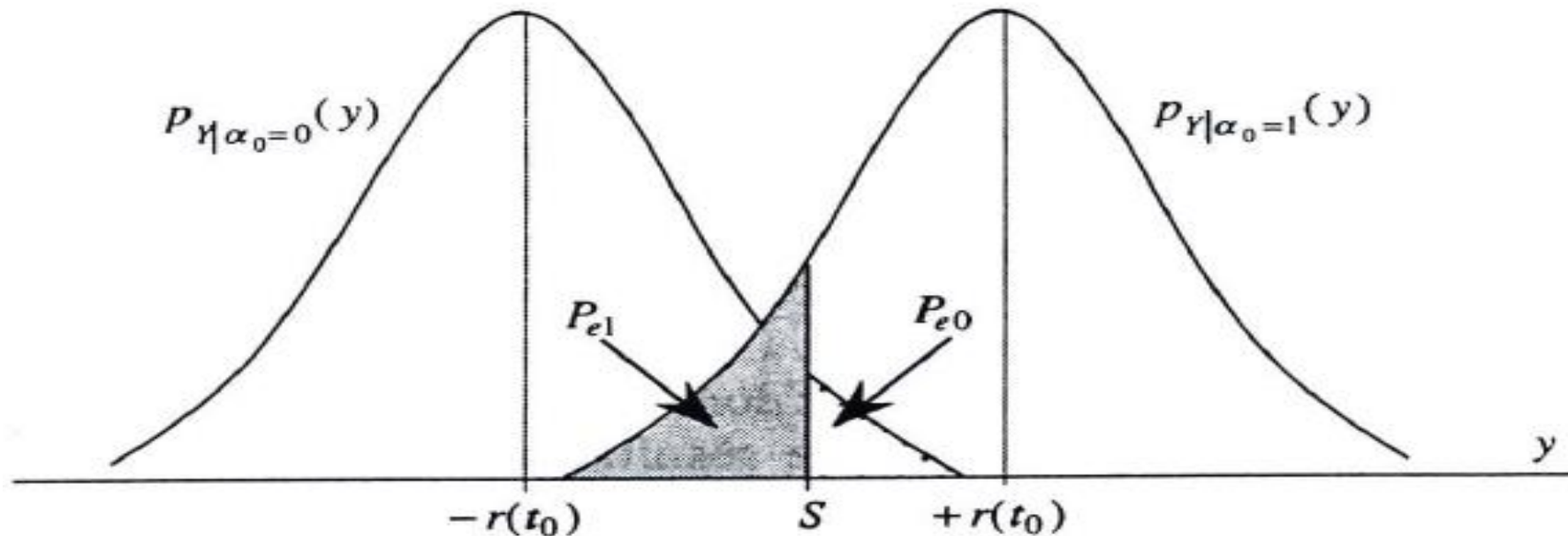
$$P_{Y|\alpha_0=0} = P_{Y|a_0=-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(y + r(t_0))^2}{2\sigma^2} \right)$$

Calcul de la probabilité d'erreur

- La probabilité d'erreur peut être exprimée en fonction du seuil de décision comme suit:

$$P_e = p_0 \int_S^{+\infty} P_{Y/\alpha_0=0}(y) dy + p_1 \int_{-\infty}^S P_{Y/\alpha_0=1}(y) dy$$

où $P_{Y/\alpha_0=0}(y)$ et $P_{Y/\alpha_0=1}(y)$ représentent respectivement les densités de probabilités conditionnelles de la variable aléatoire Y lorsque l'élément binaire α_0 égal à 0 ou à 1.



Calcul de la probabilité d'erreur

- Pour calculer la probabilité d'erreur en fonction des paramètres de la chaîne de transmission, on remplace les densités de probabilités conditionnelles par leurs expressions. En introduisant, comme il est l'usage, la fonction d'erreur complémentaire **erfc(x)**, la probabilité d'erreur devient:

$$P_e = \frac{1}{2} p_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{r(t_0) + S}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{1}{2} p_1 \operatorname{erfc} \left(\frac{r(t_0) - S}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

- *Fonction erreur*
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$
- *Fonction erreur complémentaire*
$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du$$
- *Fonction Queue Gaussienne*
$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \operatorname{erfc}(x) = 2 Q(x\sqrt{2})$$

→ On cherche à optimiser P_e par rapport à S et $g_r(t)$

Calcul de la probabilité d'erreur-seuil optimal

- Le seuil optimal qui minimise P_e , s'obtient en annulant $\frac{dP_e}{dS}$ donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(p_1 \exp\left(-\frac{(r(t_0) - S)^2}{2\sigma^2}\right) - p_0 \exp\left(-\frac{(r(t_0) + S)^2}{2\sigma^2}\right) \right)$$

- On en déduit le seuil optimal suivant:

$$S_{opt} = \frac{\sigma^2}{2r(t_0)} \text{Log}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

- Le seuil optimal S_{opt} n'est nul que si les deux symboles sont équiprobables: $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$

- La probabilité d'erreur devient

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{r(t_0)}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

- Notons par $\rho = \frac{r(t_0)}{\sqrt{\sigma^2}}$ le rapport signal à bruit à l'entrée du récepteur, la probabilité d'erreur est donc directement liée à ce rapport.

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\sqrt{\frac{\rho^2}{2}}$$

Calcul de la probabilité d'erreur-seuil optimal

- Lorsque $p_0 > p_1$ (resp. $p_1 > p_0$), alors le seuil de décision S_{opt} s'éloigne du milieu ($S_{opt} > 0$ resp. $S_{opt} < 0$). En outre, on vérifie que si $P_0 \rightarrow 1$ alors $S_{opt} \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire qu'on décide toujours 1.
- Pour des symboles à des probabilités d'occurrence arbitraires ($\frac{p_0}{p_1} \neq 1$) et lorsque le rapport signal à bruit ρ diminue, on n'utilise plus l'*a priori* qu'on a sur la probabilité d'occurrence des symboles.
- Enfin, la probabilité d'erreur s'écrit alors

$$P_e = p_0 Q\left(\rho + \frac{k}{\rho}\right) + p_1 Q\left(\rho - \frac{k}{\rho}\right) = \frac{1}{2} p_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}\rho}\right) + p_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} - \frac{k}{\sqrt{2}\rho}\right)$$

où $k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$

Calcul de la probabilité d'erreur-filtre adapté

- On cherche à optimiser la probabilité d'erreur P_e par rapport au rapport signal à bruit ρ à l'entrée du récepteur.
- La dérivée de P_e par rapport à ρ est donnée par

$$\frac{d P_e}{d \rho} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} p_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{k}{\rho}\right)^2\right)$$

- Cette dérivée est toujours négative, donc P_e est une fonction monotone décroissante de ρ . La minimisation de la probabilité d'erreur peut ainsi être obtenue en maximisant $\rho = \frac{r(t_0)}{\sigma}$.

- On a:

$$r(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(t) h(t_0 - t) dt$$

le bruit $b(t)$ étant de DSP $\gamma_b(f) = \frac{N_0}{2} |G_r(f)|^2$, sa variance $\sigma^2 = \int \gamma_b(f) df$ vaut

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_r(t)|^2 dt$$

Calcul de la probabilité d'erreur-filtre adapté

- Le rapport signal à bruit ρ a pour expression

$$\rho = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g_r(t) h(t_0 - t) dt}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_r^2(t) dt \right)^{1/2}}}$$

- Pour maximiser ce rapport, nous utilisons l'inégalité de Schwarz qui s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)v(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt$$

Le cas de l'égalité est obtenu si $u(t) = Kv(t)$.

- On posant $u(t) = g_r(t)$ et $v(t) = h(t_0 - t)$, on déduit que le carré du rapport signal à bruit ρ^2 vaut

$$\rho^2 \leq \frac{2}{N_0} \frac{\int |g_r(t)|^2 dt \int |h(t_0 - t)|^2 dt}{\int |g_r(t)|^2 dt}$$

Calcul de la probabilité d'erreur-filtre adapté

- Le maximum de ρ est obtenu si $g_r(t) = Kh(t_0 - t)$, ou K est un coefficient de proportionnalité réel non nul.
- Le filtre de réception qui minimise P_e , appelé **filtre adapté** à la forme d'onde $h(t)$, a pour réponse impulsionnelle:

$$g_r(t) = Kh^*(t_0 - t)$$

ou de façon équivalente dans le domaine fréquentiel $G_r(f) = KH^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$

- Remarques:
 - Le coefficient K qui intervient comme un gain (ou une atténuation) dans l'expression de $g_r(t)$, ainsi que l'instant de décision t_0 peuvent être quelconque. En effet, ces deux paramètres n'ont aucune influence sur la valeur du rapport ρ . Toutefois, pour assurer la **causalité** du filtre, il est nécessaire que

$$g_r(t) = 0 \text{ pour } t \leq 0$$

- Il faut donc choisir $t_0 \geq T_b$ pour une forme d'onde de durée T_b . Ceci peut aussi être interpréter par le fait que la décision ne peut se prendre qu'après avoir reçu la totalité du signal émis.

Calcul de la probabilité d'erreur- P_e minimale

- Le rapport signal à bruit ρ_{\max} qui minimise la probabilité d'erreur a pour expression

$$\rho_{\max} = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2 E_h}{N_0}}$$

- A l'élément binaire α_0 , le codeur en ligne associe le signal $a_0 h(t)$ d'énergie $E_{a_0} = \int a^2 h^2(t) dt$
- Comme $\alpha_0 = \pm 1$, l'énergie moyenne par élément binaire sera

$$E_b = \int_{-\infty}^{+\infty} E[a_0^2] h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = E_h$$

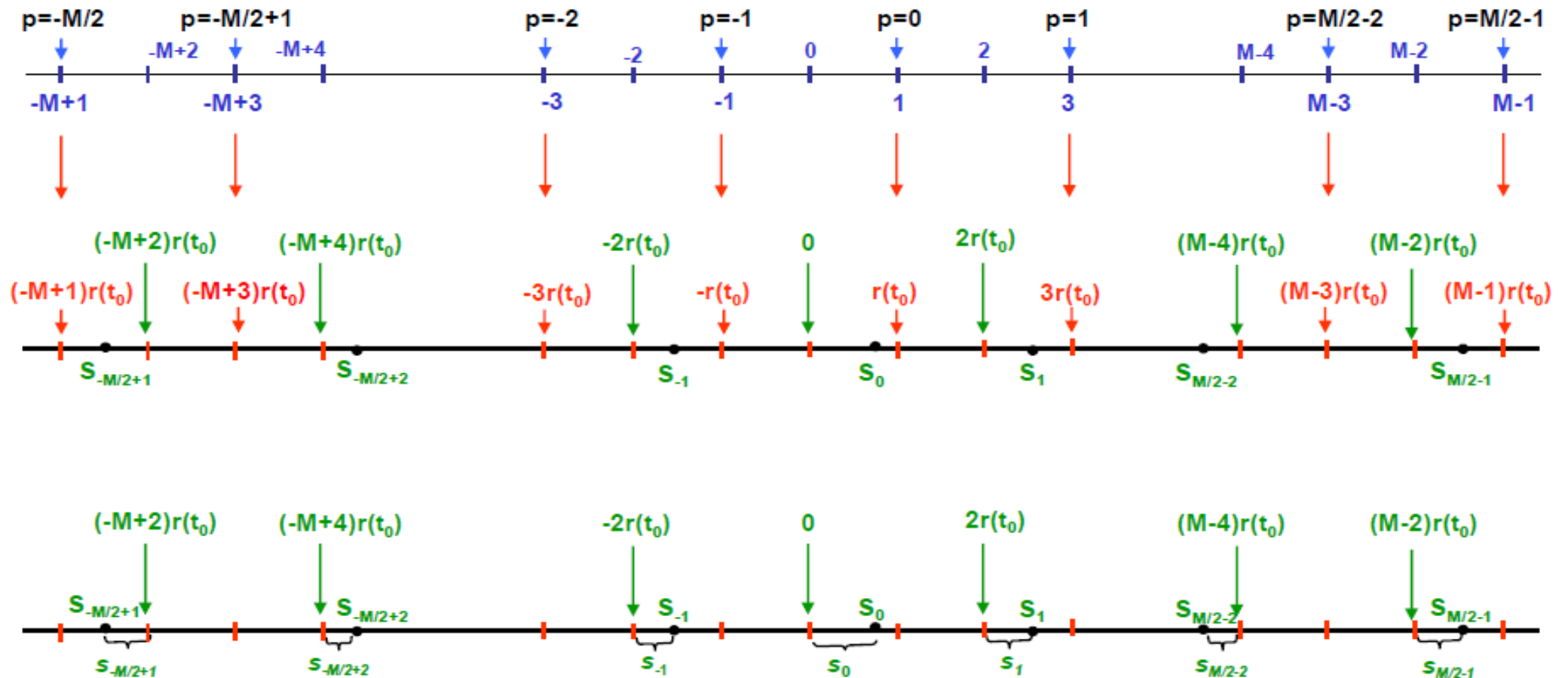
- Pour des éléments α_0 équiprobables (seuil optimal), et en utilisant le filtre adapté, nous pouvons exprimer la probabilité d'erreur minimale P_e en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- La probabilité d'erreur P_e ne dépend pas de la forme de $h(t)$ mais uniquement de son énergie.

Transmission M-aire

- Les calculs précédents sont valables pour une transmission binaire. Nous considérons maintenant une transmission M-aire où les symboles prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\} = \{2p+1 \text{ avec } p \in \{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}\}\}$



Transmission M-aire

- Pour des symboles équiprobables, on montre que les seuils de décision sont placés au milieu de chaque intervalle, comme dans le cas binaire.

- La probabilité d'erreur de symbole

$$P_e = \sum_{i=1}^M P_{ei} = \sum_{i=1}^M p_{a_i} P_{ei/a_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{ei/a_i}$$

- Pour les 2 symboles extrêmes, on a $P_{e1} = P_{eM} = Q(\rho) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\frac{\rho}{\sqrt{2}})$ où $\rho = \frac{r(t_0)}{\sigma}$

- Pour chacun des $M - 2$ autres symboles $P_{ei} = 2Q(\rho) = \operatorname{erfc}(\frac{\rho}{\sqrt{2}})$

- La probabilité d'erreur s'exprime sous la forme

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q(\rho) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}(\frac{\rho}{\sqrt{2}})$$

- Puisque la fonction erfc est strictement décroissante, minimiser la probabilité d'erreur symbole P_e revient à maximiser le rapport ρ (identiquement au cas binaire).

Transmission M-aire

- En utilisant un filtre adapté à la forme d'onde $h(t)$, la probabilité d'erreur est exprimée en fonction de l'énergie de $h(t)$

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2E_h}{N_0}} \right) = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_h}{N_0}} \right)$$

- L'énergie moyenne E_m du signal reçu à l'entrée du récepteur par un symbole M-aire est

$$E_m = \int_{-\infty}^{+\infty} E[a_0^2] h^2(t) dt = \frac{M^2 - 1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = \frac{M^2 - 1}{3} E_h$$

NB: l'énergie moyenne d'un signal stationnaire centré est égale à sa variance.

- La probabilité d'erreur peut être exprimé en fonction de l'énergie moyenne par

$$P_e = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1} \frac{E_m}{N_0}} \right)$$

Transmission M-aire

- Le passage de la probabilité d'erreur symbole P_e à la probabilité d'erreur binaire P_{eb} n'est pas simple, mais on a toujours:

$$\frac{P_e}{\log_2(M)} \leq P_{eb} < P_e$$

- Pour un codage de Gray et un rapport $\frac{E_m}{N_0}$ suffisamment élevé, une erreur sur a_0 conduit en général à un seul élément binaire erroné parmi $\log_2(M)$ bits.
- La probabilité d'erreur par élément binaire P_{eb} est alors approchée par

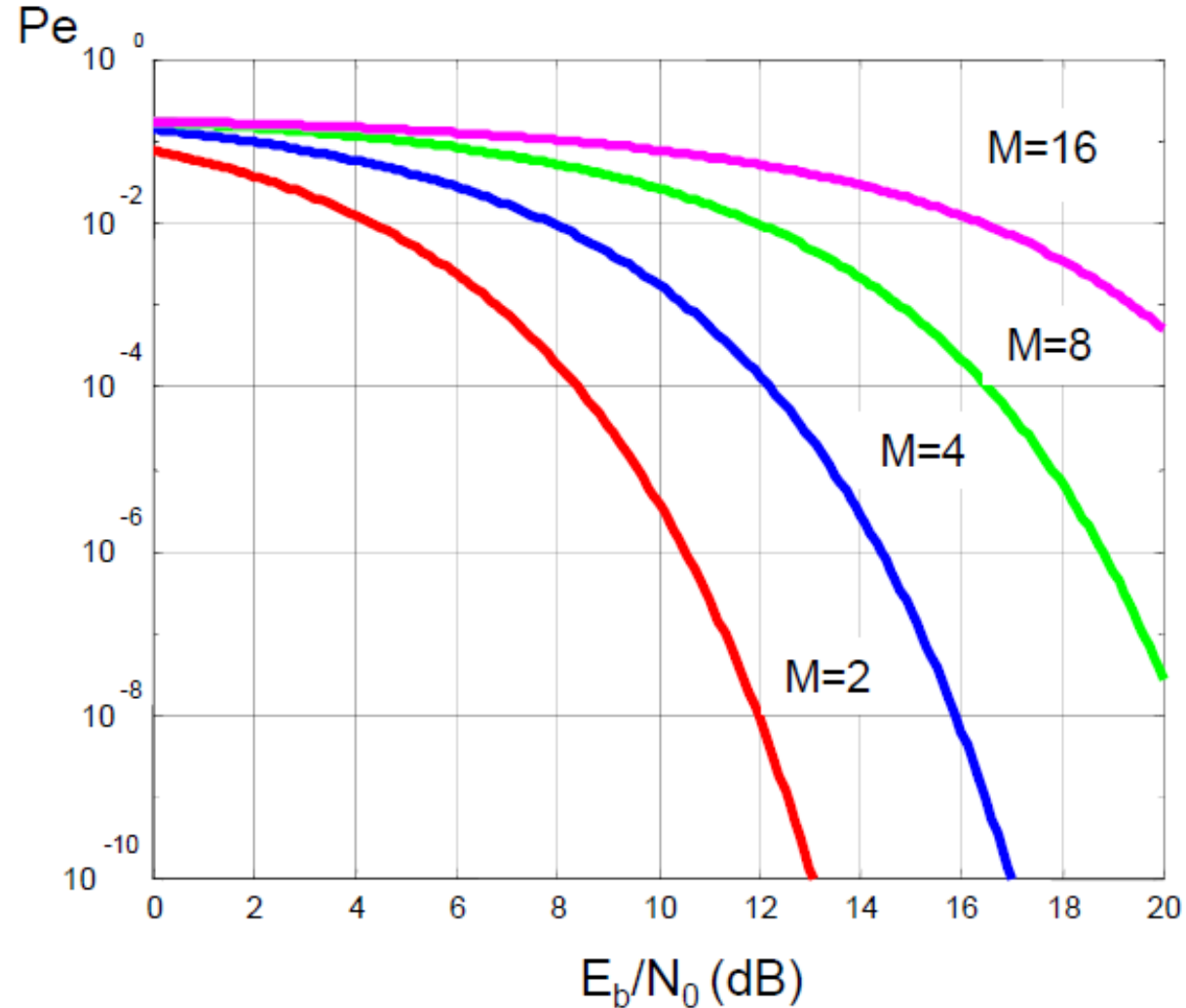
$$P_{eb} \approx \frac{P_e}{\log_2(M)}$$

- L'énergie moyenne reçue par élément binaire d'information transmis E_b est: $E_b = E_m / \log_2(M)$

$$P_{eb} \approx \frac{M-1}{M \log_2(M)} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Transmission M-aire

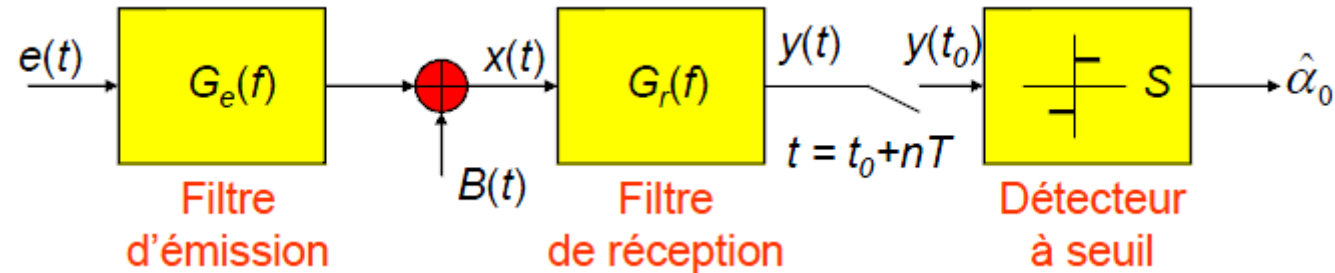
- Probabilité d'erreur minimale pour différentes valeurs de M .



Transmission en BdB sur un canal à bande limitée

Transmission de plusieurs symboles

- On considère la chaîne de transmission suivante:



- Contraintes:
 - Allocation de bande: canal partagé entre plusieurs utilisateurs
 - Support de transmission sélectif en fréquence (câble métallique, bifilaire ou coaxial, présente une atténuation)
- Conséquence: Filtrage du signal émis et limitation de sa bande
- Il s'agit d'établir la condition que doit vérifier le filtre de mise en forme pour éviter les Interférences Entre Symboles (IES) (Inter Symbol Interference: ISI).

Transmission de plusieurs symboles

- Le signal reçu :

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT) + B(t), \quad h(t) = h_e^* g_e(t)$$

- Le signal à la sortie de l'échantillonneur:

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k r[t_0 + (n - k)T] + b(t_0 + nT)$$

$$r(t) = h * g_r(t), \quad b(t) = B * g_r(t)$$

- Le signal échantillonné ($y(t_0 + nT)$) peut être décomposé sous la forme

$$y(t_0 + nT) = \underbrace{a_n r(t_0)}_{\downarrow \text{Terme utile en } a_n} + \underbrace{\sum_{m \neq 0} a_{n-m} r[t_0 + mT]}_{\downarrow \text{IES}} + \underbrace{b(t_0 + nT)}_{\downarrow \text{Bruit}}$$

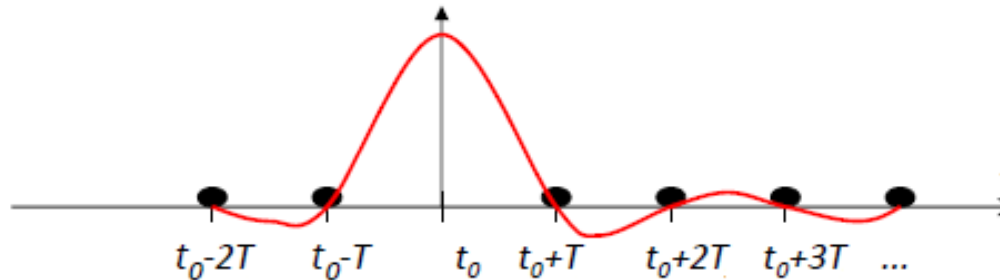
Transmission de plusieurs symboles-critère de Nyquist

- Dans cette expression, le premier terme est le signal utile a_n (le symbole qu'on veut détecter), le second est l'interférence entre les symboles (contribution d'autres symboles) et le troisième est le bruit.
- Pour annuler l'IES aux instants de décision $t_0 + nT$, il faut que

$$r(t_0 + mT) = 0 \quad \forall m \neq 0 \Leftrightarrow \sum_m r(t_0 + mT) \delta(t - mT) = r(t_0) \delta(t)$$

Exemple pour $r(t)$:

$$r(t_0 + mT) = \begin{cases} r(t_0), & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$



- Le signal $r(t)$ échantillonné, correspondant aux différentes valeurs échantillonnées, s'exprime aussi de la façon suivante

$$r_e(t) = r(t + t_0) \sum_m \delta(t - mT)$$

Transmission de plusieurs symboles-critère de Nyquist

- La transformée de Fourier de cette expression donne

$$\frac{1}{T} R(f) e^{j2\pi f t_0} * \sum_m \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_m e^{j2\pi\left(f - \frac{m}{T}\right)t_0} R\left(f - \frac{m}{T}\right) = r(t_0)$$

- On pose $r_1(t) = r(t + t_0)$, on en déduit que

$$\sum_m R_1\left(f - \frac{m}{T}\right) = T r(t_0) = \text{cst}$$

- En normalisant l'échantillon central à 1 ($r(t_0) = 1$), on obtient

$$\sum_m R_1\left(f - \frac{m}{T}\right) = T$$

- Cette condition est connue sous le nom de **critère de Nyquist** que doit vérifier le filtre récepteur pour éviter les IES.
- On en déduit qu'on ne peut pas transmettre sans IES un signal de rapidité de modulation $R = \frac{1}{T}$ dans une bande B inférieure à $\frac{1}{2T}$ (**bande de Nyquist**).
- D'où on a nécessairement: $R \leq 2B$.

Transmission de plusieurs symboles-critère de Nyquist

- Si $R_1(f)$ vérifie le critère de Nyquist, alors tous les filtres de fonction de transfert

$$R(f) = R_1(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

vérifient également ce critère.

- Il est clair que si la réponse $r_1(t)$ présente des passages par zéro espacés de T , il en est de même pour $r(t)$. Le critère de Nyquist est vérifié pour l'instant d'échantillonnage t_0 au lieu de l'instant 0 pour $r(t)$.
- Les expressions précédentes portent sur le filtre globale $r(t) = h(t) * g_r(t)$, pour un choix général des filtres. Dans le cas du filtre adapté, et en prenant $g_r(t) = h^*(t_0 - t)$ (pour un coefficient $K = 1$), on obtient

$$G_r(f) = e^{-j2\pi ft_0} H^*(f)$$

et

$$R(f) = G_r(f)H(f) = e^{-j2\pi ft_0} |H(f)|^2$$

rappelant que

$$\sum_m e^{j2\pi\left(f - \frac{m}{T}\right)t_0} R\left(f - \frac{m}{T}\right) = Tr(t_0) = \text{cst}$$

Transmission de plusieurs symboles-critère de Nyquist

- En remplaçant R par sa nouvelle expression, on obtient

$$\sum_m \left| H \left(f - \frac{m}{T} \right) \right|^2 = Tr(t_0) = \sum_m \left| R \left(f - \frac{m}{T} \right) \right|^2$$

→ C'est le critère de **Nyquist** que doit vérifier le filtre de mise en forme pour éviter les IES.

- Le filtre $R(f)$ qui vérifie le critère de Nyquist et qui possède la plus petite bande passante est un filtre rectangulaire de support $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T} \right]$
- Sa réponse fréquentielle et celle impulsionnelle sont

$$R(f) = \begin{cases} Tr(t_0) e^{-j2\pi f t_0} & , \forall |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad r(t) = Tr(t_0) \text{sinc} \left(\frac{t-t_0}{T} \right)$$

- Evidemment, la fonction de transfert étant à support borné, la réponse impulsionnelle est de longueur infinie.

Transmission de plusieurs symboles-filtre en cosinus surélevé

- En pratique, on utilise un filtre réalisable tel que le filtre en **cosinus surélevé** (solution généralement retenue dans les équipements de transmission) défini par

$$CS_{\alpha}(f) = \begin{cases} T r(t_0) & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} r(t_0) \left[1 + \sin \frac{\pi T}{\alpha} \left(\frac{1}{2T} - |f| \right) \right] & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

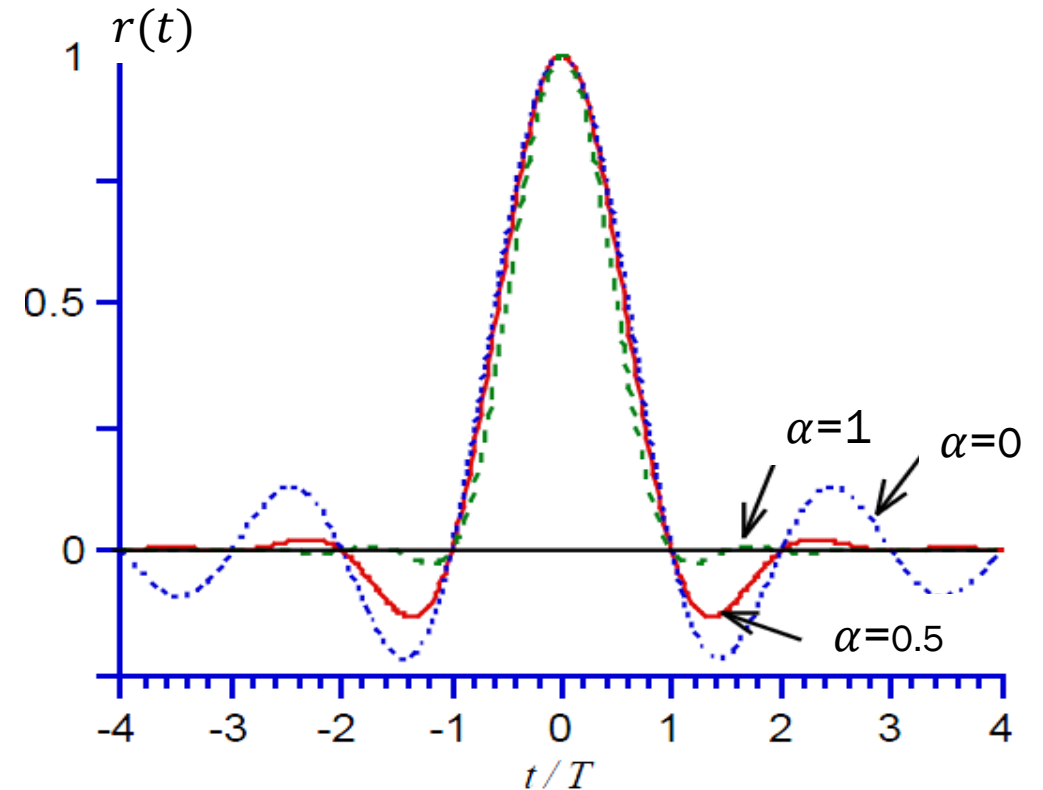
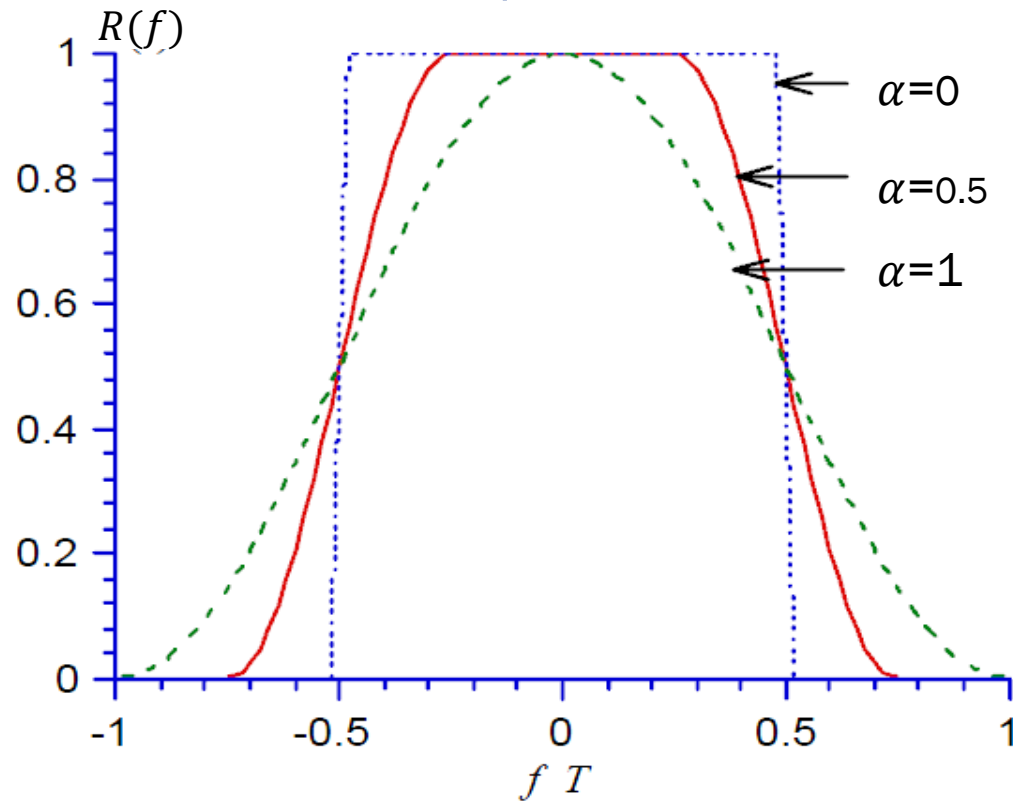
- La réponse impulsionnelle du filtre CS_{α} est

$$cs_{\alpha}(t+t_0) = r(t_0) \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha t}{T}\right)}{1 - 4\alpha^2 \frac{t^2}{T^2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Où α est le coefficient de retombée (*rolloff factor*) compris entre 0 et 1.

Transmission de plusieurs symboles-filtre en cosinus surélevé

- Le filtre de cosinus surélevé a une bande de fréquence $\left[-\frac{1+\alpha}{2T}, \frac{1+\alpha}{2T}\right]$
- Notons que pour des coefficients de retombée plus grand, le support fréquentiel $\frac{1+\alpha}{2T}$ est plus grand alors que celui temporel est plus petit, et aussi les lobes secondaires sont plus bas induisant à une plus faible sensibilité aux interférences.

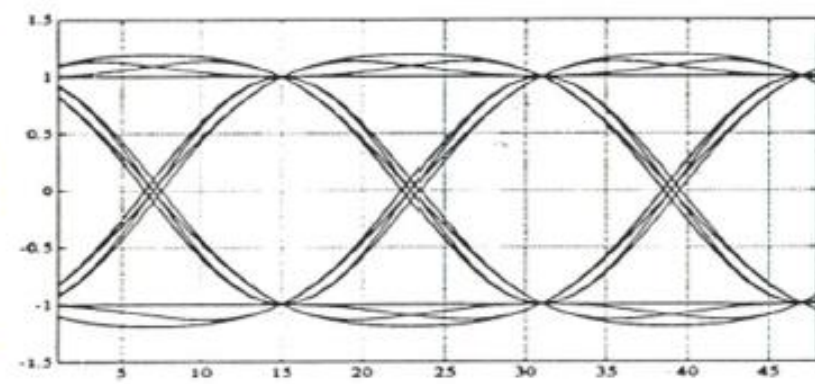
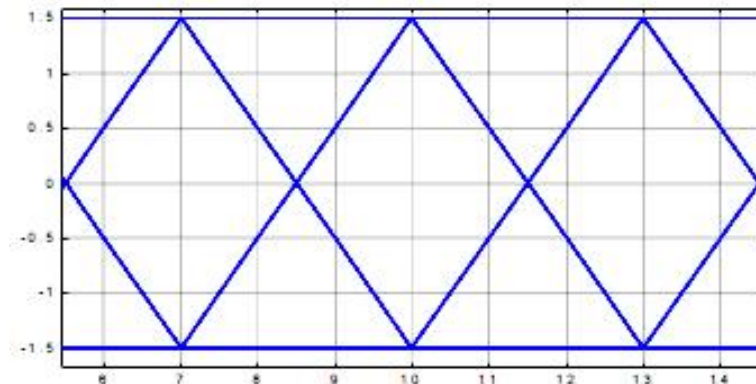


Transmission de plusieurs symboles-diagramme de l'œil

- Pour caractériser les interférences entre symboles à chaque instant, on peut superposer toutes les trajectoires possibles du signal $y(t)$ non bruité à la sortie du filtre adapté, noté $z(t)$

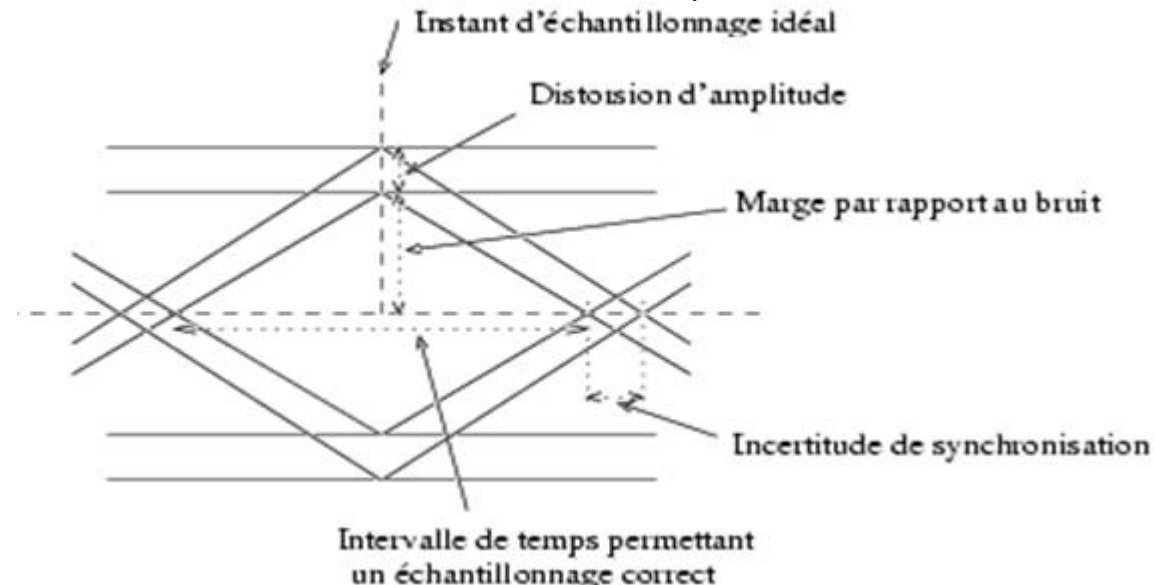
$$z(t) = \sum_m a_m r(t - mT)$$

- La présentation de toutes les traces possibles est connue par le diagramme de l'œil, appelé ainsi par analogie avec la forme d'un œil humain. Il peut être visualisé sur un oscilloscope.
- Le diagramme de l'œil a un motif qui se répète toutes les durées symbole.
- Exemple: diagramme de l'œil pour un canal idéal et réel en transmission binaire (NRZ bipolaire)



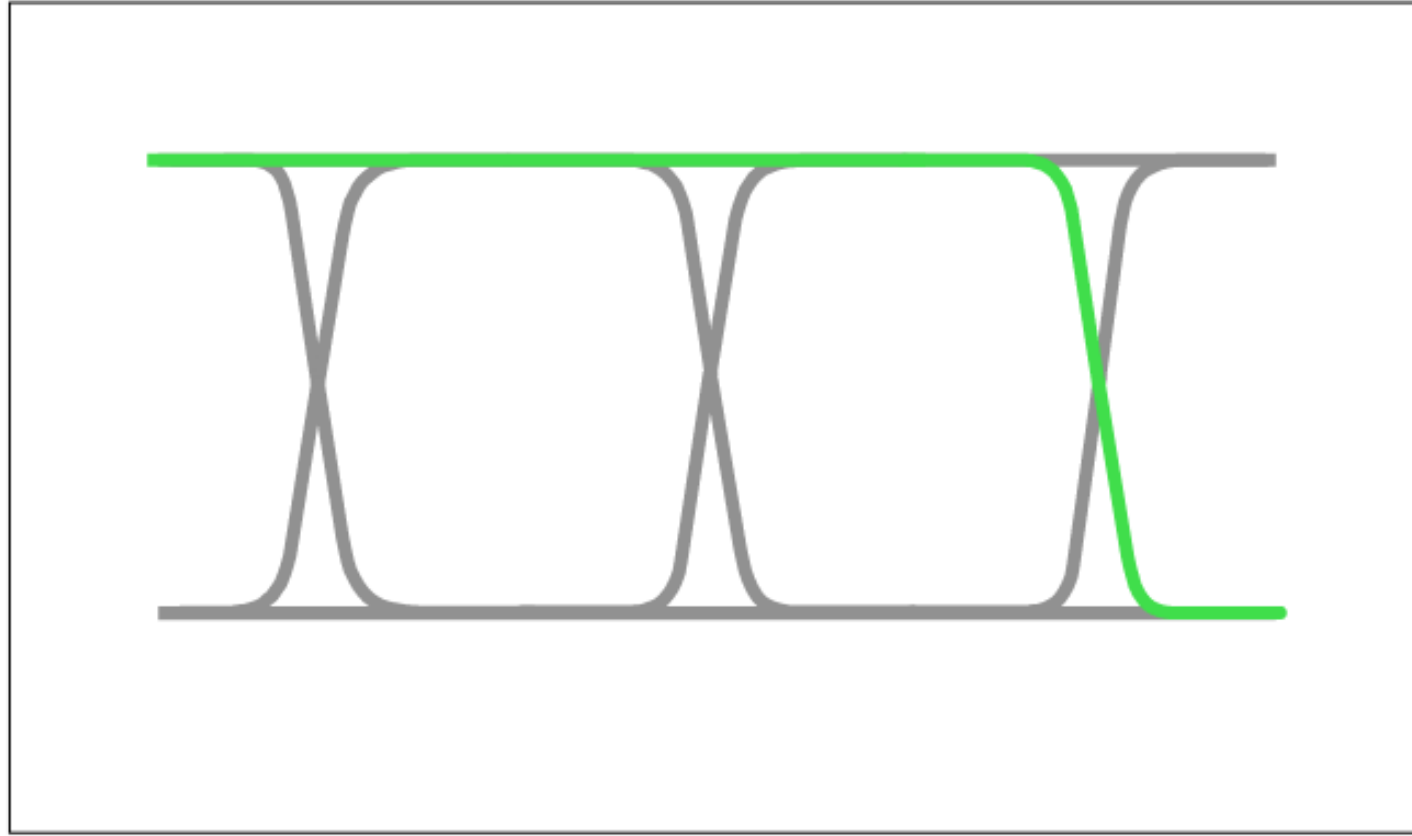
Transmission de plusieurs symboles-diagramme de l'œil

- L'observation du diagramme de l'œil fournit les indications suivantes:
 - L'ouverture verticale de l'œil caractérise l'immunité au bruit. Plus l'œil est ouvert verticalement, plus il est facile de discerner entre les symboles possible en présence de bruit. La détection à seuil est plus robuste aux interférences si on fait coïncider l'instant d'échantillonnage du signal reçu avec l'instant d'ouverture maximale de l'œil.
 - L'ouverture horizontale caractérise la robustesse à un décalage des instants d'échantillonnage. L'œil est ainsi plus ouvert dans le cas où les lobes secondaires de la réponse temporelle sont faibles (pour les fonctions en cosinus surélevé, ceci correspond aux grandes valeurs du coefficient de roll-off α)

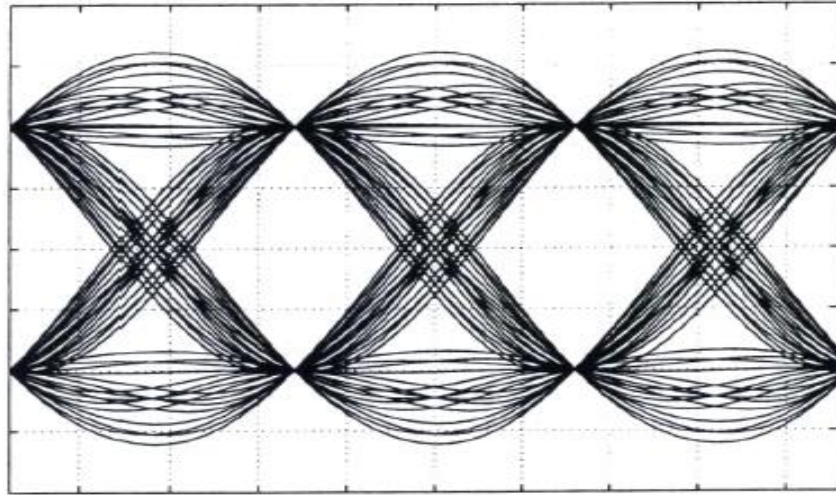


Transmission de plusieurs symboles-diagramme de l'œil

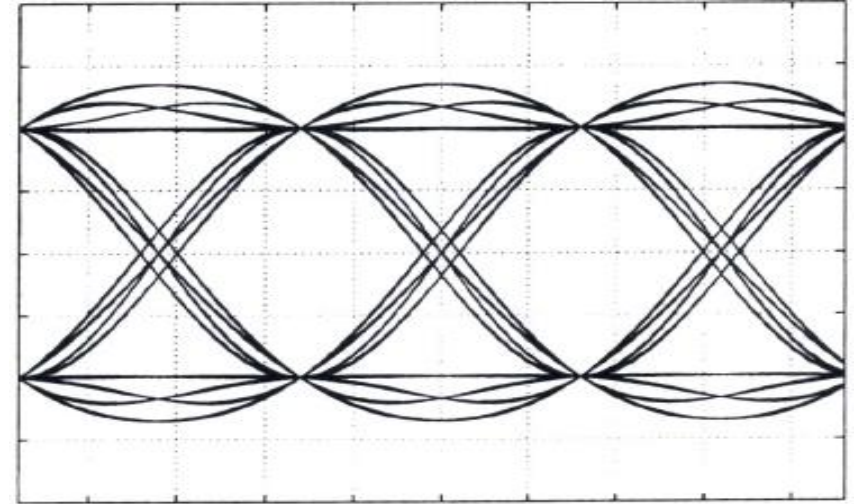
- Si on observe la sortie du filtre sur un support temporel de $r(t)$ égal à NT et que les a_m appartiennent à une constellation (alphabet) de M éléments, il y aura alors M^N .
- Exemple: $N = 2$ et $M = 2$



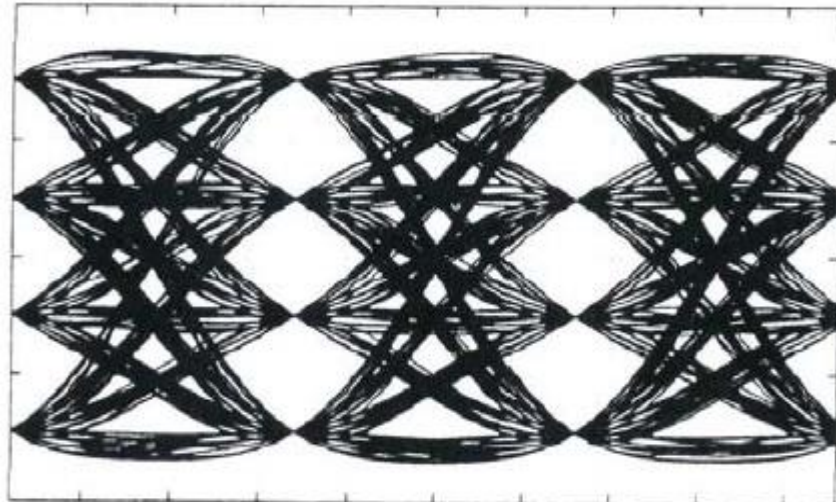
Transmission de plusieurs symboles-diagramme de l'œil



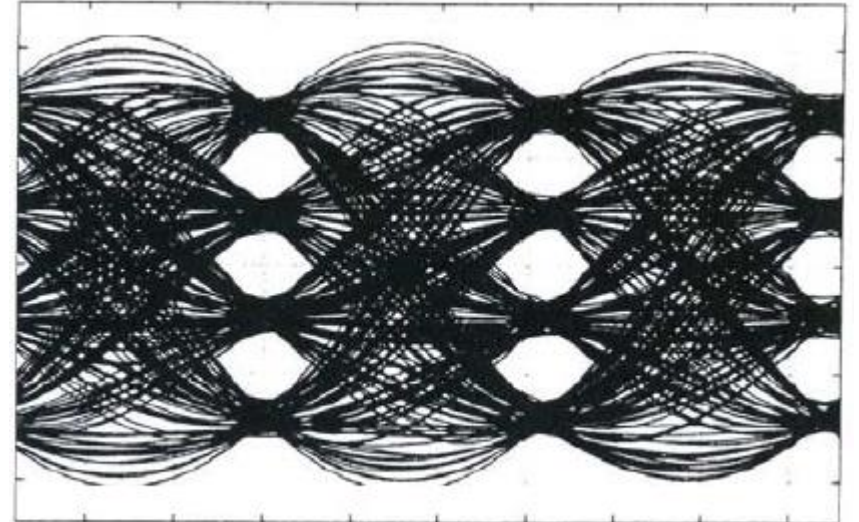
$\alpha = 0,4$



$\alpha = 0,6$



Sans IES



Avec IES