

énéral2.6.137



# Couverture des risques dans les marchés financiers

Nicole El Karoui

Ecole Polytechnique, CMAP, 91128 Palaiseau Cedex

email : [elkaroui@cmapx.polytechnique.fr](mailto:elkaroui@cmapx.polytechnique.fr)



Année 2003-2004



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation des produits dérivés</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction aux marchés financiers . . . . .	11
1.2	Titres de base et produits dérivés . . . . .	12
1.2.1	Titres de base . . . . .	12
1.2.2	Les contrats à terme . . . . .	12
1.3	Caractéristiques financières des contrats d'options . . . . .	14
1.3.1	Les options négociables . . . . .	14
1.3.2	Les options de gré à gré . . . . .	18
1.3.3	Utilité des produits dérivés . . . . .	19
1.4	Les activités de marché d'une banque . . . . .	20
1.4.1	Le Front office . . . . .	20
1.4.2	Middle Office . . . . .	21
1.4.3	Le Back Office . . . . .	22
<b>2</b>	<b>EVALUATION et COUVERTURE : La FORMULE DE BLACK et SCHOLLES</b>	<b>23</b>
2.1	Le message de Black, Scholes et Merton. . . . .	23
2.1.1	Prix et couverture . . . . .	23
2.1.2	Absence d'opportunité d'arbitrage . . . . .	26
2.1.3	Incidence sur les prix de l'absence d'arbitrage . . . . .	26
2.2	Evaluation et Couverture dynamique . . . . .	27
2.2.1	Gestion dynamique . . . . .	27
2.2.2	Quelques considérations de bon sens . . . . .	27
2.3	Modélisation de la dynamique du sous-jacent : Le mouvement brownien géométrique	28
2.3.1	Définition et Propriétés . . . . .	29
2.3.2	Interprétation financière des paramètres du modèle . . . . .	32
2.4	Portefeuille dynamique . . . . .	33
2.4.1	Portefeuille autofinçant écrit sur un sous-jacent risqué . . . . .	33
2.4.2	Formulation mathématique du risque nul . . . . .	34
2.5	Evaluation par équation aux dérivées partielles . . . . .	34
2.5.1	L'EDP d'évaluation . . . . .	35
2.5.2	Extensions . . . . .	36
2.5.3	Interprétation financière de l'EDP d'évaluation . . . . .	36

2.6	La formule de Black et Scholes . . . . .	37
2.6.1	Résolution de l'EDP . . . . .	37
2.6.2	Les formules fermées . . . . .	41
2.6.3	Propriétés du prix des Calls et des Puts . . . . .	42
2.6.4	Les grecques . . . . .	43
2.7	Implémentation de la formule . . . . .	44
2.8	Volatilité . . . . .	45
2.8.1	Précisions sur la volatilité . . . . .	45
2.8.2	Volatilité historique . . . . .	46
2.8.3	La volatilité implicite . . . . .	48
2.8.4	Volatilité implicite et Risk-management . . . . .	48
2.9	Le smile . . . . .	53
2.9.1	Smile et options exotiques . . . . .	54
2.10	Exemples de Produits Structurés sur indices . . . . .	55
2.10.1	Motivation . . . . .	55
2.10.2	Définition et caractéristiques des produits . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Options barrières</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Formule de symétrie dans la formule de Black et Scholes . . . . .	60
3.2.1	Formule de symétrie Call-Put sans coût de portage . . . . .	60
3.2.2	Principe de symétrie dans le cas général . . . . .	61
3.3	Options barrières . . . . .	64
3.3.1	Caractéristiques générales . . . . .	64
3.3.2	Pricing et Réplication d'une option Up In regular . . . . .	65
3.4	Application aux Calls, Puts et Binaires . . . . .	67
3.4.1	Evaluation des options UIB . . . . .	67
3.4.2	Le cas de Put . . . . .	68
3.5	Delta-hedging des options barrières . . . . .	69
3.5.1	EDP d'évaluation . . . . .	69
3.6	Quelques applications mathématiques . . . . .	70
3.6.1	Loi du temps d'atteinte $T_H$ de la barrière haute . . . . .	70
3.6.2	Loi du maximum, ou du minimum . . . . .	72
3.7	Les options lookback . . . . .	73
3.8	Appendice . . . . .	75
3.8.1	Réplication en maturités . . . . .	75
3.8.2	Evaluation des options barrières Out en cas de paiement de dividendes . .	76
<b>4</b>	<b>Arbitrage statique, distribution et diffusion implicites</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Arbitrage statique . . . . .	82
4.2.1	Incidence sur les prix de l'absence d'arbitrage statique . . . . .	82

4.2.2	Arbitrage international . . . . .	83
4.3	Système de prix viable et arbitrage . . . . .	84
4.3.1	Propriétés des prix des produits dérivés . . . . .	85
4.4	Les prix comme espérance : le point de vue statique . . . . .	86
4.4.1	Arbitrage statique et prix d'états . . . . .	86
4.5	Applications probabilistes . . . . .	88
4.5.1	Fonctions convexes et formule d'Itô . . . . .	88
4.5.2	Temps local et densité . . . . .	89
4.5.3	Applications à la répliation statique des options barrières UI . . . . .	89
4.6	La diffusion implicite de Dupire . . . . .	90
4.6.1	Les entrées du problèmes . . . . .	90
4.6.2	Une étude directe . . . . .	91
4.6.3	Calcul de la fonction de volatilité : l'EDP forward . . . . .	91
4.6.4	Diffusion implicite . . . . .	92
4.6.5	Le vrai problème de calibration . . . . .	94
<b>5</b>	<b>L'ÉVALUATION ET LA COUVERTURE DES OPTIONS sur MULTI SOUS-</b>	
	<b>JACENTS</b>	<b>95</b>
5.1	Introduction . . . . .	95
5.2	Portefeuilles et autofinancement . . . . .	95
5.2.1	Le cadre . . . . .	95
5.2.2	Portefeuille autofinçant . . . . .	97
5.3	Absence d'Opportunités d'arbitrage et rendement des titres . . . . .	100
5.3.1	Arbitrage . . . . .	100
5.3.2	Contraintes sur la dynamique des titres . . . . .	101
5.4	Numéraire . . . . .	103
5.4.1	Arbitrage et numéraire . . . . .	103
5.4.2	Primes de risque et changement de numéraire . . . . .	105
5.4.3	Le numéraire de marché . . . . .	106
5.5	Evaluation et couverture . . . . .	107
5.5.1	Prix des produits dérivés atteignables . . . . .	107
5.5.2	Marché complet . . . . .	109
5.5.3	Probabilité risque-neutre, ou mesure-martingale . . . . .	110
5.5.4	Numeraire et changement de probabilité . . . . .	112
5.6	La formule de Black et Scholes Revisitée . . . . .	113
5.6.1	Portefeuille associé à un titre versant un dividende . . . . .	113
5.6.2	Les probabilités d'exercice . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Arbitrage multidevise :</b>	
	<b>Application aux options quanto</b>	<b>117</b>
6.1	Arbitrage multidevise . . . . .	117
6.1.1	Principe général d'évaluation . . . . .	118

6.1.2	Application aux options quanto . . . . .	118
6.2	Dynamique des produits financiers et primes de risque . . . . .	120
6.3	Options sur un marché étranger : Les options quanto . . . . .	122
6.4	Les formules fermées d'évaluation des Call quanto . . . . .	123
6.4.1	La formule de Black . . . . .	123
6.4.2	Options d'achat sur action étrangère avec strike en monnaie domestique .	124
6.4.3	Options d'achat sur devise . . . . .	125
6.5	Les options sur actions étrangères avec taux de change fixé . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Marchés à termes, Produits dérivés sur Matières Premières,</b>	
	<b>par Julien Samaha, Crédit Lyonnais.</b>	<b>129</b>
7.1	Présentation des marchés . . . . .	129
7.1.1	Marchés de contrats à terme . . . . .	129
7.1.2	En quoi ces marchés sont-ils différents ? . . . . .	130
7.1.3	Qui sont les acteurs sur ces marchés ? . . . . .	131
7.1.4	Principaux facteurs . . . . .	131
7.2	Analyse des prix . . . . .	133
7.2.1	Arbitrage cash-and-carry . . . . .	133
7.2.2	Rendement d'opportunité (convenience yield) . . . . .	133
7.2.3	Report (contango) et déport (backwardation) . . . . .	134
7.2.4	Analyse en composantes principales . . . . .	135
7.2.5	Autres propriétés statistiques . . . . .	136
7.3	Produits dérivés sur matières premières . . . . .	137
7.3.1	Swaps . . . . .	137
7.3.2	Options Asiatiques . . . . .	137
7.3.3	Options sur spread . . . . .	137
7.3.4	Options exotiques . . . . .	138
7.4	Modélisation des prix à terme de matières premières . . . . .	138
7.4.1	Un exemple simple de modèle de courbe : le modèle de Schwartz 1-facteur	139
7.4.2	Exemple de modèle spot 2-facteurs : les modèles de Gibson-Schwartz et Schwartz-Smith . . . . .	139
<b>8</b>	<b>LES MODÈLES CLASSIQUES DE TAUX</b>	<b>145</b>
8.1	La formation des taux d'intérêt . . . . .	145
8.1.1	L'importance de la Banque Centrale. . . . .	145
8.1.2	Formation des taux longs et anticipation des agents . . . . .	146
8.1.3	Spreads et qualité de signature . . . . .	147
8.1.4	Les principaux taux fixes ou variables du marché français . . . . .	147
8.2	Taux d'intérêt et absence d'arbitrage . . . . .	149
8.2.1	Généralités sur les taux d'intérêt . . . . .	149
8.2.2	Prix et taux à terme . . . . .	150
8.3	Absence d'arbitrage et modélisation des taux . . . . .	150



8.3.1	Modèles déterministes et anticipations rationnelles . . . . .	150
8.3.2	Les modèles aléatoires . . . . .	151
8.4	Le modèle de Vasicek . . . . .	151
8.4.1	L'équation des taux . . . . .	152
8.4.2	La courbe des taux issue du modèle de Vasicek . . . . .	153
8.4.3	Le modèle de Vasicek généralisé . . . . .	154
8.4.4	L'EDP d'évaluation et le prix des options sur zéro-coupons . . . . .	154
8.5	Le modèle de CIR . . . . .	155
8.5.1	Calcul des prix zéro-coupon . . . . .	156
8.6	Extension . . . . .	157
8.6.1	Les modèles linéaires . . . . .	157
8.7	Calibration de la courbe des taux . . . . .	157
8.7.1	La méthode classique . . . . .	158
8.7.2	La méthode des splines . . . . .	158
8.7.3	Paramétrisation à la Vasicek . . . . .	158
8.7.4	Sensibilités aux paramètres de risque . . . . .	160
<b>9</b>	<b>LES MODÈLES de DEFORMATION de la COURBE des TAUX</b>	<b>163</b>
9.1	Le modèle en absence d'opportunité d'arbitrage . . . . .	164
9.1.1	Le modèle pour les zéro-coupon . . . . .	164
9.2	Equation structurelle des taux . . . . .	166
9.2.1	Taux zéro-coupon et conditions initiales . . . . .	166
9.3	Exemples de fonctions de volatilité . . . . .	170
9.3.1	Un modèle faiblement stationnaire . . . . .	170
9.3.2	Le cas unidimensionnel . . . . .	171
9.3.3	Le cas multi-dimensionnel . . . . .	172
9.4	ANALYSE en TERME de VARIANCE-COVARIANCE . . . . .	172
9.4.1	Etudes des corrélations . . . . .	173
9.4.2	Espérance et anticipations . . . . .	175
9.4.3	Pouvoir prédictif des taux forwards . . . . .	176
9.4.4	Anticipation et gestion de portefeuille . . . . .	177
9.4.5	Arbitrage et théorie des anticipations instantanées . . . . .	178
<b>10</b>	<b>PRODUITS DÉRIVÉS sur TAUX d'INTÉRÊT</b>	<b>181</b>
10.1	Les INSTRUMENTS de COUVERTURE :	
	FRAs, Futures, Swaps, Caps, Floors et Swaptions . . . . .	181
10.1.1	Contrats forward et FRA's . . . . .	181
10.1.2	Les contrats Future . . . . .	182
10.1.3	Les options sur future . . . . .	182
10.1.4	Les Swaps . . . . .	183
10.1.5	Les instruments optionnels de taux . . . . .	183
10.2	Introduction aux méthodes d'évaluation . . . . .	184

10.3	Identification de l'échéancier . . . . .	185
10.3.1	Quelques exemples d'échéanciers . . . . .	185
10.4	Evaluation forward . . . . .	186
10.4.1	Exemples de contrats dont l'évaluation ne demande pas de modèle . . . .	187
10.4.2	Marché à terme et probabilité forward neutre . . . . .	188
10.4.3	Correction de convexité pour les contrats forwards . . . . .	189
10.4.4	Correction de convexité lorsque les volatilités sont déterministes . . . .	190
10.4.5	Options sur zéro-coupon et caplet . . . . .	190
10.5	Options sur obligations à coupons, Swaptions . . . . .	191
<b>11</b>	<b>LE MODELE LOG-NORMAL sur TAUX PIBOR</b>	<b>193</b>
11.1	Pricing des caplets . . . . .	193
11.1.1	Dynamique des taux-dynamique des prix . . . . .	194
11.1.2	Pricing en taux et pricing en prix . . . . .	195
11.2	Pricing des swaptions . . . . .	196
11.2.1	Calcul du taux de swap, et du pay-off des swaptions . . . . .	196
11.2.2	Evaluation de la swaption dans le cas log-normal sur les prix . . . . .	197
11.2.3	Evaluation de la swaption dans le cas log-normal sur les taux forwards . .	198
11.2.4	Calibration de la fonction de volatilité . . . . .	199
11.2.5	Conclusion . . . . .	199
<b>12</b>	<b>Le modèle de marché : évaluation des swaptions et calibration</b>	<b>201</b>
12.1	Instruments de base . . . . .	202
12.1.1	Zéro-coupon et taux court . . . . .	202
12.1.2	Taux LIBOR et swaps . . . . .	202
12.2	Modèle de marché . . . . .	203
12.2.1	Définition . . . . .	203
12.2.2	Options sur taux . . . . .	204
12.3	Evaluation des swaptions . . . . .	206
12.3.1	Approximation de la dynamique du taux swap . . . . .	206
12.3.2	Calcul du prix . . . . .	207
12.4	Calibration . . . . .	208
12.4.1	Contraintes sur les prix de swaptions . . . . .	208
12.4.2	Objectifs . . . . .	208
<b>13</b>	<b>Appendice : Volatilité stochastique (par Julien Guyon)</b>	<b>211</b>
13.1	Introduction . . . . .	211
13.1.1	Notations . . . . .	211
13.1.2	Interprétation . . . . .	212
13.1.3	A quoi s'attendre ? . . . . .	215
13.2	Prix d'une option européenne . . . . .	215
13.2.1	EDP d'évaluation . . . . .	215

13.2.2	Interprétation probabiliste . . . . .	218
13.3	Analyse asymptotique . . . . .	220
13.3.1	Retour à la moyenne . . . . .	220
13.3.2	Le prix Black-Scholes corrigé . . . . .	222
13.3.3	Stratégies de couverture . . . . .	228
13.4	L'approche martingale . . . . .	234
13.4.1	Démarche . . . . .	234
13.4.2	Notations . . . . .	236
13.4.3	Le prix corrigé comme martingale approchée . . . . .	237
13.4.4	Retrouver le prix $P_0 + \tilde{P}_1$ . . . . .	240
13.5	Calibration . . . . .	243
13.5.1	Le prix corrigé de l'option d'achat . . . . .	243
13.5.2	Surface de volatilité implicite . . . . .	244
13.6	Simulations numériques . . . . .	245
13.6.1	Schémas numériques pour l'EDP d'évaluation . . . . .	245
13.6.2	Méthode de Monte-Carlo <sup>1</sup> . . . . .	248
13.7	Perspectives . . . . .	261

---

<sup>1</sup>Cette section doit beaucoup à Bernard LAPEYRE qui est à l'origine de plusieurs améliorations.



# Chapitre 1

## Présentation des produits dérivés

### 1.1 Introduction aux marchés financiers

Une révolution de grande ampleur a eu lieu depuis une trentaine d'années sur les marchés financiers, suite à une politique affirmée de dérégulation. Ce nouveau paysage financier est né notamment des déséquilibres et des incertitudes qui pèsent sur les relations économiques internationales depuis le début des années 1970 (endettement des pays en voie de développement, instabilité des taux de change). Le développement de l'inflation et la grande volatilité des taux d'intérêt ont perturbé les anticipations des investisseurs. D'autre part, l'internationalisation des capitaux, *les progrès technologiques* en informatique et communication ont modifié les relations entre les différentes places financières : New-York, Londres, Tokyo, etc... : il est maintenant possible à tout instant d'intervenir sur tous les marchés.

En France, les réformes ont commencé à la mi-1984 avec comme objectifs, le décloisonnement des marchés et la création d'un unique marché des capitaux, la modernisation des réseaux financiers. Un élément majeur de cette politique a été la création de deux marchés financiers très actifs, et avec de grandes liquidités, sur lesquels vont être négociés de nouveaux instruments financiers :

- le *MATIF* ou Marché à Terme International de France (1985) (d'abord nommé Marché à Terme des Instruments Financiers) et actuellement membre d'Euronext.
- le *MONEP* ou Marché des Options Négociables de Paris (1987).

Les utilisateurs de ces nouveaux instruments de trésorerie forment un éventail très vaste : entreprises industrielles et commerciales, sociétés d'assurance, banques, caisses d'épargne ... Ces nouveaux instruments viennent au secours des investisseurs pour contrebalancer l'instabilité des paramètres de marché, comme les taux d'intérêt, les taux de change etc...

## 1.2 Titres de base et produits dérivés

### 1.2.1 Titres de base

L'activité financière se développe à travers un certain nombre d'instruments tels que la circulation de monnaie exprimée dans différentes **devises**, les opérations de prêts et d'emprunts qui sont assorties de paiements **d'intérêts** dépendant de la maturité des opérations, et bien sûr des actions émises par les entreprises qui reflètent leur capitalisation. Des indices ont été créés (SP500, CAC 40..) afin de permettre aux investisseurs étrangers d'avoir une information rapide sur le niveau économique et le comportement des actions d'un pays.

La très grande variabilité de ces paramètres ou de ces titres a conduit naturellement à une demande de transfert des risques de la part d'un certain nombre d'intervenants, comme les entreprises industrielles, les compagnies d'assurance..... Les banques jouent évidemment un rôle fondamental dans cette transformation, notamment en proposant un certain nombre de produits financiers, qui seront appelés **produits dérivés**.<sup>1</sup> Elles peuvent d'ailleurs utiliser elles-même ces produits dans leur gestion pour compte propre.

Ces produits "d'assurance" existent de fait depuis fort longtemps, puisqu'on a trouvé la description de contrats à terme sur le blé dans des textes de l'Antiquité. Il y avait aussi un marché de contrats à terme sur les métaux très actif à Amsterdam au 18ème siècle. Mais l'existence de marchés organisés (le premier est créé à Chicago en 1973) organisés pour diminuer le risque de contrepartie sur des opérations dénouées dans le futur, contribue à faciliter l'accès par un grand nombre d'intervenants à ce genre de produits. En France, le MATIF et le MONEP ouvrent entre les années 1985-1987.

Nous distinguerons les contrats à terme et les produits optionnels, que nous retrouverons en fonction de la nature du sous-jacent sur lequel ils sont écrits dans différents marchés :

- Le marché des changes : achat/vente de devises
- le marché des matières premières : métaux, pétrole, denrées agro-alimentaires...
- le marché des actions et des indices boursiers
- le marché des taux d'intérêt

### 1.2.2 Les contrats à terme

*Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps : l'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future précisée par le contrat, dite la maturité .*

1. Les conditions de l'échange sont définitivement fixées à la date où le contrat est noué, mais l'échange d'argent n'a lieu qu'à maturité. Ces contrats peuvent porter aussi bien sur

---

<sup>1</sup>Le petit livre de P.CHABARDES ET F.DELCAUX, "Produits dérivés", publié chez Gualino Editeur, est un remarquable exposé d'introduction aux produits dérivés.

Le livre d'AFTALION ET PONCET ; Les futures sur taux d'intérêt : le Matif ; (PUF 1997) est un exposé très documenté sur le fonctionnement du Matif, les contrats négociés sur ce marché, ainsi que les motivations des intervenants

des tonnes de pétrole, des instruments financiers, ou tout autre bien dont la qualité ou la quantité sont clairement spécifiées.

2. A la date d'échéance, il peut y avoir livraison physique du sous-jacent, contre le paiement de la totalité de la somme prévue dans le contrat. On parle de "*physical settlement*". Il est aussi possible que les contreparties n'échangent que la différence entre la valeur de marché du titre à l'échéance et le cours garanti. On parle de "*cash settlement*".
3. Il y a un risque de voir la contrepartie avec laquelle on a noué le contrat ne pas satisfaire à ses obligations. C'est le risque de *non-exécution* ou de contre-partie. Son élimination a conduit les marchés financiers à adopter des règles de fonctionnement concernant ces contrats légèrement différentes. On parle alors de **contrat futures**.
4. Les contrats à terme sont symétriques, c'est à dire qu' a priori chaque contrepartie a autant de chances que l'autre de gagner ou de perdre de l'argent dans le futur.
5. Pour les intervenants, l'intérêt des contrats à terme est de connaître le cours d'une opération dans le futur. Il s'agit dans ce cas d'une opération de **couverture** :

**Exemple :**

- ◊ Un industriel européen sait qu'il doit recevoir en dollars une forte somme d'argent, dans trois mois. Afin de figer la quantité dont il peut disposer, il achète un contrat à terme, d'échéance trois mois sur le dollar, en Euros.

Il s'agit donc d'une forme de couverture du risque de change, qui toutefois peut ne pas lui être favorable, si dans trois mois le contrat cote moins que le taux de change.

6. Toute opération dans le futur peut être mise en place à des fins de **spéculation**. Un opérateur qui anticipe (contre le marché) un certain type de mouvement peut acheter un contrat en espérant réaliser un gain.
7. Comme le souligne Aftalion et Poncet, ces marchés jouent aussi un rôle important en terme de *diffusion de l'information*. Les prix à terme reflètent en un certain sens les prévisions des participants du marché, même si nous verrons que des arguments d'arbitrage les contraignent de manière importante.
8. Un autre risque est présent en permanence sur les marchés à terme : *c'est le risque de liquidité*. Un intervenant qui voudrait échanger son contrat à une date antérieure à l'échéance peut ne pas trouver rapidement de contrepartie.  
Les marchés organisés ont essayé de mettre en place des règles de fonctionnement qui limitent à la fois le risque de contrepartie et de liquidité. Ces risques restent importants dans les marchés de gré à gré.
9. Les produits dérivés permettent aussi de faire **le lien entre différents marchés**, (taux, change, actions) de telle sorte que l'ensemble des prix disponibles forment un tout cohérent. En effet, des combinaisons de plusieurs opérations sur différents marchés peuvent permettre de gagner de l'argent à coup sûr sans prendre aucun risque : On réalise ce qu'on appelle un **arbitrage**.

La présence de nombreux professionnels très compétents dans les salles de marché aboutit par la loi de l'offre et de la demande à des ajustements de prix qui réduisent ces possibilités d'arbitrage. Nous verrons que cette "loi" des marchés liquides est à la base de la modélisation mathématique que nous présenterons dans les chapitres suivants.

## 1.3 Caractéristiques financières des contrats d'options

### 1.3.1 Les options négociables

*Une option est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou un actif à un cours convenu à l'avance, appelé **prix d'exercice** (Strike), à (ou jusqu'à) une date fixée, dite échéance de l'option.*

*En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le **prix de l'option**.*

Les **options européennes** sont les options exercées seulement le jour de l'échéance, et les **options américaines** celles qui peuvent être exercées à tout moment avant leur échéance. Les options cotées sur le marché à Paris sont américaines, mais les options de gré à gré sont souvent européennes.

Chaque contrat porte sur un nombre fixé d'actifs supports : 100 dans le cas des actions. Dans le cas du MONEP, il s'agit essentiellement d'options sur actions, ou éventuellement sur le CAC 40, qui est un indice reflétant le marché des actions en France. Dans le cas du MATIF, les options portent sur les contrats à terme sur taux PIBOR, ou sur le Notionnel, qui est un titre fictif de maturité dix ans, versant des coupons de 10%.

### Les options d'achat et de vente

Les options traitées sont essentiellement des options d'achat (call) ou de vente (put). Chaque contrat porte sur un nombre fixé d'actifs supports (100 dans le cas des actions). Le prix, fixé dans le contrat auquel l'opération peut se faire s'appelle *le prix d'exercice*, ou strike.

#### Les opérations sur les options

ACHAT D'UNE OPTION D'ACHAT :

L'acheteur paye au vendeur une *prime* qui lui donne le droit d'acheter à la date d'échéance de l'option, 100 actions à un prix d'exercice convenu à l'avance. C'est le principe d'une " promesse de vente". Ce droit n'est "*exercé*" que si les cours ont monté et dépassé le prix d'exercice . Les risques sont limités à la prime payée, et les gains dépendent de l'écart entre le prix d'exercice et le cours à l'échéance.

#### Exemples

- ◊ Par exemple, le Vendredi 28 Mai 1993 le CAC 40 cote 1904.58 pts. A l'échéance Juin 1993, pour un prix d'exercice de 1925 pts, la prime d'un option d'achat est de 28 pts, pour un prix d'exercice de 1875 , la prime est de 55pts. Si à la date d'échéance, les cours ont monté à 1950pts, l'option est exercée : on achète le CAC à 1925 pts et on peut le revendre tout



de suite à 1950 pts, soit un bénéfice net par titre support de 25 pts.

Mais il ne faut pas oublier qu'on a payé une prime à la date du 28 Mai, ce qui correspond à l'échéance à  $28(1+R)$  pts, où  $R$  est l'intérêt à payer entre le 28 Mai et l'échéance. Pour celui qui a acheté l'option, l'opération n'est gagnante, que si les cours ont monté à un niveau supérieur à  $1925 + 28(1 + R)$  pts.

Ce même jour, les options de vente de même échéance et de prix d'exercice 1950 pts, sont cotées 47 pts et celles de prix d'exercice 1875 pts sont cotées 3.50 pts.

- ◇ *Autre exemple* Le Jeudi 28 Septembre 1995, le CAC 40 cote 1767.58 pts. A l'échéance Décembre 1995, et pour une option d'achat, le plus petit prix d'exercice coté est de 1775 pts. La prime est de 75 pts, mais très peu de contrats ont été négociés à ce prix d'exercice. Les prix d'exercice les plus négociés ont été de 1950 pts et de 2000 pts avec des primes de 17 pts et de 9 pts respectivement.

Ces informations montrent que les marchés considèrent que le cours de l'indice est très bas, puisqu' aucune option de prix d'exercice inférieur à celui du cours de l'indice n'est cotée. Par suite, tout le monde anticipe une hausse du cours, mais a priori on ne sait pas de quelle ampleur elle sera. Dans un tel contexte, les hypothèses que nous ferons plus tard pour justifier le mode de calcul des prix ne sont pas satisfaites.

#### VENTE D'UNE OPTION D'ACHAT :

Le vendeur a l'obligation de livrer à l'échéance 100 actions au prix convenu, si l'acheteur le demande, c'est à dire exerce son droit. Son gain est constitué de la prime. Il espère que les cours vont baisser pour ne pas avoir à livrer. Les pertes peuvent être grandes en cas de hausse. Le vendeur est en général un investisseur professionnel.

#### ACHAT D'UNE OPTION DE VENTE :

L'acheteur a le droit de vendre 100 actions à un prix convenu. Les gains sont importants si les cours baissent ; la perte maximale est égale à la prime.

#### VENTE D'UNE OPTION DE VENTE :

Le vendeur a l'obligation d'acheter au détenteur de l'option 100 actions au prix convenu si l'option est exercée. Il espère que les cours vont monter pour ne pas avoir à les acheter.

#### STRADDEL :

Un straddel est une combinaison de deux options d'achat et de vente.

### Les paramètres des options

- *La durée d'exercice*

Dans les marchés organisés, trois échéances sont cotées simultanément : 3, 6 et 9 mois sur les mois suivants : mars, juin, septembre, décembre. La cotation cesse la veille de l'échéance, ce qui signifie que les options sont négociables jusqu'à l'avant-dernier jour du mois d'échéance. Toutefois, sur le CAC 40 l'échéance des options est mensuelle. Les pages financières des quotidiens donnent simultanément en plus des cours, le nombre de contrats traités. Les échéances les plus liquides

sont traditionnellement les plus proches.

- *Le prix d'exercice*

C'est le cours auquel l'option peut être exercée. Trois prix d'exercice au minimum sont cotés sur chaque action, et chacune des trois échéances. Ils respectent entre eux des écarts standards. Les trois prix d'exercice sont fixés à des cours proches de celui de l'action. Les options les plus liquides sont les options à la monnaie, pour lesquelles le prix d'exercice est proche de la valeur du cours. Les options dans la monnaie sont des options pour lesquelles la valeur intrinsèque n'est pas nulle. Les autres sont dites en dehors de la monnaie.

**Exemple**

◇ Le 02 Jan 2003, pour le CAC 40 cotant 3195.02 pts, les prix d'exercice étaient les suivants

3100 pts	au-dessous	(in the money) pour un Call
3150 pts	au-dessous	(in the money) pour un Call
3200 pts	au pair	(at the money)
3250 pts	au-dessus	(out of the money) pour un Call
3300 pts	au-dessus	(out of the money) pour un Call
3350 pts	au-dessus	(out of the money) pour un Call

**Remarque 1.3.1** Pour mémoire

**Exemple**

◇ Le 28 Mai 1993, pour le CAC 40 cotant 1905 pts, les prix d'exercice étaient les suivants :

1850 pts	au-dessous	(in the money) pour un Call
1875 pts	au-dessous	(in the money) pour un Call
1900 pts	au pair	(at the money)
1925 pts	au-dessus	(out of the money) pour un Call
1950 pts	au-dessus	(out of the money) pour un Call
1975 pts	au-dessus	(out of the money) pour un Call

Dans le cas des puts, la terminologie est inversée.

- *La prime*

La prime est le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option. Comme un contrat porte sur 100 actions support, l'acheteur doit payer 100fois la prime. Elle fait l'objet de cotations et peut être négociée : on peut acheter une option pour essayer de la revendre plus chère, ou l'inverse. Le prix de l'option évolue tout au long de sa durée de vie.

**Exemple**

◇ Le 02 Jan 2003, les primes des options d'achat et de vente d'échéance 31 Jan 2003 sur le CAC 40 cotant 3195.02 pts, sont de :

Prix d'exercice	Option d'achat	Option de vente
3100 pts	199.91 pts	100.13 Euro
3150 pts	168.86 pts	118.98 pts
3200 pts	140.41 pts	140.41 pts
3250 pts	115.17 pts	165.06 pts
3300 pts	93.26 pts	193.03 pts
3350 pts	74.10 pts	223.76 pts

**Remarque 1.3.2** Pour mémoire**Exemple**

- ◊ Le 28 Mai 1993, les primes des options d'achat et de vente d'échéance Juin 1993 sur le CAC 40 cotant 1905 pts, sont de :

Prix d'exercice	Option d'achat	Option de vente
1850 pts	70.00 pts	26.50 pts
1875 pts	55.00 pts	34.20 pts
1900 pts	37.00 pts	44.00 pts
1925 pts	28.00 pts	62.00 pts
1950 pts	17.00 pts	
1975 pts	11.00 pts	

Le prix de l'option est décomposé en *valeur intrinsèque* et *valeur temps*.

- *La valeur intrinsèque*

C'est la différence positive ou nulle entre le cours coté du titre support et le prix d'exercice.

$$\begin{aligned}\text{Call Valeur intrinsèque} &= \sup(\text{Cours de l'action} - \text{Prix d'exercice}, 0) \\ \text{Put Valeur intrinsèque} &= \sup(\text{Prix d'exercice} - \text{Cours de l'action}, 0)\end{aligned}$$

- *La valeur temps*

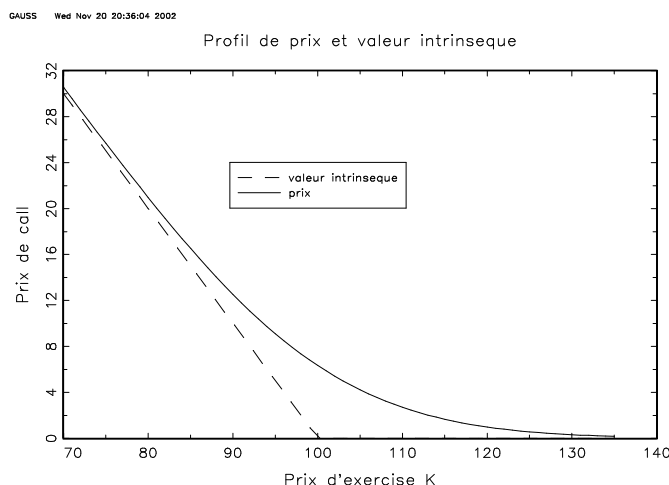
C'est la différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque. Elle est nulle à l'échéance pour une option européenne.

**Les straddles**

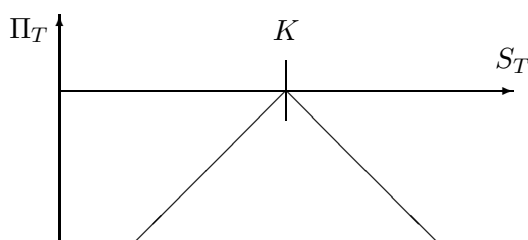
Un **straddle** est un dérivé constitué d'un *call* et d'un *put* de même paramètres. La figure 1.2 représente le payoff vis à vis du vendeur. L'intérêt de traiter un straddle à la monnaie plutôt qu'une option réside dans le fait que sa sensibilité par rapport à une variation du sous-jacent est très faible à la date de négociation du contrat. C'est un pur produit de volatilité tant que le spot ne dérive pas. Si le spot  $S(t)$  dérive trop loin de  $K$ , l'une des deux jambe du straddle fait encourir des risques inutiles au vendeur pour un prix dérisoire. Il a donc intérêt à la racheter.

**Le rôle des marchés organisés d'options**

Les marchés organisés contribuent par la grande lisibilité des prix affichés, la garantie qu'ils offrent aux intervenants en se substituant en cas de défaut de l'une des contreparties, à maintenir



**Fig. 1.1:** Profil de prix et valeur intrinsèque.



**Figure 1.2:** Payoff d'un straddle vis à vis du vendeur.

une grande liquidité sur les titres négociés ou du moins sur certains d'entre eux les plus traités. La contrepartie est une certaine rigidité dans les produits fournis, qui sont de type standards. Ils sont le lieu privilégié vers lequel se tournent les traders qui cherchent à couvrir des produits complexes à l'aide d'options standards. Ils peuvent être perçus comme les supermarchés de la finance.

### 1.3.2 Les options de gré à gré

En dehors des marchés organisés, il existe un grand nombre d'options négociées de gré à gré, c'est à dire directement entre l'acheteur et le vendeur, sans la garantie d'un marché, notamment sur les taux de change qui sont les supports d'un très grand nombre d'options de tout prix d'exercice et de toutes maturités. Les prix de telles options ne sont pas affichés sur les écrans Reuter, et peuvent varier d'une banque à l'autre. Toutefois, la grande liquidité de ces options et la présence sur les marchés d'arbitrageurs qui essaient de tirer profit de disparités sur les prix contribuent à rendre ces différents prix convergents.

## Les options exotiques

Les options standards étant négociées au plus juste prix ne produisent pas de bénéfices substantiels. Aussi, a-t'on vu proposer sur les marchés de gré à gré de plus en plus d'options complexes, ou aux dimensions plus spéculatives. L'idée est en général d'utiliser des options standards (vanilla en anglais) pour les couvrir.

- LES OPTIONS BINAIRES

Un Call binaire est une option qui paye un nominal connu à son détenteur, si le cours du support à l'échéance dépasse un prix d'exercice fixé dans le contrat et rien sinon.

Un Put binaire a les mêmes caractéristiques, mais le nominal est payé si le cours est inférieur au prix d'exercice.

C'est un produit très spéculatif au voisinage de l'échéance, car il est du type tout au rien.

- LES OPTIONS ASIATIQUES

Ce sont des options standards, mais dont le support est la moyenne des cours sur une période donnée. Elles ont été introduites pour lutter contre la manipulation des cours des titres sous-jacent au voisinage de l'échéance de l'option.

- LES OPTIONS LOOKBACK

Ce sont des options standards, mais dont le sous-jacent est le minimum ou le maximum du cours sur une période incluant l'échéance. En général, le flux payé est la différence entre la valeur du cours et la valeur du minimum ou du maximum. Ce sont des options qui sont chères car elles ont toujours de la valeur.

Ces deux derniers types d'options rentrent dans la famille des options path-dependent, c'est à dire qui dépendent de toute l'évolution du cours du titre support et non seulement de sa valeur à l'échéance.

- LES OPTIONS BARRIÈRES

Ce sont des calls ou des puts standards, qui autorisent l'exercice seulement si le titre support a franchi un niveau fixé dans le contrat, appelé barrière. On peut alors trouver tous les cas de figures, comme nous le détaillerons dans la section concernant les options exotiques.

- LES OPTIONS QUANTOS

Ce sont des calls ou des puts écrites sur des titres d'un marché étranger, mais payées en monnaie domestique.

### 1.3.3 Utilité des produits dérivés

Comme nous l'avons vu, la principale utilité des produits dérivés est de permettre de transférer les risques financiers entre les différents agents économiques rapidement. En particulier, certains agents, les banques notamment, sont disposés à prendre des risques supplémentaires moyennant un rendement accru de leurs opérations. Nous retrouverons tout au long de ce document cette idée que rendement et risque sont fortement corrélés.

D'autre part, en transférant sur les banques les risques financiers associés à leur activité industrielle, les grandes entreprises n'ont plus qu'à gérer les risques d'exploitation, qui sont leurs

risques spécifiques. En particulier, elles ont besoin d'immobiliser des réserves moins importantes de fonds propres, dont la rentabilité devient ainsi plus importante.

Les produits dérivés ont conduit à une plus grande spécialisation des investisseurs, qui peuvent se concentrer sur des portions de marché qu'ils connaissent bien, par exemple dans le secteur action. Par l'intermédiaire des produits dérivés, il peut diversifier son risque en échangeant la performance du CAC contre d'autres références en vigueur.

Les produits dérivés offrent un fort effet de levier, dans la mesure où l'acheteur d'un dérivé ne risque de perdre au maximum que la prime, c'est à dire le prix qu'il a payé

## 1.4 Les activités de marché d'une banque

### 1.4.1 Le Front office

Les missions d'une salle de marchés au sein d'une Banque sont multiples et sont en général les suivantes :

- **les émissions de papier** : les banques agissent en tant qu'intermédiaires entre les émetteurs de papier (emprunteurs) et le marché (prêteurs potentiels).
- **le service à la clientèle (institutionnelle et d'entreprises (corporate))** : la principale fonction des services commerciaux est de répondre aux besoins de la clientèle, de les conseiller et d'assurer le suivi des opérations. Ils travaillent essentiellement avec les institutionnels ou gérants de SICAV et d'autres fonds de placement français ou étrangers. Le responsable des montages de la salle est en général un commercial. Chaque vendeur (sale) dispose d'un fond de commerce, c'est à dire d'un ensemble de clients autonomes, afin que chaque client ait un unique interlocuteur avec qui il puisse établir un lien personnalisé et durable.

Cependant, les commerciaux travaillent par équipe et par zone géographique. Pour une transaction délicate, il est fréquent que tous participent à l'élaboration de la stratégie et de l'argumentaire.

La vente de produits standards est directement assurée par les commerciaux (sales) tandis que celle de produits structurés nécessite l'intervention des équipes de structuration. Le commercial doit nécessairement s'adresser à un trader pour que celui-ci fixe le prix des produits proposés et traite l'opération. Si celui-ci n'est pas dans le marché, c'est à dire que sa position ne lui permet pas de donner des prix compétitifs, le commercial éprouvera des difficultés à vendre ses produits. En effet, la concurrence est très forte et de nombreux clients font le tour de la place avant d'investir.

- **le trading, la prise de position et l'arbitrage** : certaines sections de la salle (les desks souvent organisés par supports et(ou) géographiquement) constituent des centres de profits indépendants; les dealers (traders) prennent des positions sur des devises, des taux d'intérêt ou la volatilité. Ils sont en particulier en charge de la gestion et de la couverture des produits dérivés. En général, un ingénieur financier ou "quants" est associé à chaque activité. Les traders peuvent aussi se livrer à des opérations d'arbitrage, ou de

spéculation. Ils agissent dans le cadre de limites de marché, et de contrepartie.

#### LES CONTRE-PARTIES DU TRADER

Les traders peuvent avoir deux types de contreparties :

- les clients finaux : le trader traite avec les sales de la salle qui font l'interface entre les deux contre-parties. L'objectif du client final est de couvrir ou de dynamiser son portefeuille ; il gère généralement sa position en directionnel, ce qui signifie qu'il est directement exposé à l'évolution du sous-jacent.

- Les contreparties professionnelles : ce sont les traders des autres banques ;

Ils gèrent leurs positions en volatilité, composante essentielle du prix d'une option comme nous le verrons ci-dessous, ce qui signifie qu'ils achètent ou vendent de la volatilité. Ils sont donc plus sensibles aux variations de la volatilité qu'aux variations des cours. C'est une dimension fondamentale du trading d'options.

- **l'activité de market-maker ("teneur de marché")** : certaines entités sont market-makers sur des marchés très spécifiques, c'est-à-dire qu'elles doivent répondre aux demandes de cotation en assurant ainsi la liquidité du marché.
- **la couverture des opérations de la Banque** : la salle de marchés a un rôle de support vis à vis des autres départements, puisque sorties et entrées d'argent sont tôt ou tard enregistrées au niveau de la salle. La salle doit trouver des ressources à coût réduit et des emplois rémunérateurs tout en minimisant les risques de marché.
- **la gestion du bilan de la Banque, l'Asset and Liability Management (ALM)"** : la Direction Générale utilise la salle de marchés pour appliquer sa politique de gestion de bilan, les principales fonctions de la cellule ALM sont de :
  - couvrir l'exposition globale du bilan de la Banque ;
  - gérer les ratios réglementaires : Cooke, liquidité ;
  - respecter les réglementations locales, ex : réserves obligatoires.

En général, les activités de marché d'une banque sont regroupées en deux secteurs : les activités sur actions et les activités de fixed income auxquelles correspondent des salles de marché distinctes.

Les opérations conclues en Front Office engagent la banque de manière irrévocable vis à vis des contreparties. Pour prendre au mieux les décisions en respectant les limites de marché et de contreparties qui leur sont fixées, les opérateurs doivent s'appuyer sur des systèmes leur permettant :

- de s'informer sur l'activité de marché (Reuter, Bloomberg, Telerate, etc...),
- de mesurer et d'analyser leurs positions et leur résultat,
- de contrôler que le niveau de risque engendré est conforme aux limites de marché et de contrepartie fixées.

### 1.4.2 Middle Office

L'organisation de certaines salles de marchés prévoit une cellule de Middle Office servant d'interface entre Back Office et Front Office. Cette cellule, quand elle existe, peut avoir selon les

cas, la charge des tâches suivantes :

- assister les traders dans la partie administrative de leurs tâches : rédaction des tickets de deals (si ceux-ci sont manuscrits), vérification des ordres saisis par les traders dans les systèmes interfacés Front Office / Back Office avant relâche vers le Back Office, confirmation verbale des ordres en fin de journée avec les contreparties.
- établir ou vérifier les positions et le calcul des résultats du desk en vue de produire les reportings d'activité au chef de salle. Ceci peut parfois inclure l'obtention auprès des courtiers et la saisie des paramètres de valorisation (prix, courbes) dans les systèmes de Front Office. Il doit fournir une évaluation Mark to market indépendante de la valeur liquidative du portefeuille, et inclure le coût du Back Office, du refinancement, les courtages et les "Profit and Losses" des commerciaux.
- Il est responsable de l'établissement des analyses de risque, qui vont être soumises à l'approbation des différents risk-managers, en accord avec les normes des autorités de tutelles, qui servent au contrôle des risques encourus par la salle de marché.  
Il joue donc un rôle central dans la détermination des éléments qui vont intervenir dans le calcul de la VaR, value at risk, c'est à dire le niveau de perte maximale sur la valeur du portefeuille de trading dans en jour ( resp. 10 jours) à un niveau de confiance de 99%.

### 1.4.3 Le Back Office

Le back office est en charge du traitement administratif des opérations. Il est en principe en charge de :

- la confirmation des opérations aux contreparties
- du règlement des transactions avec les contreparties (transfert des fonds et des titres liés aux opérations initiées par le Front Office)
- la comptabilisation des positions et du calcul des résultats qu'il communique quotidiennement aux différents desks du Front Office afin de s'assurer de la cohérence entre les opérations traitées par le Front Office et les opérations enregistrées dans le système de back office
- de reporting à la direction des risques afin d'effectuer des contrôles sur les limites de marchés et de contreparties par exemple

De plus en plus de Back Offices sont équipés de systèmes de traitement transactionnel permettant de sécuriser la comptabilisation des opérations et l'initiation des moyens de paiement. Certains systèmes permettent de générer la comptabilisation à partir de la saisie en front office, le rôle du back office est alors limité à la validation des opérations et à la saisie des instructions de paiement (n° de compte, correspondant bancaire).



## Chapitre 2

# EVALUATION et COUVERTURE : La FORMULE DE BLACK et SCHOLES

## A- Les grands principes

### 2.1 Le message de Black, Scholes et Merton.

Comme le souligne Robert Merton dans son introduction au Congrès Mondial Bachelier de Paris (2000), l'industrie du risque financier n'aurait pu se développer sans l'apport à la fois de la théorie économique et des mathématiques. Louis Bachelier en 1900, dans sa thèse remarquable, soutenue à la Sorbonne sur la "théorie de la spéculation", est le premier à avoir montré la nécessité de posséder des outils mathématiques appropriés, et "créé" le mouvement brownien pour répondre aux questions qu'il se pose sur le prix des produits dérivés. Plus généralement, il est remarquable d'observer que sans les outils du calcul stochastique, le business de l'assurance des risques financiers n'aurait pu se développer comme il l'a fait, et les marchés financiers n'auraient pu prendre l'importance qu'on leur connaît maintenant.

#### 2.1.1 Prix et couverture

La question centrale dans la gestion des risques financiers est évidemment celle du prix sur lequel les deux parties du contrat doivent pouvoir se mettre d'accord. Comme le souligne Bachelier, ce point est moins évident qu'il n'y paraît, puisque les deux parties ont des risques différents :

- ◇ L'acheteur a un risque limité à la prime
- ◇ Le risque supporté par le vendeur de l'option d'achat est d'autant plus grand que le marché est haussier. La maturité risque de jouer aussi contre lui, et de plus, un grand mouvement à la hausse peu avant l'échéance est toujours à craindre.

D'un autre côté, l'incertitude qui affecte le sous-jacent de l'option à maturité est la résultante de petits mouvements quotidiens et même intraday, qui peuvent être observés, ce qui donne une information dont on peut essayer de tirer partie :

- d'une part pour définir un modèle pour la dynamique du cours
- d'autre part pour réduire le risque final par une attitude dynamique et rationnelle puisque le vendeur (trader) peut toujours acheter ou vendre du sous-jacent, qu'il finance à l'aide de la prime.

### **Louis Bachelier (1870-1946)**

- Licence es Sciences en 1895
- Thèse à Paris (Henri Poincaré en 1900 : "Théorie de la spéculation")
- A des problèmes de poste : vacataire à Paris (1909-1914) puis professeur à Besançon après la guerre



**Louis Bachelier 1870-1946**

C'est exactement le message introduit par Black, Scholes et Merton en 1973, qui définissent le prix d'un produit dérivé comme "le prix de sa couverture". Cette théorie, révolutionnaire du point de vue de l'économie classique, leur a valu le prix Nobel d'économie en 1997. Mais elle n'a pas empêché la faillite du "hedge fund" Long Terme Capital Market en 1998, dont ils étaient des membres actifs. Le fond a joué notamment sur ce qu'on appelle l' *effet de levier* des produits dérivés : comme l'acheteur d'une option d'achat supporte un risque limité à la prime de l'option, il peut espérer gagner beaucoup s'il estime que le marché devrait monter plus que ce que le prix de l'option révèle. Il peut donc "spéculer" sur l'évolution du cours. Nous verrons une autre interprétation de ce point dans la suite.

**Myron Scholes (1941,.)**

1997 Prix Nobel d'Economie pour avoir trouvé une nouvelle méthode pour évaluer les produits dérivés.

*Education* : Ph.D.'69 à l'Université de Chicago, USA

*Affiliation* : Stanford University, Stanford, USA  
Hedge Fund, Long Term Capital Market

**Fisher Black (1938-1995)**

*Education* : 1964, Ph.D. à Harvard en Mathématiques Appliquées

*Affiliation* : 1971, Professeur à l'University de Chicago, Graduate School of Business.

19XX : Professeur au MIT

1984 : Quitte le MIT pour Goldman Sachs & Co.



Scholes et Black

**Robert Merton**

- 1997 Prix Nobel en Economie pour avoir proposé des méthodes nouvelles pour la valeur de produits dérivés.

- Né à New York en 1944

- Diplômes : Ph.D.'70 in Economics from MIT (Cambridge, MA, USA)

- Professeur à Harvard Business School, Harvard University, Cambridge



### 2.1.2 Absence d'opportunité d'arbitrage

Par ailleurs, il est clair que les prix de différents produits dérivés ne sont pas quelconques et qu'il existe une forte cohérence entre les prix des options sur un même sous-jacent. Elle est due à ce qu'on peut appeler la **Loi fondamentale de la Finance de marché** :

*Dans un marché très liquide, où il n'y a ni coûts de transaction, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.*

En effet, dans les marchés financiers, il existe des *arbitrageurs*, qui sont des intervenants dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte-tenu des autres prix du marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans prendre de risque. Leur intervention est *statique*, au sens où ils prennent seulement des positions aujourd'hui, qu'ils liquideront sans les renégocier à une date future. Ils contraignent les prix à vérifier certaines relations, comme nous le verrons sur certains exemples. Dans ce chapitre, nous y ferons surtout référence comme à une règle qui conduit à l'**unicité** des prix des produits dérivés, au sens où

*Deux stratégies qui donnent le même flux à l'horizon de gestion dans tous les états du monde ont la même valeur à toute date intermédiaire.*

### 2.1.3 Incidence sur les prix de l'absence d'arbitrage

Il existe quelques produits financiers dont on peut déduire le prix en appliquant cette règle, sans référence à aucun modèle, ce qui est évidemment un point important dans le marché.

#### Prix d'un contrat à terme

Nous désignons par  $F_t(S, T)$ , le prix fixé par contrat à la date  $t$  auquel sera négocié le titre  $S$  à la date  $T$ . C'est le *prix à terme*, ou le *prix forward* de  $S$  en  $T$ .

Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix de ce contrat au cours de  $S$  à la date  $t$ . Pour se garantir le fait de détenir  $S$  en  $T$ , nous avons deux possibilités.

- ⇒ La première consiste à acheter le titre  $S$  aujourd'hui, et à le garder jusqu'en  $T$ .
- ⇒ La deuxième consiste à acheter le contrat forward.

Pour pouvoir le payer en  $T$ , il faut placer à la banque un montant qui nous garantit  $F_t(S, T)$  en  $T$ . L'instrument financier adapté à ce genre de situation est, par définition, le *zéro-coupon* de maturité  $T$ , dont le prix  $B(t, T)$  est celui qu'il faut payer pour recevoir à coup sûr 1 Euro en  $T$ . Il faut donc placer à la banque  $B(t, T)F_t^T(S)$  Euros pour garantir le paiement du contrat. Par absence d'arbitrage, nous avons

$$\boxed{F_t(S, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}} \quad (2.1.1)$$

PREUVE : Supposons que  $S_t > F_t(S, T)B(t, T)$ . En achetant  $S_t$  contrats forwards, et en vendant  $F_t(S, T)B(t, T)$  actions, nous sommes assurés de détenir en  $T$ ,  $S_t$  actions et d'en vendre

$F_t(S, T)B(t, T)$ . Nous avons ainsi réalisé un arbitrage statique, puisque le bilan en  $T$  est toujours positif. Un raisonnement similaire peut être fait si  $S_t < F_t(S, T)B(t, T)$ . Les prix sont donc nécessairement égaux.

### Parité Call -Put

Un raisonnement analogue nous montre que la détention<sup>1</sup> d'un Call et la vente d'un Put de mêmes caractéristiques, nous garantissent à l'échéance d'être détenteur de la valeur de l'action et la vente du prix d'exercice  $K$ . Mais ce portefeuille peut aussi être obtenu en achetant l'action en  $t$  et en remboursant  $KB(t, T)$  en  $t$ .

$$\boxed{\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB(t, T)} \quad (2.1.2)$$

PREUVE : Supposons que  $\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) > S_t - KB(t, T)$  et notons la différence des deux termes de cette inégalité  $Y_t$ . Le portefeuille constitué de la vente d'un Call, de l'achat d'un Put, de l'achat d'une action, de placement de  $Y_t - KB(t, T)$  à la banque pour l'horizon  $T$ , est de valeur initiale nulle. Mais à l'horizon  $T$ , il garantit un flux de  $-(S_T - K)^+ + (K - S_T)^+ + S_T - K + Y_t B(t, T)^{-1} = Y_t B(t, T)^{-1}$ , qui est  $> 0$ . Cette stratégie est donc un arbitrage.

A priori, il n'y a pas de raison de se restreindre à des stratégies statiques, c'est à dire des stratégies décidées à la date 0 et non renégociées dans la suite. Le gestionnaire sait a priori qu'il pourra renégocier son portefeuille dans l'avenir. Il pratique donc une gestion dynamique, dont nous allons décrire les principales caractéristiques.

## 2.2 Evaluation et Couverture dynamique

### 2.2.1 Gestion dynamique

Sur un marché financier très liquide, où il y a beaucoup d'intervenants, les prix sont négociés au plus juste. Les marchés organisés favorisent cette liquidité. L'activité habituelle est d'acheter ou de vendre des titres de base ou dérivés, de manière à se constituer un portefeuille. Dans la suite, on supposera qu'on peut faire cela sans restriction de montant, ou de sens achat ou vente. Cette dernière hypothèse est moins anodine qu'il y paraît, comme le soulignait Bachelier en 1900, car elle sous-entend qu'aucun intervenant n'a de certitudes sur les mouvements futurs du marché.

### 2.2.2 Quelques considérations de bon sens

Considérons maintenant un agent qui veut vendre un produit d'assurance contre la hausse, comme une option d'achat, ou plus généralement qui accepte de garantir un flux de  $h(S_T)$  à une échéance donnée  $T$ . En contrepartie, il reçoit la prime ou prix de l'option.

Il n'a pas la possibilité de répartir le risque sur un grand nombre de clients comme le font les assureurs. Par contre il peut investir la prime dans un portefeuille.

---

<sup>1</sup>On dit encore qu'on est "long" d'un Call. Si on est vendeur, on dit qu'on est "court" d'un Call.

- S'il est très passif, il place la prime à la banque. A l'échéance de l'option, le résultat du placement ne dépend que de l'intérêt versé, et de la prime initiale, et non de la valeur du titre risqué à l'échéance. Ce n'est pas une stratégie ajustée au produit vendu.
- Il peut aussi acheter un certain nombre d'actions, de manière à avoir dans le portefeuille des actifs dont le mouvement des prix va dans le même sens que les flux qu'il risque de payer.

La gestion d'un produit dérivé apparaît donc comme la conjonction de plusieurs opérations :

1. suivre régulièrement le prix  $C_t$  dans le marché,
2. gérer un portefeuille autofinçant, de valeur  $V_t$  au temps  $t$  dont la valeur initiale est la prime  $x = \pi_0$
3. surveiller le P& L final (profit et perte finale), c'est à dire la différence entre la valeur du portefeuille et le montant du flux à payer, soit  $V_T - h(S_T)$ . On parle encore de *tracking error*.

Remarquons que ces différentes opérations utilisent des informations différentes sur les marchés :

- ★ les prix reflètent en fonction des anticipations du gestionnaire une "estimation" de la valeur des flux futurs à payer.
- ★ la valeur du portefeuille peut être lue sur le marché à la date  $t$ . Elle reflète la qualité de la gestion passée du gestionnaire.

Le fait que ces deux points de vue peuvent se rejoindre est dans le fond assez surprenant.

L'objectif du gestionnaire d'options n'est pas de maximiser son P& L final, mais au contraire de le réduire afin d'avoir la variance la plus faible possible. Le meilleur "portefeuille" (qui suppose entre autre qu'on choisit la prime  $x$  optimalement) est appelé *le portefeuille de couverture*. L'absence d'arbitrage permet de faire le lien entre évaluation et couverture.

*S'il est possible de trouver un P& L final de risque nul, alors l'absence d'arbitrage implique que la différence entre le prix et la valeur du portefeuille sont nulles p.s. à toute date.*



## B- Modélisation mathématique : le monde de Black, Scholes et Merton



### 2.3 Modélisation de la dynamique du sous-jacent : Le mouvement brownien géométrique

L'incertain est modélisé à travers les trajectoires futures du titre risqué, vues comme des scenarii possibles d'évolution. En général, on suppose que ce sont des fonctions continues  $(\omega_t)$ , définies sur  $\mathbb{R}^+$ . Afin de prendre en compte le caractère très erratique des cours des actifs

financiers, Bachelier les modélise à l'aide d'un mouvement brownien avec tendance. Une telle modélisation conduit à des prix qui peuvent être négatifs. Aussi, Samuelson (1960) propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes.

### 2.3.1 Définition et Propriétés

Il y a plusieurs définitions possibles des rendements, qui en général sont équivalentes lorsque les phénomènes sont déterministes, mais qui diffèrent dans le cas stochastique. La différence est explicable par la formule d'Itô. Nous supposons que les rendements entre deux périodes sont mesurés par la différence des logarithmes des cours.

L'hypothèse que les rendements entre 0 et  $t$  suivent un mouvement brownien de tendance  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  et de coefficient de diffusion  $\sigma$ , se traduit par les propriétés suivantes du processus des prix  $\{S_t; t \in [0, T]\}$  :

- $S_0 = x$  ;
- les rendements  $\text{Log}(S_t) - \text{Log}(S_s)$  suivent une loi gaussienne de moyenne  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s)$  et de variance  $\sigma^2(t - s)$ .
- Pour tout  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ , les accroissements relatifs  $\{\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n - 1\}$  sont indépendants, et de même loi.

En d'autres termes, il existe un mouvement brownien  $\widehat{W}$  tel que

$$S_t = f(t, \widehat{W}_t) = x \exp \left( \mu t + \sigma \widehat{W}_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \quad (2.3.1)$$

Par application de la formule d'Itô pour le mouvement brownien et la fonction  $f(t, z) = x \exp(\mu t + \sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ , dont les dérivées valent :

$$f'_t(t, z) = f(t, z)(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2), \quad f'_z(t, z) = f(t, z)\sigma, \quad f''_{zz}(t, z) = f(t, z)\sigma^2$$

nous voyons que,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\widehat{W}_t \quad (2.3.2)$$

Comme la fonction exponentielle n'est pas bornée, pour justifier l'écriture différentielle et l'utilisation de la formule d'Itô, nous avons besoin de propriétés d'intégrabilité, que l'on vérifie facilement grâce aux propriétés des exponentielles de variables gaussiennes.

**Lemme 2.3.1** *La transformée de Laplace d'une v.a. gaussienne  $U$  de moyenne  $m$  et de variance  $\gamma^2$  est donnée par*

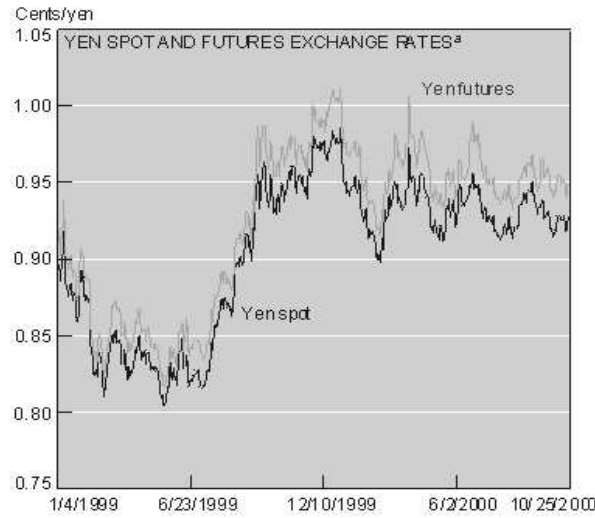
$$\mathbb{E}[\exp(\lambda U)] = \exp \left( \lambda m + \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \right) \quad (2.3.3)$$

En particulier, si  $\widehat{W}$  est un mouvement brownien,

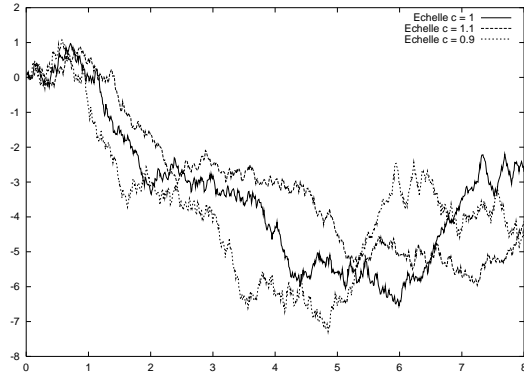
$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \lambda \widehat{W}_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right) \right] = 1 \quad (2.3.4)$$

Ce graphe représente les prix du taux de change dollar-yen pendant la période Avril 99-Nov 2000, ainsi que ceux d'un contrat future. Les deux évolutions sont très semblables.

Ce qui est remarquable, indépendamment de la tendance, c'est le caractère très erratique de l'évolution



Le graphe simulé avec différents paramètres de diffusion ( $c=1,1.1,0.9$ ) des trajectoires d'un mouvement brownien présente beaucoup d'analogies avec la trajectoire du cours réel



**Théorème 2.3.2** Soit  $S$  un mouvement brownien géométrique de valeur initiale  $x$ .

1. Le cours  $S_t$ , de condition initiale  $S_0 = x$ , suit une loi log-normale dont les deux premiers moments valent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t] &= xe^{\mu t}, & \mathbb{E}[S_t^2] &= x^2 \exp((2\mu + \sigma^2)t), \\ \text{var}(S_t) &= x^2 \exp(2\mu t) (\exp(\sigma^2 t) - 1)\end{aligned}\quad (2.3.5)$$

En particulier, le ratio de Sharpe, qui rapporte le gain moyen à la variabilité du titre,

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\mathbb{E}[S_t] - x}{\sqrt{\text{var}(S_t)}}$$

est indépendant de la valeur initiale  $x$ .

2. Pour toute fonction  $h$  positive ou bornée,

$$\mathbb{E}(h(S_t^x)) = \int h(y) l(t, x, y) dy = \int h\left(x \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}u\right)\right) g(u) du \quad (2.3.6)$$

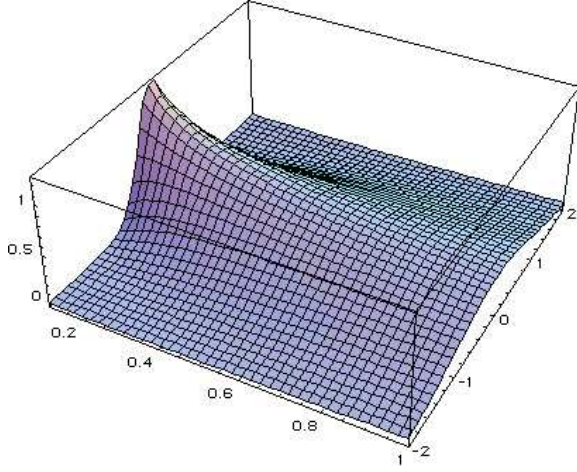
$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad (2.3.7)$$



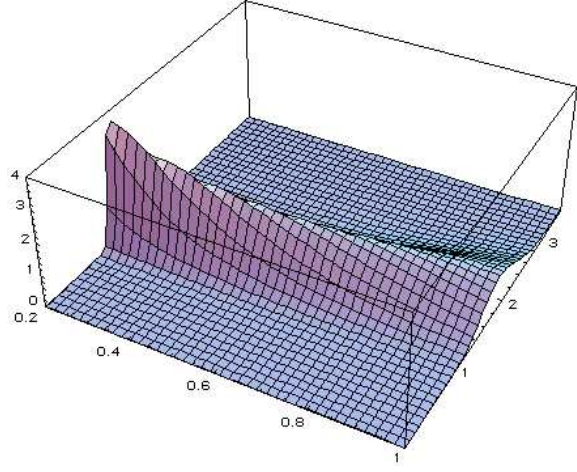
$g(z)$  est la densité gaussienne centrée réduite

3. La densité de la loi de  $S_t$  partant de  $x$  est la fonction  $l(t, x, y)$  donnée par

$$\begin{aligned} l_{\mu, \sigma^2}(t, x, y) &= \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}d_0(t, xe^{\mu t}, y)^2\right) \\ d_0(t, x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} \text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$



La densité gaussienne en fonction du temps



La densité lognormale en fonction du temps

PREUVE : L'étude des moments de  $S_t$  repose sur le lemme 2.3.1.

⇒ Introduisons le brownien avec dérive  $\widehat{W}_t$  que nous pouvons représenter à l'aide d'une v.a. gaussienne centrée réduite  $U$  par  $\widehat{W}_t = \sqrt{t}U$  de telle sorte que

$$\begin{aligned} S_t &= x \exp(Y_t) \quad \text{si} \\ Y_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\widehat{W}_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}U \end{aligned}$$

Le lemme nous conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_t] &= \mathbb{E}[xe^{Y_t}] = x \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) = x \exp(\mu t) \\ \mathbb{E}[S_t^2] &= \mathbb{E}[x^2 e^{2Y_t}] = x^2 \exp\left(\left(2\mu - \sigma^2\right)t + \frac{1}{2}4\sigma^2 t\right) = x^2 \exp(2\mu t + \sigma^2 t) \\ &= \mathbb{E}[S_t]^2 \exp(\sigma^2 t) \end{aligned}$$

⇒ La densité  $l(t, x, y)$  est déduite de la densité gaussienne par la formule du changement de variable (décroissant) associée à

$$u = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[ \text{Log}\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[ \text{Log}\left(\frac{xe^{\mu t}}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \right] = d_0(t, xe^{\mu t}, y) \quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{t}y} \quad (2.3.10)$$

qui conduit au calcul de l'intégrale des fonctions  $h > 0$

$$\int h(y)l(t, x, y)dy = \int h(xe^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}u})g(u)du = \int h(y)g(d_0(t, xe^{\mu t}, y))\frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}}dy$$

### 2.3.2 Interprétation financière des paramètres du modèle

#### Interprétation

- ◇ S'il n'y a pas de bruit, ( $\sigma = 0$ ),  $\mu$  représente le rendement annualisé du titre. Un simple argument d'*arbitrage* montre qu'en absence d'alea sur le titre, son rendement doit être le même que celui d'un placement à la banque, dont le taux est désigné ici par  $r$ . On désignera par  $S_t^0$  la valeur en  $t$  de la capitalisation d'un Euro à la banque.

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt \quad (2.3.11)$$

Un ordre de grandeur de ce taux est  $[2\%, 12\%]$ .

- ◇ Lorsque le titre est risqué,  $\mu$  représente le rendement annualisé du titre espéré par unité de temps. Le marché le compare en général à celui d'un placement sans risque. Le paramètre  $\mu - r$  est donc en général un paramètre de référence.
- ◇ Le *ratio de Sharpe* par unité de temps des excès de rendements par rapport au cash prend en compte la volatilité du titre. Il est considéré comme **la prime de risque**  $\lambda$  que la marché affecte à la source de risque  $\widehat{W}$  puisque

$$\text{prime de risque} = \lambda = \frac{\frac{1}{dt}\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] - r}{\sqrt{\frac{1}{dt}\text{var}\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)}} = \frac{\mu - r}{\sigma} \frac{dS_t}{S_t} \quad (2.3.12)$$

- ◇ Il sera utile d'écrire

$$dS_t = S_t[r dt + \sigma(d\widehat{W}_t + \lambda dt)] \quad (2.3.13)$$

Dans cette représentation, nous voyons apparaître l'importance du paramètre clé dans la caractérisation des titres financiers à savoir la **volatilité**  $\sigma$ . L'ordre de grandeur de ce paramètre dépend énormément de la nature du titre support : dans les marchés d'action il varie entre 30 et 70 %, dans les marchés de change entre 10 et 30 %, dans les marchés de taux d'intérêt entre 8 et 30 %.

#### Limites de la modélisation

- ‡ Dans le monde de Black et Scholes, tous les paramètres sont supposés constants. Il est clair que ce n'est pas très réaliste dans le cas du yen décrit ci-dessus, ni d'ailleurs dans aucun marché. En fait, on pourra sans grande modification dans ce qui suit supposer les paramètres déterministes. Mais cela pose évidemment des problèmes d'identification (calibration dans le vocabulaire de la finance) importants.

‡ Notons par ailleurs que dans leur papier de 1973, Black et Scholes ne cherchent pas tant à modéliser avec exactitude la dynamique du sous-jacent qu'ils considèrent qu'à essayer de voir si le point de vue très nouveau qu'ils proposent dans le domaine des options est prometteur, quitte à revenir sur les questions de modélisation dans la suite.

A cette époque, Mandelbrot (1963) avait déjà montré que les rendements des actifs financiers à un jour, ou une semaine n'étaient clairement pas statistiquement gaussiens, en particulier que la probabilité de grands mouvements de ces rendements était plus grande que celle que le monde gaussien quantifiait. Cette question “des queues épaisses” des distributions des rendements et de son implication dans la mesure des risques et la couverture des produits financiers est au coeur de la recherche actuelle. Mais comme nous le verrons, bien qu'imparfait le modèle de Black et Scholes est encore très efficace et très utilisé dans toutes les salles de marché.<sup>2</sup>

**Remarque 2.3.1** Un des grands messages de la *finance mathématique* est que la prime de risque n'est pas spécifique du titre mais de la source de bruit  $\widehat{W}_t$ . C'est une caractéristique du marché au même titre que le taux d'intérêt, du moins dans un monde sans arbitrage et très liquide. Nous reviendrons longuement sur ce point dans le chapitre sur les multi-sous-jacents. Cette hypothèse joue en particulier un rôle déterminant dans les marchés de taux.

## 2.4 Portefeuille dynamique

Après avoir modélisé la dynamique du sous-jacent, nous avons à formaliser mathématiquement l'évolution de la valeur *liquidative* d'un portefeuille géré dynamiquement de manière autofinancante, c'est à dire sans modification de la valeur du portefeuille aux dates de renégociation.

### 2.4.1 Portefeuille autofinancant écrit sur un sous-jacent risqué

Nous supposons ici que nous ne pouvons investir que dans un seul *titre risqué* appelé souvent l'action, et dans du cash, c'est à dire en plaçant ou empruntant de l'argent à la banque. Nous désignons par  $S_t$  le prix à la date  $t$  de l'action, par  $r$  le taux d'intérêt pour un placement entre  $[t, t + dt]$  à la banque.

*Une stratégie de portefeuille autofinancante est une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'actions et de prêts ou d'emprunts à la banque, dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait de cash.*

Soit  $V_t$  la *valeur de marché*, ou encore *valeur liquidative*, ou encore *Mark to Market (MtM)* du portefeuille à la date  $t$ . Après renégociation, le nombre d'actions du portefeuille  $\delta_t$  (positif ou négatif suivant qu'on est acheteur (long) ou vendeur (court) en action) est constant jusqu'à la prochaine date de gestion. Pour simplifier, nous supposons pour le moment que le gestionnaire

---

<sup>2</sup>Voir “Les marchés fractals”, JJ Lévy Véhel, Christian Walter, Finance Puf 2002, pour une présentation remarquable de ces questions

ne prend en compte dans sa règle de décision la valeur du cours du sous-jacent au moment de renégocier. D'autres stratégies plus complexes seront introduites dans la suite. Dans un temps très court, la variation de valeur du portefeuille n'est due qu'à la variation de la valeur de l'action et à l'intérêt versé par la banque sur le cash, soit, puisque le montant investi dans le cash est  $V_t - \delta_t S_t$

$$dV_t = \delta_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t) r dt = r V_t dt + \delta_t (dS_t - r S_t dt) \quad (2.4.1)$$

### 2.4.2 Formulation mathématique du risque nul

Comme nous l'avons vu précédemment, la question du prix des options est étroitement liée à celle de leur couverture, parfaite si possible.

Mathématiquement, le problème se pose donc de la façon suivante :

- trouver une stratégie de portefeuille autofinancant qui réplique le flux terminal  $h(S_T)$ , c'est à dire pour laquelle le P& L final est nul. Pour des raisons opérationnelles, on souhaite que la seule information à prendre en compte dans cette gestion dynamique soit la valeur du cours.
- Cette hypothèse repose sur la notion en économie d'efficience des marchés qui exprime que le prix d'un actif à un instant donné incorpore toute l'information passée ainsi que les anticipations des agents sur ce titre.
- Plus précisément, le problème est donc de trouver un couple de fonctions  $v(t, x), \delta(t, x)$  "régulières" telles que

$$\begin{cases} dv(t, S_t) = v(t, S_t) r dt + \delta(t, S_t) (dS_t - r S_t dt) \\ v(T, S_T) = h(S_T) \end{cases} \quad (2.4.2)$$

$\delta(t, S_t)$  est le portefeuille de couverture du produit dérivé  $h(S_T)$ .

- L'existence d'une solution à un tel problème n'a a priori rien d'intuitif. Par contre, l'**unicité** est une conséquence de l'absence d'arbitrage dans le marché, satisfaite par des portefeuilles vérifiant certaines conditions d'intégrabilité.

PREUVE : En effet, si ce problème admet deux solutions admissibles, leur différence  $u(t, S_t)$  est une stratégie de portefeuille qui vaut 0 en  $T$  dans tous les états du monde et qui est autofinancante. Par absence d'arbitrage, elle est nulle dans tous les états du monde.

- Par absence d'arbitrage, la valeur du portefeuille  $v(t, S_t)$  est le prix auquel devrait être vendu l'option, si elle était émise à la date  $t$ , quand les conditions de marché sont  $S_t(\omega)$ . Nous y ferons souvent référence comme au prix de l'option.

## 2.5 Evaluation par équation aux dérivées partielles

Nous allons montrer que le problème se ramène à résoudre une équation aux dérivées partielles.

### 2.5.1 L'EDP d'évaluation

Nous recherchons la valeur du prix de l'option sous la forme d'une fonction à laquelle on peut appliquer le calcul différentiel d'Itô, par exemple de classe  $\mathcal{C}_b^{1,2}$  par rapport à  $\text{Log}x$ , et à croissance linéaire, pour que le processus  $v(t, S_t)$  satisfasse de bonnes propriétés d'intégrabilité.

**Théorème 2.5.1** *a) Soit  $h$  une fonction continue, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière  $v(t, x)$  sur l'ouvert  $]0, T] \otimes ]0, +\infty[$  :*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + r x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - r v(t, x) = 0 \\ v(T, x) = h(x) \end{cases} \quad (2.5.1)$$

*Le flux  $h(S_T)$  est duplicable par un portefeuille, dont la valeur à la date  $t$  est  $v(t, S_t)$ , et celle du portefeuille de couverture  $\delta(t, S_t) = v'_x(t, S_t)$ .*

*b) On a aussi que  $v(t, x) = e^{rt} u(t, \frac{1}{\sigma}(\text{Ln}x - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t))$  où  $u$  est solution de*

$$\frac{1}{2}u''_{ww}(t, w) + u'_t(t, w) = 0 \quad u(T, w) = e^{-rT} h(\exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma w)) \quad (2.5.2)$$

**Remarque 2.5.1**  $\sharp$  *Cette transformation de l'EDP d'évaluation en EDP de la chaleur est très utile dans les schémas numériques, car elle limite le nombre de dérivées à prendre en compte, et d'autre part évite l'instabilité numérique introduite dans l'EDP d'évaluation par la présence devant la dérivée seconde d'un terme qui tend vers 0, lorsque l'actif a une valeur proche de 0.*

$\sharp$  *Le statut de ces deux EDP n'est pas le même. La première est l'EDP de référence, susceptible de nombreuses généralisations. La deuxième est très efficace pour faire des calculs explicites à partir de la densité gaussienne comme nous le verrons dans la suite*

PREUVE : Tout repose sur le lien entre brownien géométrique et mouvement brownien.

$\Rightarrow$  Par la formule d'Itô, on peut définir la différentielle d'une fonction régulière de  $S$ ,  $v(t, S_t)$

$$\begin{aligned} dv(t, S_t) &= \frac{1}{2}\sigma^2 (S_t^2 v''_{xx}(t, S_t) + S_t v'_x(t, S_t))dt + \\ &\quad (v'_t(t, S_t) + v'_x(t, S_t)S_t(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2))dt + v'_x(t, S_t)S_t \sigma d\widehat{W}_t \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v''_{xx}(t, S_t)dt + v'_t(t, S_t)dt + v'_x(t, S_t)dS_t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Une f.a. de la forme  $v(t, S_t)$  qui est la valeur d'un portefeuille autofinçant admet une différentielle d'Itô d'un type particulier, donné par (5.5.1) :

$$dv(t, S_t) = v(t, S_t) r dt + \delta(t, S_t)(dS_t - rS_t dt)$$

$\Rightarrow$  Nous avons donc deux différentielles stochastiques pour  $v(t, S_t)$ . Comme la partie en  $\widehat{W}$  ne peut être expliquée par une partie en  $dt$ , c'est à dire par unicité de la décomposition en partie brownienne et partie à variation finie, nous voyons que nécessairement l'équation (5.5.1) est satisfaite si :

$$\begin{cases} v'_x(t, S_t) = \delta(t, S_t) & \text{p.s} \\ \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v''_{xx}(t, S_t) + r S_t v'_x(t, S_t) + v'_t(t, S_t) = v(t, S_t)r \end{cases}$$

Après simplification, nous obtenons l'équation d'évaluation du Théorème 2.5.1.

⇒ Introduisons le mouvement brownien avec drift  $dW_t = d\widehat{W}_t + \lambda dt$ , de condition initiale  $w = \frac{1}{\sigma} \text{Ln} x$  de telle sorte que  $S_t = \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right)$ .

Nous pouvons faire le même raisonnement que ci-dessus directement sur la fonction  $u(t, W_t) = e^{-rt}v(t, S_t)$  en exprimant la condition d'autofinancement en terme de  $W$ , soit toujours d'après l'équation (5.5.1) :

$$du(t, W_t) = e^{-rt}\delta(t, S_t)S_t\sigma dW_t$$

Par identification avec la formule d'Iô pour le mouvement brownien avec drift,

$$du(t, W_t) = \frac{1}{2}u''_{ww}(t, W_t)dt + u'_t(t, W_t)dt + u'_w(t, W_t)dW_t$$

nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} u'_w(t, W_t) &= e^{-rt}\delta(t, S_t)S_t\sigma & \text{p.s.} & \frac{1}{2}u''_{ww}(t, w) + u'_t(t, w) = 0 \\ u(T, w) &= h(\exp(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma w)e^{-rT} \end{aligned} \right\}$$

⇒ On a alors  $v(0, x) = u(0, \frac{1}{\sigma} \text{Ln} x)$ . A une date intermédiaire  $t$ , on a

$$v(t, S_t) = e^{rt}u(t, -\frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{\sigma} \text{Ln} S_t)$$

## 2.5.2 Extensions

### Le cas des coefficients dépendant du temps

- ◇ Nous avons vu que supposer une modélisation avec des coefficients constants est vraiment très loin de la réalité que nous cherchons à cerner (une bourse qui monte pendant cinq ans et qui chute pendant les trois années qui suivent par exemple). Il n'y a pas de difficultés méthodologiques à supposer que les paramètres  $\mu$ ,  $r$  et donc  $\lambda$  dépendent (sont des fonctions boréliennes et intégrables) du temps.
- ◇ Lorsque la volatilité n'est pas constante, nous n'avons établi le calcul différentiel stochastique que dans le cas de fonctions  $\sigma_t$  dérivables. Nous verrons dans la suite que cette hypothèse est artificielle, car nous avons voulu faire simple. Il suffit de supposer que  $\int_0^T \sigma_t^2 dt < +\infty$ .
- ◇ La preuve précédente peut être étendue sans difficulté à cette situation et conduit à l'EDP

$$\frac{1}{2}\sigma_t^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + r_t x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - r_t v(t, x) = 0 \quad v(T, x) = h(x) \quad (2.5.3)$$

## 2.5.3 Interprétation financière de l'EDP d'évaluation

### Le paramètre de tendance

L'une des conséquences essentielles de cette méthodologie est que le prix de l'option ne dépend pas du rendement  $\mu$  (2.3.2) du titre risqué, c'est à dire de la tendance du marché à la hausse ou à la baisse, puisque ce coefficient n'apparaît pas dans l'EDP d'évaluation (2.5.1).

Ceci peut sembler vraiment **surprenant**, puisque la première motivation de ces produits dérivés comme les Calls ou les Puts est de se couvrir contre ces mouvements.

- La stratégie de couverture dynamique permet au vendeur d'option d'être couvert contre les mouvements défavorables du marché. Il a annulé le risque dû à la tendance du marché. Que le marché soit haussier, ou baissier le prix de l'option d'achat sera le même.
- Sur le plan statistique, ou de l'identification de modèle, cela fait un paramètre de moins à estimer. Ce point est important, car il est très difficile d'estimer correctement la tendance.
- Le risque dû aux fluctuations est toujours présent et influe significativement sur le prix de l'option par l'intermédiaire du *paramètre de volatilité*. C'est la gestion de ce paramètre qui va décrire le savoir-faire du trader.

## 2.6 La formule de Black et Scholes

### 2.6.1 Résolution de l'EDP

Le point de départ est l'EDP (2.5.2), qui est l'équation aux dérivées partielles associée à un mouvement brownien, et l'interprétation des solutions de l'EDP de la chaleur.

#### Noyau d'évaluation

Rappelons comment sont construites les solutions de l'EDP de la chaleur à partir de la densité gaussienne

$$g(T, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) \quad (2.6.1)$$

Soit  $u$  la solution de l'EDP de la chaleur de condition terminale en  $T$ ,  $k(w)$ , à croissance linéaire. Il est bien connu que

$$u(0, w) = \int_{\mathbb{R}} k(w + y)g(T, y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)g(T, y - w)dy = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(k(w + \widehat{W}_T)) \quad (2.6.2)$$

$$u(t, w) = \int_{\mathbb{R}} k(w + y)g(T - t, y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)g(T - t, y - w)dy \quad (2.6.3)$$

$$= \mathbb{E}(k(w + \widehat{W}_T - \widehat{W}_t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(k(\widehat{W}_T^{w_0}) | \widehat{W}_t^{w_0} = w) \quad (2.6.4)$$

où  $\widehat{W}^{w_0}$  est le mouvement brownien issu de  $w_0$  à la date 0.

**Théorème 2.6.1** 1. Soit  $h$  une fonction à croissance linéaire. Le prix d'un produit dérivé de flux terminal  $h(S_T^x)$ , où  $S_T^x$  est le prix d'un actif qui vaut  $x$  en 0 est donné par la valeur en 0 de la solution de l'EDP d'évaluation qui admet la représentation intégrale

$$v(0, x) = e^{-rT} \int h\left(x \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma y\right)\right) g(T, y)dy \quad (2.6.5)$$

A la date  $t$ , la même représentation reste valable à condition de changer  $T$  en  $(T - t)$ .

2. Nous pouvons encore écrire  $v(0, x) = \int_{\mathbb{R}^+} h(z) \pi(t, x, z, T) dy$  où le noyau d'évaluation  $\pi(t, x, z, T)$  est construit à partir de la densité log-normale de paramètres  $\mathbf{r}$  et  $\sigma^2$  "actualisée"

$$\pi(t, x, y, T) = e^{-r(T-t)} l(T-t, x, y, \mathbf{r}, \sigma^2) \quad (2.6.6)$$

$$l(T-t, x, y, r, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} d_0(T-t, x e^{r(T-t)}, y)^2\right) \quad (2.6.7)$$

$$d_0(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} \text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{t}$$

3. La fonction  $\pi(t, x, y, T)$  est la solution fondamentale de l'EDP d'évaluation (2.5.1) dans les variables  $t$  et  $x$ , avec comme condition terminale  $\delta_y(dx)$ .

PREUVE : Ces résultats sont des simples conséquences des propriétés des solutions de la chaleur.

⇒ D'après le théorème (2.5.1),  $v(0, x) = u(0, \frac{\text{Log}(x)}{\sigma})$ . En appliquant la représentation des solutions de l'EDP de la chaleur données ci-dessus, il vient une représentation du prix d'un produit dérivé

$$v(0, x) = e^{-rT} \int h\left(x \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma y\right)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{y^2}{2T}\right) dy$$

Cette formulation est valable à toute date  $t$ , à condition de changer  $T$  en  $T-t$

- ⇒ (2.6.5) a la même forme que la représentation intégrale (2.3.6) qui permet de calculer  $\mathbb{E}[h(S_T(x, r, \sigma))]$  lorsque  $S_T(x, r, \sigma)$  suit une loi log-normale de tendance  $r$  et de volatilité  $\sigma$ .
- ⇒ La densité gaussiennes  $g(t, w, y, T)$  est solution "fondamentale" de l'équation de la chaleur avec comme condition terminale la masse de Dirac en  $y$   $\delta_y(dx)$ . Il en est de même pour la fonction  $\pi(t, x, y, T)$  qui est la solution fondamentale de l'EDP d'évaluation (2.5.1) dans les variables  $t$  et  $x$ , avec comme condition terminale  $\delta_y(dx)$ .

### Interprétation financière

- ◇ En termes financiers,  $\pi(t, x, y, T)$  s'interprète comme la "densité des prix d'états", c'est à dire le prix qu'on est prêt à payer pour toucher 1 Euro si on se trouve dans "l'état  $y$ " (en fait dans l'intervalle  $(y, y+dy)$ ). La linéarité des prix suggère ensuite que le prix d'un dérivé de pay-off  $h(S_T)$  est la somme des  $h(y) \times$  le prix d'être en " $y$ ". Cette notion a été introduite par des arguments purement économiques en 1953 par Arrow et Debreu (on parle aussi de *prix d'Arrow-Debreu*) qui ont ensuite reçu le prix Nobel.
- ◇ Les propriétés de moments de la loi log-normale de paramètres  $(r, \sigma^2)$  (2.3.5) et la règle d'évaluation impliquent que le prix de  $S_T$  ( $h$  est la fonction identité) est  $x$ , ce qui est cohérent avec l'absence d'arbitrage, puisque pour posséder de l'action à la date  $T$  il suffit de l'acheter aujourd'hui.

### Les paramètres de couverture

Ces formules intégrales permettent également de calculer la couverture  $\delta(t, x)$  de l'option. Deux voies sont possibles.



**Proposition 2.6.2** *Supposons que le pay-off de l'option soit dérivable, en presque tout point, et à dérivée à croissance polynomiale.*

1. La dérivée du prix de l'option, c'est à dire le Delta, est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Delta}(0, x) &= v'_x(0, x) \\ &= e^{-rT} \int \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma y\right) h'_x\left(x \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma y\right)\right) g(T, y) dy \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Calculer le **delta** de l'option ( la dérivée du prix) à la date 0 revient à évaluer le prix d'un produit financier de flux terminal  $\frac{S_T}{x} h'_x(S_T)$ .

L'évaluation des "deltas" se fait en intégrant la dérivée du pay-off par une densité log-normale de paramètre de tendance  $r + \sigma^2$ .

$$\text{Delta}(0, x) = \int_{\mathbb{R}^+} h'_x(z) l(T, x, z, r + \sigma^2, \sigma^2) dz \quad (2.6.9)$$

2. Utilisons la dérivation du noyau d'évaluation.

$$\text{Delta}(0, x) = e^{-rT} \int h(y) l'_x(T, x, y, r, \sigma^2) dy \quad (2.6.10)$$

$$l'_x(T, x, y, r, \sigma^2) = l(T, x, y, r, \sigma^2) (-d_0(T, x e^{rT}, y)) \frac{1}{x \sigma \sqrt{T}} \quad (2.6.11)$$

Calculer le **delta** de l'option ( la dérivée) revient à évaluer le prix d'un produit financier de flux terminal  $\frac{1}{x \sigma \sqrt{T}} (-d_0(T, x e^{rT}, S_T)) h(S_T)$ .

$(x \sigma \sqrt{T})^{-1} (-d_0(T, x e^{rT}, S_T))$  peut être interprété comme un noyau de dérivation.

**Remarque 2.6.1** Ces formules sont très utiles lorsqu'on calcule le prix par des méthodes de Monte-Carlo. Comme l'erreur est proportionnelle à la variance de la variable dont on cherche l'espérance, on a intérêt à retenir celle des deux méthodes qui conduit à une variable ayant la variance la plus petite.

PREUVE : Nous distinguons le cas où la fonction  $h$  est dérivable de l'autre.

⇒ Dans ce cas, la formule intégrale utilisant la densité gaussienne met en évidence la dépendance par rapport à la condition initiale. Comme le noyau gaussien est très régulier, les hypothèses assurent que l'on peut dériver sous le signe intégrale. D'où la formule de la proposition

⇒ Pour interpréter cette intégrale à l'aide d'un noyau remarquons que

$$\begin{aligned} d_0(T, x e^{rT}, y)^2 - 2 \text{Log}\left(\frac{y}{x e^{rT}}\right) &= \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \text{Log}\left(\frac{x e^{rT}}{y}\right) - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}\right)^2 + 2 \text{Log}\left(\frac{x e^{rT}}{y}\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \text{Log}\left(\frac{x e^{rT}}{y}\right) - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}\right) + 2 \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \text{Log}\left(\frac{x e^{rT}}{y}\right) \left(\frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}\right) \\ &\quad \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \text{Log}\left(\frac{x e^{rT}}{y}\right) + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}\right)^2 = d_1(T, x e^{rT}, y)^2 = d_0(T, x e^{r+\sigma^2 T}, y)^2 \end{aligned}$$

En termes de densité, nous observons que

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{xe^{rT}} l(T, x, y, r, \sigma^2) &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi T}} \frac{y}{xe^{rT}} \exp(-d_0(T, xe^{rT}, y)^2) \\
 &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}(d_0(T, xe^{rT}, y)^2 - 2\ln(\frac{y}{xe^{rT}}))\right) \\
 &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}(d_0(T, xe^{(r+\sigma^2)T}, y)^2)\right) \\
 &= \frac{1}{y\sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{1}{2}(d_1(T, xe^{rT}, y)^2)\right) = l(T, x, y, r + \sigma^2, \sigma^2)
 \end{aligned}$$

ce que l'on cherche à démontrer.

⇒ L'autre voie est d'utiliser la formule intégrale (2.3.6) dans laquelle la dépendance par rapport à la condition initiale est exprimée uniquement dans le noyau d'évaluation log-normal et de dériver

$$\begin{aligned}
 v'_x(0, x) &= e^{-rT} \int h(y) l'_x(T, x, y, r, \sigma^2) dy \\
 l'_x(T, x, y, r, \sigma^2) &= l(T, x, y, r, \sigma^2) (-d_0(T, xe^{rT}, y)) \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

D'où le résultat de l'énoncé.

$(x\sigma\sqrt{T})^{-1}(-d_0(T, xe^{rT}, S_T))$  peut être interprété comme un *noyau de dérivation* sur l'espace des trajectoires.

### Evaluation risque neutre : première approche

• Les propriétés du noyau de pricing montrent que **si le rendement “historique” de l'actif est le taux d'intérêt sans risque  $r$** , la règle de pricing s'écrit simplement

$$v(0, x) = \mathbb{E} [e^{-rT} h(S_T^x)] \quad v(t, x) = \mathbb{E} [e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = x]$$

L'hypothèse introduite sur les rendements s'exprime encore en disant que la prime de risque  $\lambda$  du modèle historique est nulle. On dit alors que la probabilité historique est **risque-neutre**. Ce faisant, les vendeurs d'options se comportent comme “des assureurs” qui font une estimation moyenne de leurs pertes.

• Mais nous avons vu que structurellement les rendements des actifs sont différents du taux sans risque, sinon l'investisseur n'aurait aucun intérêt à les garder en portefeuille.

La règle d'évaluation que nous avons dégagée montre que pour faire le **prix** d'un produits dérivé, *les agents font comme si le marché dans lequel se font les transactions était risque-neutre*.

*Mathématiquement*, cela revient à considérer que dans l'estimation du prix d'un produit dérivé, le marché fait un calcul d'espérance avec des poids différents de ceux induits par la probabilité historique. En d'autres termes, il respecte la règle que le prix est une espérance du flux terminal actualisé, sous une probabilité pour laquelle **la prime de risque est nulle**. Nous noterons  $\mathbb{Q}$  cette probabilité risque neutre, (on dit encore mesure martingale). Sous  $\mathbb{Q}$   $(S_t)$  est un brownien

géométrique de paramètre  $r$  et  $\sigma$ . De plus, la règle de pricing s'écrit :

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = x \right] \quad (2.6.12)$$

$$v'_x(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \frac{S_T}{S_t} h'_x(S_T) | S_t = x \right] \quad (2.6.13)$$

$$v'_x(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} (-d_0(T-t, S_t e^{r(T-t)}, S_T)) h(S_T) | S_t = x \right]$$

L'intérêt de cette représentation est de se généraliser à des pay-offs path-dépendants. Nous verrons dans le chapitre 3 que cette règle s'étend à des situations très générales.

### 2.6.2 Les formules fermées

La formule de Black et Scholes concerne plus spécifiquement les prix des Calls et des Puts, que nous explicitons ci-dessous.

**Théorème 2.6.3** 1. Le prix d'un Call de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t, x, K, T) &= x \mathcal{N} \left[ d_1(T-t, x e^{r(T-t)}, K) \right] - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left[ d_0(T-t, x e^{r(T-t)}, K) \right] \\ d_0(t, x, y) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{t}, \quad d_1(t, x, y) = d_0(t, x, y, \sigma^2) + \sigma \sqrt{t} \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

où  $\mathcal{N}$  est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite.

2. De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\Delta(t, S_t) = \mathcal{C}'_x(t, S_t, T, K) = \mathcal{N}[d_1(T-t, S_t e^{r(T-t)}, K)] \quad (2.6.15)$$

parts de l'actif risqué.

3. De même, le prix d'un Put de mêmes caractéristiques est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t, x, K, T) &= K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, K, x e^{r(T-t)})] - x \mathcal{N}[d_0(T-t, K, x e^{r(T-t)})] \\ \Delta(t, S_t) &= \mathcal{P}'_x(t, S_t, T, K) = -\mathcal{N}[d_0(T-t, K, S_t e^{r(T-t)})] \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

4. Lorsque les coefficients dépendent du temps, la même formule reste valable à condition de poser

$$r = R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds, \quad \sigma^2 = \Sigma^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds. \quad (2.6.17)$$

**Remarque 2.6.2** Les propriétés des fonctions  $d_0$  et  $d_1$  sont les suivantes

$$\begin{aligned} d_0(t, x, y, \sigma^2) &= -d_0(t, y, x, \sigma^2) \\ d_1^2(t, x, y, \sigma^2) &= d_0^2(t, x, y, \sigma^2) - 2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

**Remarque 2.6.3** La fonction<sup>3</sup> de répartition  $\mathcal{N}(x)$  peut être approximée par

$$\mathcal{N}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2}x^2)} (ay + by^2 + cy^3) \quad (2.6.18)$$

$$y = \frac{1}{1 + 0,33267x} \quad a = 0,4361836$$

$$b = -0,1201676 \quad c = 0.937298$$

PREUVE : L'idée importante est d'introduire l'ensemble d'exercice.

⇒ La preuve est alors une simple conséquence des formules explicites précédentes. Soit

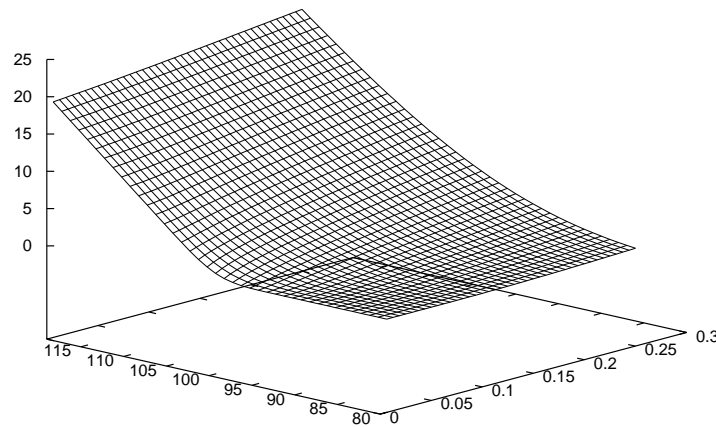
$$\mathcal{E} = \{S_T \geq K\} = \{U \leq d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\} \quad (2.6.19)$$

Cela permet de linéariser le pay-off du Call en un terme de pay-off  $K\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$  et un autre terme  $S_T\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ .

Le premier terme se calcule grâce à la formule (??). Il fait intervenir la fonction de répartition de la loi gaussienne  $\mathcal{N}$  au point  $d_0(T-t, x, Ke^{-r(T-t)})$ .

⇒ Pour calculer le deuxième terme<sup>4</sup>, nous utilisons la remarque que  $d_0^2 - 2\ln \frac{y}{x} = d_1^2$ . Le calcul du prix de  $\frac{S_T}{x}\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$  est exactement le même que le précédent en remplaçant  $d_0$  par  $d_1$ .

⇒ Il reste à calculer la dérivée par rapport à  $x$  du prix du Call. Il suffit de dériver sous le signe espérance la fonction  $(x(\frac{S_T}{x} - K))^+$  dont la dérivée  $(S_T/x)\mathbf{1}_{S_T \geq K}$  existe presque partout. Mais c'est exactement le calcul que nous venons de faire, d'où le résultat.



Surface de prix en fonction de  $x$  et  $T$

### 2.6.3 Propriétés du prix des Calls et des Puts

Nous précisons quelques propriétés importantes des prix des Calls et des Puts dans le modèle de Black et Scholes, en nous limitant essentiellement aux Calls, puisque la parité Call- Put= $x - Ke^{-r(T-t)}$  permet d'avoir les résultats pour les Puts.

<sup>3</sup>Cette approximation est donnée dans l'excellent livre de Dewynne-Howison-Wilmott (1995).

<sup>4</sup>Nous donnerons une démonstration plus directe à l'aide du théorème de Girsanov

- Remarquons d'abord que comme le prix des calls et des puts est positif,

$$v(t, x, r, \sigma, T, K) \geq (x - Ke^{-r(T-t)})^+ \quad (2.6.20)$$

- Puisque la fonction  $\mathcal{N}[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)]$  est croissante par rapport à  $x$ , la dérivée seconde de  $v(t, x, r, \sigma, T, K)$  est positive. Le prix des Calls est une **fonction convexe** du sous-jacent, qui comme nous le verrons ci-dessous croît avec la volatilité, avec la maturité, mais décroît avec le strike.
- C'est une fonction **homogène** au sens où

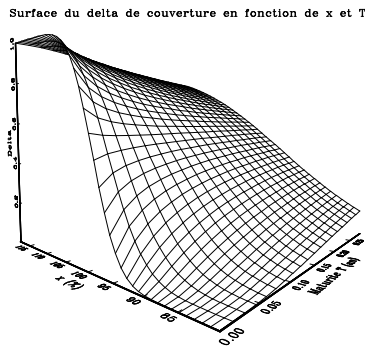
$$v(t, \lambda x, r, \sigma, T, \lambda K) = \lambda v(t, x, r, \sigma, T, K) \quad (2.6.21)$$

C'est une des raisons pour laquelle les strike sont souvent exprimés en pourcentage du cours de l'action.

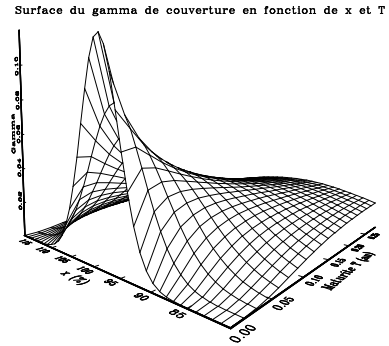
- Lorsque l'option est à la monnaie forward,  $K = xe^{rT}$  une simple approximation de la valeur du Call est donnée (Brenner&Subrahmanyam, 1994) (Willmot, 1999) par

$$v(t, x, r, \sigma, T, Se^{rT}) = x \left( \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) - \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \right) = 0,4x\sigma\sqrt{T-t} \quad (2.6.22)$$

#### 2.6.4 Les grecques



Le Delta d'un Call.



Le gamma d'un Call.

Nous avons écrit la valeur d'une option d'achat grâce à la formule de BLACK ET SCHOLES comme une fonction  $v(t, x, r, \sigma, T, K)$ . Dans cette formule,

- le prix de l'action  $x$  et le temps  $t$  sont des variables d'état ;
- le taux sans risque  $r$ , la volatilité  $\sigma$  sont des paramètres fixés du modèle ;
- la maturité  $T$ , le prix d'exercice  $K$  sont des paramètres fixés de l'option.

La sensibilité du prix du call aux différents paramètres joue un rôle très important dans la gestion de la couverture du produit dérivé. En particulier les sensibilités que nous calculons ont la plupart du temps un nom spécifique en relation avec l'alphabet grec.

Pour simplifier les notations, nous supposons  $t = 0$ , et nous ne rappellerons pas les variables dans les expressions de  $d_0$  et  $d_1$ .

$\mathcal{C}'_x = \text{Delta} = \Delta = \mathcal{N}(d_1)$	$\mathcal{C}'_K = -e^{-rT} \mathcal{N}(d_0)$
$\mathcal{C}''_{xx} = \text{Gamma} = \Gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_1) > 0$	$\mathcal{C}'_\sigma = \text{Vega} = x\sqrt{T} \mathcal{N}'(d_1)$
$\mathcal{C}'_t = \text{Theta} = \Theta = -\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_0) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_0)$	$\mathcal{C}'_r = \text{Rho} = \rho = TK e^{-rT} \mathcal{N}(d_0) > 0$

Avec ces notations, l'EDP d'évaluation devient

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Gamma + rx\Delta - r\mathcal{C} + \Theta = 0} \quad (2.6.23)$$

Il est souvent intéressant de l'exprimer en terme de Vega, Delta, ce qui est possible grâce à la relation  $\sigma^2 x^2 \Gamma = \sigma T \text{Vega}$

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{\sigma}{T-t} \text{Vega} + rx\Delta - r\mathcal{C} + \Theta = 0} \quad (2.6.24)$$

### Exemple 2.6.1

Paramètres des options		Call		Put
Cours du sous-jacent	S=100\$	3.53	Premium	3.32
Strike de l'option	K=100\$	0.5267	Delta	-0.4733
Taux court	r=2,5%	0.0463	Gamma	0.0463
Nombre de jours avant l'échéance	30j	0.1141	Vega	0.1141
Volatilité du sous-jacent	$\sigma = 30\%$	-0.0605	theta (par jour)	-0.0537

## 2.7 Implémentation de la formule

### Implémentation

Pour mettre en oeuvre pratiquement la formule de BLACK ET SCHOLES, tous les paramètres et variables d'état doivent être identifiés.

- ◇ Le prix d'exercice et la date d'expiration de l'option sont spécifiées dans le contrat et sont connus sans ambiguïté.
- ◇ Le temps jusqu'à la maturité est plus difficile à spécifier : doit-on compter tous les jours ou seulement les jours où les marchés sont ouverts ?

Observons que le temps jusqu'à la maturité apparaît dans la formule de Black et Scholes dans deux termes. Dans le facteur d'actualisation  $e^{-r(T-t)}$ , le nombre de jours du calendrier semble approprié car les intérêts courent tous les jours.

Dans le second terme, une réponse plus ambiguë peut être faite : le temps jusqu'à maturité apparaît comme indissociable de la volatilité. Or des études empiriques ont montré qu'il

y avait un effet jour significatif (week-ends et jours fériés sont nettement moins risqués). Souvent, les traders ajustent cette maturité restante (de volatilité) à un nombre de jours compris entre le nombre de jours du calendrier et celui du nombre de jours ouvrés (par exemple, un jour de non trading = 1/3 d'une journée ouverte). Comme l'année boursière est de l'ordre de 252 jours ouvrés, cette correction n'est pas négligeable.

- Le taux d'intérêt est supposé constant et égal au taux d'intérêt sans risque. Mais en général, une telle hypothèse ne semble pas vérifiée sur les marchés. Le cas des taux déterministes suggère de considérer le taux zéro-coupon maturant en  $T$ .
- ◊ Le cours de l'action à introduire est un cours de négociation. Quel est le bon cours de l'action à retenir, celui du matin, du soir, le plus fort, le plus faible, etc... Les cours publiés dans les journaux spécialisés sont souvent des cours reconstitués mid-market : moyenne entre le prix de l'offre et le prix de vente (bid-ask)
- La volatilité sera analysée ci-dessous.

## 2.8 Volatilité

### 2.8.1 Précisions sur la volatilité

La **volatilité** est le paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. C'est un paramètre clé en finance, qui parfois recouvre des notions un peu différentes telles que : volatilité instantanée locale, volatilité moyenne sur une période, etc...

#### La volatilité locale

La **volatilité locale** est le paramètre qui mesure le risque associé à la variation instantanée du sous-jacent. Elle peut-être déterministe comme dans le cas d'un sous-jacent qui suit un brownien géométrique, ou stochastique comme dans le cas des options.

**Définition 2.8.1** La volatilité locale d'un actif de prix  $(X_t)$  est le paramètre éventuellement aléatoire  $\sigma_t^X$  défini par :

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t dt + \sigma_t^X (d\widehat{W}_t + \lambda_t dt) \quad (2.8.1)$$

La propriété suivante, qui n'est par vraiment surprenante, mérite d'être notée :

**Proposition 2.8.1** Dans le modèle de Black et Scholes, le Call est localement plus volatil que l'actif sous-jacent.

PREUVE : D'après la formule d'Itô, la volatilité du Call est donnée par :

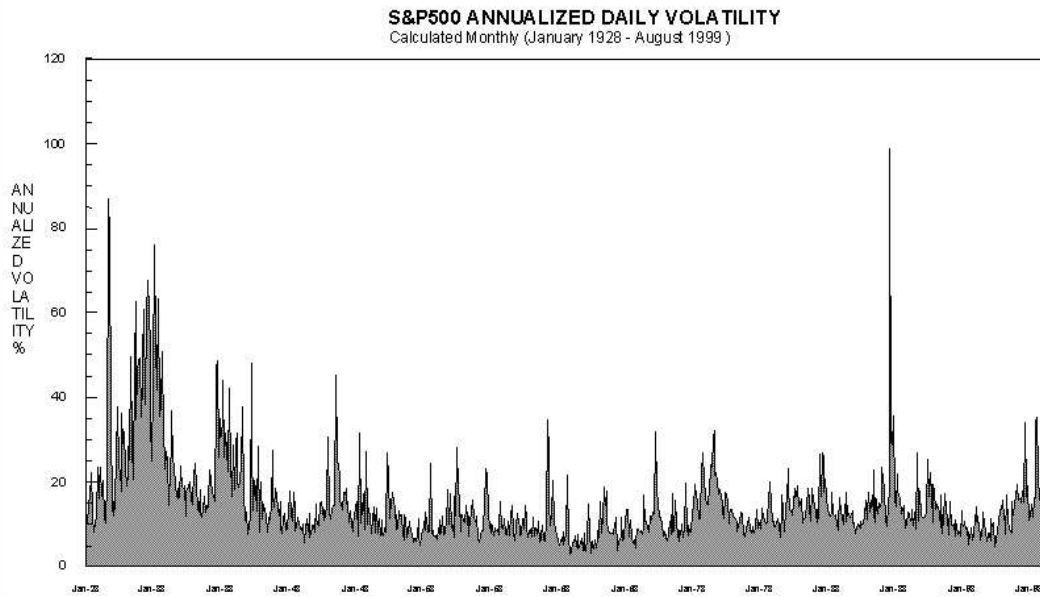
$$\frac{C'_x(t, S_t)}{C(t, S_t)} S_t \sigma_t = \frac{\mathcal{N}[d_1(S_t/K e^{-r(T-t)})]}{C(t, S_t)} S_t \sigma_t \geq \frac{C(t, S_t)}{C(t, S_t)} \sigma_t = \sigma_t$$

C'est le fameux **effet de levier** des options. En achetant un call, on génère un portefeuille dont la volatilité et donc la rentabilité est supérieure à celle de l'action, et ceci pour un investissement initial moindre. Les options sont alors utilisées à des fins spéculatives.

### 2.8.2 Volatilité historique

Dans le cadre de la formule de Black et Scholes, le paramètre de volatilité  $\sigma$  est le seul paramètre qui ne peut pas être observé directement. Deux approches sont possibles pour l'identifier.

- ⇒ des méthodes empiriques utilisant des données historiques sur les cours (d'ouverture, de fermeture, le plus haut, le plus bas....)
- ⇒ des méthodes implicites basées sur l'observation des prix des options et des cours des sous-jacents.



**Fig. 2.1:** Volatilité historique du SP500 de Janvier 28 à Août 99 : les pics représentent les cracks de 29 et de 87.

La première méthode utilise les estimateurs standards de la variance par unité de temps du logarithme du cours du sous-jacent, qui par hypothèse suit un mouvement brownien non centré. On utilise des données régulièrement espacées de  $\delta$  et on introduit :

$$S_{(j+1)\delta} = S_{j\delta} e^{\mu\delta - \sigma(W_{(j+1)\delta} - W_{j\delta})}$$

$$\text{et on pose : } \tilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln(S_{(j+1)\delta} | S_{j\delta})$$

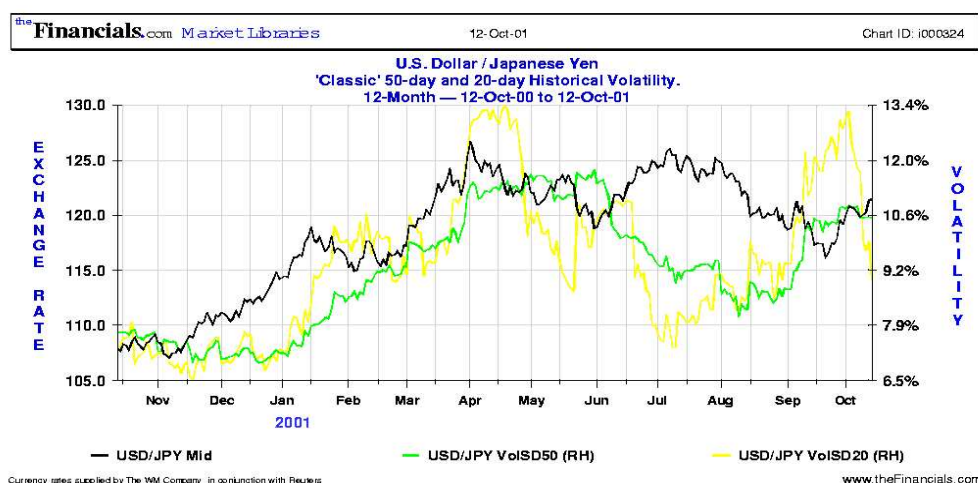
$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\ln(S_{(j+1)\delta} | S_{j\delta}) - \tilde{\mu}_n)^2$$

On en retient, en général, des valeurs de  $n$  comprises entre 50 et 180 jours. Le  $\tilde{\sigma}_n$  observé est l'estimateur de  $\sigma$  appelé *volatilité historique*.



**Remarque 2.8.1** Pour employer des méthodes statistiques, il faut dégager une certaine stationnarité dans les données, et faire des tests d'adéquation des modèles, notamment tester si l'hypothèse de log-normalité pour le cours de l'actif peut être retenue. Les tests permettent rarement de confirmer les hypothèses de Black et Scholes, et de nombreuses recherches sont en cours actuellement pour trouver des modèles plus adéquats, notamment les modèles ARCH en discret, et les modèles à volatilité aléatoire en continu.

Toutefois, notre propos ici est d'estimer des paramètres en vue d'évaluation et de couverture de prix, opérations qui se situent comme nous l'avons vu dans un univers risque-neutre différent de l'univers historique. Comme les nombreux tests économétriques faits sur la théorie de l'arbitrage (APT) montrent qu'il est très difficile d'évaluer des primes de risque stables, nous sommes en face d'une situation assez originale sur le plan statistique, qui conduit à être prudent dans l'usage des techniques d'estimation historique pour le calcul des prix d'options et de leur couverture.



Cours du yen et volatilité historique Oct2000-Oct2001

## La volatilité des marchés actuels

La volatilité, qui est comme nous l'avons vu la vraie mesure du risque ne nous donne qu'une information à très court terme du comportement des sociétés. Mais nous assistons actuellement à une augmentation de la volatilité des titres : les écarts de cours quotidiens deviennent de plus en plus spectaculaires tant sur les titres que les indices boursiers.

Une explication (partielle) est donnée par l'importance grandissante des investisseurs étrangers qui possèdent plus d'un tiers de la capitalisation boursière des entreprises qui composent l'indice CAC40. Les grands fonds de pension anglo-saxons interviennent sur des quantités importantes, mais peuvent se retirer rapidement si la confiance baisse.

Par ailleurs, contrairement à ce qu'on pouvait attendre de la diversification, l'indice Dow Jones EuroStoxx50 est plus volatil que le CAC, car les investissements sur les titres de l'Eurostoxx ont été plus nombreux, et plus sectoriels.

### 2.8.3 La volatilité implicite

La volatilité implicite ne fait référence à aucune notion statistique. Elle repose sur le fait que dans un marché très liquide, la loi de l'offre et de la demande permet de fixer des prix d'équilibre, qui correspondent à un consensus de marché. Le marché se sert alors des modèles moins pour fixer des prix, (sauf sur des produits complexes), que pour évaluer et couvrir le risque attaché à un produit dérivé. Le problème est aussi de comparer les prix de différents produits optionnels écrits sur un même sous-jacent.

L'outil de référence essentiel est la *volatilité implicite*, obtenue en inversant la formule qui donne le prix du Call, c'est à dire qu'à un prix de Call et à un niveau de cours donnés, on associe la valeur de  $\sigma$  qui introduite dans la formule de BLACK ET SCHOLES donne comme prix celui du Call observé sur le marché.

$$\boxed{\mathcal{C}^{\text{Obs}}(t, x, T, K) = \mathcal{C}^{BS}(t, x, T, K, \sigma^{\text{impl}})} \quad (2.8.2)$$

**Exemple 2.8.1**  $x = 21FF, K = 20FF, r = 0.1, T = 0,25$  année,  $C = 1.875FF$

La volatilité implicite est de 0.235, car  $\mathcal{C}(21, 0.25, 20, 0.1, \mathbf{0.235}) = 1.875$

La volatilité implicite peut s'écarter notablement de la volatilité historique car elle est censée refléter la volatilité future anticipée par le marché. Elle incorpore également toutes les incertitudes sur la qualité du modèle utilisé.

**Exemple 2.8.2** Par exemple la nomination d'un gouverneur de banque centrale peut suivant le candidat choisi faire chuter ou monter le marché. Les traders d'options savent donc qu'après la nomination le prix du sous-jacent va varier fortement. Les prix des options avant la nomination sont donc élevés bien que devant l'incertitude il y ait peu d'activité (stabilité) sur le sous-jacent et donc <sup>5</sup> une faible volatilité réelle.

### 2.8.4 Volatilité implicite et Risk-management

Ce paramètre de volatilité implicite est l'outil clé du Risk-management, puisqu'il permet à partir de la connaissance d'un prix d'option de mettre en place les stratégies de couverture et les mesures de sensibilité associées, puisqu'il permet de calculer les Grecques du problème. Le Vega est une mesure de l'exposition à une mauvaise estimation de la valeur de la volatilité. Plus généralement

**Proposition 2.8.2** *Supposons que l'on utilise à tort la formule de Black et Scholes avec une volatilité constante  $\sigma^{BS}$  alors que la "vraie" volatilité locale de l'actif est  $\sigma_t$  éventuellement aléatoire, mais inconnue pour donner le prix  $C^{BS}$  d'un produit dérivé dont le pay-off est  $h(S_T)$ .*

*La stratégie de couverture est mise en place à l'aide de la volatilité  $\sigma^{BS}$ ; cela conduit à une erreur de réplcation (tracking error) à maturité donnée par*

$$e_T = V_T(\delta^B S(h)) - h(S_T) = \int_0^T e^{-r(T-s)} \frac{1}{2} ((\sigma^{BS})^2 - \sigma_t^2) S_t^2 C_{xx}^{BS}(t, S_t) dt \quad (2.8.3)$$

---

<sup>5</sup>Un bon site pour voir des données de volatilité sur les titres américains les plus courants est <http://www.ivolatility.com>

Dans le cas des Call, on peut exploiter les liens entre Gamma et Vega pour transformer l'équation

$$e_T = \int_0^T e^{-r(T-s)} \frac{\sigma^{BS}}{T-t} \left( 1 - \frac{\sigma_t^2}{(\sigma^{BS})^2} \right) \text{Vega}(t, S_t) dt \quad (2.8.4)$$

Call de strike  $K$ .

PREUVE : Nous appliquons la formule d'Itô à la fonction  $C^{BS}$  et au sous-jacent  $S_t$ . Il vient que

$$\begin{aligned} dC^{BS}(t, S_t) &= \text{Delta}(t, S_t)(dS_t - r S_t dt) + \left( \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \Gamma(t, S_t, \sigma^{BS}) + r S_t \text{Delta}(t, S_t) + C_t^{BS}(t, S_t) \right) dt \\ &= \text{Delta}(t, S_t)(dS_t - r S_t dt) + \frac{1}{2} (\sigma_t^2 - (\sigma^{BS})^2) S_t^2 C_{xx}^{BS}(t, S_t, \sigma^{BS}) dt + r C^{BS}(t, S_t) dt \end{aligned}$$

Dans la dernière équation, nous avons utilisé que le prix BS est solution de l'EDP (??).

Par ailleurs le portefeuille vérifie

$$dV_t(\text{Delta}) = r V_t dt + \text{Delta}(t, S_t)(dS_t - r S_t dt)$$

La tracking error  $e_t = V_t - C^{BS}(t, S_t)$  vérifie donc

$$de_t = r e_t dt + \frac{1}{2} ((\sigma^{BS})^2 - \sigma_t^2) S_t^2 C_{xx}^{BS}(t, S_t) dt$$

Le résultat final s'obtient en résolvant cette équation linéaire.

Dans le cas des Call's on peut exploiter le fait que  $x^2 \Gamma = \frac{1}{\sigma T} \text{Vega}$ .

La tracking error  $e_t = V_t - C^{BS}(t, S_t)$  s'écrit alors

$$de_t = r e_t dt + \frac{1}{2} \frac{\sigma^{BS}}{T-t} \left( 1 - \frac{\sigma_t^2}{(\sigma^{BS})^2} \right) \text{Vega}(t, S_t) dt$$

d'où le résultat.

**Remarque 2.8.2** Cette estimation de l'erreur peut être utilisée pour justifier de certaines approximations faites dans le marché sur les volatilités. De nombreux produits dont la volatilité est structurellement aléatoire sont évalués avec une formule de Black Scholes. Lorsque la volatilité choisie majore la vraie volatilité, le résultat est favorable au trader si le Gamma est positif, c'est à dire si le prix est convexe. Nous savons que cette propriété vraie pour les Call s'étend à tous les pay-offs convexes.

**Informations sur les prix de l'indice américain SP500(SPXX) :  
29 Novembre 2002**

Prix	Variation (%)	-1an High Date	-1an Low Date	Volume Indice	Volume Options	Options Ouvertes
936.30	-2.55 (-0.27%)	1,172.50 04-Jan	776.75 09-Oct	0	71,015	2,701,176

**Volatilité historique du SP500**

	-0j	-1 sem	-1mois	-1 an,Hi/Date	-1an Low/Date
10 days	24.23%	23.24%	33.40%	54.69%- 29-Juil	8.03% - 28 Dec
20 days	23.78%	21.25%	37.80%	48.13%- 14 Aout	10.55% - 14 Jan
30 days	22.01%	25.30%	36.39%	43.08% - 15 Aout	12.31% - 28 Jan

### Volatilité implicite du SP500

	-0j	-1 sem	-1mois	-1 an,Hi/Date	-1an Low/Date
Call	24.87%	20.81%	29.71%	40.89%-5 Aout	14.93%-21 Mars
Put	24.96%	20.52 %	28.65 %	41.76 %-5 Aout	15.0%-26 Mars



Volatilité implicite sur un an et volumes : SP500

### Prix et volatilité des Calls

VolImpl (%)	Delta	Call	Variation (%)	Echéance	Strike
25.80 %	65.85%	32.35	-1.65 (-4.85)	Dec02(22)	920
25.57 %	62.73%	29.25	-1.65 (-5.34)	Dec02(22)	925
24.67 %	52.63%	20.75	-0.55 (-2.58)	Dec02(22)	940
24.23 %	45.49 %	16.10	-1.00 (-5.85)	Dec02(22)	950
26.13%	69.74%	56.05	-1.05 (-1.84)	Jan03(50)	900
24.86 %	39.75%	75.20	-0.95 (-2.33)	Jan03(50)	925
23.71 %	47.61%	26.35	-0.50 (-1.86) )	Jan03(50)	950
22.91%	35.46%	16.40	-0.65 (-3.81)	Jan03(50)	975

### Prix et volatilité des Puts

VolImpl (%)	Delta	Put	Variation (%)	Echéance	Strike
25.97%	-34.09%	16.40	0.05 (0.31)	Dec02 (22)	920
25.62%	-37.17%	18.20	-0.20 (-1.09)	Dec02 (22)	925
24.79%	-47.25%	24.75	0.50 (2.06)	Dec02 (22)	940
24.31%	-54.37%	30.05	0.20 (0.67)	Dec02 (22)	950
26.18%	-30.04%	20.35	-0.15 (-0.73)	Jan03(50)	900
24.87%	-40.32%	28.95	0.10 (0.35)	Jan03(50)	925
23.76%	-52.13%	40.55	0.95 (2.40))	Jan03(50)	950
22.97%	-64.24%	55.55	0.65 (1.18)	Jan03(50)	975

**Informations sur les prix de l'indice américain Nasdaq (NDX) :**  
**29 Novembre 2002**



Volatilité implicite sur un an et volume : Nasdaq

### Les prix et leurs caractéristiques sur un an

Prix	Variation (%)	-1an High Date	-1an Low Date	Volume Indice	Volume Options	Options Ouvertes
1,116.10	-9.57 (-0.85%)	1,720.91 05-Dec	804.64 07-Oct	0	3,807	110,907

### Volatilité historique du Nasdaq

	-0j	-1 sem	-1mois	-1 an, Hi/Date	-1an Low/Date
10 days	43.13%	45.95%	50.16%	75.07%-14 Mai	24.37% -07 Fev
20 days	43.19%	41.23%	47.53%	64.39%- 29 Juil	29.71% - 14 Jan
30 days	40.02%	43.04%	45.46%	60.67% - 14 Aout	30.26% - 15 Fev

### Corrélations historiques à 30 jours avec le SP500 (SPX)

	-0j	-1 sem	-1mois	-1 an, Hi/Date	-1an Low/Date
30 days	95.39%	94.96%	89.69%	96.64%-26 Nov	76.85%- 02 Mai

### Volatilité implicite du Nasdaq

	-0j	-1 sem	-1mois	-1 an, Hi/Date	-1an Low/Date
Call	42.31%	39.02%	44.33%	59.78%-25 Juil	29.24%-28 Mars
Put	43.65%	38.25%	44.28%	59.39%-25 Jul	30.31%-22 Mars

**Prix et volatilité des Calls**

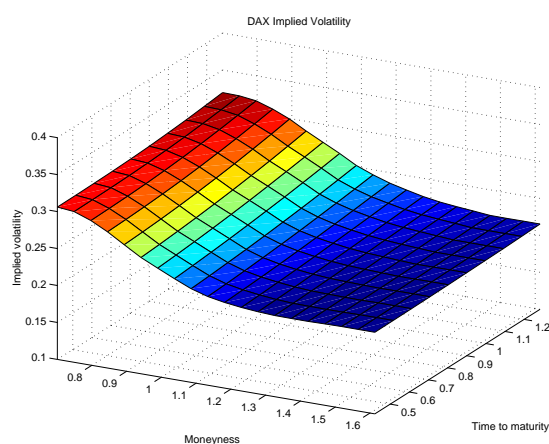
VolImpl (%)	Delta	Call	Variation (%)	Echéance	Strike
38.04%	71.29%	65.2	-11.80 (-15.32%)	Dec02(22)	1075.0
38.00%	62.41%	50.30	-10.40 (-17.13)	Dec02(22)	1100
37.56%	52.96%	37.35	-11.15 (-22.99)	Dec02(22)	1125
37.51%	43.49%	27.20	-8.15 (-23.06)	Dec02(22)	1150
40.46%	65.83%	89.20	-10.10 (-10.17)	Jan03(50)	1075
40.21%	60.05%	75.20	-8.80 (-10.48)	Jan03(50)	1100
39.77%	54.09%	62.40	-7.80 (-11.11)	Jan03(50)	1125
39.29%	48.01%	51.00	-6.80 (-11.76)	Jan03(50)	1150

**Prix et volatilité des Puts**

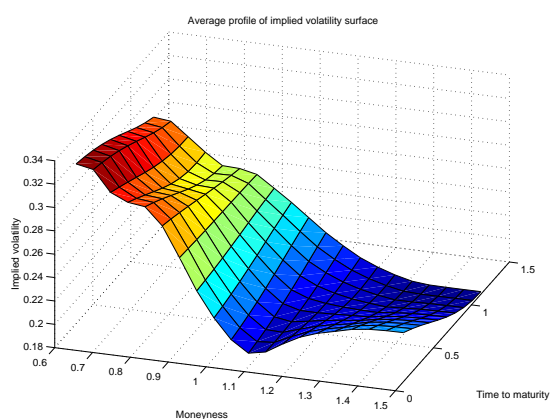
VolImpl (%)	Delta	Put	Variation (%)	Echéance	Strike
45.84%	-30.81%	30.95	4.65 (17.68%)	Dec02 (22)	1075
44.88%	-38.25%	40.6	5.85 (16.83)	Dec02 (22)	1100
44.91%	-46.19%	53.3	7.40 (16.12)	Dec02 (22)	1125
44.86%	-54.13%	67.9	9.00 (15.28)	Dec02 (22)	1150
45.41%	-34.90%	53.7	5.70 (11.88)	Jan03(50)	1075
44.88%	-40.06%	64.5	7.60 (13.36)	Jan03(50)	1100
44.31%	-45.42%	76.55	8.65 (12.74)	Jan03(50)	1125
43.97%	-50.83%	90.3	9.80 (12.17)	Jan03(50)	1150

## 2.9 Le smile

Comme le montre ces données de marché, il n'y a pas sur un même sous-jacent une seule volatilité implicite, mais éventuellement plusieurs, qui dépendent du prix d'exercice et de la maturité. On réfère à ce phénomène comme au phénomène de *smile*, car il arrive souvent que cette dépendance de la volatilité par rapport au strike ait la forme <sup>6</sup> d'un sourire.



Surfaces de volatilité implicite sur le DaX



Moyenne des historiques de volatilités

<sup>6</sup>Merci à Rama Cont pour ces belles surfaces de volatilité implicites

Cela est en contradiction avec le modèle théorique, mais le marché retient que cela indique que le titre de volatilité implicite la plus élevée est le plus risqué, le risque étant dû, le cas échéant, à des écarts au modèle d'arbitrage théorique, moins grande liquidité par exemple, etc . . . .

C'est ce paramètre qui sert actuellement de référence de risque sur le marché des options, où l'on évoque facilement que l'on achète ou vend de la volatilité.

On voit aussi pourquoi le marché attache une grande importance aux formules explicites, qui sont souvent utilisées inversées : dans le cas des produits plus sophistiqués, évalués par des méthodes numériques, la volatilité implicite est calculée à partir de tables évidemment dont l'établissement est évidemment assez coûteux en temps de calcul.

### 2.9.1 Smile et options exotiques

La prise en compte de l'effet de smile a pris ces dernières années une importance accrue pour la raison suivante.

Dans la gestion du marché, la formule de Black et Scholes est donc essentielle plus pour quantifier le portefeuille de couverture que pour faire le prix des options classiques. La règle qui consiste à dire,

- le trader observe un prix d'option dans le marché
- il en déduit la volatilité implicite associée
- il couvre l'option avec le Delta correspondant à cette volatilité

est parfaitement cohérente, puisqu'il s'agit de couvrir une option avec du sous-jacent. Il s'agit d'une gestion produit par produit.

Ces dernières années, la grande liquidité des options classiques entretenue par la présence des marchés organisés, a conduit les intervenants des marchés à considérer ces options standards comme des produits dont la gestion est parfaitement maîtrisée. ce sont des produits "vanilla" (comme la glace). Elles deviennent des produits de base qu'on souhaite utiliser comme instruments de couverture d'options plus complexes comme les options exotiques.

Le problème du Smile de volatilité se pose alors autrement, puisqu'il est nécessaire maintenant, pour pouvoir prendre en compte dans un même portefeuille de couverture plusieurs options, d'avoir un modèle commun qui respecte le smile et qui permette de faire des prix d'options exotiques, notamment d'options barrières. Le problème devient d'identifier non plus une volatilité implicite, mais une diffusion "implicite". Dupire (Paribas, 1995) et Derman (Goldman Sachs, 1995) ont été les pionniers de la recherche dans cette direction.



# Appendice

## 2.10 Exemples de Produits Structurés sur indices

Cette présentation de produits structurés est faite pour des clients par une équipe de structuration d’une banque française. Elle date de la fin des années 1990.

### 2.10.1 Motivation

Dans le contexte actuel de taux d’intérêt très bas, l’investissement boursier paraît être un bon moyen d’obtenir des rendements futurs élevés. Les produits sont généralement des Bons à Moyen Terme Négociables (BMTN) qui offrent une souplesse extrême au choix de l’investisseur. L’expérience de la banque XXX garantit un market-making de qualité ainsi qu’une excellente liquidité en cas d’entrées/sorties en cours de vie du produit.

### 2.10.2 Définition et caractéristiques des produits

#### Choix des caractéristiques

- CHOIX DE L’INDICE  
XXX propose sur demande des indexations sur l’indice CAC 40 ou sur des indices étrangers (Dax, Mib30, Ibex, Footsie ...) ou encore sur des indices européens (Euro Stoxx 50 : valeurs de grande capitalisation des pays "in") avec couverture systématique du risque de change contre Euro. L’investisseur mise uniquement sur l’évolution relative de l’indice étranger.
- CHOIX DE LA MATURITÉ  
L’indexation et la maturité varient dans le même sens (un allongement de la durée offre un surcroît d’indexation).
- CHOIX DU RENDEMENT MINIMUM GARANTI  
En plus de la garantie de capital, l’investisseur pourra choisir un taux minimum garanti.

#### Famille des options utilisées

Afin de permettre une gestion efficace des anticipations de variation des marchés boursiers, XXX a développé une famille d’options, des classiques aux plus exotiques. Les caractéristiques de ces options restituent la performance de l’indice avec un effet de levier et/ou de capture de la performance.

- OPTION AVEC INDEXATION SIMPLE  
on compare l’indice en début et en fin de période.  
*C’est un produit pur et simple à comprendre mais son succès décline en raison de l’incertitude sur la valeur de l’indice en fin de période .*
- OPTION AVEC PALIERS  
la performance du sous-jacent se trouve verrouillée dès lors qu’un certain niveau prédéfini (palier) est franchi. Cette performance reste acquise ensuite quelle que soit l’évolution du

sous-jacent par la suite.

*Très appréciée par la clientèle mais plus coûteuse qu'une option standard. On peut diminuer le coût en modulant le niveau des barrières.*

- OPTION AVEC INDEXATION À CLIQUETS

la performance du sous-jacent se trouve verrouillée par exemple tous les ans. Seules les performances positives sont conservées, les sous-performances d'une période sur l'autre sont considérées comme nulles et n'affectent pas la performance globale.

*Ce produit permet de bénéficier de toutes les hausses annuelles sans subir les baisses de l'indice. Ce type de produit est très cher dans le contexte de taux bas actuel car on achète plusieurs options courtes au lieu d'une longue. Néanmoins on peut ajouter une moyenne ou un plafond.*

- OPTION AVEC BARRIÈRE DÉSACTIVANTE

L'option disparaît dès qu'un niveau prédéfini est touché. L'option avec barrière désactivante est moins chère qu'une option standard, elle procure souvent un fort effet de levier mais l'investisseur supporte le risque de retour à une performance moindre, voire nulle si l'indice progresse trop sur la période.

*Son faible coût la rend très attractive pour des maturités courtes (une à deux années).*

- OPTION SUR MOYENNE SIMPLE

L'indexation s'effectue sur la performance moyenne de l'indice. Cette performance moyenne est calculée à l'aide de cours constatés à intervalles de temps prédéfinis au cours de la vie du produit.

*La plus couramment utilisée depuis quelques temps car elle concilie des prix d'options faibles et une sécurité pour l'investisseur.*

- OPTION SUR MOYENNE "PROTÉGÉE"

Seuls les cours de constatation supérieurs ou égaux au niveau initial de l'indice sont utilisés pour la détermination de la moyenne. De cette manière, seules les performances haussières sont retenues pour la rémunération du produit.

*Un plus par rapport à la moyenne simple car le calcul revient à faire la moyenne des hausses aux différentes dates de constatation, en prenant une valeur nulle, lorsqu'on constate une baisse.*

- OPTION "SUPER MOYENNE"

Seuls les cours de constatation supérieurs ou égaux au niveau initial de l'indice sont utilisés pour la détermination de la moyenne. De plus on exclut tous les points où l'on a constaté une baisse. On ne connaît pas au départ le nombre de points qui seront pris en compte pour le calcul de la rémunération du produit.

Un seul point de constatation supérieur au niveau initial suffit à garantir une performance in fine positive.

- OPTION BEST OF

La rémunération du produit est égale au meilleur entre un taux de rendement garanti prédéfini et la performance de l'indice. La rémunération est au moins égale au taux garanti.

*L'avantage de cette option par rapport à une option simple et un minimum garanti est qu'elle permet d'afficher un pourcentage d'indexation plus élevé mais dont on ne bénéficiera*

*qu'au-delà d'un pourcentage significatif de hausse de l'indice.*

- OPTION CORRIDOR

La rémunération est proportionnelle au prorata du nombre de jours passés par l'indice à l'intérieur de bornes prédéfinies. La rémunération reste acquise au fur et à mesure que l'indice se comporte favorablement. L'indice peut sortir de l'intervalle et y revenir.

*Un classique des produits de forte rémunération à court terme (inférieur à un an).*



## Chapitre 3

# Options barrières

Ce chapitre doit beaucoup à de nombreuses discussions avec Monique Jeanblanc de l'Université d'Evry. Je remercie aussi tout particulièrement les équipes du Crédit Lyonnais avec qui j'ai travaillé sur ce problème, celles de GRO et de GRM notamment.

### 3.1 Introduction

Les options exotiques sont des produits complexes, qui constituent un marché d'une réelle importance depuis les années 1990, notamment sur le marché des changes. Leur nom vise surtout à les différencier des options standards européennes ou américaines. Ce sont des options qui ne sont traitées que sur les marchés de gré à gré (Over the Counter) à la différence des options standards traitées aussi dans les marchés organisés. Elles visent à répondre à des besoins spécifiques d'assurance des grands groupes financiers, des compagnies d'assurance, fonds de pension, etc... La notion d'exotisme est bien sûr toute relative, car au fur et à mesure qu'un produit financier devient très liquide il perd progressivement son caractère d'exotisme.

L'intérêt pour certaines options exotiques provient du fait qu'elles sont moins chères que les options classiques équivalentes. Les options barrières sont un exemple d'une telle réduction, puisque l'option pourra être exercée dans un nombre de configurations moindre que l'option classique, par exemple seulement si le sous-jacent est passé en dessous d'une barrière définie dans le contrat. Pour le vendeur de l'option, la principale difficulté sera de mettre en place une stratégie de couverture efficace, car le delta de telles options présente souvent des discontinuités, notamment au voisinage de la barrière.

Nous nous intéressons particulièrement aux options barrières et aux options lookbacks, c'est à dire aux options qui portent sur le minimum ou le maximum des cours. De manière assez surprenante, dans le contexte de Black et Scholes, il existe des formules fermées pour le prix de telles options, qui reposent sur un principe de symétrie bien connu des probabilistes. Elles ont été obtenues par Reiner [4] pour les options barrières et par Conze et Visvanathan [2] pour les lookbacks. Peter Carr [1] est le premier à avoir montré comment ce principe, appliqué directement à un sous-jacent log-normal sans coût de portage (martingale) permet de définir un

prix et une couverture statique d'options barrière. Nous reprenons les mêmes idées, en montrant comment elles s'étendent à un sous-jacent log-normal quelconque. Les options barrières binaires nous servent de transition pour l'obtention des formules fermées pour les barrières et les look-backs et permettent de proposer des stratégies de couverture quasi-statiques.

Nous étendrons ces résultats à la formule de réplcation statique de Derman Kani, qui dans le cadre d'un sous-jacent suivant une diffusion markovienne, montre qu'une option barrière peut toujours s'écrire comme une intégrale en maturités de Call's à la barrière. Nous montrerons aussi comment utiliser ces calculs pour étudier les options barrières avec dividendes discrets.

## 3.2 Formule de symétrie dans la formule de Black et Scholes

Nous utilisons les notations habituelles sur les actions, où

- $S_t$  est le prix de l'action à la date  $t$ ,
- $r$  est le taux d'intérêt instantané supposé constant,
- $\sigma$  la volatilité instantanée constante.
- $\mu$  désigne le coût de portage (vocabulaire consacré dans le cas des actions), égal à  $r$  si l'action ne verse pas de dividende, à  $r - q$  si elle verse un taux de dividende de  $q$ .

La dynamique du prix de l'action est modelisée par

$$dS_u = S_u(\mu du + \sigma_u dW_u), \quad S_t = x \quad (3.2.1)$$

où  $(W_u)$  est un brownien risque-neutre sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ .

**Remarque 3.2.1** Lorsque le coût de portage est différent de  $r$ , le prix à investir en  $t$  pour détenir l'actif en  $T$  n'est pas  $S_t$ , mais  $S_t e^{(\mu-r)(T-t)}$  qui est donc le *vrai* sous-jacent d'une option de maturité  $T$ . En d'autres termes, le prix du contrat forward sur l'action est  $F_t(S, T) = S_t e^{\mu(T-t)}$ .

Nous commençons par établir la formule de symétrie lorsque le sous-jacent ne supporte pas de coût de portage, puis l'étendons simplement au cas général.

### 3.2.1 Formule de symétrie Call-Put sans coût de portage

Dans cette section, nous supposons que le coût de portage est nul, c'est à dire que sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ ,  $dS_u = S_u \sigma dW_u$  ..

$\mathcal{N}$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

#### Formules de symétrie Call-Put

Le prix d'un Call, pour un flux payé à la maturité  $T$  de  $(S_T - K)^+$  est donné par la formule de Black et Scholes, appliquée à un sous-jacent qui vaut  $x e^{-r(T-t)}$  à la date  $t$ ,

$$\text{Call}^{BS}(t, x, K, T) = e^{-r(T-t)} [x \mathcal{N}[d_1(T-t, x, K)] - K \mathcal{N}[d_0(T-t, x, K)]] \quad (3.2.2)$$

avec

$$\begin{aligned} d_0(u, x, K) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{u}} \ln\left(\frac{x}{K}\right) - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{u}, \\ d_1(u, x, K) &= d_0(u, x, K) + \sigma \sqrt{u} = -d_0(u, K, x) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

De même, le prix d'un Put, qui paye à maturité un flux de  $(K - S_T)^+$ , est de

$$\text{Put}^{BS}(t, x, K, T) = e^{-r(T-t)} [K\mathcal{N}(d_1(T-t, K, x)) - x\mathcal{N}(d_0(T-t, K, x))] . \quad (3.2.4)$$

Cette formule montre clairement qu'à condition d'invertir niveau de sous-jacent et prix d'exercice, il existe une formule de symétrie Call-Put

$$\text{Call}^{BS}(t, x, K, T) = \text{Put}^{BS}(t, K, x, T) \quad (3.2.5)$$

**Remarque :** Attention aux places respectives de  $x$  et  $K$  dans ces formules.

### Interprétation mathématique

L'interprétation mathématique de ce résultat en éclaire la portée.

Nous introduisons la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  et exploitons au maximum le fait que le prix du sous-jacent dépend linéairement de sa condition initiale, c'est à dire qu'un sous-jacent qui part de  $K$  a même distribution qu'un sous-jacent  $S$  qui part de  $x$  multiplié par  $K/x$ . L'équation (3.2.5) devient

$$\mathbb{E}[(S_T - K)^+] = \mathbb{E}\left[\left(x - K \frac{S_T}{x}\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[\frac{S_T}{x} \left(\frac{x^2}{S_T} - K\right)^+\right]$$

Comme ceci est vrai pour tout  $K$ , nous en déduisons que la loi de  $S_T$  sous  $\mathbb{Q}$  est la même que celle de  $\frac{x^2}{S_T}$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}^S$  de densité  $\frac{S_T}{x}$  par rapport à  $\mathbb{Q}$ . (Rappelons que  $S$  n'ayant pas de coût de portage est martingale sous  $\mathbb{Q}$ ).

Appliquée à des fonctions positives quelconques, la formule devient

$$\mathbb{E}[f(S_T)] = \mathbb{E}\left[\frac{S_T}{x} f\left(\frac{x^2}{S_T}\right)\right] \quad (3.2.6)$$

### 3.2.2 Principe de symétrie dans le cas général

#### Symétrie dans la formule de Black et Scholes générale

Il y a plusieurs moyens de montrer le principe de symétrie dans le cas général, mais nous souhaitons en donner une formulation adaptée à notre propos de réplication statique. Nous considérons donc un sous-jacent

$$dS_u = S_u(\mu du + \sigma dW_u); \quad S_t = x \quad (3.2.7)$$

La formule de Black et Scholes devient, en ne récrivant pas  $T-t$  dans  $d_0$  et  $d_1$

$$\begin{aligned} \text{Call}^{BS}(t, x, K, T)e^{r(T-t)} &= xe^{\mu(T-t)}\mathcal{N}(d_1(xe^{\mu(T-t)}, K)) - K\mathcal{N}(d_0(xe^{\mu(T-t)}, K)) \\ \text{Put}^{BS}(t, x, K, T)e^{r(T-t)} &= K\mathcal{N}(d_1(K, xe^{\mu(T-t)})) - xe^{\mu(T-t)}\mathcal{N}(d_0(K, xe^{\mu(T-t)})) \end{aligned}$$

La formule précédente conduit aussi à une formule de symétrie

$$\text{Call}^{BS}(t, x, K) = e^{-\mu(T-t)} \text{Put}^{BS}(t, K, xe^{2\mu(T-t)}) \quad (3.2.8)$$

$$\text{Put}^{BS}(t, x, K) = e^{-\mu(T-t)} \text{Call}^{BS}(t, K, xe^{2\mu(T-t)}) \quad (3.2.9)$$

### Version mathématique du principe de symétrie général

Ces formules de symétrie font intervenir la maturité résiduelle, ce qui nous pose un problème dans l'application aux options barrières. Pour obtenir la formulation adéquate, nous nous ramenons au cas martingale par une transformation simple, et utilisons la formulation mathématique pour obtenir la formule de symétrie.

**Proposition 3.2.1** *Soit  $S$  un sous-jacent avec coût de portage  $\mu$ .*

1. *Le processus  $S^\alpha$  est un processus log-normal de coût de portage et de volatilité*

$$\mu_\alpha = \alpha(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha - 1)), \quad \sigma_\alpha = \sigma\alpha \quad (3.2.10)$$

2. *Pour  $\gamma = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$ , le processus  $S^\gamma$  est martingale, càd log-normal sans coût de portage.*

3. *Pour toute fonction  $f$  positive*

$$\mathbb{E}[f(S_T)] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_T}{x}\right)^\gamma f\left(\frac{x^2}{S_T}\right)\right] \quad (3.2.11)$$

4. *Pour toute fonction  $f$  positive*

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}(S_T^\alpha f(S_T)) = x^\alpha e^{\mu_\alpha T} \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(f(e^{\alpha\sigma^2(T-t)} S_T)\right)$$

PREUVE :

$\Rightarrow$  La formule d'Itô nous dit que

$$\frac{dS_t^\alpha}{S_t^\alpha} = \alpha\mu dt + \alpha\sigma dW_t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)\sigma^2 dt$$

ce qui caractérise les coûts de portage et la volatilité.

En particulier, pour le paramètre noté  $\gamma$ , qui vérifie  $\mu + \frac{1}{2}(\alpha - 1)\sigma^2 = 0$ , le sous-jacent est martingale.

$\Rightarrow$  Pour toute fonction  $f$  positive, d'après la formule de symétrie sans coût de portage

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_T)] &= \mathbb{E}\left[f\left((S_T^\gamma)^\frac{1}{\gamma}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_T}{x}\right)^\gamma f\left(\left(\frac{x^{2\gamma}}{S_T^\gamma}\right)^\frac{1}{\gamma}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_T}{x}\right)^\gamma f\left(\frac{x^2}{S_T}\right)\right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Nous utilisons les propriétés du processus  $S^\alpha$  pour calculer le prix de l'option Power. La v.a  $S_T^\alpha$  est positive, d'espérance risque neutre égale à  $x^\alpha e^{\mu_\alpha T}$ . Renormalisée par son espérance, elle définit un changement de probabilité  $\mathbb{Q}^\alpha$ , sous laquelle le mouvement brownien  $W$  est transformé en un mouvement brownien avec drift

$$dW_t = dW_t^\alpha + \sigma\alpha dt$$

Sous la probabilité  $\mathbb{Q}^\alpha$ ,  $(S_u)$  est un brownien géométrique de même volatilité  $\sigma$  et de coût de portage  $\mu + \alpha\sigma^2$ .

$\Rightarrow$  Remarquons que  $e^{\alpha\sigma^2(T-t)} S_T$  a même loi que  $S_T^\alpha$ . Par suite, pour toute fonction  $f \geq 0$ , l'espérance de  $S_T^\alpha f(S_T)$  est égale à l'espérance de  $f(e^{\alpha\sigma^2(T-t)} S_T)$ , correctement pondérée.



### Interprétation financière de la symétrie

Nous pouvons réinterpréter ces formules en termes d'options. Toutefois, il est important de noter que des pay-offs qui dépendent de la condition initiale ne génèrent a priori pas nécessairement des portefeuilles auto-finançants, en d'autres termes

$$e^{-r(T-t)} \text{Opt}^{\text{Eur}}(t, S_t e^{\mu(T-t)}, \phi(S_t e^{\mu(T-t)}, S_T))$$

n'est pas nécessairement une martingale. Toutefois, cette propriété est conservée pour les fonctions  $\phi$  que nous utilisons ci-dessous.

**Théorème 3.2.2** Soit  $S$  un sous-jacent de coût de portage  $\mu$  et  $\gamma = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2}$ .

1. Désignons par  $\text{Opt}^{\text{Eur}}(t, x, f(S_T))$  le prix d'une option Européenne de pay-off  $f(S_T) \geq 0$ .

$$\text{Opt}^{\text{Eur}}(t, x, f(S_T)) = \text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \left(\frac{S_T}{x}\right)^\gamma f\left(\frac{x^2}{S_T}\right)\right) = \text{Opt}^{\text{Eur}}(t, x, \phi^f(x, S_T)) \quad (3.2.12)$$

$$\text{où } \phi^f(x, z) = \left(\frac{z}{x}\right)^\gamma f\left(\frac{x^2}{z}\right).$$

2. Options avec poids : Pour toute fonction  $f \geq 0$ ,

$$\text{Opt}_{(\mu, \sigma^2)}^{\text{Eur}}(t, x, S_T^\alpha f(S_T)) = x^\alpha e^{\mu_\alpha(T-t)} \text{Opt}_{(\mu + \alpha\sigma^2, \sigma^2)}^{\text{Eur}}(t, x, f(S_T))$$

### 3. Principe de symétrie

$$\text{Call}(t, x, K) = \text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \left(\frac{S_T}{x}\right)^{\gamma-1} \left(x - \frac{K}{x} S_T\right)^+\right) = \text{PowerPut}(t, K, x, \gamma - 1) \quad (3.2.13)$$

4. Supposons la fonction  $f$  dérivable presque partout, de dérivée  $f'$  bornée. Le Delta de l'option Européenne est donné par

$$\begin{aligned} \text{DeltaOpt}^{\text{Eur}}(t, x, f) &= \text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \frac{S_T}{x} f'(S_T)\right) \\ &= \text{DeltaOpt}^{\text{Eur}}(t, x, \phi^f(x, S_T)) = \text{Opt}^{\text{Eur}}(t, x, \delta\phi^f(x, S_T)) \\ \text{si } \delta\phi^f(z, x) &= \left(\frac{z}{x}\right)^{\gamma-1} f'\left(\frac{x^2}{z}\right) \end{aligned}$$

**Remarque 3.2.2** Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la dérivée d'une option peut se calculer en multipliant le pay-off par  $\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}(-d_0(T, xe^{rT}, S_T))$ , fonction affine de  $\ln S_T$ . En particulier

$$\text{DeltaOpt}^{\text{Eur}}(t, x, f(S_T)) = \text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}(-d_0(T, xe^{\mu T}, S_T))f(S_T)\right)$$

### 3.3 Options barrières

#### 3.3.1 Caractéristiques générales

##### Options In et Out

Les options barrières sont un nom générique donné aux produits dérivés dont les payoffs dépendent du fait que le sous-jacent a atteint ou non un niveau donné (ou barrière) durant la durée de vie de l'option. Les plus courantes sont

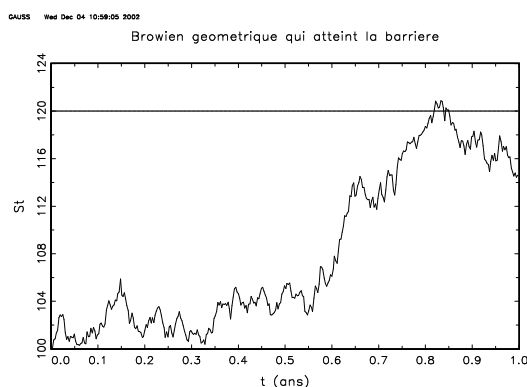
- knock-out options : L'option expire automatiquement quand le sous-jacent touche une ou plusieurs barrières prédéterminées.
- knock-in options : L'option est activée si les barrières sont touchées.

Par ailleurs, ces options barrières sont structurées comme des puts ou calls européens. Par exemple

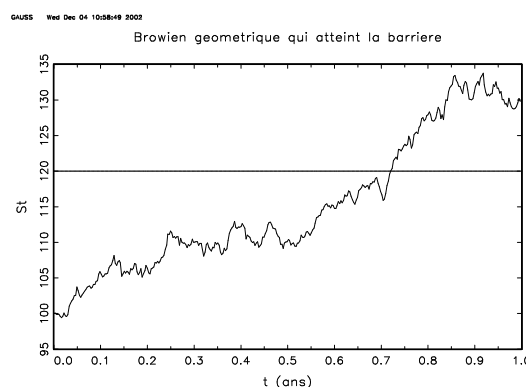
- Un DOC (down-and-out Call) de strike  $K$ , de barrière  $H$  et maturité  $T$  est l'option d'acheter le sous-jacent au prix  $K$  au temps  $T$  si le sous-jacent ne descend jamais en-dessous de  $H$ .
- Un UOC (up-and-out Call) possède les mêmes caractéristiques, mais la barrière est montante.
- Un DIC (down-and-in Call) est activé si le sous-jacent passe au-dessous de la barrière.
- Un UIC (up-and-in Call) est activé si le sous-jacent passe au-dessus de la barrière.

Les mêmes définitions s'appliquent aux puts et aux options binaires. Par exemple

- Un DIP est un (down-and-in Put).
- Un BinDIC est un Call binaire, qui n'est activé que si le sous-jacent passe au-dessous de la barrière.
- Un DIB (down-and-in Bond) est un produit qui paye 1 Euro à l'échéance si la barrière a été touchée.



Une trajectoire et la barrière



Une autre trajectoire

### Options regular ou reverse

Les options barrières peuvent être classées selon la valeur intrinsèque à la barrière :

- ◊ Une option barrière qui est en dehors de la monnaie lorsque la barrière est touchée, (c'est à dire dont le pay-off est nul à la barrière et au-delà) est appelée une regular option. (Par exemple, une DIC de barrière  $B$  et de prix d'exercice  $K \geq B$  ou une UIP de barrière  $H$  et de strike  $K \leq H$ .)
- ◊ Dans le cas inverse, l'option est dite une reverse option.
- ◊ Certaines options barrières sont assorties d'une compensation, le rebate, sous forme de cash si l'option est out. Le prix du rebate est celui d'une option binaire à barrière. En particulier, le rebate est souvent choisi pour qu'il y ait continuité des pay-off à maturité à la barrière, soit si le payoff est  $f(S_T)$  en  $T$ , on choisit un rebate de  $f(H)$  à la barrière.

**Remarque 3.3.1** • Par arbitrage, être long d'une option in et d'une option out est équivalent à détenir une option standard, dite encore *vanilla*. Il suffit donc d'étudier les options in.

• Considérons une option barrière Up In reverse, dont le pay-off est nul en dessous de la barrière (par exemple un Call de strike plus grand que la barrière). Dans ce cas, le pay-off n'a de la valeur que si la barrière a été franchie. Le UICall et le Call ont donc la même prix à toute date. L'option barrière est donc une option européenne.

C'est cette propriété qui est utilisée dans le principe de symétrie. En particulier, nous avons la décomposition suivante

**Proposition 3.3.1** Soit  $UI(t, x, H, f(S_T))$  une option barrière de pay-off  $f$ . Cette option est la somme de deux options, une option barrière regular de pay-off  $f^H(S_T) = f(S_T)\mathbf{1}_{S_T \leq H}$  et une option Européenne de pay-off  $(f - f^H)(S_T)$  soit

$$UI(t, x, H, f(S_T)) = UI(t, x, H, f^H(S_T)) + Opt^{Eur}(t, x, (f - f^H)(S_T))$$

Il ne nous reste donc qu'à étudier les options "régular".

### 3.3.2 Pricing et Réplication d'une option Up In regular

Nous étudions le cas d'une option Up "regular", dont le pay-off  $f$  est nul au-dessus de la barrière  $H$ .

**Théorème 3.3.2** Soit  $f^H$  le pay-off d'une option Up regular, nul pour  $z \geq H$ , et  $UIOpt(t, x, f^H(S_T), T)$  le prix de l'option In associée.

1. Pour tout  $x < H$ , cette option est répliquable par une option Européenne standard de pay-off  $\phi^{H,\gamma}(z, f) = (\frac{z}{H})^\gamma f^H(\frac{H^2}{z})$ .

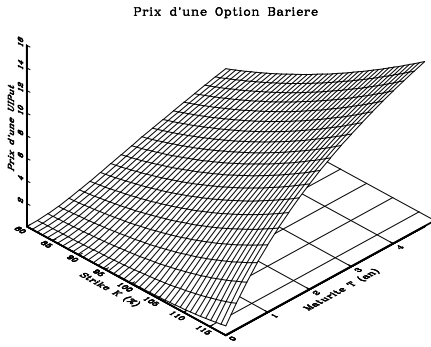
$$UIOpt(t, x, f^H(S_T)) = Opt^{Eur}\left(t, x, \left(\frac{S_T}{H}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{S_T}\right)\right) \quad (3.3.1)$$

$$= \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma Opt^{Eur}\left(t, x, f^H\left(\frac{H^2}{x^2} S_T\right)\right) \quad (3.3.2)$$

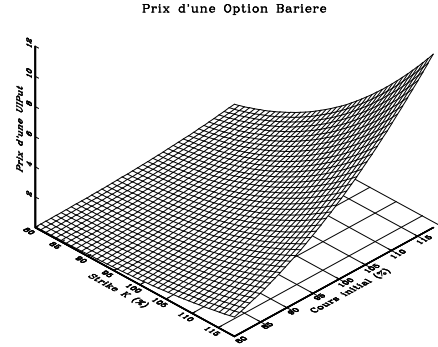
2. Mathématiquement, introduisons le temps  $T_H$  de passage au-dessus de  $H$ ,

$$T_H = \inf\{u \geq t; S_u \geq H\} \quad (3.3.3)$$

$$\mathbb{E}[f^H(S_T)\mathbf{1}_{\{T_H \leq T\}}] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_T}{H}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{S_T}\right)\right] = \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathbb{E}\left[f^H\left(\frac{H^2}{x^2}S_T\right)\right] \quad (3.3.4)$$



UIP 100-100-120  
en fonction de la maturité



UIP 100-120 en fonction  
du strike, maturité 1 an

**Remarque 3.3.2** • La première égalité dans (3.3.1) donne la réplcation statique, pour un sous-jacent en dessous de la barrière.

- La deuxième est très efficace pour le calcul, car le prix de l'option barrière a exactement la même complexité de calcul que celui de l'option européenne dont on est parti. Il suffit de multiplier par un poids et de dilater le pay-off.

PREUVE :

$\Rightarrow$  Nous désignons par  $T_H = \inf\{u \geq t; S_u \geq H\}$  le premier instant après  $t$  où le sous-jacent passe au-dessus de la barrière  $H$ .

Pour évaluer l'option à la date  $t$ , nous pouvons par arbitrage choisir d'évaluer l'option à la date  $T_H$  pour  $T_H < T$  puis donner un prix en  $t$  pour ce flux aléatoire payé en  $T_H$ . A la barrière, le niveau du sous-jacent est connu, seule la maturité restante  $T - T_H$  est aléatoire et l'option UIOpt est équivalente à un  $\text{Opt}^{\text{Eur}}(T_H, H, f^H, T)$ . Comme le sous-jacent est log-normal, et la volatilité déterministe, la dynamique du sous-jacent initialisé au temps aléatoire  $T_H$  et au point  $H$ , est, conditionnellement à l'observation du passé jusqu'en  $T_H$  à distribution log-normale.

La formule de symétrie (3.2.5) et l'homogénéité du prix du Put montrent que

$$\text{Opt}^{\text{Eur}}(T_H, H, f^H(S_T)) = \text{Opt}^{\text{Eur}}(T_H, H, \phi^{H,\gamma}(S_T))$$

L'option qui à la barrière vaut  $\text{Opt}^{\text{Eur}}(T_H, H, \phi^{H,\gamma}(S_T))$  est une option Up et In de pay-off  $\phi^{H,\gamma}(S_T)$ . Par suite, l'option UIOpt( $t, x, H, f^H(S_T)$ ) est équivalente à une UIOpt( $t, x, H, \phi^{H,\gamma}(S_T)$ ).

⇒ A l'échéance  $T$ , la valeur intrinsèque  $\phi^{H,\gamma}$  n'a de la valeur que si le sous-jacent est supérieur à  $H$ . La barrière  $H$  a donc été atteinte durant la vie de l'option avec une probabilité 1 ; la barrière n'a donc plus d'influence sur le prix. L'option barrière  $\text{UIOpt}(t, x, f^H(S_T))$  est donc égale à l'option vanilla  $\text{Opt}^{\text{Eur}}(t, x, \phi^{H,\gamma}(S_T))$ .

Cette formulation donne une réplication statique de l'option barrière au moyen d'une option européenne, dont le pay-off  $\phi^{H,\gamma}$  est déduit de manière analytique, mais assez compliquée si l'on pense aux Calls et Puts, de  $f^H$ .

⇒ Revenons donc à la forme explicite de  $\phi^{H,\gamma}$ . Le pay-off de l'option

$$\text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \left(\frac{S_T}{H}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{S_T}\right)\right)$$

suggère de réappliquer une formule de réplication statique à la date  $t$  cette fois-ci (l'autre fois était à la barrière). Il faut alors mettre en évidence des quantités de la forme  $\frac{S_T}{x}$  à la place des quantités de la forme  $\frac{S_T}{H}$ , ce qui revient à écrire

$$\left(\frac{S_T}{H}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{S_T}\right) = \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \left(\frac{S_T}{x}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{x^2} \frac{x^2}{S_T}\right)$$

La formule de réplication statique (3.2.13) nous donne alors

$$\text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \left(\frac{S_T}{H}\right)^\gamma f^H\left(\frac{H^2}{S_T}\right)\right) = \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, f^H\left(\frac{H^2}{x^2} S_T\right)\right)$$

### 3.4 Application aux Calls, Puts et Binaires

Nous continuons à nous intéresser à des options régular Up-In, Call et Put en particulier. Le cas général se ramène simplement à ces deux situations. Il suffit de décomposer le pay-off  $f$  en

$$f(z) = f^H(z) + f^{H^c}(z) = f(z)\mathbf{1}_{\{z < H\}} + f(z)\mathbf{1}_{\{z \geq H\}}$$

L'option  $\text{UIOpt}$  de pay-off  $f$  se ramène donc à une option régular  $\text{UIOpt}(t, x, f^H)$  plus une option Européenne de pay-off  $f^{H^c}$ , pour  $x < H$ . Au delà de la barrière, il s'agit d'une option Européenne standard de pay-off  $f$ .

Les options dont le pay-off est le plus simple, et qui joueront un grand rôle dans la suite sont les options qui payent 1 Euro si la barrière est touchée, désignée par P.Carr par UIB.

#### 3.4.1 Evaluation des options UIB

Le prix de ces options s'exprime aisément à partir des Calls et Puts binaires grâce à la décomposition en partie regular et partie européenne  $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\{z \geq H\}} + \mathbf{1}_{\{z \leq H\}}$

$$\forall x \leq H, \text{UIB}(x, H) = \text{BinC}(x, H) + \text{BinUIP}(x, H, H)$$

$$\forall x \geq H, \text{UIB}(x, H) = B(0, T)$$

En utilisant les équations (3.2) et la formule de Black et Scholes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{UIB}(x, H) &= \text{BinC}(x, H) + \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \text{BinC}(H, x) \\ &= \mathcal{N}(\delta_0) + \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathcal{N}(\delta_1) \end{aligned}$$

où

$$\delta_1 = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{T}} \text{Ln}\left(\frac{x}{H}\right) + \frac{\sqrt{T}}{2} \sigma_X \gamma, \quad \delta_0 = \delta_1 - \sqrt{T} \sigma_X \gamma.$$

### 3.4.2 Le cas de Put

#### Put regular

Etudions l'option Put avec strike inférieur à la barrière ( $K \leq H$ ). Le pay-off  $f(S_T) = (K - S_T)^+$  est donc regular. L'étude que nous venons de faire nous montre que cette option barrière est regular et que son prix est donné par

$$\begin{aligned} \text{UIPut}(t, x, H, K) &= \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \text{Opt}^{\text{Eur}}\left(t, x, \left(K - \frac{H^2}{x^2} S_T\right)^+\right) \\ &= \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-2} \text{Put}\left(t, x, \frac{Kx^2}{H^2}\right) \end{aligned}$$

Cette option est répliquable statiquement par une option de pay-off

$$\left(\frac{S_T}{H}\right)^\gamma \left(K - \frac{H^2}{S_T}\right)^+ = \left(\frac{S_T}{H}\right)^{\gamma-1} \left(\frac{K}{H} S_T - H\right)^+ = \frac{K}{H} \left(\frac{S_T}{H}\right)^{\gamma-1} \left(S_T - \frac{H^2}{K}\right)^+$$

Il s'agit de  $\frac{K}{H^\gamma}$  options  $\text{PowerCall}(t, x, \frac{H^2}{K}, \gamma - 1)$ .

En d'autres termes, si on peut acheter ces options sur le marché, on les garde en couverture dans le portefeuille jusqu'à ce que le sous-jacent touche la barrière. On les revend à ce moment là, et on rachète un Put d'échéance  $T$  et de strike  $K$ . Cette stratégie est bien autofinçante, puisque le prix de l'option barrière donné par la formule précédente est à la barrière exactement le même que celui du Put (à la barrière) comme le montre le principe de symétrie.

**Remarque 3.4.1** Dans le cas où  $\gamma = 1$  on retrouve le résultat de P.Carr qui montre que l'option UIPut est répliquable statiquement par un Call de strike  $\frac{H^2}{K}$ .

En fait, les options powers sont rarement directement accessibles sur le marché. On peut être donc amené à les répliquer, à l'aide d'une famille de Call et Put bien choisis, de même maturité mais de strikes différents, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Il s'agit alors toujours d'une couverture statique car les poids de la réplication ne dépendent pas des conditions de marché aujourd'hui.

Une autre voie est d'utiliser la replication par "delta-hedging" de ces options "power".

#### Put barrière reverse

Supposons le strike supérieur à la barrière ( $K \geq H$ ). La partie non regular du pay-off est

$$(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T > H\}} = (K - S_T)^+ - (K - H)^+ \mathbf{1}_{\{S_T \leq H\}} - (H - S_T)^+$$

L'option barrière associée à ce pay-off est donc composée d'un Put,  $\text{Put}(x, K)$  moins un Put  $\text{Put}(x, H)$ , moins  $(K-H)$  options BinPut de strike  $H$ .

Considérons la partie regular du pay-off, i.e.,  $f^H(S_T) = (K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{S_T < H\}}$ , et utilisons la décomposition

$$(K - x)^+ \mathbf{1}_{\{x < H\}} = (H - x)^+ (K - H) \mathbf{1}_{\{x < H\}}.$$

L'option barrière de partie régular  $f^H$  est donc identique à la somme d'un UIP(t,x,H,H) et de  $K - H$  options binaires BinP(x, H), que nous avons étudiées dans l'analyse de la *UIB*.

Cette formule très générale est une simple conséquence de l'arbitrage et ne suppose aucune hypothèse particulière sur les sous-jacents, contrairement à la formule d'évaluation de la UIP.

La proposition 3.3.1 nous donne

$$\text{UIOpt}(x, T, f(S_T)) = \text{UIOpt}(x, T, f^H(S_T)) + \text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}((f - f^H)(S_T)),$$

soit,

$$\begin{aligned} \text{UIPut}(x, H, K) &= \text{Put}(x, K) + \text{UIPut}(x, H, H) + (K - H)^+ \text{BinUIP}(x, H, H) \\ &- (\text{Put}(x, H, H) + (K - H)^+ \text{BinP}(x, H, H)) \\ &= \text{Put}(x, K) + \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma-1} (\text{Put}(H, x) + (K - H)^+ \frac{x}{H} \text{BinP}(H, x)) \\ &- (\text{Put}(x, H, H) + (K - H)^+ \text{BinP}(x, H, H)) \end{aligned}$$

### Le cas de Call

Par la même discussion que pour les Put, on obtient les résultats suivants pour la partie regular du Call :

- Si  $H \leq K$ , on a  $\text{UIC}(x, H, K) = \text{Call}(x, K)$ .
- Si  $H > K$ , on a  $f^H(z) = (z - K)^+ \mathbf{1}_{\{z \leq H\}} = (z - K)^+ - (z - H)^+ - (H - K)^+ \mathbf{1}_{\{z \geq H\}}$

Le prix de l'option européenne de pay-off  $f^H(S_T)$  est

$$\text{Opt}^{\text{Eur}}(x, f^H(S_T)) = \text{Call}(x, K) - \text{Call}(x, H \wedge K) + (H - K)^+ \text{BinC}(x, H).$$

L'option UIC a un prix donné par

$$\begin{aligned} \text{UIC}(x, H, K, T) &= \text{Call}(x, K) - (\text{Call}(x, K) - \text{Call}(x, H \wedge K) - (H - K)^+ \text{BinC}(x, H)) \\ &+ \left(\frac{x}{H}\right)^{\gamma} (\text{Call}(H^2/x, K) - \text{Call}(H^2/x, H \wedge K) - (H - K)^+ \text{BinC}(H, x)) \end{aligned}$$

## 3.5 Delta-hedging des options barrières

Comme nous l'avons montré, les options barrières sont répliquables statiquement par des options européennes, mais ces options changent selon qu'on est inférieur à la barrière ou non.

### 3.5.1 EDP d'évaluation

Comme celui des options Européennes, le prix des options barrières est solution d'une équation aux dérivées partielles. Le plus simple est de travailler avec des options Out, dont nous avons vu qu'elles ne dépendent que de la fonction  $f^H$ . On a le résultat suivant, qui est valable pour une diffusion générale.

**Théorème 3.5.1** Soit  $u$  une solution régulière dans  $]0, T[ \otimes ]0, H[$  du problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)x^2u''_{xx}(t, x) + rxu'_x(t, x) + u'_t(t, x) - ru(t, x) &= 0 \\ u(t, H) &= 0, \quad u(T, x) = f^H(T, x) \quad \forall x \leq H \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

La fonction  $u(t, x)$  est le prix à la date  $t$ , sachant que  $S_t = x$  de l'option barrière  $UO(t, x, f^H(S_T))$ .

En particulier  $u(t \wedge T_H, S_{t \wedge T_H})$  est la valeur en  $t$  d'un portefeuille autofinçant, qui réplique le pay-off de l'option à maturité. Son delta est la dérivée du prix  $u$  en  $(t, S_t)$ .

Notons que cette fonction n'est pas nécessairement continue à la barrière, comme nous le voyons dans le paragraphe suivant.

### Le Delta de l'option barrière à la barrière

Nous revenons au modèle de Black et Scholes et pour simplifier, dans toute cette section, nous **supposons**  $\gamma = 1$

L'option UIP regular est répliquable statiquement par  $\frac{K}{H}$  Call de strike  $H^2/K$  tant que le sous-jacent est au dessous de la barrière et par un Put standard ensuite. A la barrière, la symétrie Call-Put garantit qu'il n'y a pas de discontinuité du prix. Il n'en est pas de même du delta de couverture qui admet une limite à gauche donnée d'après (3.2.14) par

$$\Delta_{-} \text{UIP} (H, K, H) = e^{-rT} \frac{K}{H} \mathcal{N}(d_1(\frac{H}{K}))$$

alors que la limite à droite est donnée par

$$\Delta_{+} \text{UIP} (H, K, H) = \Delta \text{Put}(H, K) = -e^{-rT} \mathcal{N}(d_0(\frac{H}{K}))$$

Par suite, le delta de couverture n'est pas continu à la barrière, et admet un saut négatif,

$$e^{rT} [\Delta_{+} - \Delta_{-}] \text{UIP} (H, K, H) = -\frac{1}{H} [H \mathcal{N}(d_0(\frac{H}{K})) + K \mathcal{N}(d_1(\frac{H}{K}))]$$

## 3.6 Quelques applications mathématiques

### 3.6.1 Loi du temps d'atteinte $T_H$ de la barrière haute

Traduisons mathématiquement les résultats concernant l'option UIB à l'aide du temps d'arrêt  $T_H$ . Il vient pour  $x < H$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_H \leq T) &= \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathbb{P}\left(\frac{H^2}{x^2} S_T \leq H\right) + \mathbb{P}(S_T \geq H) \\ &= \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathcal{N}\left(d_1\left(\left(\frac{x}{H}\right)^\gamma, \gamma\sigma\right)\right) + \mathcal{N}\left(d_0\left(\left(\frac{x}{H}\right)^\gamma, \gamma\sigma\right)\right). \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes seront très utiles.



**Lemme 3.6.1** *Posons*

$$\delta_0(z, \sigma, T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\text{Ln}(z) - \frac{\gamma}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad \delta_1(z, \sigma, T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\text{Ln}(z) + \frac{\gamma}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

Alors

$$\frac{1}{2}(\delta_1^2(z, \sigma, T) - \delta_0^2(z, \sigma, T)) = \text{Ln}(z^\gamma).$$

De plus,

$$\frac{\partial}{\partial T}\delta_0^2 = \frac{\partial}{\partial T}\delta_1^2 = -\frac{1}{T}\delta_0(z, \sigma, T)\delta_1(z, \sigma, T).$$

PREUVE :

$\Rightarrow$  La première relation se déduit de

$$\frac{1}{2}(\delta_1^2 - \delta_0^2) = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_0)(\delta_1 - \delta_0) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\text{Ln}(z)\right)(\gamma\sigma\sqrt{T}) = \text{Ln}(z^\gamma).$$

$\Rightarrow$  Pour la deuxième, remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) = -\frac{1}{2T}\frac{1}{\sqrt{T}} \quad \text{et que } \frac{\partial}{\partial T}(\sqrt{T}) = \frac{1}{2T}\sqrt{T}.$$

Par suite, il vient immédiatement que  $\frac{\partial}{\partial T}\delta_0 = -\frac{1}{2T}\delta_1$ .

Nous sommes alors en mesure de calculer simplement la densité de la loi de  $T_H$ .

**Théorème 3.6.1** *Pour  $x < H$ , la v.a.  $T_H$  admet une densité, donnée par*

$$f_H(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\delta_0\left(\frac{x}{H}, \gamma, \sigma, T\right)^2\right) \left(-\frac{1}{T\sigma}\text{Ln}\left(\frac{x}{H}\right)\right).$$

PREUVE : D'après la formule donnant la fonction de repartition de  $T_H$ , nous voyons que pour  $z = \frac{x}{H}$ ,

$$f_H(T) = z^\gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2}\right) \left(\frac{\partial\delta_1}{\partial T}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_0^2}{2}\right) \left(\frac{\partial\delta_0}{\partial T}\right).$$

D'après les calculs précédents, en tenant compte du fait que

$$z^\gamma \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\delta_0^2}{2}\right),$$

il vient

$$f_H(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_0^2}{2}\right) \left(-\frac{1}{2T}(\delta_0 + \delta_1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_0^2}{2}\right) \left(-\frac{1}{T\sigma}\text{Ln}(zz)\right).$$

### 3.6.2 Loi du maximum, ou du minimum

La même formule nous permet d'étudier la loi du maximum, quand on connaît la valeur terminale. Puisque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_T \leq K, S_T^* \geq H) &= \mathbb{P}(S_T \leq K, T_H \leq T) = \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathbb{P}\left(\frac{H^2}{x^2} S_T \leq K\right) \\ &= \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \mathcal{N}\left(\delta_1\left(\frac{Kx}{H^2}, \sigma, T\right)\right),\end{aligned}$$

alors que

$$\mathbb{P}(S_T \leq K) = \mathcal{N}\left(\delta_1\left(\frac{x}{K}, \sigma, T\right)\right) = \mathcal{N}\left(-\delta_0\left(\frac{K}{x}, \sigma, T\right)\right).$$

**Proposition 3.6.2** *La fonction de repartition de la loi conditionnelle de  $S_T^*$  sachant que  $\{S_T = K\}$  est donnée par*

$$\mathbb{P}(S_T^* \geq H \mid S_T = K) = \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 T} \text{Ln}\left(\frac{K}{H}\right) \text{Ln}\left(\frac{x}{H}\right)\right) \text{ pour } x, K \leq H.$$

**Remarque 3.6.1** Cette loi est extrêmement importante dans les approximations de Monte-Carlo, car elle permet de mesurer l'erreur faite sur une fonction du maximum lorsqu'on ne fait que des observations discrètes.

PREUVE : La fonction de repartition conditionnelle est donnée par

$$\mathbb{P}(S_T^* \geq H \mid S_T = K) = \frac{\partial_K \mathbb{P}(S_T \leq K, S_T^* \geq H)}{\partial_K \mathbb{P}(S_T \leq K)} = \frac{\left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \exp\left(-\frac{1}{2} \delta_1^2\left(\frac{Kx}{H^2}\right)\right) \frac{\partial}{\partial K} \delta_1\left(\frac{Kx}{H^2}\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2} \delta_1^2\left(\frac{x}{K}\right)\right) \frac{\partial}{\partial K} \delta_1\left(\frac{K}{x}\right)}.$$

Par définition de  $\delta_1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial K} \delta_1\left(\frac{Kx}{H^2}\right) = \frac{\partial}{\partial K} \delta_1\left(\frac{K}{x}\right).$$

Par suite ces termes se simplifient. Il reste à transformer comme ci-dessous,

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \left[ \delta_1^2\left(\frac{Kx}{H^2}\right) - \delta_1^2\left(\frac{K}{x}\right) \delta_1^2\right] = \frac{1}{2} \left( \delta_1\left(\frac{Kx}{H^2}\right) - \delta_1\left(\frac{K}{x}\right) \right) \left( \delta_1\left(\frac{Kx}{H^2}\right) + \delta_1\left(\frac{K}{x}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \text{Ln}\left(\frac{Kx}{H^2}\right) + \text{Ln}\left(\frac{K}{x}\right) \right) + \gamma\sigma\sqrt{T} \right] \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \text{Ln}\left(\frac{Kx}{H^2}\right) - \text{Ln}\left(\frac{K}{x}\right) \right) \\ &= \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \text{Ln}\left(\frac{K}{H}\right) + \frac{\gamma}{2}\sigma\sqrt{T} \right] \frac{2}{\sigma\sqrt{T}} \text{Ln}\left(\frac{x}{H}\right) \\ &= \frac{2}{\sigma^2 T} \text{Ln}\left(\frac{K}{H}\right) \text{Ln}\left(\frac{x}{H}\right) + \gamma \text{Ln}\left(\frac{x}{H}\right).\end{aligned}$$

En tenant compte du terme en  $\left(\frac{x}{H}\right)^\gamma$  qui est en facteur, il vient que

$$\mathbb{P}(S_T^* \geq H \mid S_T = K) = \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 T} \text{Ln}\left(\frac{H}{K}\right) \text{Ln}\left(\frac{H}{x}\right)\right) \quad (H \geq x, H \geq K).$$

**Corollaire 3.6.3** *De même pour la loi du minimum,*

$$\mathbb{P}(S_{*,T} \leq B \mid S_T = K) = \exp \left( -\frac{2}{\sigma^2 T} \text{Ln} \left( \frac{B}{K} \right) \text{Ln} \left( \frac{B}{x} \right) \right)$$

par analogie ( $B \leq x, K \geq B$ ).

On peut aussi déduire de la formule ci-dessus la loi du maximum.

**Proposition 3.6.4**

$$\mathbb{P}(S_T^* \geq H) = \left( \frac{x}{H} \right)^\gamma \mathcal{N} \left( \delta_1 \left( \frac{x}{H}, \gamma, \sigma, T \right) \right) + \mathcal{N} \left( \delta_0 \left( \frac{x}{H}, \gamma, \sigma, T \right) \right).$$

La loi admet une densité

$$m^*(dH) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{H} \exp \left( -\frac{1}{2} \delta_0^2 \left( \frac{x}{H} \right) \right) + \frac{\gamma}{H} \left( \frac{x}{H} \right)^\gamma \mathcal{N} \left( \delta_1 \left( \frac{x}{H} \right) \right), \quad (x \leq H).$$

La densité s'obtient à partir des calculs précédents.

### 3.7 Les options lookback

La formule donnant le prix de la BinDIC peut être utilisée pour évaluer et couvrir les options sur minimum et maximum.

Nous appelons  $\text{MinCt}(x, K)$  le prix d'une option qui permet d'acheter à l'échéance le sous-jacent à un prix égal à  $K$  fois la plus petite valeur  $m_T$  prise par le cours durant la période où court l'option ( $m_T = \min_{0 \leq u \leq T} X_u$ ). Le pay-off final s'écrit  $(X_T - Km_T)^+$ . Le lien avec les options barrières est fait grâce à l'identité

$$(X_T - Km_T)^+ = \int_{Km_T}^{X_T} dk = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{X_T \geq k \geq Km_T\}} dk$$

de telle sorte que

$$\text{MinCt}(x, K) = \int_0^{+\infty} \text{BinDIC} \left( x, k, \frac{k}{K} \right) dk \quad (3.7.1)$$

Dans cette dernière expression, il faut distinguer le cas où la valeur  $x$  aujourd'hui du sous-jacent est plus grande que la barrière  $\frac{k}{K}$ , du cas opposé. Dans le premier cas,

$$\text{BinDIC} \left( x, k, \frac{k}{K} \right) = \left( \frac{xK}{k} \right)^\gamma \text{BinC} \left( \frac{k}{K}, xK \right)$$

tandis que dans le cas  $x \leq \frac{k}{K}$ ,  $\text{BinDIC} \left( x, k, \frac{k}{K} \right) = \text{BinC}(x, k)$ . La contribution de ce terme au prix de la  $\text{MinCt}(x, K)$  est un  $\text{Call}(x, xK)$ . Le premier terme est un peu plus compliqué à calculer. Nous avons donc

$$\text{MinCt}(x, K) = \int_0^{xK} \text{BinDIC} \left( x, k, \frac{k}{K} \right) dk + \text{Call}(x, xK)$$

• Supposons  $\gamma = 1$ , le sous-jacent est une martingale  $X_t = xM_t, M_0 = 1$ . L'égalité  $\text{BinDIC}(x, K, H) = -\frac{x}{H}\text{DeltaP}(H, \frac{K}{H}x)$  a été obtenue pour  $x > H$  et  $K \geq H$ . Pour  $x < H$ ,  $\text{BinDIC}(x, K, H) = \text{DIC}(x, K, H) = \text{Call}(x, K)$ . En utilisant ces égalités pour  $k \in [0, xK]$  et  $K \geq 1$ , on obtient

$$\text{MinCt}(x, K) = \text{Call}(x, xK) + xKE[(\ln \frac{X_T}{xK})^+]$$

soit, en notant  $\text{CallLn}(x, K)$  le prix d'un call de payoff  $(\ln(M_T) - \ln K)^+$

$$\text{MinC}(x, K) = \text{Call}(x, xK) + xK\text{CallLn}(x, xK)$$

• Si le sous-jacent est lognormal, comme dans (??), on obtient en utilisant le coefficient  $\gamma$  tel que  $S = xM^{1/\gamma}$

$$\int_0^{xK} \text{BinDIC}(x, k, \frac{k}{K})dk = \int_0^{xK} \left(\frac{xK}{k}\right)^\gamma \text{BinC}(\frac{k}{K}, xK)dk$$

De l'indentité  $\text{BinC}(x, K) = e^{-rT}Q(xM_T^{1/\gamma} > K)$ , on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{xK} \text{BinDIC}(x, k, \frac{k}{K})dk &= e^{-rT}E\left(\int_0^{xK} \left(\frac{xK}{k}\right)^\gamma \mathbf{1}_{k > xK^2 M_T^{-1/\gamma}} dk\right) \\ &= e^{-rT} \frac{(xK)^\gamma}{1-\gamma} E\left(\int_0^\infty k^{-\gamma} \mathbf{1}_{xK > k > xK^2 M_T^{-1/\gamma}} dk\right) \\ &= e^{-rT} \frac{(xK)^\gamma}{1-\gamma} E[(xK)^{1-\gamma} - (xK^2 M_T^{-1/\gamma})^{1-\gamma}]^+ \\ &= e^{-rT} \frac{(xK)^\gamma}{1-\gamma} E[(1 - K^{1-\gamma} M_T^{\frac{\gamma-1}{\gamma}})^+]. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'Itô et  $1 - \gamma = \frac{2\mu}{\sigma^2}$

$$d(M_t^{(\gamma-1)/\gamma}) = M_t^{(\gamma-1)/\gamma} [\mu dt - \frac{2\mu}{\sigma} dW_t]$$

on obtient

$$\text{MinkC}(x, K) = x[\text{Call}(1, K; \mu, \sigma) + \frac{K\sigma^2}{2\mu} \text{Put}(K^{1-\gamma}, 1; \mu, \frac{2\mu}{\sigma})]$$

où  $\text{Put}(x, K, \mu, \sigma)$  désigne un put sur un sous jacent de cout de portage  $\mu$  et de volatilité  $\sigma$ . Le prix à la date  $t$  est

$$\text{Min}(t, x, K) = \text{Min}(X_t, Km_t)$$

où  $m_t = \min_{s \leq t} X_s$ .

## 3.8 Appendice

### 3.8.1 Réplication en maturités

Derman et Kani de Goldman Sachs ont proposé un autre titre de réplication statique, qui utilise des Call ou des Powercalls à la barrière, de différentes maturités. Cette représentation est valable si la diffusion du sous-jacent est une diffusion markovienne à coefficients indépendants du temps.

Dans le cas des sous-jacents log-normaux, nous avons une représentation des poids qui interviennent dans cette représentation.

**Proposition 3.8.1** *Pour  $x \leq H$ , UIPut de strike  $K < H$  est répliquable statiquement par un continu-um de Calls à la barrière*

$$\text{UIPut}(t, x, H, K, T) = \int_t^T \alpha(s) \text{PowerCall}(t, x, H, \gamma - 1, s) ds \quad (3.8.1)$$

où  $\alpha(s) = K^{1-\gamma} \beta^H(0, K, T-s)$  si  $\beta^H(t, K, H, s) = \beta^H(0, K, H, s-t)$  est la densité de probabilité du temps d'atteinte de la barrière  $H$  à l'instant  $s$  en partant<sup>1</sup> de  $K$  à l'instant  $t$ .

PREUVE :

$\Rightarrow$  A la barrière, l'option qui emerge est donc équivalente à  $\frac{K}{H^\gamma}$  options avec des poids à la puissance  $\gamma - 1$ ,  $\text{PowerCall}(T_H, H, \frac{H^2}{K}, \gamma - 1)$ , soit encore

$$K^{1-\gamma} \text{PowerCall}(T_H, K, H, \gamma - 1).$$

$\Rightarrow$  Désignons par  $\theta_H(t, K)$  le premier instant après  $t$  pour lequel le processus retourné (en temps) partant de  $K$  à l'instant  $t$  touche la barrière  $H$ , ( $K < H$ ), et par  $\beta^H(t, K, s)$  la densité de la loi de cette v.a., c'est à dire  $\mathbb{Q}(\theta_H(t, K) \in (s, s+ds)) = \beta^H(t, K, s)ds$  ( $s \geq t$ ). Au moment où il touche la barrière, il génère un PowerCall dont le sous-jacent est à la barrière et le strike à la barrière. On a la représentation

$$K^{1-\gamma} \text{PowerCall}(T_H, K, H, \gamma - 1, T) \quad (3.8.2)$$

$$\begin{aligned} &= K^{1-\gamma} \int_{T_H}^T \beta^H(T_H, K, u) \text{PowerCall}(u, H, H, \gamma - 1, T) du \\ &= \int_{T_H}^T \alpha(s) \text{PowerCall}(T_H, H, H, \gamma - 1, s) ds \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T \alpha(s) \mathbf{1}_{\{T_H < s\}} \text{PowerCall}(T_H, H, H, \gamma - 1, s) ds \\ &\alpha(s) = K^{1-\gamma} \beta^H(T_H, K, T - (s - T_H)) = K^{1-\gamma} \beta^H(0, K, T - s) \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

$\Rightarrow$  La propriété remarquable ici est que les  $\alpha(s)$  ne sont pas aléatoires, par suite de l'homogénéité en temps du processus log-normal.

A la barrière, le pay-off de l'option barrière PowerCall de strike  $K$  s'écrit donc comme un continuum d'options barrières PowerCall de strike  $H$  et de maturité variable. Cette représentation vaut à n'importe quelle date.

---

<sup>1</sup>Nous calculerons explicitement cette densité dans la suite

$\Rightarrow$  Il reste à noter que les PowerCalls ainsi générés à l'instant  $T_H$  sont associés à des options barrières "reverse". La barrière n'a donc pas d'influence dans le pricing. On obtient ainsi une réplcation statique à l'aide d'options powers, et les coefficients s'interprètent comme les densité de temps d'atteinte de la barrière en partant de  $K$ .

**Remarque 3.8.1** La même preuve, mais sans description explicite des coefficients, peut être utilisée pour une réplcation statique à l'aide de Call standards. Il suffit pour cela de résoudre le système fonctionnel en  $\alpha(s)$

$$\text{Put}(t, H, K, \mu, T) = \int_t^T \alpha(s) \text{Call}(t, H, H, \mu, s) ds$$

Ce système n'est pas très régulier, car au voisinage de la maturité les Calls se comportent approximativement en  $\sqrt{T-t}$

### 3.8.2 Evaluation des options barrières Out en cas de paiement de dividendes

Nous nous intéressons à une option Up and Out, de pay-off  $f^H$ , nul pour  $z \leq H$ , écrite sur un sous-jacent  $S$  qui paye un dividende de  $d_1$  en  $t_1$ , c'est à dire que  $S_t = Y_t$  si  $t < t_1$  et que  $S_t = Y_t - d_1$  si  $t \geq t_1$ . Dans toute la suite, nous supposons l'horizon  $T \geq t_1$ . L'option Out n'a de la valeur que si la frontière n'a pas été touchée entre 0 et  $T$ . Cela implique en particulier que la frontière  $H$  n'a pas été touchée entre 0 et  $t_1$  pour le processus  $Y$ , et que la frontière  $H + d_1$  n'a pas été touchée par le processus  $Y$  après  $t_1$  et avant  $T$ .

• Considérons le prix de l'option Out en  $t_1$  si la frontière  $H$  n'a pas été touchée. Le prix de l'option est alors le prix d'une option barrière classique, de barrière  $H + d_1$  et de pay-off  $f^H(\star - d_1)$ . D'après les résultats précédents le prix de cette option barrière Out est le prix d'une option barrière standard moins le prix d'une option In.

$$G(t_1, Y_{t_1}) = \text{Opt}^{\text{Eur}}(t_1, S_{t_1}, g^{H+d_1, \gamma}, T) \quad (3.8.5)$$

$$g^{H+d_1, \gamma}(z) = f^H(z - d_1) - \left(\frac{z}{H + d_1}\right)^\gamma f^H\left(\frac{(H + d_1)^2}{z} - d_1\right) \quad (3.8.6)$$

• Pour calculer le prix de l'option barrière Up and Out à la date  $t_1$ , nous devons considérer comme pay-off terminal la fonction  $G^H(t_1, Y_{t_1}) = G(t_1, Y_{t_1}) \mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \leq H\}}$ .

Nous pouvons maintenant réappliquer la formule d'évaluation des options barrières pour obtenir que

$$\text{UOOpt}^d(t, x, f^H, T) = \text{Opt}^{\text{Eur}}_Y(t, x, G^H, T) - \left(\frac{x}{H}\right)^\gamma \text{Opt}^{\text{Eur}}_Y(t, x, G^H\left(\frac{H^2}{x^2} \star\right), T) \quad (3.8.7)$$

- Comme la fonction  $G^H$  est elle-même associée au prix d'une option barrière, nous pouvons simplifier les calculs

$$\begin{aligned} \text{Opt}^{\text{Eur}}_Y(t, x, G^H, T) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \leq H\}} f(Y_T - d_1) - (\frac{Y_T}{H + d_1})^\gamma f^H(\frac{(H + d_1)^2}{Y_T} - d_1)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \leq H\}} f(Y_T - d_1) - (\frac{x}{H + d_1})^\gamma \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \geq \frac{x^2}{H}\}} f^H(\frac{(H + d_1)^2}{x} Y_T - d_1)]] \end{aligned}$$

- De même, le terme en  $\text{Opt}^{\text{Eur}}_Y(t, x, G^H(\frac{H^2}{x^2} \star), T)$

$$\begin{aligned} \text{Opt}^{\text{Eur}}_Y(t, x, G^H(\frac{H^2}{x^2} \star), T) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \leq \frac{x^2}{H}\}} f(\frac{H^2}{x^2} Y_T - d_1)] \\ &\quad - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{H \leq \frac{x^2}{Y_{t_1}}\}} (\frac{H}{H + d_1})^\gamma (\frac{Y_T}{x})^\gamma (\frac{H}{x})^\gamma f^H(\frac{(H + d_1)^2}{H^2} \frac{x^2}{Y_T} - d_1)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \leq \frac{x^2}{H}\}} f(\frac{H^2}{x^2} Y_T - d_1)] - (\frac{H}{H + d_1})^\gamma (\frac{H}{x})^\gamma \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_{t_1} \geq H\}} f^H((\frac{H + d_1}{H})^2 Y_T - d_1)] \end{aligned}$$





# Bibliographie

- [1] Carr, P. and Ellis, K. and Gupta, V. Static hedging of path dependent options. *Journal of Finance*, 53 : 1165-1190, 1998.
- [2] Conze, A. and Viswanathan, R. Path dependent options : the case of lookback Options, *Journal of Finance*, 46 : 1893-1907, 1991.
- [3] Grabbe, J.O. The pricing of call and put options on foreign exchange *J. Internat. Money Finance*, 2 : 239-253, 1983.
- [4] Reiner, E. Breaking down the barriers. *Risk*, 9 :28-35, 1991.



## Chapitre 4

# Arbitrage statique, distribution et diffusion implicites

### 4.1 Introduction

Ce chapitre reconsidère la question de l'évaluation des produits dérivés à partir de zéro. On oublie donc tout ce que nous avons vu aux chapitres précédents pour reprendre le problème sous un autre angle, qui peut être considéré comme très naïf, mais qui part de la pratique de marché.

Le point de départ est **statique** au sens où toute l'étude est basée sur les prix observés **aujourd'hui**, à savoir

- La donnée des prix des actifs sous-jacents, taux d'intérêt et autres fondamentaux du marché, sans référence à aucun modèle.
- La donnée des prix de produits dérivés considérés comme très liquides, tels que ceux des contrats forwards, les prix d'options standards comme des options d'achat ou de vente avec des strike liquides...
- L'hypothèse de base est u'il y a suffisamment de liquidité dans le marché pour supposer qu'il n'y a aucun arbitrage entre ces prix, et entre les prix des autres dérivés que nous serons amenés à évaluer.

L'objectif de ce chapitre est de montrer, comme Bachelier d'ailleurs, qu'à condition que l'information donnée par les prix de marché soit suffisamment riche, il est possible de reconstruire un **système de "pricing" cohérent**, avec les prix observés aujourd'hui.

La différence fondamentale avec la présentation précédente est que la *couverture dynamique* par un portefeuille, qui est le message au coeur de la théorie de Black et Scholes, disparaît. La couverture dynamique est alors remplacée par la réplication statique des nouveaux dérivés par les dérivés de référence. Comme nous l'avons vu dans les barrières, il est possible de convrir de cette manière explicitement un certain nombre de produits financiers complexes. Cette problématique correspond à l'attitude utilisée dans les produits de taux d'intérêt, où le prix d'un dérivé est le prix de sa couverture par les instruments liquides du marché.

Quand les dérivés deviennent complexes, la réplication statique n'est plus possible. Bruno Dupire en 1994 a montré qu'il était possible de déterminer les paramètres d'un processus de diffusion "implicite", qui serve de support au pricing à la Black et Scholes généralisé, et à la couverture.

Cette théorie, qui est la "duale" de la théorie dynamique, repose sur le fait que l'information du marché est très riche. Ce n'est évidemment pas le cas, et les procédés utilisés pour générer l'information man-

quante auront beaucoup d'incidence sur le modèle construit à partir de ces prix. Il s'agit d'un problème inverse "mal posé" puisqu'à partir d'un nombre fini d'observations on cherche à reconstruire une surface de prix ou de volatilités. Nous ne traiterons pas complètement ce problème, et nous bornerons seulement à indiquer des voies de résolution qui seront détaillées dans le cours de Rama Cont.

## 4.2 Arbitrage statique

La question de savoir comment fixer le prix de ces produits dérivés est évidemment d'une grande importance pratique. Compte-tenu de la réalité des marchés, nous pouvons distinguer deux types de produits dérivés. Pour les produits dérivés standards, sur lesquels il y a une forte activité, les prix sont souvent faits à partir de l'offre et de la demande. Toutefois, ces prix des produits standards ne sont pas pas quelconques et respectent en particulier certaines règles évidentes :

- ⇒ la prime d'un contrat qui garantit un flux positif est positive
- ⇒ la prime d'un contrat qui garantit un flux supérieur à celui d'un autre contrat est plus grande que celle de ce dernier.

Le problème de faire un prix cohérent avec le prix des options standards se pose donc surtout pour les options dites exotiques.

*Qu'est ce qui contraint les prix des options les uns par rapport aux autres ?*

Sur les marchés financiers, il existe des *arbitrageurs*, qui sont des intervenants dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte-tenu des autres prix du marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans prendre de risque. Leur intervention est *statique*, au sens où ils prennent seulement des positions aujourd'hui, qu'ils liquideront sans les renégocier à une date future.

La règle de fonctionnement des marchés liquides qui dit que de tels arbitrages ne doivent pas durer.

*Un arbitrage statique est une position sur des produits de marchés, de valeur nulle à la date de négociation, qui conduit à une valeur positive à coup sûr dans l'avenir, quelle que soit l'évolution du marché.*

Cette notion d'arbitrage qui est à la base de la théorie de l'évaluation est fondamentale à comprendre. En particulier, il est important de vérifier lorsqu'on appliquera la théorie que les conditions qui favorisent l'absence d'arbitrage sont à peu près réalisées dans le marché qui nous préoccupe.

### 4.2.1 Incidence sur les prix de l'absence d'arbitrage statique

#### Prix d'un contrat à terme

Nous désignons par  $F_t(S, T)$ , le prix fixé par contrat à la date  $t$  auquel sera négocié le titre  $S$  à la date  $T$ . C'est le prix à terme, ou le prix forward de  $S$  en  $T$ .

Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix de ce contrat au cours de  $S$  à la date  $t$ . Pour se garantir le fait de détenir  $S$  en  $T$ , nous avons deux possibilités :

- La première consiste à acheter  $S$  aujourd'hui, et à la garder jusqu'en  $T$ .
- La deuxième consiste à acheter le contrat forward.

Pour pouvoir le payer en  $T$ , il faut investir aujourd'hui dans du zéro-coupon de maturité  $T$ ,  $B(t, T)$ , (le prix de 1 Euro payé en  $T$ ), pour un montant de  $B(t, T)F_t(S, T)$ . Par absence d'arbitrage statique, nous avons

$$F_t(S, T) = \frac{S_t}{B(t, T)} \quad (4.2.1)$$

PREUVE :

- ⇒ Supposons que  $S_t > F_t(S, T)B(t, T)$ . En achetant  $S_t$  contrats forwards, et en vendant  $F_t(S, T)B(t, T)$  actions, nous sommes assurés de détenir en  $T$ ,  $S_t$  actions et d'en vendre  $F_t(S, T)B(t, T)$ . Nous avons ainsi réalisé un arbitrage statique, puisque le bilan en  $T$  est toujours positif.
- ⇒ Un raisonnement similaire peut être fait si  $S_t < F_t(S, T)B(t, T)$ . Les prix sont donc nécessairement égaux.

### Parité Call -Put

Nous avons déjà utilisé cet argument dans le chapitre 2.

Un raisonnement analogue nous montre que la détention<sup>1</sup>d'un Call et la vente d'un Put de mêmes caractéristiques, nous garantissent à l'échéance d'être détenteur de la valeur de l'action et la vente du prix d'exercice  $K$ . Mais ce portefeuille peut aussi être obtenu en achetant l'action en  $t$  et en remboursant  $KB(t, T)$  en  $t$ .

Un raisonnement d'arbitrage analogue au précédent montre que nécessairement il y a égalité des valeurs de ces portefeuilles en  $t$

$$\boxed{\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB(t, T)} \quad (4.2.2)$$

## 4.2.2 Arbitrage international

Dans un univers multidevise, l'absence d'arbitrage vaut non seulement dans chaque pays, mais également entre les deux économies. Il reste à préciser comment se fait l'arbitrage entre l'économie domestique à laquelle nous faisons référence en utilisant le symbole  $d$ , et l'économie étrangère appelée par  $f$  (foreign)!

L'outil essentiel est le *taux de change*  $X_t^d$  c'est à dire le prix en unités domestiques de la date  $t$ , d'une unité étrangère de la même date.

### Taux de change à terme

Si nous nous plaçons dans les marchés à terme d'échéance  $T$ , domestique et étrangers, nous pouvons introduire le taux de change à terme  $X_t^{d,T}$ , c'est à dire le taux auquel à la date  $t$ , on fixe le change à la date  $T$  d'une unité étrangère en une unité domestique. L'arbitrage comptant-terme nous permet d'exprimer ce taux comme

$$\boxed{X_t^{d,T} = \frac{B^f(t, T)X_t^d}{B^d(t, T)}} \quad (4.2.3)$$

### Faire un dessin

PREUVE : Un schéma possible pour calculer le prix de ce contrat est le suivant :

un dollar de la date  $T$  est évalué aujourd'hui par  $B^f(t, T)$  donc converti en Euro il faut  $X_t^d B^f(t, T)$ , valeur qui correspond à un contrat à terme de  $\frac{B^f(t, T)X_t^d}{B^d(t, T)}$  par l'arbitrage comptant terme domestique.

Ce prix garantit la conversion d'un dollar en  $T$  en Euro de la même date. Par absence d'arbitrage c'est le prix du contrat.

Plus généralement, le même raisonnement peut être fait sur un contrat à terme portant sur un titre étranger. Cela conduit à une formule du genre

$$F_t^d(S^f, T) = S_t^f \frac{X_t^d}{B^d(t, T)} = F_t^f(S^f, T) X_t^{d,T}$$

---

<sup>1</sup>On dit encore qu'on est "long" d'un Call. Si on est vendeur, on dit qu'on est "court" d'un Call.

Cette dernière équation traduit bien la propriété de "taux de change" sur les marchés à terme de  $X_t^{d,T}$ .

### Symétrie Call domestique-Put foreign

• Considérons une **option d'achat** sur le change, de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K^d$  en Euro. L'option garantit l'achat de 1\$, au cours maximum de  $K^d$  Euro. Son prix en monnaie domestique est noté  $\text{Call}^d(t, X_t^d, K^d, T)$ .

Plaçons nous maintenant sur le marché étranger. Une telle option garantit la vente de  $K^d$  Euros à la date  $T$  au prix maximum de 1\$. Il s'agit donc de  $K^d$  puts étrangers sur le change Euro-Dollars, soit  $X_t^f = (X_t^d)^{-1}$ , de prix d'exercice  $K^f = (K^d)^{-1}$ , de prix en  $t$ ,  $K^d \text{Put}^f(t, X_t^f, K^f, T)$ .

L'absence d'arbitrage implique la symétrie entre ces deux marchés.

$$\boxed{\text{Call}^d(t, X_t^d, K^d, T) = K^d X_t^d \text{Put}^f(t, X_t^f, K^f, T)} \quad (4.2.4)$$

• De même un **Call binaire** domestique, qui paye 1 Euro si le change en  $T$  est plus grand que  $K^d$ , et rien sinon peut s'interpréter sur le marché étranger comme le paiement de  $(X_T^d)^{-1} = X_T^f$  dollars si le taux de change Euro-Dollars  $X_T^f$  est plus petit que  $K^f = (K^d)^{-1}$ . Mais un tel flux (pay-off) est celui d'un portefeuille long de  $K^f$  puts foreigns binaires et court d'un Put foreign standard<sup>2</sup>. L'absence d'arbitrage devient dans ce cas,

$$\begin{aligned} \text{BinC}^d(t, X_t, K, T) = \\ X_t^d [K^f \text{BinP}^f(t, X_t^f, K^f, T) - \text{Put}^f(t, X_t^f, K^f, T)] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Nous reviendrons sur ces questions dans un chapitre plus spécialement consacré au change.

## 4.3 Système de prix viable et arbitrage

L'objet de cette section est de montrer que l'absence d'arbitrage contraint les prix des produits dérivés négociés sur les marchés à respecter certaines propriétés très naturelles. En particulier, si un nombre suffisamment grand de prix sont négociés alors le système de prix devient un calcul de flux moyen pondéré.

Comme nous cherchons à évaluer à une date  $t$  donnée le prix de flux incertains qui seront payés dans le futur, nous sommes amenés à nuancer les propriétés que nous introduisons de la manière suivante :

*Nous dirons qu'une propriété est vraie presque sûrement, ( en abrégé p.s.), si les états du monde dans lesquels cette propriété ne serait pas satisfaite est un événement impossible pour le marché, au sens où tous les agents sont d'accord pour dire qu'il ne peut se produire.*

Nous désignons par  $\mathcal{N}$  l'ensemble des événements impossibles. S'il existe une probabilité donnant la probabilité de réalisation d'un événement du marché, il est naturel de supposer que les événements impossibles sont les événements de probabilité nulle.

Ainsi, un arbitrage est une stratégie de portefeuille, de valeur initiale nulle, de valeur terminale positive ou nulle, strictement positive sur un ensemble n'appartenant pas à  $\mathcal{N}$ .

Dans toute la suite, les égalités seront à comprendre comme étant vraie sauf sur un ensemble de  $\mathcal{N}$ . Nous

---

<sup>2</sup>Mathématiquement, nous traduisons que

$$X_T^f 1_{\{X_T^f \leq K^f\}} = K^f 1_{\{X_T^f \leq K^f\}} - (K^f - X_T^f)^+$$

dirons  $\mathcal{N}$  p.s.

Lorsqu'un arbitrage est détecté, il n'est pas toujours possible de le réaliser, car il faut alors prendre en compte la liquidité des titres, la présence même faible de coûts de transaction, et d'autres contraintes réelles des marchés. Dans cette partie, nous ne tenons pas compte de ces restrictions.

### 4.3.1 Propriétés des prix des produits dérivés

Comme pour les contrats à terme, l'absence d'arbitrages statiques permet d'établir des contraintes sur les prix des produits dérivés en fonction de leurs caractéristiques à terme. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux propriétés des options d'achat et de vente que nous avons décrites ci-dessus, mais il sera commode pour la suite d'énoncer des propriétés plus générales concernant les systèmes de prix.

Plus précisément, désignons la date de négociation par  $t$ . Cette date est fixée dans toute la section concernant l'arbitrage statique.

Notons  $\text{Call}_t(K, T)$  (resp.  $\text{Put}_t(K, T)$ ) le prix à cette date d'un call (resp. d'un put) de prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$ , sur un sous-jacent donné  $S$ .

**Théorème 4.3.1** Dans un marché où sont négociées des options d'achat pour toute échéance et tout prix d'exercice, la fonction  $\text{Call}_t(K, T)$  possède les propriétés suivantes :

- Pour une échéance  $T$  fixée, supérieure à  $t$ , l'application  $K \rightarrow C_t(K, T)$  est convexe, décroissante par rapport à  $K$  et vérifie

$$\text{Call}_t(K, T) \geq (S_t - KB(t, T))^+ \quad (4.3.1)$$

où par définition  $B(t, T)$  est le prix en  $t$  de 1Euro payé en  $T$

- Pour un prix d'exercice donné, et si les taux d'intérêt sont constants <sup>3</sup> ( $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ )

$$\text{Call}_t(K, T + \theta) \geq \text{Call}_t(Ke^{-r\theta}, T) \quad (4.3.2)$$

En particulier, si les taux sont nuls,  $T \rightarrow \text{Call}_t(K, T)$  est croissante.

**Remarque 4.3.1** En général, sur un sous-jacent donné, les Calls ne sont négociés que pour un nombre fini de dates d'échéances  $\{T_i; i = 1 \dots n\}$ , rangées par ordre croissant, et pour une échéance donnée, que pour un nombre fini de prix d'exercice  $\{K_{i,j}; j = 1 \dots d_i\}$ . Les propriétés précédentes sont vraies seulement pour ces options.

Ce théorème est une conséquence d'un résultat un peu plus général, que nous démontrons ci-dessous.

**Lemme 4.3.1** Soit  $\text{Opt}_t^{\text{Eur}}(h, T)$  le prix à la date  $t$  d'une option de valeur intrinsèque  $h$ .

- Deux options écrites sur des pay-off (ou valeur intrinsèque) ordonnés, ont des prix ordonnés, soit

$$\text{Opt}_t^{\text{Eur}}(h_1, T) \leq \text{Opt}_t^{\text{Eur}}(h_2, T), \quad 0 \leq h_1 \leq h_2 \quad (4.3.3)$$

- Le prix est une forme linéaire positive,

$$\text{Opt}_t^{\text{Eur}}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2, T) = \alpha_1 \text{Opt}_t^{\text{Eur}}(h_1, T) + \alpha_2 \text{Opt}_t^{\text{Eur}}(h_2, T) \quad \text{p.s.} \quad (4.3.4)$$

---

<sup>3</sup>Si les taux sont déterministes, nous nous référons au zéro-coupon forward  $B_t(T, T + \theta) = \exp - \int_T^{T+\theta} r_s ds$

PREUVE : du lemme

⇒ Supposons  $\text{Opt}_t^{Eur}(h_2, T) < \text{Opt}_t^{Eur}(h_1, T)$ , et constituons un portefeuille de valeur nulle à la date  $t$ , en achetant  $\text{Opt}_t^{Eur}(h_1, T)$  options de valeur intrinsèque  $h_2$  et en vendant  $\text{Opt}_t^{Eur}(h_2, T)$  options de valeur intrinsèque  $h_1$ . À l'échéance, le portefeuille vaut

$$\text{Opt}_t^{Eur}(h_1, T)h_2(S_T) - \text{Opt}_t^{Eur}(h_2, T)h_1(S_T) \geq [\text{Opt}_t^{Eur}(h_1, T) - \text{Opt}_t^{Eur}(h_2, T)]h_1(S_T) \geq 0$$

C'est donc une opportunité d'arbitrage, si  $h_1(S_T)$  n'est pas nulle p.s.

PREUVE : du théorème

⇒ Ce lemme appliqué à la fonction décroissante par rapport à  $K$ ,  $(x - K)^+$  montre la décroissance.

⇒ La convexité résulte de la convexité par rapport à  $K$  de la valeur intrinsèque, qui implique d'après le lemme que, si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,

$$\text{Call}_t\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i, T\right) \leq \text{Call}_t\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (\cdot - K_i)^+\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Call}_t(K_i, T)$$

⇒ L'inégalité suivante résulte du fait que  $(x - k)^+ \geq x - K$ , et donc  $\text{Call}_t(K, T) \geq S_t - K$ . mais le call est positif, d'où l'inégalité.

⇒ Regardons maintenant l'effet maturité, en supposant qu'il est possible d'acheter à la date  $T$  dans le futur un call de maturité  $T + \theta$ , au prix inconnu de  $C_T(K, T + \theta) \geq (S_T - Ke^{-r\theta})^+$ . Le prix aujourd'hui de ce call est le même que celui du call d'échéance  $T + \theta$ , puisqu'il garantit le même flux terminal en  $T + \theta$ . Par suite,

$$\text{Call}_t(K, T + \theta) \geq \text{Call}_t(Ke^{-r\theta}, T)$$

## 4.4 Les prix comme espérance : le point de vue statique

### 4.4.1 Arbitrage statique et prix d'états

L'hypothèse<sup>4</sup> qu'il existe un continuum d'options de tout prix d'exercice nous permet d'extraire le prix du marché pour chaque changement possible dans le futur du titre sous-jacent.

Ce prix est évidemment à comparer aux croyances à priori de l'investisseur, fondées par exemple sur une analyse statistique des cours.

Le système de Call est générateur des prix d'options de valeur intrinsèque régulière quasi-convexe, au sens où elle admet une dérivée seconde au sens des distributions, notée  $h''(dK)$ . Quand la fonction est dérivable, cette mesure se représente comme  $h''(K)dK$ . Par convention, les dérivées que nous introduisons seront les dérivées à droite.

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \int_0^{x_0} (K - x)^+ h''(dK) + \int_{x_0}^{+\infty} (x - K)^+ h''(dK) \quad (4.4.1)$$

Choisissons comme point de centrage des prix la valeur du contrat forward, que nous notons  $F_t^T$  pour simplifier ; nous voyons que le prix d'un contrat de valeur intrinsèque  $h$  est alors donné par,

$$\text{Opt}_t^{Eur}(h, T) = B(t, T)h(F_t^T) + \int_0^{F_t^T} \text{Put}_t(K, T)h''(dK) + \int_{F_t^T}^{+\infty} \text{Call}_t(K, T)h''(dK) \quad (4.4.2)$$

Dans cette représentation, les Calls et les Puts qui interviennent sont en dehors de la monnaie. Comme les Puts et les calls sont des fonctions convexes par rapport au prix d'exercice, nous pouvons faire une intégration par parties et déduire que

---

<sup>4</sup>Ce paragraphe doit beaucoup à l'article de P.Carr et D.Madan : Optimal Positioning in Derivatives Securities,



**Théorème 4.4.1** *Supposons un marché financier où sont négociés entre deux périodes  $t$  et  $T$  un continuum de calls et de puts de tout prix d'exercice. Le prix d'un contrat de valeur intrinsèque régulière est donné par*

$$\text{Opt}_t^{Eur}(h, T) = B(t, T) \int_0^{+\infty} h(K) q_t(T, dK) \quad (4.4.3)$$

où  $q_t(T, dK)$  est une mesure positive, calculable explicitement à partir des prix par

$$B(t, T) q_t(T, dK) = \text{Put}_t''(T, dK) \quad \text{si } K \leq F_t^T \quad \text{Call}_t''(T, dK) \quad K > F_t^T \text{ sinon.} \quad (4.4.4)$$

$B(t, T) q_t(T, dK)$  est souvent appelée la densité de prix d'états car elle représente le prix que le marché est prêt à payer pour un actif qui vaudrait  $\mathbf{1}_{(K, K+dK)}$ .

$q_t(T, dK)$  est une probabilité qui représente le prix d'état à terme. Elle satisfait aux contraintes suivantes :

$$1 = \int_0^{\infty} q_t(T, dK), \quad S_t = B(t, T) \int_0^{\infty} K q_t(T, dK) \quad (4.4.5)$$

**Remarque 4.4.1** En discrétisant l'intégrale, nous voyons que toute option de valeur intrinsèque  $h$  peut être répliquée statiquement par la limite d'une combinaison linéaire de calls et de puts en dehors de la monnaie.

En particulier, les options binaires, associées à  $h(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq K\}}$  sont des dérivées de Calls

$$\text{BinC}_t(K, T) = -\partial_K \text{Call}_t(K, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Call}_t(K - \varepsilon, T) - \text{Call}_t(K + \varepsilon, T)}{2\varepsilon}$$

Elles se calculent à partir de la probabilité  $q$  par la formule

$$\text{BinC}_t(K, T) = B(t, T) \int_K^{+\infty} q_t(T, dK), \quad \text{BinP}_t(K, T) = B(t, T) \int_0^K q_t(T, dK)$$

La fonction de répartition de la probabilité  $q_t(T, \cdot)$  se calcule donc directement à partir des options binaires. Elle s'interprète comme la loi forward-neutre du titre risqué.

PREUVE : La preuve utilise la convexité des prix d'options et une intégration par parties dans la formule (4.4.2).

⇒ Les conditions frontières sont qu'un Put de strike 0 est nul ainsi que sa dérivée. Il en est de même pour un Call de prix d'exercice infini.

⇒ Dans le calcul qui suit les intégrales sont prises sur des intervalles fermés à droite.

$$\begin{aligned} \int_0^{F_t^T} \text{Put}_t(K, T) h''(dK) &= [h'(K) \text{Put}_t(K, T)]_0^{F_t^T} - \int_0^{F_t^T} \partial_K \text{Put}_t(K, T) h'(K) dK \\ &= h'(F_t^T) \text{Put}_t(F_t^T, T) - \int_0^{F_t^T} \partial_K \text{Put}_t(K, T) h'(K) dK \\ &= h'(F_t^T) \text{Put}_t(F_t^T, T) - \partial_K \text{Put}_t(F_t^T, T) h(F_t^T) + \int_0^{F_t^T} \partial_K^2 \text{Put}_t(dK, T) h(K) \end{aligned}$$

Faisons le même calcul avec le terme qui contient des calls, et regroupons les termes correspondant ; il vient

$$\begin{aligned} \text{Opt}_t^{Eur}(h, T) &= B(t, T) h(F_t^T) + h'(F_t^T) (\text{Put}_t(F_t^T, T) - \text{Call}_t(F_t^T, T)) \\ &\quad + h(F_t^T) (\partial_K \text{Call}_t(F_t^T, T) - \partial_K \text{Put}_t(F_t^T, T)) \\ &\quad + \int_0^{F_t^T} h(K) \partial_K^2 \text{Put}_t(dK, T) + \int_{F_t^T}^{+\infty} h(K) \partial_K^2 \text{Call}_t(dK, T) \\ &= B(t, T) \int_0^{+\infty} h(K) q_t(T, dK) \end{aligned}$$

⇒ En effet, par la parité Call-Put,

$$\text{Call}_t(F_t^T, T) - \text{Put}_t(F_t^T, T) = S_t - B(t, T)F_t^T = 0, \quad \partial_K \text{Call}_t(F_t^T, T) - \partial_K \text{Put}_t(F_t^T, T) = -B(t, T)$$

## 4.5 Applications probabilistes

La formule 4.4.1 a de nombreuses applications en calcul stochastique, notamment dans l'étude des temps locaux. Nous supposons ici que  $X_t$  est une semimartingale positive continue, de variation quadratique  $\langle dX_t \rangle = \text{var}_t(dX_t)$ . Dans le cas du cours d'un actif,  $S_t$ , on a donc  $\langle dS_t \rangle = S_t^2 \sigma_t^2 dt$ , mais pour ce que nous voulons faire, la forme explicite importe peu.

### 4.5.1 Fonctions convexes et formule d'Itô

La formule d'Itô appliquée à une fonction convexe de classe  $\mathcal{C}^2$  montre que

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}dA_t^f$$

où  $dA_t^f = f''(X_t) \langle dX_t \rangle$  est un processus croissant positif.

La fonction  $(x - K)^+$  est convexe, mais n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ . Nous pouvons l'approximer en croissant par une suite de fonctions convexes régulières, pour lesquelles les processus croissants  $A_t^{f_n}$  convergent p.s. vers un processus croissant noté  $\Lambda_t^K$ .

**Définition 4.5.1** *Le temps local au point  $K$  de  $X$  est le processus croissant  $\Lambda_t^K$  caractérisé par*

$$d(X_t - K)^+ = \mathbf{1}_{X_t > K} dX_t + \frac{1}{2} d\Lambda_t^K \quad (4.5.1)$$

Notons que  $d(K - X_t)^+ = -dX_t + d(X_t - K)^+ = -\mathbf{1}_{X_t \leq K} dX_t + \frac{1}{2} d\Lambda_t^K$ .

**Proposition 4.5.1** *Formule des densités d'occupation Soit  $(X_t)$  une semimartingale continue. Pour toute fonction  $g \geq 0$*

$$\int_0^t g(X_s) \langle dX_s \rangle = \int g(K) \Lambda_t^K dK \quad (4.5.2)$$

$$\int_0^T g(s, X_s) \langle dX_s \rangle = \int \int_0^T g(s, K) d\Lambda_s^K dK \quad (4.5.3)$$

PREUVE :

⇒ La formule 4.4.1 nous conduit à une nouvelle formule d'Itô pour les fonctions  $h$  régulières exprimées à l'aide du temps local.

$$\begin{aligned} dh(X_t) &= h'(x_0)dX_t + \int_0^{x_0} h''(dK)(-\mathbf{1}_{X_t \leq K} dX_t - \frac{1}{2} d\Lambda_t^K) \\ &\quad + \int_{x_0}^\infty h''(dK)(\mathbf{1}_{X_t > K} dX_t + \frac{1}{2} d\Lambda_t^K) \\ &= h'(X_t)dX_t + \frac{1}{2} \int h''(dK) d\Lambda_t^K \end{aligned}$$

Il reste à comparer avec la formule d'Itô classique pour observer que

$$\int_0^t h''(X_s) \langle dX_s \rangle = \int h''(K) \Lambda_t^K dK \quad (4.5.4)$$

$\Rightarrow$  Cette formule, qui s'étend à toute fonction  $g$  positive ou bornée, exprime que pour  $t$  fixé, la mesure en espace  $g \rightarrow \int_0^t g(X_s) < dX_t >$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par  $\Lambda_t^K$ . En particulier,

$$d\Lambda_t^K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbf{1}_{[K, K+\epsilon]} < dX_t > \quad (4.5.5)$$

Plus généralement, si on intègre une fonction dépendant aussi du temps, on obtient la formule de l'énoncé.

### 4.5.2 Temps local et densité

**Théorème 4.5.1** *Supposons maintenant la variation quadratique de la forme  $d < X_t > = \sigma^2(t, X_t) X_t^2 dt$ , et que pour tout  $t > 0$  la loi de  $X_t$  admet une densité  $p_X(t, K)$ . Alors*

$$\int_0^t p_X(s, K) \sigma^2(s, K) K^2 ds = \mathbb{E}(\Lambda_t^K)$$

La fonction du temps  $t \rightarrow \mathbb{E}(\Lambda_t^K)$  est dérivable et de dérivée

$$\partial_t \mathbb{E}(\Lambda_t^K) = \sigma^2(t, K) K^2 p_X(t, K) \quad (4.5.6)$$

PREUVE : Prenons l'espérance dans la formule (4.5.2). Il vient

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t g(X_s) \sigma^2(s, X_s) X_s^2 ds\right) = \int g(K) \mathbb{E}(\Lambda_t^K) dK$$

$\Rightarrow$  L'existence d'une densité pour la loi de  $X_t$  entraîne que le membre de gauche est dérivable en espace et admet une densité égale à  $\int_0^t p_X(s, K) \sigma^2(s, K) K^2 ds$ . L'égalité montre que cette densité est aussi égale à  $\mathbb{E}(\Lambda_t^K)$  p.p.

$\Rightarrow$  La dérivabilité en temps de cette fonction résulte immédiatement de cette égalité.

### 4.5.3 Applications à la répliation statique des options barrières UI

à rédiger d'après Andersen Andreasen

Soit le prix d'une option barrière sous un sous-jacent qui est une diffusion markovienne. Les notations sont celles du chapitre précédent.

On suppose qu'on a calculé à l'aide de l'EDP le prix de l'option barrière, out, qui vaut zéro au-dessus de la barrière, et par différence on en déduit le prix de l'option In,  $u(t, x)$ , définie partout, mais ayant une discontinuité de la première dérivée au point  $H$ . Cette fonction peut s'écrire comme la différence de deux fonctions convexes régulières sauf à la barrière.

Par suite,

$$\begin{aligned} e^{-rT} u(T, S_T) &= \\ e^{-rt} u(t, x) + \int_t^T e^{-rs} (u'_x(s, S_s) dS_s + \frac{1}{2} u''_{xx}(s, S_s) \sigma^2(s, S_s) + u'_t(s, S_s) ds + \frac{1}{2} (u'_x(s, H^+) - u'_x(s, H^-)) d\Lambda_s^K) &= \\ = e^{-rT} u(t, x) + \int_t^T e^{-rs} (u'_x(s, S_s) d(S_s - rS_s ds) + e^{-rs} \frac{1}{2} (u'_x(s, H^+) - u'_x(s, H^-)) d\Lambda_s^K) \end{aligned}$$

En prenant l'espérance et en utilisant les propriétés du temps local, il vient que

$$\text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(T, u(T, S_T)) = u(t, x) + \int_t^T \frac{1}{2} (u'_x(s, H^+) - u'_x(s, H^-)) \sigma^2(s, H) \partial_{KK} \text{Call}(s, H) ds$$

L'option barrière est répliquable statiquement par une option européenne de pay-off  $u(T, S_T)$  moins un continuum d'options butterfly  $\partial_{KK} \text{Call}(s, H)$  de strike à la barrière, dont les points sont les sauts de la fonction de prix à la barrière.

Ce résultat est à comparer à celui de l'appendice.

## Diffusion implicite d'après Bruno Dupire

Ces quelques notes doivent beaucoup aux nombreuses discussions avec Bruno Dupire. L'essentiel des idées présentées ici lui reviennent, mais ma présentation est plus formelle. Qu'il en soit ici remercié.

### Introduction

Devant le nombre croissant d'options exotiques négociées sur le marché, notamment d'options dépendant de la trajectoire, il n'est pas suffisant de calibrer à partir de prix d'options les distributions statiques, mais il faut essayer de construire des processus dynamiques, cohérents avec les prix d'options Européennes standards de différentes maturités. L'objectif est d'utiliser cette information pour donner de "meilleurs prix" pour les options à barrière et surtout proposer des couvertures à l'aide d'options "vanilla", négociées sur les marchés organisés. Dans cette logique, il est naturel de rechercher une fonction de volatilité ne dépendant que du sous-jacent et de la maturité, et de construire la diffusion associée. Ce point de vue privilégie donc les volatilités fonctions du sous-jacent par rapport aux volatilités aléatoires.

## 4.6 La diffusion implicite de Dupire

Nous détaillons le point de départ du travail de Dupire, qui suppose a priori le monde sans arbitrage.

### 4.6.1 Les entrées du problème

Dans cette première étape, nous supposons qu'à un jour donné, daté 0, on connaît sur le marché les prix d'un très grand nombre d'options européennes, en fait des options de tout strike et de toute maturité sur un sous-jacent donné. Les données en entrée sont donc un continuum de Calls désignés par  $C(T, K)$ . Nous reviendrons plus tard sur ce problème de continuum.

On n'a à priori que cette information sur le processus sous-jacent  $(S_t)$ , qui est supposé verser un taux de dividende  $q$  constant et évoluer dans un univers où les taux sont constants.

Comme nous l'avons vu, l'AOA implique que les prix de marché soient cohérents au sens où la famille  $\{C(T, K); (T, K) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\}$  vérifie

- L'application  $K \rightarrow C(T, K)$  est convexe, continue et décroissante
- $C(T, K) > (e^{-qT} S_0 - K)^+$
- Plus généralement

$$C(T + \theta, K) \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(e^{-q\theta} S_T - K e^{-r\theta})^+] = e^{-q\theta} C(T, K e^{-(r-q)\theta})$$

Ces prix de calls nous donnent des informations sur la distribution de pricing des v.a.  $S_t, t$  fixé. En particulier, la dérivée seconde au sens des distributions est associée à la distribution implicite risque-neutre,  $e^{rt} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)$ .

Toutefois, en général, la connaissance des distributions pour  $t$  fixe, vues d'aujourd'hui ne suffit pas à caractériser complètement et unisquement les probabilités de transition, c'est à dire la distribution de  $S_T$

vue de n'importe quelle date et de n'importe quelle valeur observée entre 0 et  $T_{max}$ . Cette connaissance est fondamentale pour l'évaluation des options à départ forward.

Nous nous proposons de montrer qu'en absence d'arbitrage, il existe une diffusion markovienne, de rendement  $r$  et de volatilité une fonction  $\sigma(t, x)$ , pour lesquelles les distributions des v.a.  $S_t$ , pour tout  $t$  fixe, sont données par les noyaux de pricing que nous avons identifiés.

#### 4.6.2 Une étude directe

Nous supposons qu'une telle diffusion existe, c'est à dire qu'il existe un univers aléatoire  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ , et une fonction de volatilité  $\sigma(t, S)$  tels que

$$dS_t = S_t[(r - q)dt + \sigma(t, S_t)dW_t] \quad (4.6.1)$$

où  $(W_t)$  est un  $\mathbb{Q}$  mouvement brownien. Les prix des Calls sont donc donnés à l'instant initial  $(t_0, S_{t_0} = x_0)$  par

$$C(T, K) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(S_T - K)^+] \quad (4.6.2)$$

L'hypothèse que ces fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^2$  entraîne que pour tout  $T > t_0$ , (sous la probabilité risque-neutre), la loi de  $S_T$  sachant que  $S_{t_0} = x$  admet une densité  $q(T, K)$  (les variables  $(t_0, S_{t_0} = x_0)$  sont omises s'il n'y a pas d'ambiguïté) donnée par

$$q(T, K) = e^{rT} \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2} \quad (4.6.3)$$

Une autre manière de les calculer est de les considérer comme la solution en  $(t_0, S_{t_0} = x_0)$  des solutions de l'EDP backward :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + (r - q)x \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) - rC = 0 \quad (4.6.4)$$

avec comme condition terminale  $C(T, S) = (S - K)^+$ .

#### 4.6.3 Calcul de la fonction de volatilité : l'EDP forward

Puisque les données sont les prix de Calls, nous allons essayer d'exprimer directement la volatilité en fonction de ces prix.

L'argument essentiel est une EDP forward satisfaite par ces prix, dont les paramètres de variation sont les strikes et les maturités des options. Elle est la version sur les Calls de l'EDP forward satisfaite par la densité de la distribution de la solution de l'équation différentielle stochastique.

Plus précisément, nous avons :

**Théorème 4.6.1** *Les calls vérifient l'EDP forward*

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2(T, K)K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - (r - q)K \frac{\partial C}{\partial K}(T, K) - qC(T, K) \quad (4.6.5)$$

*Pour une famille admissible de prix de calls, il existe donc une seule fonction de volatilité compatible avec cette famille, au sens où les prix de Call calculés avec la fonction de volatilité  $\sigma(t, S)$  dans l'EDP Backward sont exactement ceux donnés en entrée.*

PREUVE :

⇒ Pour avoir l'intuition de cette équation, appliquons la formule d'Itô à la semimartingale  $e^{-rt}(S_t - K)^+$ . Il vient en introduisant le temps local  $\Lambda_t^K$

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\epsilon)}(S_{T+\epsilon} - K)^+ &= e^{-rT}(S_T - K)^+ + \int_T^{T+\epsilon} r e^{-ru}(S_u - K)^+ du \\ &+ \int_T^{T+\epsilon} e^{-ru} 1_{\{S_u \geq K\}} dS_u + \frac{1}{2} \int_T^{T+\epsilon} e^{-ru} d\Lambda_u^K \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Utilisons l'équation de la dynamique de  $S$  pour prendre l'espérance des deux membres de cette égalité. Nous avons un terme de la forme

$$\mathbb{E}(e^{-ru} 1_{\{S_u \geq K\}} S_u) = C(u, K) + K e^{-ru} \mathbb{P}(S_u \geq K) = C(u, K) - K \frac{\partial C}{\partial K}(u, K)$$

⇒ Le terme de la forme  $\mathbb{E}(\int_T^{T+\epsilon} e^{-ru} d\Lambda_u^K)$  s'obtient grâce à la formule sur les temps locaux (4.5.6)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\int_T^{T+\epsilon} e^{-ru} d\Lambda_u^K] &= \int_T^{T+\epsilon} e^{-ru} d_u \mathbb{E}[\Lambda_u^K] = \int_T^{T+\epsilon} e^{-ru} du \sigma^2(u, K) K^2 q(u, K) \\ &= \int_T^{T+\epsilon} \sigma^2(u, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(u, K) du \end{aligned}$$

⇒ Il vient donc que

$$\begin{aligned} C(T + \epsilon, K) &= C(T, K) - \int_T^{T+\epsilon} r C(u, K) du + (r - q) \int_T^{T+\epsilon} (C(u, K) - K \frac{\partial C}{\partial K}(u, K)) du \\ &+ \frac{1}{2} \int_T^{T+\epsilon} \sigma^2(u, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(u, K) du \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Il reste à passer à la limite après avoir divisé par  $\epsilon$  pour avoir l'EDP.

**Remarque 4.6.1** Si nous souhaitons donner un point de vue EDP de ce résultat, il suffit de noter que la fonction

$$q(T, (K)) = e^{rT} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(u, K)$$

vérifie l'équation forward duale

$$q'_T(T, K) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma^2(T, K) K^2 q(T, K))}{\partial K^2} - \frac{\partial((r - q) K q(T, K))}{\partial K}(T, K) \quad (4.6.8)$$

Si nous intégrons deux fois cette équation, nous trouvons que

$$\frac{\partial e^{rT} C(T, K)}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 e^{rT} \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2} - \int_K^{+\infty} (r - q) K e^{rT} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(u, K) \partial K(T, K) du \quad (4.6.9)$$

Par une intégration par parties analogue à celle faite dans le calcul probabiliste, on obtient la bonne EDP. Remarquons que l'EDP forward permet de calculer de manière simple les prix et les caractéristiques de toute une famille de Calls.

#### 4.6.4 Diffusion implicite

Etant donné un continuum d'options satisfaisant les hypothèses précédentes, et des conditions initiales  $(t_0, S_{t_0})$ , il existe une diffusion markovienne, dont la fonction de volatilité est donnée par

$$\frac{\partial C}{\partial T} + (r - q) K \frac{\partial C}{\partial K}(T, K) + q C(T, K) = \frac{1}{2} (\sigma^{\text{Dupire}})^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \quad (4.6.10)$$

La fonction de volatilité est appelée la **volatilité locale**.

**Remarque 4.6.2** L'existence d'une diffusion repose sur la régularité de la fonction  $\sigma(T, K)$ . Si cette fonction est Lipschitzienne, la théorie classique des équations différentielles stochastiques montre l'existence dans n'importe quel espace probabilisé équipé d'une filtration brownienne.

Si la fonction est seulement continue, il existe une solution faible, réalisable sur un espace de probabilité construit avec la solution. On parle de solution faible.

### Volatilité locale et robustesse

Supposons que les prix d'options soient obtenus à partir d'un processus de prix dont la volatilité, aléatoire,  $\gamma_t$  n'est pas connue. On suppose que seuls les prix d'options aujourd'hui sont connus. Quel lien peut-on établir entre la "vraie volatilité" et la vol locale à la Dupire.

**Proposition 4.6.1** *Supposons que l'actif sous-jacent soit modélisé par un processus d'Itô de rendement  $r$  et de une volatilité  $\gamma_t$ , soit  $dS_t = S_t(rdt + \gamma_t dW_t)$ . La volatilité locale à la Dupire est*

$$\mathbb{E}_Q(\gamma_t^2 | (S_t, S_{t_0})) = (\sigma^{\text{Dup}})^2(t, S_t)$$

si la famille des dérivées secondes des prix d'option est suffisamment discriminante.

PREUVE :

⇒ Les idées sont les mêmes que dans l'étude de la robustesse de Black et Scholes. On utilise le fait que dans le modèle à la Dupire, les prix d'options en  $(t_0, S_{t_0})$  sont les solutions de l'EDP backward dont le générateur  $L^{\text{Dup}}$  est associé à la fonction de volatilité  $\sigma^{\text{Dup}}$ . Désignons par  $u^{\text{Dup}}$  la solution de condition terminale  $(x - K)^+$  à la maturité  $T$  dont la valeur aujourd'hui est connue  $C(T, K)$ .

⇒ Appliquons la formule d'Itô à la fonction  $u_{T,K}^{\text{Dup}}$  et au sous-jacent  $S$  de volatilité  $\gamma_t$ . Il vient en exploitant l'EDP forward

$$\begin{aligned} e^{-rT}(S_T - K)^+ &= e^{-rt_0}C(T, K) + \int_{t_0}^T e^{-rs} u_x^{\text{Dup}}(t, S_t)(dS_t - rS_t dt) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T e^{-rs} (\gamma_t^2 - (\sigma^{\text{Dup}})^2(t, S_t)) S_t^2 u_{xx}^{\text{Dup}}(t, S_t) dt \end{aligned}$$

⇒ Il nous reste à prendre l'espérance :

- Par définition,  $\mathbb{E}_Q(e^{-rT}(S_T - K)^+) = u_{T,K}^{\text{Dup}}(t_0, S_{t_0}) = C(T, K)$ .
- D'autre part, par hypothèse  $dS_t - rS_t dt$  est une  $Q$ -martingale, ce qui assure que l'intégrale stochastique est d'espérance nulle, si les dérivées sont bornées.
- Dans la dernière intégrale, on peut remplacer  $\gamma_t^2$  par son espérance conditionnelle par rapport à la tribu engendrée par la seule variable  $S_t$ , puisque  $u_{xx}^{\text{Dup}}(t, S_t)$  est une fonction de  $(t, S_t)$ . Nous notons cette fonction

$$\gamma^2(t, S_t) = \mathbb{E}_Q(\gamma_t^2 | (S_t, S_{t_0}))$$

Nous avons donc

$$\int_{t_0}^T e^{-rs} (\gamma_t^2(t, S_t) - (\sigma^{\text{Dup}})^2(t, S_t)) S_t^2 u_{xx}^{\text{Dup}}(t, S_t) dt = 0$$

⇒ Supposons que les fonctions  $(u_{T,K}^{\text{Dup}})_{xx}(t, x)$  soit suffisamment riche lorsque  $K$  varie pour qu'une fonction orthogonale à toutes ces fonctions soit nulle ; on en déduit que

$$\mathbb{E}_Q(\gamma_t^2 | (S_t, S_{t_0})) = \gamma^2(t, S_t) = (\sigma^{\text{Dup}})^2(t, S_t)$$

Nous pouvons utiliser ces idées pour retrouver la volatilité implicite à partir de la volatilité locale, mais seulement comme point fixe.

**Proposition 4.6.2** Soit  $\Sigma^2(T, K)$  la volatilité implicite Black-Scholes d'une option de maturité  $T$  et de strike  $K$ . Désignons par  $\Gamma_{(T,K)}^{BS}(t, x)$  le gamma Black et Scholes de cette option à n'importe quelle date

$$\begin{aligned} \Sigma^2(T, K) &= \int_{R^+} e^{-rt} \Gamma_{(T,K)}^{BS}(t, x) \partial_{KK} C(t, x) dt dx \\ &= \int_{t_0}^T \int_{R^+} e^{-rt} (\sigma^{\text{Dup}})^2(t, x) \Gamma_{(T,K)}^{BS}(t, x) \partial_{KK} C(t, x) dt dx \end{aligned}$$

Le carré de la volatilité implicite Black et Scholes est une moyenne en temps et espace du carré de la volatilité locale prise à des niveaux et des temps différents.

PREUVE :

⇒ C'est la robustesse de la formule de Black et Scholes, puisque les prix de Call dans les deux modèles sont les mêmes.

⇒ Il faut noter que la fonction  $\Gamma_{(T,K)}^{BS}(t, x)$  dépend de la volatilité implicite que l'on cherche à calculer.

⇒ Pour calculer effectivement, on peut utiliser une méthode d'itérative.

#### 4.6.5 Le vrai problème de calibration

Le problème dans la réalité est qu'on ne connaît que quelques prix de Calls pour différents strikes et différentes maturités  $\{C(T_i, K_{i,j})\}$ . On n'a donc pas l'information nécessaire pour calculer de manière unique la fonction de volatilités. Le procédé de lissage de prix de Calls a manifestement une grande influence sur la forme de la fonction de volatilité que l'on peut retrouver.

Une procédure classique consiste à utiliser les volatilités implicites de la formule de Black-Scholes, et de les lisser de manière au moins parabolique pour générer l'information manquante. Après un calcul très fastidieux, on arrive à des formules du genre, si  $\Sigma(K, T)$  désigne la volatilité de BS implicite pour une option de strike  $K$  et de maturité  $T$

$$\sigma(T, K) = \Sigma(T, K) \sqrt{\frac{1 + \frac{2T}{\Sigma} \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial T} + rK \frac{\partial \Sigma}{\partial K} \right)}{1 + 2Kd_1 \sqrt{T} \frac{\partial \Sigma}{\partial K} + K^2 d_1 d_2 T \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial K} \right)^2 + K^2 \Sigma T \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial K^2}}} \quad (4.6.11)$$

où les fonctions  $d_1$  et  $d_2$  sont celles qui apparaissent naturellement dans Black et Scholes.

En fait ce problème délicat relève de la théorie des **problèmes inverses mal posés** classiques en EDP. Sur la bonne manière de s'y prendre pour résoudre ce problème, voir le cours second niveau de Rama.



## Chapitre 5

# L'ÉVALUATION ET LA COUVERTURE DES OPTIONS sur MULTI SOUS-JACENTS

### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la couverture des options écrites sur un sous-jacent à l'aide de stratégies autofinancantes. Nous nous intéressons maintenant au cas où plusieurs sous-jacents sont négociés. Beaucoup d'idées sont les mêmes, mais nous allons démontrer un certain nombre de faits nouveaux :

- ⇒ si le nombre de titres est plus grand que le nombre de sources de bruits, les rendements de ces titres ne sont pas quelconques : l'excès de rendement par rapport au cash dépend essentiellement de la volatilité du titre et des primes de risque, dont nous montrerons l'existence par un argument d'algèbre linéaire.
- ⇒ Le numéraire utilisé pour exprimer le prix des actifs, (en général la monnaie du pays), joue un rôle relatif, car les propriétés essentielles sont invariantes par changement de numéraire : autofinancement, absence d'arbitrage... Nous étudierons les conséquences en termes de primes de risque et de taux d'intérêt
- ⇒ Nous développons une analyse systématique de l'évaluation par probabilité risque-neutre et ses transformations par changement de numéraire

### 5.2 Portefeuilles et autofinancement

#### 5.2.1 Le cadre

##### Les hypothèses de marché

Les hypothèses concernant les marchés sont les mêmes que précédemment, c'est à dire que nous supposons que les marchés sont sans friction

- il n'y a pas de coûts de transaction pour la vente ou l'achat des titres.
- Les ventes à découvert illimité sont acceptées et les actifs sont indéfiniment fractionnables.
- Les titres ne paient pas de dividendes, sauf mention contraire

- A tout instant, il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché.

**Remarque 5.2.1** Cette dernière hypothèse implique en particulier, comme L.Bachelier le soulignait dans son article de 1900, que dans un marché financier les croyances des différents participants dans les mouvements des titres risqués ne peuvent être les mêmes :

par exemple, si un investisseur pense que le prix d'une action doit sûrement monter, il va chercher à acheter des options d'achat. Mais ces options doivent être vendues par un autre investisseur qui ne doit pas avoir les mêmes anticipations, sinon il n'accepterait pas de vendre.

L.Bachelier en conclut que le jeu financier est équitable.

## Le modèle d'incertain

Précisons la structure aléatoire qui affecte la dynamique des titres. L'espace de probabilité de référence est constitué de :

- l'ensemble  $\Omega$ , qui représente tous les états du monde.
- la tribu  $\mathcal{F}$ , qui représente la structure d'information globale disponible sur le marché.
- une filtration croissante, (continue à droite si nécessaire),  $(\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T)$ , qui décrit l'information disponible à tous les agents du marché à la date  $t$ . (Le caractère croissant de cette filtration traduit le fait que le marché n'oublie rien.)
- la classe  $\mathcal{N}$  de tous les événements de  $\mathcal{F}$  que le marché considère comme impossibles.
- une probabilité  $\mathbb{P}$ , qui donne les probabilités *a priori* des événements considérés. C'est la probabilité historique ou objective.

**Remarque 5.2.2** Les événements impossibles du marché sont évidemment de probabilité nulle et donc nécessairement,

$$\forall N \in \mathcal{N}, \mathbb{P}(N) = 0.$$

Comme nous l'avons déjà vu, pour les problèmes de finance qui nous intéressent, l'identification exacte de  $\mathbb{P}$  n'est pas un objectif majeur, et ce point marque, entre autres, une des originalités de l'utilisation des modèles probabilistes en finance par rapport à la physique.

## Les actifs

Soit  $T_H$  (éventuellement infini) l'horizon de gestion du marché.

Nous supposons que  $(d+1)$  actifs, *les titres de base*  $S^0, S^1, S^2, \dots, S^d$ , sont négociés entre les dates 0 et  $T_H$ .  $S_t^i$  désigne le prix de l'actif  $i$  à la date  $t$  en Euros. Tous les processus de prix sont supposés **continus** en temps.

- L'actif  $S^0$  est souvent le cash, c'est à dire le produit financier qui décrit la valeur de 1 Euro, capitalisé au jour le jour à la banque. Il est alors considéré comme sans risque puisque son rendement  $r_t dt$  dans un intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est connu à la date  $t$  de l'opération.
- L'information disponible à la date  $t$  englobe la connaissance du mouvement des actifs entre 0 et  $t$  : les prix des titres sont donc adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , ( $S_t^i$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable).
- En général, nous supposons que les alea de l'économie  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont engendrés par un brownien  $(\widehat{W}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$   $k$ -dimensionnel, dont les composantes  $\widehat{W}_t^j$  sont des browniens réels indépendants.
- Les actifs risqués  $S^i$  ( $1 \leq i \leq d$ ) sont supposés être des fonctions aléatoires d'Itô satisfaisant :

$$dS_t^i = S_t^i [b_t^i dt + \sum_{j=1}^k \sigma_j^i(t) d\widehat{W}_t^j] \quad (5.2.1)$$

Nous supposons aussi que le titre sans risque  $S^0$  vérifie

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt \quad (5.2.2)$$

Nous désignons par

- $b_t$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$ , adapté, de composantes  $b_t^i$ ; c'est le *vecteur des taux de rendement* des titres de base.
- La *matrice des volatilités* des actifs est la matrice  $\sigma_t$  de dimension  $d \times k$ , adaptée, de terme général  $\sigma_j^i(t)$ .

Nous supposons en général que ces processus sont bornés. Cette même hypothèse est aussi souvent faite sur le processus  $(r_t)$ .

## 5.2.2 Portefeuille autofinçant

### Stratégie de portefeuille

Nous modélisons le comportement d'un investisseur, qui disposant d'un capital initial de  $x$  Euros, l'investit dans les actifs de base du marché. A la date  $t$ , son portefeuille se compose de  $\delta^i(t)$  parts de l'actif  $i$  ( $i=0, \dots, d$ ). Les parts peuvent être positives ou négatives suivant qu'elles correspondent à un achat ou à une vente.

Une **stratégie de portefeuille** est la donnée des processus  $(\delta^i(t)_{i=0}^d)$ , représentant les quantités investies dans chacun des titres. Nous définissons pour commencer les stratégies simples, pour lesquelles la composition du portefeuille ne change qu'à un nombre fini de dates appelées *dates de trading*.

En temps discret, une stratégie quelconque est une stratégie simple; dans le cas général, ce sont les stratégies qui permettent de faire la transition entre le discret et le continu.

**Définition 5.2.1** Une stratégie simple de portefeuille écrite sur les titres de base est la donnée d'un ensemble fini de dates de trading :

$$\Theta = \{(t_i)_{i=0}^n; 0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = T\} \quad (5.2.3)$$

et de  $d+1$  processus  $(\delta^i(t)_{i=0}^d)$  qui donnent la répartition des titres dans le portefeuille au cours du temps :

$$\delta^i(t) = n_0^i \mathbf{1}_{[0, t_1]}(t) + \dots + n_k^i \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t) + \dots + n_{N-1}^i \mathbf{1}_{]t_{N-1}, t_N]}(t) \quad (5.2.4)$$

où les variables  $\delta_k^i$  sont  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurables.

La valeur financière (liquidative) du portefeuille  $\delta$  est notée  $V_t(\delta)$ . A la date  $t$ , elle vaut :

$$V_t(\delta) = \langle \delta(t), S_t \rangle = \sum_{i=0}^d \delta^i(t) S_t^i \quad (5.2.5)$$

**Remarque 5.2.3** Pour tout  $t$  de l'intervalle  $]t_k, t_{k+1}]$ ,  $\delta^i(t) = \delta^i(t_{k+1}) = n^i(k)$ ; la part investie dans l'actif  $i$  est donc est  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable, c'est à dire ne dépend que des informations disponibles à la date de négociation précédente. On dit que le processus  $\delta^i(t)$  est **prévisible**. Le processus  $(V_t(\delta))$  est adapté. En temps continu, comme les prix des actifs sont continus par hypothèse, et que les stratégies simples de portefeuille sont des processus continus à gauche, la valeur financière d'un portefeuille simple est continue à gauche.

## Autofinancement

Entre les dates  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , un investisseur qui suit la stratégie  $\delta$  place  $n_k^i$  unités dans l'actif  $S^i$ . Juste avant une renégociation, à la date  $t_{k+1}$ , la valeur du portefeuille vaut :  $\langle n_k, S_{t_{k+1}} \rangle$ . A l'instant  $t_{k+1}$ , l'investisseur forme un nouveau portefeuille, c'est à dire une répartition différente des poids des différents actifs, à partir des informations disponibles à la date  $t_{k+1}$ . Supposons qu'aucune somme n'est investie (ou desinvestie) de manière exogène à l'instant  $t_{k+1}$  ; la condition d'autofinancement se traduit par :

$$\langle n_k, S_{t_{k+1}} \rangle = \langle n_{k+1}, S_{t_{k+1}} \rangle \quad (5.2.6)$$

soit encore en mettant en évidence la variation des actifs entre les deux dates de renégociation

$$V_{t_k}(\delta) + \langle n_k, S_{t_{k+1}} - S_{t_k} \rangle = \langle n_{k+1}, S_{t_{k+1}} \rangle = V_{t_{k+1}}(\delta) \quad (5.2.7)$$

Les variations d'un portefeuille autofinçant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs.

**Remarque 5.2.4** La condition d'autofinancement implique que la valeur du portefeuille n'a pas de sauts aux instants de renégociation. Dans un modèle en temps continu, cela entraîne que c'est un processus continu. Notons d'ailleurs que la condition d'autofinancement est une condition nécessaire et suffisante pour la continuité du processus de valeur d'un portefeuille.

Si la condition (5.2.7) n'est pas vérifiée, l'écart entre  $V_{t_{k+1}}(\delta) - V_{t_k}(\delta)$  et  $\langle n_k, S_{t_{k+1}} - S_{t_k} \rangle$  pourrait être utilisé pour la consommation ou le refinancement entre les dates  $t_k$  et  $t_{k+1}$ .

Ces propriétés sont synthétisées ci-dessous.

**Définition 5.2.2** a) Soit  $(\Theta, \delta)$  une stratégie simple de trading autofinçante. La valeur du portefeuille s'écrit alors comme l'intégrale stochastique par rapport aux prix des actifs de base ( $S^i$ ) de la stratégie simple de trading  $\delta$ . Elle est caractérisée<sup>1</sup> par :

$$\begin{cases} V_t(\delta) = \langle \delta(t), S_t \rangle \\ V_t(\delta) - V_0(\delta) = \int_0^t \langle \delta(u), dS_u \rangle \end{cases} \quad (5.2.9)$$

### b) Extension

Si nous supposons maintenant que les prix des actifs de base sont des processus d'Itô et que  $\delta$  est un processus vectoriel adapté, pour lequel l'intégrale stochastique (vectorielle) par rapport aux actifs de base est bien définie, le processus  $\delta$  est une stratégie de portefeuille autofinçante, de valeur  $V_t(\delta)$  si la condition (5.2.9) est satisfaite.

### Le cas des processus d'Itô

Nous avons une description plus précise de la valeur de la dynamique d'un portefeuille autofinçant en termes de vecteur de rendement et de matrice de volatilité.

$$\begin{aligned} dV_t(\delta) &= \sum_{i=0}^d \delta^i(t) dS_t^i \\ &= \delta^0(t) S_t^0 r_t dt + \sum_{i=1}^d \delta^i(t) S_t^i b_t^i dt + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^k \delta^i(t) S_t^i \sigma_j^i(t) d\widehat{W}_t^j \\ &= \delta^0(t) S_t^0 r_t dt + \langle (\delta S)_t, b_t \rangle dt + \langle (\delta S)_t, \sigma_t d\widehat{W}_t \rangle \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Si le portefeuille n'est pas autofinçant, en suivant Föllmer-Schweitzer ([Fo,Sc] 1990), on appelle processus de coût ,

$$C_t(\delta) = V_t(\delta) - V_0(\delta) - \int_0^t \delta(u) \cdot dS(u) \quad (5.2.8)$$

Il reste à éliminer  $\delta^0(t)$  en utilisant l'autre équation d'autofinancement pour en déduire que la valeur du portefeuille est solution de l'équation suivante :

$$dV_t = V_t r_t dt + \langle (\delta S)_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle dt + \langle (\delta S)_t, \sigma_t d\widehat{W}_t \rangle \quad (5.2.10)$$

où  $(\delta S)_t = \pi_t$  désigne le vecteur de composantes  $(\delta^i(t) S_t^i)_{i=1}^d$ , soit le vecteur qui décrit les montants investis dans les titres risqués.

$\mathbf{1}$  est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

Réciproquement, un processus  $V_t$ , solution de l'équation (5.2.10) est la valeur financière d'un portefeuille autofinçant, correspondant à un investissement de  $(\delta^i(t))_{i=1}^d$  dans les actifs risqués et de  $\frac{1}{S_t^0}(V_t(\delta) - \sum_{i=1}^d \delta^i(t) S_t^i)$  dans le titre sans risque.

**Remarque 5.2.5** L'équation différentielle linéaire (5.2.10) ayant une unique solution, la connaissance de l'investissement initial et de la quantité investie dans les actifs risqués suffit à caractériser complètement la valeur d'un portefeuille autofinçant.

### Exemples de stratégies de portefeuille

#### ◇ STRATÉGIE STATIQUE

Le gestionnaire investit une partie de sa richesse initiale en actions, et place le reste à la banque et ne renégocie pas son portefeuille avant l'horizon de gestion  $T$ . En 0, sa richesse  $x$  est investie dans  $n_0$  actions, de telle sorte que  $x = n_0 S_0 + (x - n_0 S_0)$ . A toute date la valeur liquidative du portefeuille est  $V_t = n_0 S_t + (x - n_0 S_0) \exp(\int_0^t r_s ds)$  soit

$$dV_t = n_0 dS_t + (x - n_0 S_0) e^{\int_0^t r_s ds} r_t dt = n_0 dS_t + (V_t - n_0 S_t) r_t dt$$

équation équivalente à l'équation d'autofinancement (??).

Il aurait aussi pu placer la somme qu'il dépose à la banque à l'horizon de gestion. Dans ce cas, il aurait touché à la fin, pour 1 Euro investi,  $B(0, T)^{-1}$ , qui diffère, lorsque les taux sont aléatoires de  $\exp(\int_0^T r_s ds)$ . La valeur du portefeuille à la date  $t$  est alors  $V_t = n_0 S_t + (x - n_0 S_0) B(0, T)^{-1} B(t, T)$ .

#### ◇ STRATÉGIE À TEMPS FIXE PROPORTIONNELLE

Le gestionnaire décide, quelles que soient les conditions de marché, de maintenir le montant investi dans le titre risqué à 50% de la valeur du portefeuille, c'est à dire que  $\delta_t S_t = \frac{1}{2} V_t$ . La valeur du portefeuille est alors la solution d'une équation différentielle stochastique

$$dV_t = r_t V_t dt + \frac{1}{2} V_t \left( \frac{dS_t}{S_t} - r_t dt \right) \quad (5.2.11)$$

dont la solution est, si  $\frac{dS_t}{S_t} = b_t dt + \sigma_t d\widehat{W}_t$

$$V_t = x e^{\int_0^t (\frac{1}{2}(b_s + r_s) ds)} e^{\int_0^t \frac{1}{2} \sigma_s dW_s - \frac{1}{8} \int_0^t \sigma_s^2 ds} \quad (5.2.12)$$

#### ◇ STRATÉGIES À TEMPS VARIABLE

Le gestionnaire décide de renégocier dès que le cours de l'action a varié de plus de 2%. Il peut adopter la même règle concernant les quantités que précédemment. Les dates de renégociation sont donc des temps aléatoires, en fait des temps d'arrêt qui représentent les temps de passage successifs du titre risqué au-dessus et en dessous des barrières <sup>2</sup>proportionnelles à 2%.

---

<sup>2</sup>Une bonne expérience numérique est de simuler une trajectoire de cours et de mettre en place des stratégies de portefeuille auto-finçante

Dans la pratique des marchés, il est important de distinguer un ordre d'achat d'un ordre de vente. En effet, dans l'ordre de vente le prix est fixé dès que l'ordre est passé, alors que dans l'ordre d'achat le prix va dépendre des prix proposés par les autres vendeurs, c'est à dire des conditions du marché.

**Remarque 5.2.6** Les portefeuilles peuvent intégrer des produits dérivés, si ces derniers sont très liquides et facilement échangeables sur le marché, notamment aux dates de renégociation. Dans ce cas l'équation d'autofinancement devient, si  $(C_t^i)_{i=1}^d$  désigne le prix de ces produits dérivés et  $\delta_t^i$  le nombre de ces contrats,

$$\begin{aligned} dV_t &= \delta_t dS_t + \sum_{i=1}^d \delta_t^i dC_t^i + (V_t - \delta_t S_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i C_t^i - \delta_t S_t) r_t dt \\ &= r_t V_t dt + \delta_t (dS_t - r_t S_t dt) + \sum_{i=1}^d \delta_t^i (dC_t^i - r_t C_t^i dt) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

## 5.3 Absence d'Opportunités d'arbitrage et rendement des titres

### 5.3.1 Arbitrage

Rappelons qu'une opportunité d'arbitrage est une stratégie de portefeuille autofinancante dont la valeur  $V_t(\delta)$  vérifie :

- $V_0(\delta) = 0$
- $V_T(\delta) \geq 0$  et  $\{V_T(\delta) > 0\} \notin \mathcal{N}$

Dans les modèles continus, des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sont nécessaires pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage, car il existe des intégrales stochastiques qui sont des arbitrages.

**Exemples :**

- ◇ Considérons un Brownien  $W$  issu de 0 et  $T_x$  le premier instant où il touche  $x > 0$ . La stratégie  $\mathbf{1}_{[0, T_x]}$  est une opportunité d'arbitrage (pour un horizon infini) puisque, partant d'une valeur nulle, elle atteint une richesse positive  $W_{T_x} = x > 0$ .

- ◇ **Exemple 2 : Stratégie suicide** ([Ha.Pl])

Pour simplifier, nous supposons que dans un marché ayant deux titres de base, le titre sans risque est constant et égal à 1, ( $r=0$ ) et que le titre risqué vaut 1 aujourd'hui.

Pour une constante  $b > 0$  arbitraire, on définit la stratégie

$$\delta_t^0 = (1+b)\mathbf{1}_{[0, \tau(b)]}(t) \quad \delta_t^1 = (-b)\mathbf{1}_{[0, \tau(b)]}(t)$$

où  $\tau(b) = \inf\{t; S_t = 1+b^{-1}\} = \inf\{t; V_t(\phi) = 0\}$

L'investisseur a donc une richesse de  $V_t(\phi) = 1+b-bS_t$  avant d'être ruiné, ce qui intervient avant le temps 1 qui est l'horizon avec une probabilité de

$$p(b) = \mathbb{P}(\tau(b) < 1)$$

Il est clair que  $p(b)$  est une fonction croissante de zéro à 1 quand  $b$  varie de 0 à l'infini. En vendant une grande quantité d'actions, l'investisseur peut rendre sa ruine presque certaine, mais s'il survit, il aura certainement gagné beaucoup d'argent.

Mais la chance de survie peut être complètement éliminée par la stratégie suivante : sur l'intervalle de temps  $[0, \frac{1}{2}]$ , l'investisseur suit la stratégie précédente avec une probabilité notée  $p$  de ruine. S'il n'est pas ruiné, nous ajustons le montant du stock à un niveau  $b_1$ , et donc le montant en actif non risqué à un niveau de  $1+b+(b_1-b)S_{1/2}$ , de telle sorte que la probabilité conditionnelle de ruine durant  $[1/2, 3/4]$  soit encore

égale à  $p$ . Ainsi de suite, si à un instant  $t_n = 1 - (1/2)^n$  nous avons toujours une richesse positive, nous rajustons le niveau d'actif risqué, de telle sorte que la probabilité conditionnelle de ruine entre  $(t_n, t_{n+1})$  soit toujours  $p$ . La probabilité de survie après  $t_n$  est égal à  $(1-p)^n$  qui s'annule quand  $n$  tend vers l'infini et donc  $t_n$  vers 1.

Le portefeuille associé à cette stratégie a une valeur positive sur  $[0, 1[$ , mais nulle sûrement en 1. Si maintenant, nous empruntons  $1F$  pour acheter l'action, et menons la stratégie que nous venons de décrire. A la date 1, notre portefeuille vaut  $-1F$  de manière sûre. C'est une opportunité d'arbitrage.

Nous serons amenés à nous limiter à des stratégies de trading vérifiant de bonnes propriétés d'intégrabilité, que nous préciserons dans la suite. Nous appellerons **admissibles** de telles stratégies.

L'hypothèse fondamentale est donc

*Il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage entre des stratégies de portefeuille admissibles. On dit encore que le marché est viable.*

### Exemples de contraintes d'admissibilité

⇒ Nous supposons que l'ensemble  $\mathcal{A}$  des stratégies admissibles est un espace vectoriel, qui contient les stratégies constantes, et qui est stable par recollement au sens où deux stratégies admissibles peuvent être recollées sur un ensemble  $A$  de  $\mathcal{F}_t$  en une stratégie admissible, càd que si  $\delta$  et  $\psi$  sont deux stratégies admissibles, la stratégie qui vaut  $\delta$  sur l'ensemble  $A$  et  $\delta(s)$ ,  $s \leq t$  et  $\psi(s)$ ,  $s > t$  sur  $A^c$  est admissible.

⇒ Les hypothèses doivent exclure de les stratégies décrites ci-dessus ; il faut donc que l'ensemble  $\mathcal{A}$  des stratégies de portefeuille admissibles soit assez riche pour permettre l'évaluation de nombreux produits dérivés, et pas trop gros pour éviter les opportunités d'arbitrage.

Des hypothèses de type carré intégrable, sur la valeur du portefeuille et les martingales associées sont en général suffisantes. De plus, il doit contenir les stratégies constantes, et autoriser des opérations de recollement.

⇒ **la matrice de volatilité bornée, mais pas nécessairement inversible**

Posons

$$\mathcal{A} = \{ \delta ; \mathbb{E} \int_0^T (\delta_t^0 S_t^0)^2 + |(\delta S)_t|^2 dt < +\infty, \}$$

L'hypothèse que **les vecteurs constants** appartiennent à  $\mathcal{A}$  entraîne que le prix  $S_t^i$  de chaque titre de base est de carré intégrable sur  $[0, T]$ , à volatilité bornée.

Dans ce cas, tous les processus prévisibles et bornés appartiennent à  $\mathcal{A}$ .

La condition " $b_t$ ,  $r_t$  et  $\sigma_t$  bornés" suffit à entraîner que les conditions précédentes sur les actifs sont bien satisfaites. Nous l'introduirons souvent dans la suite.

### 5.3.2 Contraintes sur la dynamique des titres

En absence d'opportunités d'arbitrage, les rendements des titres du marché ne sont pas quelconques. Ils traduisent l'idée que plus un titre est risqué, plus son rendement doit être élevé, pour justifier qu'il soit conservé dans les stratégies de portefeuille.

Avant d'établir de telles propriétés, nous dégageons quelques propriétés déduites de l'absence d'arbitrage sur les valeurs des portefeuilles autofinancants

**Proposition 5.3.1** *Supposons le marché viable, sans arbitrage.*

- la valeur présente d'un portefeuille admissible ayant des flux positifs dans le futur est positive à toute date intermédiaire.
- deux portefeuilles admissibles qui ont la même valeur à la date  $T$  p.s., ont la même valeur financière à toute date intermédiaire  $t$  p.s.

PREUVE : Montrons ces propriétés très utiles dans la pratique

$\Rightarrow$  Soit  $\delta$  une stratégie admissible telle que  $V_T(\delta) \geq 0$  p.s.

Désignons par  $A$  l'ensemble  $A = \{V_0(\delta) < 0\}$

Soit  $\lambda$  la stratégie autofinancante  $\in \mathcal{A}$ , correspondant à un investissement initial de  $V_0(\delta)$  dans l'actif  $S^0$ . S'il n'y a pas de transaction entre 0 et  $T$ , en  $T$  la valeur de cette stratégie est  $V_T(\lambda) = V_0(\delta) \frac{S_T^0}{S_0^0} \leq 0$

La stratégie  $\Lambda$  qui vaut 0 sur  $A^c$  et  $\delta - \lambda$  sur  $A$  est admissible ; c'est une opportunité d'arbitrage si  $A$  n'est pas négligeable ( $A \notin \mathcal{N}$ ) car :

$$\begin{aligned} V_0(\Lambda) &= 0 \\ V_T(\Lambda) &= \mathbf{1}_A [V_T(\delta) - V_T(\lambda)] \\ V_T(\delta) - V_T(\lambda) &> 0 \quad \text{sur } A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  On montre de même que si  $V_T(\delta) \leq 0$  p.s. alors  $V_0(\delta) \leq 0$  p.s. Cette propriété entraîne bien sûr l'égalité de la valeur présente de deux portefeuilles ayant mêmes flux terminaux, puisque leur différence est une stratégie de portefeuille admissible.

Le raisonnement ci-dessus s'adapte sans difficulté à toute date intermédiaire  $t$ .

## Rendement des titres et Primes de risque

La conséquence fondamentale de l'absence d'opportunité d'arbitrage est la contrainte de rendement qui porte sur les prix de marchés des titres de base ou des portefeuilles.

**Théorème 5.3.2** Soit un marché d'Itô viable.

i) Deux portefeuilles admissibles et sans risque ont le même rendement instantané  $r_t$ .

ii) Il existe un vecteur aléatoire adapté  $\lambda_t$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ , appelé **prix du marché du risque** ou **primes de risque** tel que :

$$dS_t^i = S_t^i [r_t dt + \sum_{j=1}^k \sigma_j^i(t) (d\widehat{W}_t^j + \lambda_t^j dt)] \quad (5.3.1)$$

Le rendement local espéré  $b_t$  des titres risqués vérifie :

$$b_t = r_t \mathbf{1} + \sigma_t \lambda_t \quad d\mathbb{P} \times dt \text{ p.s.}$$

Un processus  $V_t$  est la valeur financière d'une stratégie  $\delta$  admissible si et seulement si il satisfait à :

$$dV_t = V_t r_t dt + \langle (\delta S)_t, \sigma_t (d\widehat{W}_t + \lambda_t dt) \rangle \quad (5.3.2)$$

et aux conditions d'intégrabilité  $\mathbb{E} \int_0^T V_t^2 dt + |(\delta S)_t|^2 dt < +\infty$

**Remarque 5.3.1** Il est en général accepté que les investisseurs ont de l'aversion pour le risque. En d'autres termes, il faut que le rendement des titres risqués soit supérieur à celui des titres sans risque, pour qu'ils soient conservés. Les prix d'équilibre des produits risqués font apparaître une prime de risque, qui est l'écart entre le rendement instantané  $b_t$  de l'actif et le rendement du produit sans risque  $r_t$ . Par contre, dans une économie neutre pour le risque, tous les titres ont le même rendement égal au taux d'intérêt du marché.



PREUVE : Nous commençons par montrer la première propriété.

⇒ Soit  $\delta$  une stratégie admissible et sans risque, de valeur initiale  $V_0$ . La stratégie  $V_t - V_0 S_t^0 = V_t(\tilde{\delta})$  est autofinancante, admissible, de valeur initiale nulle, et sans risque, c'est à dire à variation finie.

La stratégie  $\tilde{\delta}$  définie par  $\tilde{\delta}_t = \mathbf{1}_{\{V_t(\tilde{\delta}) > 0\}} \tilde{\delta}_t$  est autofinancante et finance  $V_T(\tilde{\delta})^+$  puisque, d'après la formule de différentiation composée pour les fonctions à variation finie

$$dV_t(\tilde{\delta})^+ = \mathbf{1}_{\{V_t(\tilde{\delta}) > 0\}} dV_t(\tilde{\delta}) = \mathbf{1}_{\{V_t(\tilde{\delta}) > 0\}} \langle \tilde{\delta}_t, dS_t \rangle = \langle \tilde{\delta}_t, dS_t \rangle$$

D'autre part  $V_t(\tilde{\delta})^+ = \mathbf{1}_{\{V_t(\tilde{\delta}) > 0\}} \langle \tilde{\delta}_t, S_t \rangle = \langle \tilde{\delta}_t, S_t \rangle$

C'est donc une opportunité d'arbitrage si  $\mathbb{P}(V_T(\delta)^+ \neq 0) > 0$ .

Le cas négatif est traité de la même façon.

Ainsi, p.s.  $V_T(\delta) = 0$  et cette propriété est valable pour tout  $T$ .

⇒ Montrons la propriété des rendements. Si  $\sigma_t$  est inversible, le résultat est évident puisqu'alors il existe un seul vecteur  $\lambda_t$  tel que :  $b_t = r_t + \sigma_t \lambda_t$ .

Sinon, construisons à partir d'une richesses initiale nulle, une stratégie  $\delta$ , adaptée et bornée, telle que pour tout  $t$ ,  $(\delta S)_t$  soit dans le noyau de  $\sigma_t^* d\mathbb{P} \times dt$  p.s. La valeur du portefeuille  $V_t(\delta)$  autofinancant, associé à cette stratégie satisfait

$$dV_t(\delta) = r_t V_t(\delta) dt + \langle (\delta S)_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle dt$$

Il s'agit d'un portefeuille admissible<sup>3</sup>, p.s. sans risque, donc de rendement  $r_t$ , par absence d'opportunité d'arbitrage. Mais ceci entraîne que :

$$\langle (\delta S)_t, b_t - r_t \mathbf{1} \rangle \equiv 0 \quad d\mathbb{P} \times dt \text{ p.s.}$$

Comme cette propriété est vraie pour tous les  $(\delta S)_t$ ,  $(\delta(t))$  borné) dans le noyau de  $\sigma_t^*$ ,  $b_t - r_t \mathbf{1}$  appartient nécessairement à l'image de  $\sigma_t d\mathbb{P} \times dt$  p.s. L'existence d'un vecteur  $\lambda_t$  vérifiant de bonnes propriétés de mesurabilité est la conséquence d'un théorème "dit" de sélection (assez complexe à établir en toute généralité). Il existe donc un vecteur  $\lambda_t$  adapté tel que

$$b_t = r_t \mathbf{1} + \sigma_t \lambda_t \quad d\mathbb{P} \times dt \text{ p.s.}$$

⇒ Revenons à l'étude d'un portefeuille autofinancant et admissible. Sa valeur financière est complètement caractérisée par l'équation (5.2.10). Il suffit de remplacer le vecteur  $b_t$  par son expression en fonction de  $r_t$  et de la prime de risque pour avoir la formulation équivalente de la proposition.

Les conditions d'intégrabilité expriment que la stratégie  $\delta$  est admissible.

## 5.4 Numéraire

### 5.4.1 Arbitrage et numéraire

Le système de prix utilisé jusqu'à maintenant fait référence à un système monétaire donné : par exemple, tous les cours des actifs, la valeur financière du portefeuille sont exprimés en Euros de la date considérée. Il y a un certain arbitraire dans le choix de cette référence monétaire, et il est très intuitif qu'une notion comme celle de portefeuille autofinancant doit être invariante par changement de numéraire.

<sup>3</sup>En fait, il est possible que la solution de cette équation soit seulement localement de carré intégrable. Introduisons le temps d'arrêt  $T_n$ , qui est le premier instant où  $|V_t|$  dépasse  $n$ . La stratégie  $\delta \mathbf{1}_{[0, T_n]}$  est admissible car  $\delta$  et  $V_{\cdot \wedge T_n}$  sont bornés.

**Définition 5.4.1** *Un numéraire est une référence monétaire dont la valeur en Euros est une fonction aléatoire d'Itô, adaptée, strictement positive, continue.*

**Proposition 5.4.1** (i) *La notion de stratégie simple autofinancante est invariante par changement de numéraire.*

(ii) *une stratégie de portefeuille qui est un arbitrage dans un numéraire donné est un arbitrage dans tout numéraire.*

(iii) *Si un des actifs de référence  $S^0$  est choisi comme numéraire, toute intégrale stochastique  $\frac{x}{S_0^0} + \int_0^t < \delta(u), d(\frac{S_u^i}{S_u^0}) >$  de processus simple  $\delta$  est la valeur financière d'un portefeuille autofinancant. Cette propriété s'étend aux stratégies générales dans le cas des processus d'Itô.*

PREUVE : Soit  $X_t$  la valeur en Euros d'un numéraire. Le prix à la date  $t$  de l'actif  $i$  exprimé dans ce numéraire est de  $\frac{S_t^i}{X_t}$  et la valeur financière d'une stratégie de portefeuille  $\frac{V_t(\delta)}{X_t}$ .

$\Rightarrow$  Si  $\delta$  est une stratégie simple, qui satisfait l'équation d'autofinancement,  $< n_k, S_{t_{k+1}} > = < n_{k+1}, S_{t_{k+1}} >$  dans le numéraire initial,  $\delta$  satisfait à la même équation dans le nouveau numéraire :

$$< n_k, \frac{S_{t_{k+1}}}{X_{t_{k+1}}} > = < n_{k+1}, \frac{S_{t_{k+1}}}{X_{t_{k+1}}} >$$

$\Rightarrow$  Pour des stratégies renégociées en temps continu, il est nécessaire de développer un calcul un peu plus complexe, que nous traiterons ci-dessous.

$\Rightarrow$  La propriété sur l'arbitrage découle simplement de cette extension.

$\Rightarrow$  Pour montrer le dernier point de la proposition, supposons par exemple que  $S^0$  soit choisi comme numéraire de référence. Dans ce nouveau système monétaire, le prix du titre 0 est constant et donc de variation nulle. L'intégrale stochastique  $I_t^0(\delta)$  définie par :

$$I_t^0(\delta) = \int_0^t < \delta(u), d(\frac{S_u^i}{S_u^0}) > = \int_0^t \sum_{i=0}^d \delta^i(u) d(\frac{S_u^i}{S_u^0})$$

ne met pas en jeu cet actif. Il est possible de construire un portefeuille autofinancant de valeur  $\frac{x}{S_0^0} + I_t^0(\delta)$ , en investissant à l'instant  $t$  dans l'actif 0 la quantité  $\delta^0(t)$  donnée par :

$$\delta^0(t) = \frac{x}{S_0^0} + I_t^0(\delta) - \sum_{i=1}^d \delta^i(t) (\frac{S_t^i}{S_t^0})$$

**Lemme 5.4.2** *Soit  $X$  une f.a. d'Itô strictement positive.*

$$\frac{dX_t^{-1}}{X_t^{-1}} = -\frac{dX_t}{X_t} + cov_t(\frac{dX_t}{X_t}, \frac{dX_t}{X_t}) \quad (5.4.1)$$

Pour toute f.a. d'Itô  $S$ ,  $S^X = \frac{S}{X}$  est une f.a. d'Itô telle que

$$\frac{dS_t^X}{S_t^X} = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{dX_t}{X_t} - cov_t(\frac{dS_t}{S_t} - \frac{dX_t}{X_t}, \frac{dX_t}{X_t}) \quad (5.4.2)$$

Dans le cas d'un portefeuille autofinancant,  $V_t(\delta) = < \delta_t, S_t >$ ,  $dV_t(\delta) = < \delta_t, dS_t >$ , nous avons que

$$\frac{V_t(\delta)}{X_t} = < \delta_t, \frac{S_t}{X_t} >, \quad d\frac{V_t(\delta)}{X_t} = < \delta_t, d\frac{S_t}{X_t} > \quad (5.4.3)$$

PREUVE : C'est une simple conséquence de la formule d'Itô, appliquée aux rendements.

⇒ D'après la formule d'Itô, nous avons en utilisant les covariances instantanées des rendements,

$$\frac{dX_t^{-1}}{X_t^{-1}} = -\frac{dX_t}{X_t} + \text{cov}_t\left(\frac{dX_t}{X_t}, \frac{dX_t}{X_t}\right)$$

et que

$$\begin{aligned} \frac{dS_t^X}{S_t^X} &= \frac{dS_t}{S_t} + \frac{dX_t^{-1}}{X_t^{-1}} + \text{cov}_t\left(\frac{dS_t}{S_t}, \frac{dX_t^{-1}}{X_t^{-1}}\right) \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{dX_t}{X_t} + \text{cov}_t\left(\frac{dX_t}{X_t}, \frac{dX_t}{X_t}\right) - \text{cov}_t\left(\frac{dS_t}{S_t}, \frac{dX_t}{X_t}\right) \end{aligned}$$

Ce n'est autre que la formule de l'énoncé.

⇒ Cette dernière formule s'écrit sous une forme moins conviviale, mais mieux adaptée à l'étude de l'autofinancement

$$dS_t^X = \frac{1}{X_t}(dS_t - \text{cov}_t(dS_t, \frac{dX_t}{X_t}) - \frac{S_t}{X_t^2}(dX_t - \text{cov}_t(dX_t, \frac{dX_t}{X_t})))$$

Dans le cas d'un portefeuille autofinçant, où  $V_t(\delta) = \langle \delta_t, S_t \rangle$ ,  $dV_t(\delta) = \langle \delta_t, dS_t \rangle$ ,

$$d\frac{V_t(\delta)}{X_t} = \frac{1}{X_t}[\langle \delta_t, dS_t \rangle - \langle \delta_t, \text{cov}_t(dS_t, \frac{dX_t}{X_t}) \rangle - \frac{V_t(\delta)}{X_t^2}[(dX_t - \text{cov}_t(dX_t, \frac{dX_t}{X_t}))]] = \langle \delta_t, dS_t^X \rangle$$

## 5.4.2 Primes de risque et changement de numéraire

Soit  $(X_t)$  un numéraire de dynamique

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t dt + \gamma_t^X d\widehat{W}_t + \lambda_t dt \quad (5.4.4)$$

Nous supposons que le  $X$ -vecteur de volatilité  $\gamma_t^X$  appartient à l'image de  $(\sigma_t)^*$ , c'est à dire qu'il existe un vecteur  $\pi_t^X$  tel que  $\gamma_t^X = (\sigma_t)^* \pi_t^X$ . Nous faisons référence au marché où les prix sont donnés dans le numéraire  $X$ , comme au  $X$ -marché financier et désignons par  $S_t^X = \frac{S_t}{X_t}$  le nouveau processus de prix. Nous caractérisons les paramètres (taux court, primes de risque) du  $X$ -marché.

**Théorème 5.4.1** *Supposons le marché initial viable.*

a) Les paramètres du  $X$ -marché sont :

$$\lambda_t^X = \lambda_t - \gamma_t^X, \quad r_t^X = \mu_t^X \quad (5.4.5)$$

b) Soit  $(Z_t)$  un processus de prix admissible, avec vecteur de volatilité  $\sigma_t^Z$

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = r_t dt + \sigma_t^Z d\widehat{W}_t + \lambda_t dt \quad (5.4.6)$$

Le vecteur de volatilité de  $Z^X$  est donné par  $\sigma^{Z^X} = \sigma_t^Z - \gamma_t^X$ . et

$$\frac{dZ_t^X}{Z_t^X} = r_t^X dt + \sigma_t^Z d\widehat{W}_t + (\lambda_t - \gamma_t^X) dt \quad (5.4.7)$$

PREUVE : Par le lemme précédent,  $(Z_t^X)$  est une semimartingale d'Itô de décomposition

$$\frac{dZ_t^X}{Z_t^X} = \frac{dZ_t}{Z_t} - \frac{dX_t}{X_t} - \text{cov}_t\left(\frac{dZ_t}{Z_t} - \frac{dX_t}{X_t}, \frac{dX_t}{X_t}\right).$$

Substituant les paramètres de la décomposition d'Itô de  $(Z_t)$  et  $(X_t)$ , nous obtenons la décomposition explicite

$$\frac{dZ_t^X}{Z_t^X} = r_t^X dt + \langle \sigma_t^Z - \gamma_t^X, d\widehat{W}_t + (\lambda_t - \gamma_t^X) dt \rangle$$

La théorie de l'arbitrage conduit à interpréter le vecteur  $(\lambda_t - \gamma_t^X)$  comme le vecteur des primes de risque dans le nouveau marché, où le taux sans risque est  $r^X$ .

**Remarque 5.4.1** L'invariance par numéraire peut ne pas être complète, car les stratégies admissibles dans les deux marchés ne sont pas les mêmes. Duffie ([?, Duff]992) appelle *régulier*, les numéraires pour lesquels ces deux ensembles sont les mêmes. Dybvig et Huang en 1986 ([?, Dy.Hu], ou Karatzas et Shreve en 1987 ([?, Ka.Sh1], Delbaen, Schachermayer en 1995 ([?, DeSc] remplacent la condition de carré intégrable par une condition de minoration sur la valeur du portefeuille et retrouvent les mêmes conséquences de l'arbitrage. Toutefois, la condition de minoration n'étant pas symétrique, vendre un portefeuille admissible n'est pas nécessairement admissible.

Quand la borne inférieure est 0, l'invariance par numéraire est valable sans restriction et le point de vue est vraiment efficace pour tout ce qui concerne l'évaluation.

### 5.4.3 Le numéraire de marché

Parmi tous les numéraires possibles, l'un mérite une attention spéciale : le numéraire  $M$ , appelé *numéraire de marché*, en référence au portefeuille de marché de Markowitz.

Les prix exprimés dans ce numéraire n'ont aucune rénumération spécifique au cours du temps. Ce sont des bruits purs, sous la probabilité historique. Dans le  $M$ -marché, taux d'intérêt et primes de risque sont nuls. Le nouveau marché est dit **risque-neutre** pour la probabilité historique et les nouveaux prix des processus de base sont donc des martingales locales. Le théorème suivant rassemble les principales propriétés du  $M$ -marché. <sup>4</sup>.

**Théorème 5.4.2** Soit  $M$  le numéraire de marché, c'est à dire le processus de valeur initiale égale à 1 et de volatilité  $(\lambda_t)$ , le vecteur des primes de risque. <sup>5</sup>

$$\frac{dM_t}{M_t} = r_t dt + (\lambda_t)^*(d\widehat{W}_t + \lambda_t dt) = r_t dt + |\lambda_t|^2 dt + \lambda_t^* d\widehat{W}_t \quad (5.4.8)$$

◇ Dans le  $M$ -marché, les investisseurs sont risque-neutres.

<sup>4</sup>Le numéraire de marché a été introduit pour la première fois par Long 1990 ([?, Long], Conze-Viswanathan en 1991 ([?, CoVi], Bajeux and Portait en 1993 ([?, BaPo]. Voir aussi El Karoui, Geman, Rochet 1992 ([?, GeEKRo]

<sup>5</sup>Ce numéraire de marché correspond à un portefeuille construit de la manière suivante : nous supposons que  $\lambda_t$  est dans l'image de  $(\sigma_t^*)$ , c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $\alpha_t$  tel que  $\lambda_t = \sigma_t^* \alpha_t$ . Cette condition n'est pas restrictive : en effet, on peut toujours décomposer  $\lambda_t$  en  $(\lambda_t^1, \lambda_t^2)$  où  $\lambda_t^1$  appartient au noyau de  $\sigma_t$  et  $\lambda_t^2$  à l'espace orthogonal de  $\text{Ker}(\sigma_t) = \text{Image}(\sigma_t^*)$ . La prime de risque  $(\lambda_t)$  and  $(\lambda_t^2)$  ont le même impact sur la dynamique des prix car elles sont toujours reliées à la volatilité par  $\sigma_t \lambda_t = \sigma_t \lambda_t^2$ .

Considérons la stratégie autofinçante dont les poids dans les actifs risqués sont donnés par  $\phi_t^M = (\frac{\alpha_t^i}{S_t^i})_{i=1}^d$ , correspondant à un investissement initial de 1 F et supposons cette stratégie admissible. La valeur actuelle de cette stratégie admissible est notée  $M_t$  et appelée **numéraire de marché**.

◇ Le  $M$ -prix  $Z_t^M = \frac{Z_t}{M_t}$  d'un titre de base ou la  $M$ -valeur présente d'un portefeuille est une martingale locale.

Si  $M$  est un numéraire régulier, ce sont des vraies martingales

## ii) "Arbitrage Pricing Theory"

Dans le marché initial, le rendement espéré d'un titre  $Z$  est donné par le taux sans risque, plus la covariance infinitésimale entre le rendement risqué du titre et celui du numéraire de marché.

$$\mu_t^Z = r_t + \sigma_{Z,M}(t) \quad \text{où} \quad \sigma_{Z,M}(t)dt = \text{cov}_t\left(\frac{dM_t}{M_t}, \frac{dZ_t}{Z_t}\right) \quad (5.4.9)$$

Dans une formulation plus proche de l'APT, l'excès de rendement par rapport au cash est mesuré par le "beta" du rendement du portefeuille par rapport au numéraire de marché.

$$\mu_t^Z - r_t = \frac{\sigma_{Z,M}(t)}{\sigma_{M,M}(t)}(\mu_t^M - r_t)$$

PREUVE : La première partie du théorème n'est que le théorème précédent explicité dans le cas où la volatilité du numéraire est égale au vecteur des primes de risque.

⇒ Montrons la deuxième partie, qui fait le lien entre la théorie classique de la gestion de portefeuille et l'arbitrage en temps continu.

Par des arguments d'arbitrage, nous avons prouvé que  $\mu_t^Z - r_t = \langle \sigma_t^Z, \lambda_t \rangle$  p.s. où  $\sigma_t^Z$  est la volatilité de  $Z$  et  $\lambda_t$  le vecteur des primes de risque.

⇒ De plus,  $\lambda_t$  est aussi la volatilité du numéraire de marché. Ainsi,

$$\text{cov}_t\left(\frac{dM_t}{M_t}, \frac{dZ_t}{Z_t}\right) = \langle \sigma_t^Z, \lambda_t \rangle dt$$

$$\text{cov}_t\left(\frac{dM_t}{M_t}, \frac{dM_t}{M_t}\right) = |\lambda_t|^2 dt = (\mu_t^M - r_t)dt$$

Constantinides (1978) interprète ce résultat en notant qu'il suffit de se donner le numéraire de marché pour caractériser complètement le marché financier dans lequel les prix sont cotés.

## 5.5 Evaluation et couverture

### 5.5.1 Prix des produits dérivés atteignables

Dans cette partie, nous montrons comment **calculer** les prix des produits dérivés, dont on sait a priori qu'ils sont répliqués par un portefeuille admissible. En fait, nous séparons en deux étapes la question de l'évaluation et de la couverture.

- Nous commençons par montrer comment en toute généralité calculer le prix d'un produit dérivé répliquable.
- Dans une deuxième étape, nous essayons de caractériser l'ensemble des produits répliqués, développant ainsi la notion de marché complet.

Dans le chapitre 2, nous avons traité ces deux problèmes en même temps, en montrant que les pay-off de la forme  $h(S_T)$  sont répliqués dans le contexte de Black et Scholes et que leur prix est donné via la solution d'une EDP ou d'un noyau de pricing.

**Proposition 5.5.1** Soit  $\mathcal{B}_T = \{\Phi_T = V_T(\delta); \delta \text{ stratégie autofinancante admissible}\}$  l'ensemble des flux atteignables (ou simulables), de carré intégrable.

- En absence d'opportunité d'arbitrage, deux stratégies qui répliquent  $\Phi_T$  ont la même valeur à toute date intermédiaire, qui est le prix  $\text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T)$  de  $\Phi_T$ , qui vérifie

$$\begin{cases} d\text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T) = \text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T) r_t dt + \langle (\delta S)_t, \sigma_t(\widehat{dW}_t + \lambda_t dt) \rangle \\ \text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T) = \Phi_T \end{cases} \quad (5.5.1)$$

$\delta$  est un portefeuille de couverture du produit dérivé  $\Phi$ .

- En absence d'opportunité d'arbitrage, l'application qui à  $\Phi_T = V_T(\delta) \in \mathcal{B}_T$  associe son prix en  $t$ ,  $V_t(\delta) = \text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T)$  est une forme linéaire positive

PREUVE : Soit  $\Phi$  un flux duplicable par deux stratégies de portefeuille admissibles  $\delta$  et  $\psi$ . Par absence d'opportunité d'arbitrage, ces stratégies ont même valeur financière à toute date intermédiaire. La notion de prix est donc bien définie.

Le prix d'un actif atteignable par le portefeuille  $\delta$  vérifie l'équation (5.4.6).

**Remarque 5.5.1** Le prix d'un actif atteignable apparaît donc comme l'unique solution d'une équation différentielle stochastique linéaire dont on connaît la valeur terminale. Le portefeuille de couverture  $\delta$  est une inconnue du problème, au même titre que le prix  $\text{Opt}_t$ . Nous dirons que  $(\text{Opt}_t(\Phi_T), \delta_t)$  est solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde, introduite pour la première fois par Peng et Pardoux en 1987 ([?, PePa].

Nous reviendrons sur cette notion ultérieurement.

Lorsque taux court terme et primes de risque sont nulles, le prix d'un produit dérivé est aisément calculable, comme valeur moyenne du flux terminal. Cette double condition est satisfaite dans le M-marché d'où la règle d'évaluation :

**Proposition 5.5.2** *Evaluation dans le M-marché*

Supposons que le numéraire  $M$  soit suffisamment régulier pour que  $\frac{1}{M}$  appartient à  $\mathbb{H}^{2+\varepsilon}$  (C'est notamment le cas si  $r_t, \lambda_t, \sigma_t$  sont bornés).

Soit  $\Phi_T \in \mathcal{B}_T$ , le flux terminal d'un produit dérivé atteignable, de carré intégrable. Son prix  $\text{Opt}_t^M(\Phi_T)$  est donné par  $\text{Opt}_t^M(\Phi_T) = \mathbb{E}[\Phi_T^M | \mathcal{F}_t]$ , soit dans le numéraire habituel

$$\text{Opt}_t(\Phi) = \mathbb{E}[\Phi_T \frac{M_t}{M_T} | \mathcal{F}_t] \quad (5.5.2)$$

PREUVE : Le flux  $\Phi_T$  étant atteignable dans le marché initial par un portefeuille qui est de carré intégrable,  $\Phi_T^M$  est duplicable dans le M-marché par un portefeuille dont la valeur  $\text{Opt}_t^M(\Phi_T)$  est le quotient de deux processus de carré intégrable.

D'après la Proposition 5.5.1, c' est une martingale locale. Si nous supposons que  $\frac{1}{M}$  est processus de  $\mathbb{H}^{2+\varepsilon}$ ,  $\text{Opt}_t^M(\Phi_T)$  est un processus de  $\mathbb{H}^{1+\beta}$  pour un  $\beta > 0$  et donc une martingale uniformément intégrable. Ceci implique que

$$\text{Opt}_t^M(\Phi) = \mathbb{E}[\Phi_T^M | \mathcal{F}_t]$$

En terme de prix de l'ancien marché, nous obtenons la formule de l'énoncé.

**Remarque 5.5.2**  $\diamond$  Ainsi, dans le M-marché les prix des produits dérivés sont l'espérance de leur valeur terminale, et nous retrouvons une règle très naturelle pour fixer les prix, qui est la règle classique de l'assurance, où le prix est relié à "l'estimation " du flux qu'on aura à payer.

- ◇ Reste le problème de calculer les poids du portefeuille (indépendants du numéraire de référence) de couverture, quand on ne connaît que le flux terminal. Il n'y a pas de solution simple en temps continu sauf dans le cas markovien, où, comme nous l'avons vu dans la formule de Black et Scholes, ils s'expriment à partir du gradient de la fonction de prix, qui peut lui-même être exprimé comme l'espérance de la dérivée de la v.a.  $\Phi^M$  par rapport aux variables markoviennes.

Dans le cas général, le problème est de calculer les poids de la représentation d'une v.a.  $X_T$  (de carré intégrable) comme intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. Comme cette quantité est invariante par changement de numéraire, l'idée est de trouver un numéraire très concentré dans l'état  $(\omega, [t, t + dt])$  et d'utiliser le calcul des variations stochastiques pour arriver à conclure. Toute une activité de recherche récente dans ces directions a été développée afin de rendre plus efficace les méthodes de calcul par Monte Carlo de ces poids.

### 5.5.2 Marché complet

Nous abordons maintenant le deuxième point de la théorie, à savoir la caractérisation de l'ensemble des dérivés répliquables. Sous cette forme, le problème est délicat. Par contre, moyennant des hypothèses supplémentaires, il est possible de caractériser les marchés dits “**complets**”, dans lesquels tous les dérivés “raisonnables” en terme d'intégrabilité sont répliquables.

Le point de départ de ce genre de théorie abstraite est le résultat de probabilité qui dit que toute v.a.  $X_T$  appartenant à  $\mathbb{L}^1(\mathbb{P})$  et mesurable par rapport à la tribu engendrée par un mouvement brownien vectoriel  $\widehat{W}$  est représentable comme une intégrale stochastique :

$$X_T = \mathbb{E}(X_T) + \int_0^T \langle z_s, d\widehat{W}_s \rangle, \quad \int_0^T |z_s|^2 ds < \infty \quad (5.5.3)$$

Dans un marché financier, notamment dans le  $M$ -marché, le problème est de représenter les prix sur la base des variations des titres de base et non des mouvement browniens. Il est alors nécessaire de supposer qu'il y a suffisamment de titres pour couvrir tous les bruits.

#### Hypothèse

*La matrice déduite de la matrice de volatilité  $\sigma_t \sigma_t^*$  est inversible et bornée ainsi que la matrice inverse.*

**Proposition 5.5.3** *Considérons un marché financier sans taux d'intérêt, ni primes de risque (par exemple le  $M$ -marché). Toute v.a.  $\Phi_T$ , mesurable par rapport à la filtration du brownien  $\widehat{W}$ , appartenant à  $\mathbb{L}^{1+\varepsilon}$  est répliquable par un portefeuille, qui est une martingale uniformément intégrable*

$$\begin{aligned} \Phi_T &= \mathbb{E}(\Phi_T) + \int_0^T \langle \alpha_t, d\widehat{W}_t \rangle = \mathbb{E}(\Phi_T) + \int_0^T \langle \delta_t S_t, \frac{dS_t}{S_t} \rangle \\ \delta_t S_t &= (\sigma_t \sigma_t^*)^{-1} \sigma_t \alpha_t \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

**PREUVE :** Les hypothèses d'intégrabilité assurent que la martingale répliquante est uniformément intégrable.

Le seul problème restant est de passer des browniens aux portefeuilles. Mais avec les notations antérieures, le vecteur  $\delta_t S_t$  permet d'exprimer la dynamique d'un portefeuille autofinanciant à l'aide des rendements des titres. On doit donc avoir  $\sigma_t^* \delta_t S_t = \alpha_t$ , soit en exploitant l'hypothèse d'inversibilité faite sur la matrice  $(\sigma_t \sigma_t^*)$  le résultat de l'énoncé.

Revenons à une situation générale, en imposant des hypothèses sur le numéraire de marché.

**Théorème 5.5.1** *Marché complet*

On suppose que la matrice  $\sigma_t$  vérifie l'hypothèse ci-dessus. Supposons que le numéraire  $M$  soit suffisamment régulier pour que  $\sup_{0 \leq t \leq T} M_t$  et  $\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^{-1}$  appartient à  $\mathbb{L}^{2+\varepsilon}$  (C'est notamment le cas si  $r_t, \lambda_t, \sigma_t$  sont bornés).

Soit  $\Phi_T \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T^W, \mathbb{P})$ , le flux terminal d'un produit dérivé atteignable, de carré intégrable, mesurable par rapport à la filtration brownienne.

Le marché est complet, au sens où  $\Phi_T$  est répliquable par un portefeuille admissible.

PREUVE : L'hypothèse assure que  $\Phi_T^M \in \mathbb{L}^{1+\varepsilon}$  et donc que  $\Phi_T^M$  est répliquable par un portefeuille admissible dans le  $M$ -marché.

Puisque l'autofinancement est invariant par changement de numéraire, le seul point à vérifier quand on revient dans le marché de départ est que la stratégie est admissible dans le marché de départ. Les hypothèses faites sur  $\Phi_T$  et sur  $M$  le garantissent.

### 5.5.3 Probabilité risque-neutre, ou mesure-martingale

Peut-on observer le numéraire de marché ? La réponse est évidemment non, et il est difficile d'utiliser un numéraire non observable pour obtenir des formules explicites pour l'évaluation et la couverture des produits dérivés.

Si nous souhaitons nous référer à un numéraire plus aisément observable, tout en conservant le même genre de règle d'évaluation, c'est à dire prendre la valeur moyenne du flux terminal exprimé dans le nouveau numéraire, il faut rendre le marché "**risque-neutre**", ce qui sera possible seulement après un changement de probabilité, comme conséquence du théorème de Girsanov.

Le cash est classiquement utilisé comme numéraire, car dans ce nouveau marché, la volatilité des titres ne sera pas changée.

**Théorème 5.5.2** *Probabilité risque neutre*

Supposons le vecteur des primes de risque  $\lambda_t$  et  $r_t$  bornés <sup>6</sup> et choisissons comme numéraire le cash,  $S^0$ .

- i) Il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à la probabilité de départ  $\mathbb{P}$ , sous laquelle
  - $W_t = \int_0^t d\widehat{W}_s + \lambda_s ds$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien
  - Les processus de prix écrits dans ce numéraire, c'est à dire les valeurs actualisées des portefeuilles autofinancants, sont des  $\mathbb{Q}$ -martingales locales et vérifient si  $Z_t^a = \frac{Z_t}{S_t^0}$

$$\frac{dZ_t^a}{Z_t^a} = \sigma_t^Z dW_t \quad (5.5.5)$$

$\mathbb{Q}$  est appelée une probabilité risque-neutre.

- ii) Supposons de plus que la partie négative du taux court  $(r_t)^-$  soit bornée.

Si  $\Phi_T \in \mathcal{B}_T$  est le flux terminal d'un produit dérivé

$$\frac{\text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T)}{S_t^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Phi_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad \text{ou encore} \quad \text{Opt}^{\text{Eur}^{\text{Eur}}}(\Phi_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi_T \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (5.5.6)$$

- iii) Lorsque le marché est complet, (et sous les hypothèses précédentes) il existe une unique probabilité risque-neutre et la règle d'évaluation "risque-neutre" s'applique à tout produit dérivé de carré intégrable.

PREUVE : La preuve utilise la notion de changement de probabilité.

---

<sup>6</sup>Il suffit en fait que la condition de Novikov  $\mathbb{E}[\exp(1/2 \int_0^T |\lambda_s|^2 ds)] < +\infty$  soit satisfaite.



⇒ Supposons les primes de risque bornées. D'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à la probabilité de départ  $\mathbb{P}$  sous laquelle le processus  $W_t = \int_0^t d\widehat{W}_s + \lambda_s ds$  est un mouvement brownien.

Cette probabilité  $\mathbb{Q}$  admet une densité par rapport à la probabilité  $\mathbb{P}$  donnée par

$$Y_T = \exp\left[-\int_0^T \lambda_s d\widehat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T |\lambda_s|^2 ds\right]$$

⇒  $Y_T$  peut s'interpréter comme la valeur dans le numéraire de marché de  $S_T^0$  soit  $Y = \frac{S_T^0}{M_T}$ .

⇒ Considérons  $S^0$  comme numéraire et notons  $Z_t^a = \frac{Z_t}{S_t^0}$  les prix exprimés dans ce numéraire, ou prix actualisés; nous obtenons alors grâce à l'équation (5.4.7)

$$dZ_t^a = Z_t^a \sigma_t^Z dW_t$$

$Z_t^a$  s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport au processus  $W_t$ , mouvement brownien sous  $\mathbb{Q}$ . Les prix actualisés sont donc des  $\mathbb{Q}$ -martingales locales.

⇒ Supposons maintenant que, non seulement le vecteur des primes de risque borné, mais également la partie négative de  $r_t, (r_t)^-$ .

Pour tout  $Z_t$  de carré intégrable

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(Z_t^a)^{1+\varepsilon}] &= \mathbb{E}[(Z_t^a)^{1+\varepsilon} Y_T] \\ &\leq (\mathbb{E}[Z_t^2])^{\frac{1+\varepsilon}{2}} (\mathbb{E}[(\frac{Y}{(S_t^0)^{1+\varepsilon}})^{\frac{2}{1-\varepsilon}}])^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

Les hypothèses faites sur les coefficients impliquent que  $Y_T$  est dans tous les  $\mathbb{L}^p$   $p > 1$  et que  $(S_t^0)^{-1}$  est borné donc que  $Z_t^a \in \mathbb{L}^{1+\varepsilon}$ . Partant d'un processus de prix de carré intégrable, le prix actualisé est une martingale locale sous  $\mathbb{Q}$  uniformément intégrable. C'est donc une "vraie martingale" qui admet une unique décomposition comme intégrale stochastique par rapport à  $W$ .

Soit  $\Phi_T \in \mathcal{B}_T$ . Son prix actualisé  $(\text{Opt}_t^{\text{Eur}^{\text{Eur}}})^a(\Phi_T)$  est une  $\mathbb{Q}$ -martingale uniformément intégrable, égale à l'espérance, vue de  $t$ , du flux terminal actualisé soit

$$(\text{Opt}_t^{\text{Eur}^{\text{Eur}}})^a(\Phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi_T^a | \mathcal{F}_t]$$

ce qui en explicitant le facteur d'actualisation donne les formules de l'énoncé.

⇒ Il s'agit de prouver l'unicité de la probabilité risque-neutre si le marché est complet. Supposons qu'il existe deux probabilités risque-neutre  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}_1$ . Alors, d'après le théorème (5.5.2), l'hypothèse que le marché est complet entraîne que tout  $\Phi$  borné est atteignable. D'autre part  $\frac{\Phi}{S_T^0}$  est de carré intégrable sous  $\mathbb{Q}$ , et sous  $\mathbb{Q}_1$ , puisque  $(S_t^0)^{-1}$  est borné par hypothèse. Il a donc pour prix en 0

$$(\text{Opt}_0^{\text{Eur}^{\text{Eur}}})^a(\Phi_T) = E_{\mathbb{Q}}[\frac{\Phi_T}{S_T^0}] = E_{\mathbb{Q}_1}[\frac{\Phi_T}{S_T^0}]$$

Il en résulte que les deux mesures  $\frac{1}{S_T^0} d\mathbb{Q} = \frac{1}{S_T^0} d\mathbb{Q}_1$  coïncident sur  $\mathcal{F}_T$  et donc aussi les deux probabilités  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}_1$ .

Le même raisonnement pourrait être fait par rapport à n'importe quel numéraire, à condition de se référer à une probabilité "risque-neutre" bien choisie.

### 5.5.4 Numeraire et changement de probabilité

Comme nous l'avons vu ci-dessus, dans le M-marché, les M-prix sont des martingales locales par rapport à la probabilité historique. La probabilité  $\mathbb{P}$  est appelée une *M-martingale mesure* ou *M-probabilité risque-neutre*.

Plus généralement, on peut établir une correspondance entre numéraire portefeuille (comme  $M$ ) et martingale mesure.

**Théorème 5.5.3** Soit  $(X_t)$  un numéraire portefeuille tel que  $X_t^M = \frac{X_t}{M_t}$  soit une  $\mathbb{P}$ -martingale uniformément intégrable. Il existe une probabilité  $\mathbb{Q}^X$  définie par sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^M$  telle que

$$\frac{d\mathbb{Q}^X}{d\mathbb{P}} = \frac{X_T}{M_T} \frac{M_0}{X_0} = \frac{X_T^M}{X_0^M} \quad (5.5.7)$$

Les  $X$ -prix sont des  $\mathbb{Q}^X$  martingales locales ; en d'autres termes  $\mathbb{Q}^X$  est une  $X$ -martingale mesure.

PREUVE : Les preuves jouent sur les liens entre martingales et dérivées de Radon- Nikodym.

⇒ Par hypothèse, le M-prix du numéraire portefeuille  $X$  est une martingale. En particulier, la dérivée de Radon-Nikodym  $L_T = \frac{X_T}{M_T} \frac{M_0}{X_0}$  a une espérance égale à 1 et  $\mathbb{Q}^X$  est une probabilité.

⇒ Soit  $(\delta_t)$  un portefeuille admissible tel que  $V_t^M(\delta)$  est une  $\mathbb{P}$  martingale locale. Le prix relatif  $V_t^X(\delta)$  par rapport au numéraire  $X$ , et prix relatif  $V_t^M(\delta)$  par rapport à  $M$  sont contraints par

$$V_t^M(\delta) = V_t^X(\delta) X_t^M = X_0 V_t^X(\delta) L_t$$

Par suite, par le théorème de Girsanov ,  $V_t^X(\delta)$  est une  $\mathbb{Q}^X$ -martingale locale si et seulement si  $V_t^X(\delta) L_t$  est une  $\mathbb{P}$  martingale locale. Mais cette propriété est vraie par définition du numeraire de marché.

Il est clair que la notion de  $X$ -martingale mesure ne doit pas dépendre de la probabilité de référence.

**Corollaire 5.5.4** Soit  $(X_t, Y_t)$  deux numéraires portefeuilles arbitraires tels que  $X_t^M$  et  $Y_t^M$  soient des  $\mathbb{P}$ -martingales, et  $(\mathbb{Q}^X, \mathbb{Q}^Y)$  les mesures-martingale associées .

Alors,  $(Y_t^X)$  (resp.  $(X_t^Y)$ ) est une  $\mathbb{Q}^X$  (resp.  $\mathbb{Q}^Y$ ) martingale et

$$\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}^X} = \frac{Y_T^X}{Y_0^X} \quad \frac{d\mathbb{Q}^X}{d\mathbb{Q}^Y} = \frac{X_T^Y}{X_0^Y}$$

En particulier, pour tout  $\Phi$  borné, ou suffisamment intégrable

$$\text{Opts}_t(\Phi_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \Phi_T | \mathcal{F}_t] = X_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X}[\Phi_T^X | \mathcal{F}_t] \quad (5.5.8)$$

PREUVE :  $(Y_t^X)$  est une  $\mathbb{Q}^X$ -martingale si et seulement si  $(Y_t^X X_t^M)$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale, ce que nous avons supposé . De plus,

$$\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{Q}^X} = \frac{d\mathbb{Q}^X}{d\mathbb{P}} \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^X} = \frac{Y_T^M}{Y_0^M} \frac{X_0^M}{X_T^M} = \frac{Y_T^X}{Y_0^X}$$

Le dernier calcul traduit simplement l'équivalence entre les différentes règles d'évaluation risque-neutre.

**Remarque 5.5.3** En mettant l'accent sur l'évaluation risque-neutre, nous rejoignons Bachelier (1900), mais également les notions d'arbitrage statique développées dans le chapitre 4. Ce point de vue ne doit pas faire oublier qu'il ne s'applique qu'au cas des marchés complets, ou plus généralement au cas des

actifs répliquables. L'intérêt est que ce point de vue permet de ne pas faire de différence entre les dérivés simples et les dérivés "path-dependent", comme les options barrières auxquelles nous avons appliqué la règle d'évaluation risque-neutre dans le chapitre 3.

L'usage abusif de ce point de vue conduit à oublier le portefeuille de couverture sous-jacent à cette théorie. Il convient, même si c'est plus difficile, de ne jamais oublier cette question cruciale.

## 5.6 La formule de Black et Scholes Revisitée

Si nous affaiblissons certaines des hypothèses qui interviennent dans la formule de BLACK ET SCHOLES, nous pouvons dans un certain nombre de situations aboutir malgré tout à une formule quasi-explicite.

Nous nous proposons d'évaluer une option d'échange entre deux sous-jacents, une action qui paye un dividende continu de  $q_t$  et un indice par exemple  $I_t$ , le cash-flow de l'option étant  $(S_T - KI_T)^+$ . La dynamique de ces deux sous-jacents vérifie donc

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (r_t - q_t)dt + \sigma_t^S[d\widehat{W}_t + \lambda_t dt] & S_0 = x \\ \frac{dI_t}{I_t} &= r_t dt + \sigma_t^I[d\widehat{W}_t + \lambda_t dt]\end{aligned}$$

Quel est le numéraire approprié pour simplifier le calcul du prix et la couverture d'une option sur de tels sous-jacents ?

Les différentes étapes de l'évaluation sont les suivantes

- ◊ Calculer les valeurs présentes à la date  $t$ ,  $Z_t$  et  $I_t$ , des flux  $S_T$  et  $I_T$ .
- ◊ Caractériser l'ensemble d'exercice  $\mathcal{E} = \{S_T > KI_T\}$
- ◊ Calculer les probabilités d'exercice sous les martingales mesures appropriées.

### 5.6.1 Portefeuille associé à un titre versant un dividende

La première étape est de caractériser le sous-jacent de l'option qui dans la formule de Black et Scholes est un actif de marché, ou un portefeuille autofinçant, ne versant pas de dividende. C'est aussi le prix de l'option de strike 0.

- L'évaluation de la valeur présente des flux ne présente aucune difficulté si les flux terminaux sont des prix de sous-jacents sans dividende, par exemple  $I_t$  pour l'indice  $I$ .
- La valeur présente  $Z_t$  de  $S_T$  se calcule aisément si le taux de dividende est déterministe comme  $Z_t = S_t D(t, T)$  où  $D(t, T) = \exp - \int_t^T q_s ds$  est l'inverse du dividende moyen payé entre  $t$  et  $T$ .

Si le dividende est aléatoire, dans un marché complet on peut procéder comme suit :

**Proposition 5.6.1 (Actif versant un dividende)** Soit  $(S_t)$  le processus de prix d'une action payant un dividende de taux  $q_t$  (borné) et désignons par  $\widehat{S}_t = S_t \exp \int_0^t q_s ds$  la valeur du portefeuille obtenu en réinvestissant le dividende dans l'action

$$\frac{d\widehat{S}_t}{\widehat{S}_t} = r_t dt + \sigma_t^S[d\widehat{W}_t + \lambda_t dt]$$

- (a) Dans le  $\widehat{S}$ -marché,  $dW_t^{\widehat{S}} = d\widehat{W}_t + (\lambda_t - \sigma_t^S)dt$  est un  $\mathbb{Q}^{\widehat{S}}$ -mouvement brownien.
- (b) Le portefeuille autofinçant de cash-flow terminal  $S_T$  est donné par :

$$Z_t = S_t D(t, T) = S_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{\widehat{S}}} \left( \exp - \int_t^T q_s ds \right) \quad (5.6.1)$$

- (c)  $D(t, T)$  ressemble beaucoup au prix d'un zéro-coupon écrit dans le numéraire  $\widehat{S}$ .

(d) Le prix d'un contrat forward sur  $S_T$  est

$$F_t(S_T, T) = \frac{Z_t}{B(t, T)} \quad (5.6.2)$$

PREUVE : Par définition,  $\hat{S}_t = S_t \exp \int_0^t q_s ds$  est une martingale locale que nous supposons une vraie martingale, associée à l'exponentielle de l'intégrale stochastique de  $\sigma_t^S$ .

⇒ Dans le numéraire  $\hat{S}$

$$Z_t^{\hat{S}} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{\hat{S}}} \left( \frac{S_T}{\hat{S}_T} \right) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{\hat{S}}} \left( \exp - \int_0^T q_s ds \right)$$

D'où après simplification la formule de lemme.

⇒ La formule du contrat forward exploite que  $Z_T = S_T$

Le coefficient  $D(t, T)$  est appelé *correction de convexité* dans les modèles de taux d'intérêt.

## 5.6.2 Les probabilités d'exercice

Sous quelles probabilités calculer les probabilités d'exercice, c'est à dire la probabilité de

$$\mathcal{E} = \{S_T > K I_T\}$$

Revenons à la définition risque-neutre du prix d'une telle option : d'après les règles d'évaluation précédentes

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T 1_{\mathcal{E}} - K I_T 1_{\mathcal{E}}) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} Z_T 1_{\mathcal{E}} | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} K I_T 1_{\mathcal{E}} | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

D'après les règles liant changement de numéraire et changement de mesure martingale, ceci conduit à

$$C_t = S_t \Delta_t^T \mathbb{Q}^Z(\mathcal{E} | \mathcal{F}_t) - K I_t \mathbb{Q}^I(\mathcal{E} | \mathcal{F}_t) \quad (5.6.3)$$

En utilisant l'indice comme numéraire, nous nous ramenons à évaluer un Call standard, sur le sous-jacent  $Z_t^I$ .

Pour mener à bien les calculs, nous avons besoin de calculer

- $\Delta(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{\hat{S}}}(\exp - \int_t^T q_s ds)$ , qui se calcule comme un zéro-coupon dans un univers risque neutre dont les primes de risque sont liées à la volatilité de  $S$ .
- la loi de  $Z_t^I$  sous les deux probabilités  $\mathbb{Q}^I$  et  $\mathbb{Q}^Z$ .

## Le cas des volatilités déterministes

### Hypothèses

- ◇ Supposons le marché complet et les volatilités de  $S$ ,  $I$  déterministes,
- ◇ Supposons les taux d'intérêt  $r_t$  et de dividende  $q_t$  gaussiens

Sous ces hypothèses,

- Sous la probabilité  $\mathbb{Q}^{\hat{S}}$   $q_t$  reste un processus gaussien.  $e^{-\int_0^t q_s ds} D(t, T)$  est une  $\mathbb{Q}^{\hat{S}}$ -martingale log-normale à volatilité déterministe.
- la volatilité de  $Z$  est aussi déterministe
- la volatilité de  $Z_t^I$ , différence entre le vecteur des volatilités de  $Z$  et celui de  $I$  est aussi déterministe.

Nous pouvons nous ramener à la formule de Black et Scholes classique, en utilisant la volatilité de  $Z_t^I$ , différence entre le vecteur des volatilités de  $Z$  et celui de  $I$ .

Pour calculer la volatilité qui apparait dans la formule, on peut utiliser la variance vue de  $t$  de  $(\ln S_T - \ln I_T)$ , prendre la racine carrée et normaliser par  $\sqrt{T-t}$ .

Cet exemple permet de traiter le cas des taux aléatoires : il suffit de supposer que dans ce cas, l'indice est un zéro-coupon  $B(t, T)$  de maturité  $T$ . La mesure-martingale associée à ce numéraire est appelée probabilité forward-neutre.

En résumé lorsque la volatilité de  $Z_t^I$  est **déterministe**, le prix d'une option d'échange est donné par la formule de Black et Scholes sous la forme

$$C_t = S_t \Delta(t, T) \mathbb{Q}^Z(\mathcal{E} | \mathcal{F}_t) - K I_t \mathbb{Q}^I(\mathcal{E} | \mathcal{F}_t) \quad (5.6.4)$$

où  $-\ln[\frac{S_T}{I_T}]$  est normalement distribué, avec

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t^I}(-\ln(\frac{S_T}{I_T})) &= -\ln[\frac{Z_t}{I_t}] + \frac{1}{2} \text{Variance}_t(\ln S_T - \ln I_T) \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t^Z}(-\ln \frac{S_T}{I_T}) &= -\ln[\frac{Z_t}{I_t}] - \frac{1}{2} \text{Variance}_t(\ln S_T - \ln I_T) \end{aligned}$$

Les variances sont les mêmes pour les différentes probabilités :

$$\text{Variance}_t(\ln S_T - \ln I_T) = \int_t^T \text{vol}_s^2(\frac{Z}{I}) ds$$

et donc comme dans la formule de Black et Scholes

$$\mathbb{Q}_t^I(\mathcal{E}) = N(d_0(t)) \quad \mathbb{Q}_t^Z(\mathcal{E}) = N(d_1(t))$$

où

$$\begin{aligned} d_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{\text{Variance}_t(\ln S_T - \ln I_T)}} \ln[\frac{S_t \Delta_t^T}{K I_t}] - \frac{1}{2} \sqrt{\text{Variance}_t(\ln S_T - \ln I_T)} \\ d_1(t) &= d_0(t) + \sqrt{\text{Variance}_t(\ln S_T - \ln I_T)} \end{aligned}$$



## Chapitre 6

# Arbitrage multidevise : Application aux options quanto

Les établissements financiers sont de plus en plus engagés sur les marchés internationaux, et la nature des interventions est de plus en plus vaste et complexe : gestion de portefeuille, options de change, options sur actions étrangères, swaps de devises, equity-swaps... L'intérêt d'un cadre cohérent pour l'évaluation et la couverture de ces différents produits financiers est alors manifeste.

### 6.1 Arbitrage multidevise

Dans **une économie donnée**, le principe d'évaluation et de couverture d'un titre, qui verse un flux  $F_T$  à la date  $T$  obéit à une règle simple :

En **absence d'opportunité d'arbitrage**, le prix à la date  $t$ ,  $\Pi_t(F_T)$  du flux  $F_T$  est la richesse à investir dans un portefeuille autofinçant qui duplique exactement  $F_T$  en  $T$ .

Dans toute la suite, le prix en  $t$  d'une unité monétaire payée en  $T$ , c'est à dire le prix d'un zéro-coupon de maturité  $T$ , est noté  $B(t, T)$ . Le rendement instantané du cash est désigné par  $r_t$ .

**L'absence d'arbitrage entre le comptant et le terme** entraîne que

$$\Phi_t(F_T) = \frac{\Pi_t(F_T)}{B(t, T)} \quad (6.1.1)$$

Dans un univers multidevise, cette règle d'évaluation vaut dans chacun des deux pays. Mais il reste à préciser comment se fait l'arbitrage entre l'économie domestique à laquelle nous faisons référence en utilisant le symbole  $d$ , et l'économie étrangère rappelée par  $f$  (foreign)! L'outil essentiel est *le taux de change*  $X_t$  c'est à dire le prix en unités domestiques de la date  $t$ , d'une unité étrangère de la même date. Lorsque l'économie domestique est le marché européen,  $X_t$  est le taux de change dollar-euro.

#### **Principe de non-arbitrage entre deux économies :**

Un prix étranger transcrit en monnaie domestique par le taux de change est un prix domestique

Le numéraire de cette transformation est le prix en dollars d'un euro soit le taux de change euro-dollars.

Les conséquences de ce principe sont très nombreuses, soit pour caractériser la dynamique du taux de change, soit pour comparer l'évaluation et la couverture dans les deux marchés.

Notons tout de suite que ce principe de non-arbitrage entraîne qu'une unité étrangère capitalisée au taux de  $r^f$  entre 0 et  $t$  et changée en monnaie domestique est un prix domestique.

En d'autres termes, le taux de change apparaît comme un titre domestique qui paye un dividende continu de  $r^f$ .

### 6.1.1 Principe général d'évaluation

Le prix domestique en  $t$  d'un flux étranger  $F_T^f$ , est par définition égal à  $\Pi_t^d(X_T F_T^f)$ , puisqu'il faut convertir le flux étranger en argent domestique. Mais par ailleurs, ce même flux peut être obtenu par un portefeuille étranger évalué à la date  $t$  en monnaie domestique ; par suite avec des notations évidentes on a :

**Proposition 6.1.1** *La relation d'arbitrage*

$$\Pi_t^d(X_T F_T^f) = X_t \Pi_t^f(F_T^f) \quad (6.1.2)$$

prévaut entre les prix à la date  $t$  sur les marchés domestiques et étrangers.

Une relation analogue relie les prix  $\Phi^d$  et  $\Phi^f$  des contrats à terme dans les deux pays, sous la forme :

$$\Phi_t^d(X_T F_T^f) = \Phi_t^d(X_T) \Phi_t^f(F_T^f) \quad (6.1.3)$$

$$\Phi_t^d(X_T) = X_t \frac{B^f(t, T)}{B^d(t, T)} \quad (6.1.4)$$

Cette dernière relation traduit le fait que : le taux de change sur le marché à terme de maturité  $T$  est le contrat à terme (forward) sur la devise de même maturité.

PREUVE : Seule la deuxième relation demande à être établie. Elle repose sur la formule (1), qui donne le lien entre prix à terme et prix au comptant.

Considérons un contrat sur un flux écrit en monnaie étrangère, mais payé en monnaie domestique. Les formules de prix au comptant données en (2) entraînent immédiatement que  $\Pi_t^d(X_T F_T^f) = X_t \Pi_t^f(F_T^f)$  et donc pour les prix à terme :

$$\Phi_t^d(X_T F_T^f) = (X_t \frac{B^f(t, T)}{B^d(t, T)}) \Phi_t^f(F_T^f)$$

Mais cette formule appliquée à un contrat forward écrit sur une unité étrangère de la date  $T$  permet d'interpréter le terme  $X_t \frac{B^f(t, T)}{B^d(t, T)}$  comme le prix d'un contrat forward sur devise.  $\square$

### 6.1.2 Application aux options quanto

Nous décrivons l'évaluation des options d'achat, les options de vente se calculant grâce à la formule de parité Call -Put.

Une option européenne d'achat, de maturité  $T$ , de prix d'exercice  $K$ , écrite sur un actif  $S$  est un produit financier dont le cash-flow à la date  $T$  est  $F_T = (S_T - K)^+$ .

Nous désignons son prix à la date  $t$  par

$$C_t(S, K, T) = \Pi_t[(S_T - K)^+]$$

<sup>1</sup> Plusieurs types d'options quanto sont évaluées sur les marchés ; elles diffèrent essentiellement par la nature du sous-jacent de l'option qui par définition est toujours un titre étranger, et par la monnaie dans laquelle est exprimée le prix d'exercice.

<sup>1</sup>Nous rappelons dans l'Annexe 1 les formules fermées d'évaluation lorsque l'actif suit une loi log-normale, notamment les formules de Black-Scholes et de Black, et donnerons dans la seconde partie les formules fermées et les stratégies de couverture associées aux options que nous décrivons ci-dessous



### Options d'achat sur action étrangère avec strike en devises

Il s'agit d'évaluer en monnaie domestique un flux étranger de

$$F_1^f(T) = (S_T^f - K^f)^+$$

Le principe général d'évaluation montre qu'il suffit d'évaluer cette option en monnaie étrangère, puis de convertir la prime en monnaie domestique. Soit

$$C_1(t) = \Pi_t^d[X_T(S_T^f - K^f)^+] = X_t C_t^f(S^f, K^f, T) \quad (6.1.5)$$

En particulier, s'il existe une formule fermée pour l'évaluation et la couverture de ce Call sur le marché étranger, il en est de même sur le marché domestique. Nous ne reviendrons pas sur de telles options qui ne présentent aucun risque de change spécifique.

### Options d'achat sur action étrangère avec strike en monnaie domestique

Cette option a un cash-flow terminal qui est écrit naturellement en monnaie domestique, puisque c'est la monnaie dans laquelle est exprimée le strike  $K^d$ . Les éléments essentiels à l'évaluation sont :

- Le flux terminal  $F_2^d(T) = (X_T S_T^f - K^d)^+$
- Le produit financier qui synthétise le risque, c'est à dire le titre domestique dont le flux en  $T$  est  $S_T^f X_T$ , soit  $\Pi_t^d[S_T^f X_T] = X_t S_t^f$  d'après la formule (6.1.2).

Si l'actif verse un dividende déterministe donné en pourcentage par  $D_{t,T}^f$ , la formule doit être modifiée en  $\Pi_t^d[S_T^f X_T] = X_t S_t^f D_{t,T}^f$

Le Call est donc une option domestique écrite sur l'actif  $X_t S_t^f$  qui paye un dividende de  $D_{t,T}^f$

$$C_2(t) = \Pi_t^d[(X_T S_T^f - K^d)^+] = C_t^d(X S^f D_{.,T}^f, K^d, T) \quad (6.1.6)$$

### Options d'achat sur devise

Nous nous intéressons à un Call sur devise de prix d'exercice  $\underline{X}$ , de maturité  $T$ .

Cette option est un cas particulier des options précédentes, lorsque l'actif étranger est un zéro-coupon étranger de même maturité que celle de l'option.

Le Call est donc une option domestique écrite sur l'actif  $X_t B^f(t, T)$

$$C_3(t) = \Pi_t^d[(X_T - \underline{X})^+] = C_t^d(X B^f(., T), \underline{X}, T) \quad (6.1.7)$$

### Les options sur actions étrangères avec taux de change fixé

Il s'agit d'une option sur une action étrangère, dont le pay-off est converti en monnaie domestique par un taux de change fixé dans les termes du contrat et que nous noterons  $\underline{X}$ . Cette option ne se ramène pas aussi facilement que les autres à une option sur un sous-jacent facilement identifiable, car elle apparait comme un mélange d'option et de contrat à terme sur le change.

Les éléments essentiels à l'évaluation sont :

- Le flux  $F_4^d(T) = \underline{X} (S_T^f - K^f)^+$ .
- Le produit financier qui synthétise le risque, c'est à dire le titre domestique dont le flux en  $T$  est égal  $\underline{X} S_T^f$ , soit  $\underline{X} \Pi_t^d[S_T^f]$

Or l'action étrangère, vue du marché domestique, peut être considérée comme un titre domestique  $X_t S_t^f$  qui verse un dividende aléatoire de  $X^{-1}$ .

Nous précisons ce point dans la deuxième partie, lorsqu'une hypothèse de type volatilité déterministe est faite sur les titres.

A ce stade, il est possible de donner le prix d'une telle option sous la forme :

$$C_4(t) = \Pi_t^d[\underline{X}(S_T^f - K^f)^+] = \underline{X}C_t^d(\underline{X}\Pi_t^d[S_T^f], \underline{X}K^f, T) \quad (6.1.8)$$

Pour aller plus loin dans l'analyse du prix de ces options, il convient de modéliser la dynamique des sous-jacents, en tenant compte de l'absence d'opportunités d'arbitrage entre les deux économies.

## 6.2 Dynamique des produits financiers et primes de risque

Le principe de non-arbitrage a de nombreuses conséquences sur la modélisation de la dynamique des cours dans les différentes économies, notamment sur le rendement des titres, comme nous l'avons vu précédemment.

Plaçons nous d'abord dans un pays donné et considérons un actif financier quelconque, dont le prix à l'instant  $t$  est noté  $Z_t$ .

Nous supposons que sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  cet actif a comme paramètres instantanés un **rendement**  $m_t^Z$  et un **vecteur volatilité** noté  $\sigma_t^Z$ .

Nous désignons par  $\widehat{W}_t = (\widehat{W}_t^1, \dots, \widehat{W}_t^n)^*$ , le vecteur colonne<sup>2</sup> des  $n$  processus browniens standards indépendants, représentant les  $n$  sources d'aléa qui affectent les prix (dans les deux économies éventuellement) .

Sous la probabilité objective  $\mathbb{P}$ , le processus  $Z_t$  des prix de l'actif suit la dynamique suivante :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = m_t^Z dt + \langle \sigma_t^Z, d\widehat{W}_t \rangle \quad (6.2.1)$$

En absence d'opportunité d'arbitrage, Il existe un vecteur de **primes de risque** noté  $\lambda_t$ , tel que pour tout actif du marché de prix  $Z_t$  :  $m_t^Z = r_t + \langle \sigma_t^Z, \lambda_t \rangle$ .

On définit alors la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ , comme étant la probabilité<sup>3</sup> sous laquelle, le processus  $W_t$  défini par :

$$dW_t = d\widehat{W}_t + \lambda_t dt$$

est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien standard.

Dans cet univers, appelé univers neutre au risque, tous les actifs ont pour rendement instantané le taux spot sans risque  $r_t$  :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = r_t dt + \langle \sigma_t^Z, d\widehat{W}_t + \lambda_t dt \rangle = r_t dt + \langle \sigma_t^Z, dW_t \rangle \quad (6.2.2)$$

Si de plus, l'actif  $Z$  verse un dividende continu de taux  $\mu_t^Z$ , l'équation est transformée en :

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = [r_t - \mu_t^Z] dt + \langle \sigma_t^Z, dW_t \rangle \quad (6.2.3)$$

<sup>2</sup>On notera par  $A^*$  la transposée de la matrice  $A$ , et  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs.

<sup>3</sup>Cette probabilité  $\mathbb{Q}$ , équivalente à  $\mathbb{P}$ , est définie par sa densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left[ - \int_0^t \lambda_s d\widehat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds \right]$$

Si nous nous plaçons dans le pays domestique, la prime de risque est notée  $\lambda_t^d$ , et le processus  $dW_t^d = d\widehat{W}_t + \lambda_t^d dt$  est un  $Q^d$ -mouvement brownien.

Si nous plaçons dans le pays étranger, ces mêmes quantités sont repérées par le symbole  $f$ .

Il n'y a pas de raison a priori pour que les deux primes de risque,  $\lambda_t^d$  et  $\lambda_t^f$  soient les mêmes. Toutefois l'absence d'opportunité d'arbitrage permet de les comparer en utilisant le taux de change.

### Dynamique du taux de change

Nous commençons par traduire sur la modélisation du taux de change, le fait vu dans le premier paragraphe que c'est un titre domestique, qui verse un dividende en continu égal au taux étranger  $r^f$ , soit, compte-tenu de l'équation (11) :

**Proposition 6.2.1** *Le taux de change a une dynamique de la forme :*

$$\frac{dX_t}{X_t} = [r_t^d - r_t^f]dt + \langle \sigma_t^X, dW_t^d \rangle \quad (6.2.4)$$

où  $W_t^d = \widehat{W}_t + \lambda_t^d dt$

### Primes de risque dans le marché étranger

La caractérisation du taux de change ne traduit pas complètement l'A.O.A (absence d'opportunité d'arbitrage) entre les différentes économies. En effet, il nous reste à exprimer le fait que ce sont tous les prix sur le marché étranger qui sont transformés par le change en des prix domestiques.

**Proposition 6.2.2** *Un titre étranger  $Z_t^f$  a une dynamique de la forme :*

$$\frac{dZ_t^f}{Z_t^f} = r_t^f dt + \langle \sigma_Z^f(t), d\widehat{W}_t + \lambda_t^f dt \rangle \quad (6.2.5)$$

où le vecteur  $\lambda^f$  des primes de risque sur le marché étranger est donné par :

$$\lambda_t^f - \lambda_t^d = -\sigma_t^X \quad (6.2.6)$$

Les browniens non centrés  $W_t^d$  et  $W_t^f$  sont liés par la relation

$$W_t^d - W_t^f = \int_0^t \sigma_s^X ds \quad (6.2.7)$$

PREUVE : C'est la même que celle donnée pour les changements de numéraire.

Soit  $Z_t^f$  le prix d'un actif étranger. L'A.O.A entre les différents marchés entraîne que  $X Z^f$  est un prix domestique, dont le prix satisfait à la relation (6). Le calcul d'Itô entraîne que :

$$\begin{aligned} \frac{d(X Z^f)_t}{(X Z^f)_t} &= \frac{dX_t}{X_t} + \frac{dZ_t^f}{Z_t^f} + Cov_t \left( \frac{dX_t}{X_t}, \frac{dZ_t^f}{Z_t^f} \right) \\ &= r_t^d dt + \langle \sigma_t^X, d\widehat{W}_t + \lambda_t^d dt \rangle + \langle \sigma_S^f(t), d\widehat{W}_t + \lambda_t^f dt + \sigma_t^X dt \rangle \end{aligned}$$

$X Z^f$  étant un prix domestique, d'après l'équation (6) nécessairement :

$$\lambda_t^f + \sigma_t^X = \lambda_t^d$$

Ce qui nous donne le résultat annoncé car l'équation qui lie les mouvements browniens est une conséquence immédiate de la propriété des primes de risque.

Le calcul nous donne la dynamique du titre domestique  $X_t Z_t^f$

**Corollaire 6.2.3** *L'action étrangère écrite en monnaie domestique suit :*

$$\frac{d(X S^f)_t}{(X S^f)_t} = r_t^d dt + \langle \sigma_t^X + \sigma_S^f(t), dW_t^d \rangle \quad (6.2.8)$$

le vecteur des volatilités est donné par la somme des vecteurs  $\sigma_t^X + \sigma_S^f(t)$   $\square$

### Remarque sur les conventions utilisées

Nous avons supposé que  $n$  sources de bruit indépendantes expliquent les perturbations aléatoires affectant tous les produits financiers, indépendamment de l'économie dans laquelle ils sont évalués, ce qui nous permet d'avoir une interprétation simple des différentes primes de risque.

Toutefois, ce faisant, nous nous éloignons de la pratique habituelle qui en général à un titre risqué  $S$  associe **une** source de bruit  $W^S$ , et **une** volatilité  $vol_t^S$ .

Le passage d'une modélisation à l'autre se fait aisément grâce aux correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_t^S, dW_t \rangle &= vol_t^S dW_t^S \\ vol_t(S) &= \|\sigma_t^S\| \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Ainsi par exemple

$$vol_t(X S^f) = \|\sigma_t^X + \sigma_S^f(t)\|$$

La **corrélation instantanée**  $\rho_t^{X,S}$  entre deux produits financiers  $X$  et  $S$  est mesurée à l'aide des relations suivantes :

$$cov_t\left(\frac{dX_t}{X_t}, \frac{dS_t}{S_t}\right) = \langle \sigma_t^X, \sigma_t^S \rangle dt = \rho_t(X, S) vol_t(X) vol_t(S) dt$$

soit

$$\rho_t(X, S) = \frac{\langle \sigma_t^X, \sigma_t^S \rangle}{\|\sigma_t^S\| \|\sigma_t^X\|} \quad (6.2.10)$$

Ainsi la volatilité du produit des deux actifs est donnée par :

$$vol_t(XS)^2 = \|\sigma_t^X + \sigma_t^S\|^2 = vol_t(X)^2 + vol_t(S)^2 + 2 vol_t(X)^2 vol_t(S)^2 \rho_t(X, S) \quad (6.2.11)$$

Nous utiliserons souvent la volatilité moyenne entre  $t$  et  $T$

$$Vol_{t,T}(S)^2 = \int_t^T vol_u(S)^2 du = \int_t^T \|\sigma_u^S\|^2 du \quad (6.2.12)$$

## 6.3 Options sur un marché étranger : Les options quanto

Avant d'aborder les formules de calcul et de couverture explicites de ces options, nous fixons quelques notations très souvent utilisées dans la suite .

Comme l'évaluation des options est faite en monnaie domestique, nous nous plaçons sous la probabilité domestique neutre au risque  $\mathbb{Q}^d$ , et décomposons le prix des actifs dans les différents pays par rapport au  $\mathbb{Q}^d$ -mouvement brownien  $W^d$ .

1. Le prix zéro-coupon domestique  $B_{t,T}^d$  suit la diffusion :

$$\frac{dB_{t,T}^d}{B_{t,T}^d} = r_t^d + \langle \sigma_{t,T}^d, dW_t^d \rangle$$

soit d'après (6.2.11) une volatilité des zéro-coupons de  $vol_{t,T}^d = \|\sigma_{t,T}^d\|$

2. Le taux de change  $X_t$  suit la diffusion :

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f) dt + \langle \sigma_t^X, dW_t^d \rangle$$

soit une volatilité du change de  $vol_t(X) = \|\sigma_t^X\|$

3. La corrélation instantanée entre le taux de change et le zéro-coupon domestique de maturité  $T$  est mesurée d'après l'équation (6.2.10) par

$$\rho_t^{X,d} = \frac{\langle \sigma_t^X, \sigma_{t,T}^d \rangle}{\|\sigma_{t,T}^d\| \|\sigma_t^X\|}$$

De même, on suppose que sur le marché étranger, le prix des zéro-coupons  $B_{t,T}^f$  suit la dynamique :

- 1.

$$\frac{dB_{t,T}^f}{B_{t,T}^f} = r_t^f dt + \langle \sigma_{t,T}^f, dW_t^d - \sigma_t^X dt \rangle$$

où  $vol_{t,T}^f = \|\sigma_{t,T}^f\|$

2. L'actif étranger risqué sur lequel sont écrites les options paye un taux de dividende de  $\mu_t^Z$  versé en continu.

$$\frac{dZ_t^f}{Z_t^f} = (r_t^f - \mu_t^Z) dt + \langle \sigma_t^Z, dW_t^d - \sigma_t^X dt \rangle$$

Le dividende (noté en pourcentage) versé entre  $t$  et  $T$  est noté

$$D_{t,T}^Z = \exp - \int_t^T \mu_s^Z ds$$

## 6.4 Les formules fermées d'évaluation des Call quanto

Pour obtenir des formules fermées d'évaluation, nous supposons que **les vecteurs de volatilités des différents titres sont déterministes**.

### 6.4.1 La formule de Black

Dans un marché donné, cette hypothèse conduit à des formules explicites d'évaluation, même lorsque les taux sont aléatoires. Pour l'évaluation d'un Call, de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$ , écrit sur un actif  $S$ , qui verse un dividende déterministe  $D_{t,T}$ , il s'agit de la formule de Black :

$$Call_t(S, K, T) = BL(S_t D_{t,T}, K, T, Vol_{t,T}(\Phi(S_T))) \quad (6.4.1)$$

où

- $\Phi_t(S_T)$  est le prix d'un contrat à terme sur  $S_T$ , soit

$$\Phi_t(S_T) = \frac{\Pi_t(S_T)}{B^d(t, T)} = \frac{S_t D_{t,T}}{B^d(t, T)}$$

- $Vol_{t,T}(\Phi(S_T))$  est la volatilité moyenne du contrat entre  $t$  et  $T$ , soit

$$\begin{aligned}
Vol_{t,T}(\Phi(S_T))^2 &= \frac{1}{T-t} \int_t^T vol_u(\Pi(S_T))^2 du = \frac{1}{T-t} \int_t^T \|\sigma_t^S - \sigma_{t,T}\|^2 \\
&= \frac{1}{T-t} \int_t^T [vol_u(B(\cdot, T))^2 + vol_t(S)^2 \\
&\quad + 2 vol_u(B(\cdot, T)) vol_u(S) \rho_u(B(\cdot, T), S)] du
\end{aligned}$$

D'autre part, même lorsque les taux sont aléatoires

$$Vol_{t,T}(\Phi(S_T))^2 = \frac{1}{T-t} var_t[Ln(S_T)] \quad (6.4.2)$$

La formule explicite est

$$Call_t(S, K, T) = S_t D_{t,T} N(d_1) - K B(t, T) N(d_0) \quad (6.4.3)$$

où :

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{\sqrt{T-t} Vol_{t,T}(\Phi(S_T))} Ln\left(\frac{S_t D_{t,T}}{B(t, T) K}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{T-t} Vol_{t,T}(\Phi(S_T)) \\
d_1 &= d_0 + \sqrt{T-t} Vol_{t,T}(\Phi(S_T))
\end{aligned}$$

**La couverture** d'une telle option se fait à l'aide de  $D_{t,T} N(d_1)$  actions et de  $-K N(d_0)$  zéro-coupons de maturité  $T$  (ou de tout portefeuille synthétique qui le duplique).

## 6.4.2 Options d'achat sur action étrangère avec strike en monnaie domestique

Comme nous l'avons vu dans la première partie, ce Call est une option domestique écrite sur l'actif  $X_t S_t^f$  qui paye un dividende de  $D_{t,T}^f$ . Il existe donc une formule fermée, puisque le vecteur des volatilités de  $X S^f$ , qui est la somme de ceux de  $X$  et de  $S^f$ , est déterministe.

Le Call est donc évalué par :

$$C_2(t) = C_t^d(X S^f D_{t,T}^f, K^d, T) = B L^d(X_t S_t^f D_{t,T}, K^d, T, Vol_{t,T}[\Phi(S_T^f X_T)]) \quad (6.4.4)$$

$$C_2(t) = X_t S_t^f D_{t,T} N(d_1) - K^d B^d(t, T) N(d_0)$$

1. Le titre qui synthétise tous les risques est le contrat à terme domestique sur l'action étrangère soit :

$$\Phi_t^d(S_T^f X_T) = \frac{X_t S_t^f D_{t,T}}{B^d(t, T)}$$

2. Sa volatilité instantanée  $vol_{t,T}^S$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
[vol_{t,T}^S]^2 &= \|\sigma_t^X + \sigma_t^S - \sigma_{t,T}^d\|^2 \\
&= vol_t(X)^2 + vol_t(S)^2 + (vol_{t,T}^d)^2 \\
&\quad + 2 vol_t(X) vol_t(S) \rho_t(X, S) - 2 vol_t(X) vol_{t,T}^d \rho_t(d, X) \\
&\quad - 2 vol_t(S) vol_{t,T}^d \rho_t(d, S)
\end{aligned}$$

où  $\rho_t(d, S)$  est la corrélation instantanée entre les zéro-coupons domestiques maturité  $T$  et l'actif étrangers .

3. La variation moyenne de cette volatilité sur la période,

$$[Vol_{t,T}^S]^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T (vol_{s,T}^S)^2 ds = \frac{1}{T-t} var_t[Ln(S_T) + Ln(X_T)]$$

La volatilité de cet actif dépend des corrélations entre tous les produits financiers qui sont en jeu, notamment entre le sous-jacent étranger et le taux de change, et si les taux sont aléatoires entre ces titres et les taux domestiques.

**La couverture** d'une telle option se fait à l'aide de  $D_{t,T}N(d_1)$  actions étrangères payées en monnaie domestique et de  $-K^d N(d_0)$  zéro-coupons de maturité  $T$  (ou de tout portefeuille synthétique qui le duplique). Le risque de corrélation est alors couvert.

Il est possible de se placer dans l'univers étranger : l'option apparaît comme une option étrangère d'échange entre l'action et l'inverse du taux de change multiplié par  $K^d$ . Pour obtenir le prix domestique, il suffit de reconvertir la prime à l'aide du taux de change.

### 6.4.3 Options d'achat sur devise

Comme nous l'avons vu dans la première partie, il s'agit d'un cas particulier des options précédentes, où le titre étranger est un zéro-coupon de maturité  $T$ . Le Call est donc une option domestique écrite sur l'actif  $X_t B^f(t, T)$

$$\begin{aligned} C_3(t) &= BL^d(X_t B^f(t, T), \underline{X}, T, Vol_{t,T}[\Phi^d(X_T)]) \\ &= X_t B^f(t, T) N(d_1) - \underline{X} B_{t,T}^d(d_0) \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

où  $[Vol_{t,T}[\Phi^d(X_T)]]^2 = \frac{1}{T-t} var_t[Ln(X_T)]$  **La couverture** de cette option se fait à l'aide de  $N(d_1)$  zéro-coupon étrangers payés en monnaie domestique et de  $-\underline{X} N(d_0)$  zéro-coupon domestiques.

Nous aurions pu adopter un point de vue différent, et considérer ce titre comme une option sur le taux de change, vu comme un titre domestique qui verse un dividende éventuellement aléatoire de  $r_t^f$ . Dans le cas où les taux étrangers sont déterministes, on retrouve évidemment la formule précédente, puisque dans ce cas le dividende versé entre  $t$  et  $T$  est

$$D_{t,T}^X = exp - \int_t^T r_s^f ds = B^f(t, T)$$

. C'est le point de vue adapté par Garman-Kolhagen (1983 [?]) . Dans le cas où ils sont aléatoires, il est plus difficile de retrouver la formule précédente .

### Options de vente sur devise

La parité Call-Put permet de n'envisager que l'un de ces deux produits financiers, l'évaluation et la couverture de l'autre se fait grâce à la relation

$$Call_t(S, K, T) - Put_t(S, K, T) = S_t - K B(t, T)$$

Cette relation est bien sûr valable pour les options qui nous préoccupent.

Toutefois, nous pouvons interpréter différemment cette relation, en envisageant d'utiliser un point de vue issu de l'autre marché. En effet, il apparaît clairement qu'une option d'achat sur le change (étranger-domestique) est aussi une option de vente sur le change (domestique-étranger). Plus précisément, d'après la relation (2) :

$$Call_t^d(X, \underline{X}, T) = X_t \underline{X}^{-1} Put_t^f(X^{-1}, \underline{X}^{-1}, T)$$

Nous aurions pu adopter un point de vue différent, et considérer ce titre comme une option sur le taux de change, vu comme un titre domestique qui verse un dividende éventuellement aléatoire de  $r_t^f$ . Dans le cas où les taux étrangers sont déterministes, on retrouve évidemment la formule précédente, puisque dans ce cas le dividende versé entre  $t$  et  $T$  est

$$D_{t,T}^X = exp - \int_t^T r_s^f ds = B^f(t, T)$$

. C'est le point de vue adapté par Garman-Kolhagen (1983 [?]) . Dans le cas où ils sont aléatoires, il est plus difficile de retrouver la formule précédente .

## 6.5 Les options sur actions étrangères avec taux de change fixé

Nous étudions maintenant en détail cette option, dont nous avons noté dans la première partie qu'elle était plus difficile à évaluer que les autres . Il s'agit d'une option sur une action étrangère, dont le pay-off est converti en monnaie locale par un taux de change fixé dans les termes du contrat et que nous noterons  $\underline{X}$ .

### Le cas d'un taux de change déterministe

Cette option étrangère est évidemment très simple à évaluer sur le marché étranger, et la règle de passage donnée par la formule (2) nous montre que

$$C_4(t) = \frac{\underline{X}}{X_T} X_t \text{Call}_t^f(S^f, K^f, T)$$

### Le cas d'un taux de change aléatoire

Le sous-jacent de l'option est donc le portefeuille en monnaie domestique qui finance  $\underline{X}S_T^f$ .  $S_t^f$  peut être vu comme un titre domestique qui verse un dividende aléatoire égal à  $r_t^d - r_t^f$ . D'après la formule de Black et Scholes généralisée, nous associons à ce flux le titre

$$Z_t^d = B^d(t, T) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^d}[\underline{X}S_T^f]$$

Mais les variables  $(S_T^f X_T)$  et  $(X_T)$  sont lognormales sous la probabilité  $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^d}$ , d'espérance  $\frac{S_t^f X_t}{B^d(t, T)}$  et  $\frac{B^f(t, T) X_t}{B^d(t, T)}$ . On en déduit aisément que

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^d}[\underline{X}S_T^f] \frac{B^f(t, T) X_t}{B^d(t, T)} \exp[\text{cov}_t(\text{Ln}S_T^f, X_T)] = \frac{S_t^f X_t}{B^d(t, T)} \underline{X}$$

Par suite

$$Z_t^d = S_t^f \frac{\underline{X} B^d(t, T)}{B^f(t, T)} \exp[-\text{cov}_t(\text{Ln}S_T^f, X_T)]$$

Nous pouvons maintenant donner la formule d'évaluation de l'option sur le marché domestique, en notant que le contrat forward domestique sur  $S_T^f$ ,  $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^d}[\underline{X}S_T^f]$  se comporte comme un future sur l'action étrangère, au sens où sa valeur est celle du contrat forward étranger compensé par un dividende payé en continu, qui traduit la corrélation de l'action et du taux de change. On obtient :

$$C_4 = \underline{X} \frac{S_t^f B_{t,T}^d D_{t,T}}{B^f(t, T)} \exp \left[ \text{cov}_t \left( \text{Log} S_T^f, \text{Log} X_T \right) \right] \mathcal{N}(d_1) - \underline{X} K^f B_{t,T}^d \mathcal{N}(d_0)$$

où :

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{\sqrt{\text{var}_t(\text{Log} S_T^f)}} \text{Log} \left( \frac{S_t^f \exp[\text{cov}_t(\text{Ln} S_T^f, \text{Ln} X_T)]}{B_{t,T}^f K^f} \right) - \frac{1}{2} (\text{var}_t(\text{Log} S_T^f))^{\frac{1}{2}} \\ d_1 &= d_0 + \sqrt{\text{var}_t(\text{Log} S_T^f)} \end{aligned}$$



**La couverture** de cette option est beaucoup plus délicate à mettre en place que dans les autres cas d'options quanto, car à cause du taux de change fixé contractuellement le sous-jacent de l'option apparaît comme un titre qui verse un dividende continu, mais dont le taux dépend de la volatilité et des corrélations des titres, actions, change, taux.

Toutefois la règle qui permet de couvrir la formule de Black s'applique ici, sur l'un ou l'autre marché.



## Chapitre 7

# Marchés à termes, Produits dérivés sur Matières Premières, par Julien Samaha, Crédit Lyonnais.

Ce chapitre est une introduction aux marchés de commodities, qui a de nombreuses caractéristiques spécifiques. Elle est faite par Julien Samaha, qui travaille au contrôle des risques de marché sur commodities au Crédit Lyonnais à Londres. Je le remercie bien vivement de sa présentation.

Les instruments sur matières premières (ou *commodities*) constituent une classe particulière d'actifs financiers. Bien que représentant encore une part mineure par rapport aux produits sur taux et actions, ils ont connu une importante évolution au cours de ces dernières années, grâce à la déréglementation de certains marchés, comme celui du gaz et de l'électricité dans quelques pays, et par le souci des investisseurs de diversifier leur portefeuille à travers une classe plus large d'actifs. L'objectif de cette partie est de présenter ces marchés de manière succincte, et de souligner les outils d'analyse et de modélisation s'appliquant à leurs spécificités.

### 7.1 Présentation des marchés

#### 7.1.1 Marchés de contrats à terme

Il n'y a pas *un* mais *des* marchés à terme de matières premières, avec leurs structures et leurs fonctionnements spécifiques. Les marchés de contrats futurs sont, à l'origine, apparus sur les matières premières. Certains ont acquis, au fil des années, une liquidité suffisante pour devenir des marchés de référence, alors que d'autres ont acquis très peu de volume ou ont même disparu du fait de leur échec à répondre aux besoins de couverture du marché. On peut distinguer les principales catégories suivantes :

- Energies : pétrole (brut et dérivés), gaz naturel, charbon, électricité. Excepté le charbon, ces marchés sont assez récents : les premiers contrats à terme sur le pétrole sont apparus à la fin des années 1970 sur le fioul léger (heating oil) à New York et leur développement a été favorisé par les chocs pétroliers et les mesures de déréglementation ; les marchés du gaz et de l'électricité sont apparus au cours des années 1990, suite à la déréglementation dans certaines régions. Ces deux dernières années ont de plus vu la mise en place de plateformes électroniques sur ces marchés

qui fonctionnaient traditionnellement à la criée. Le marché du pétrole est particulièrement complexe du fait de la très grande diversité des qualités du brut et des produits issus du raffinage. Cette complexité n'est pas présente dans les autres énergies où les différences sont principalement géographiques. De plus, le marché du pétrole est un marché global, avec des transactions internationales, alors que les marchés du gaz et de l'électricité sont régionaux et fonctionnent en réseaux de transmissions. Les principaux contrats à terme pétroliers et gaziers sont cotés sur le NYMEX (New York) et l'IPE (Londres). Les marchés à terme de l'électricité sont des marchés de gros ; ils sont régionaux et existent dans les zones déréglementées, par exemple : NordPool (Scandinavie), UK Power Exchange (Grande-Bretagne), EEX (Allemagne), PowerNext (France), NEMMCO (Australie).

- Métaux de base : ils sont principalement cotés sur le LME (Londres) et le COMEX (New York). Le LME en reste le marché principal, où sont cotés l'aluminium, le cuivre, le zinc, le nickel, le plomb et l'étain. Il a été créé en 1877, suite à la révolution industrielle en Grande-Bretagne, qui a vu des importations massives de métaux. On peut remarquer que, du fait de cet historique, le contrat à terme de maturité 3 mois est resté un contrat de référence car il correspond au temps moyen d'acheminement des métaux depuis leurs lieux de production (comme l'Amérique Latine ou l'Afrique) vers Londres et les autres pays consommateurs.
- Métaux précieux : or, argent, platine, palladium. Du fait de leur passé, ils ont tendance à être traités comme des devises par les institutions financières. Par exemple, l'or joue à la fois le rôle de matière première et de devise (valeur de réserve). Les principales places de cotations sont le LBMA (Londres), le COMEX (New York, il s'agit de contrats futurs) et le TOCOM (Tokyo).
- Produits dits "softs" : cette classe regroupe les produits agricoles (cacao, café, sucre, céréales etc.), la laine et le coton, le bétail, les produits forestiers (bois, caoutchouc), le vin etc. Ils sont cotés sur des places diverses, on peut citer : CBOT et CME (Chicago), NYBOT (New York), LIFFE (Londres), MATIF (Paris), entre autres. Les marchés sur produits agricoles sont les plus anciens, le premier marché à terme officiel étant apparu sur le blé au Chicago Board of Trade (CBOT), dans la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle. Malgré cette ancienneté, ces marchés sont peu sophistiqués et les instruments traités restent simples.
- Produits dérivés climatiques : ce ne sont pas des produits sur matières premières à proprement parler car le sous-jacent (température, vitesse du vent...) n'est pas un produit physique et est encore moins échangé ! Cette classe de produits possède cependant un lien important avec les marchés de matières premières car le climat en est un facteur important (cf. plus loin). Ceci est confirmé par le développement récent d'instruments hybrides sur le gaz, comportant une clause sur la température. Il s'agit néanmoins d'une classe très séparée, dont les outils d'analyse et de valorisation sont très différents ; c'est pourquoi nous ne traiterons pas ce marché dans cet article.

Les calendriers et les fréquences d'expirations des contrats futurs listés varient d'un marché à l'autre et dépendent du cycle économique du produit. Cette liste s'étend régulièrement avec la naissance de nouveaux marchés, comme celui des droits d'émission de gaz à effet de serre ou la mise en place actuelle de contrats sur l'acier.

### 7.1.2 En quoi ces marchés sont-ils différents ?

Une matière première est un actif beaucoup moins abstrait qu'une obligation ou une action. C'est la raison principale qui différencie les contrats sur commodities des instruments financiers traditionnels. Plus précisément, on peut distinguer les spécificités suivantes :

- Livraison physique du sous-jacent : tout instrument financier sur matière première est lié, directement ou indirectement, à une livraison physique du sous-jacent. C'est pourquoi sa valeur ne peut

être durablement déconnectée de celle du sous-jacent. Pour la majorité des produits, de nombreux coûts et contraintes sont associés à cette livraison physique et sont pris en compte dans la valorisation de l'instrument. De manière générale, un marché financier sur un produit physique est étroitement lié au marché du *transport* de ce même produit. En particulier sur le pétrole, les prix de certains produits contiennent le coût de transport (le produit est alors dénommé avec le sigle CIF pour "charge, insurance, freight"), d'autres pas (le sigle est alors FOB pour "free on board"); la détention d'un portefeuille sur ces différents produits peut alors contenir un risque de transport implicite (*freight risk*). Un contrat à terme spécifie la qualité du sous-jacent délivrable, ainsi que les points géographiques de livraison. Par exemple, le LME détient une liste des entrepôts, approuvés pour le stockage de ses métaux listés à travers le monde. Il est en fait rare qu'un contrat futur listé soit détenu jusqu'à la livraison physique du sous-jacent (moins de 5% des cas). Le marché de futur est considéré comme la contrepartie de "dernier ressort". En effet, l'acheteur (resp. vendeur) d'un tel contrat ne sera pas a priori intéressé de commercer avec une contrepartie choisie par la place, d'autant plus que le produit qu'il souhaite acheter (livrer), et sur lequel il s'est couvert, ne correspond en général pas aux spécificités, souvent rigides, requises par le contrat futur listé (qualité du produit, lieu de livraison). Le marché fournit cependant une procédure plus flexible pour régler physiquement le dénouement d'un contrat futur : celle-ci s'appelle un échange de futur pour du physique (EFP pour Exchange Future for Physical); le mécanisme permet de choisir à l'avance sa contrepartie et de négocier le prix de règlement du physique à maturité.

- Une matière première peut être, la plupart du temps, revendue comme tout autre actif, mais elle peut aussi être transformée (raffinage pour le pétrole, génération d'électricité pour le gaz naturel ou le charbon etc.) et/ou consommée.
- Fongibilité limitée : un produit physique livré aujourd'hui n'est pas équivalent à ce même produit livré demain. Certains, comme les produits agricoles, se détériorent ou ont même une durée de vie limitée (comme le bétail). Une fois stocké, un tel produit est en général soumis à une procédure de "regrading", consistant à réévaluer le produit par rapport à un standard de marché; s'il ne remplit plus exactement les critères de livraison, sa valeur est diminuée en conséquence.

Les marchés de contrats futurs sont très peu liquides, comparés aux autres marchés financiers. Il est en effet toujours difficile d'introduire un contrat futur sur un marché physique car le degré d'acceptance peut varier fortement; le contrat LME sur l'aluminium a ainsi mis dix ans à acquérir une liquidité significative. De ce fait, ces marchés sont parfois la cible de manipulations : une manipulation consiste à créer une pénurie artificielle de stock du sous-jacent, de sorte à faire gonfler les prix. Un exemple célèbre est la bulle de l'argent en 1979-1980; ces phénomènes sont apparus très tôt comme en témoigne [16].

### 7.1.3 Qui sont les acteurs sur ces marchés ?

On distingue deux catégories d'acteurs :

- Les producteurs et les consommateurs : ce sont les entreprises exposées au risque de baisse (dans le cas des producteurs) ou de hausse (dans le cas des utilisateurs) des prix des matières premières, et cherchant à se couvrir.
- Les investisseurs et les spéculateurs : ce sont les institutions financières (banques, fonds) cherchant à prendre positions sur ces marchés, à des fins commerciales (vente de produits de couverture) ou spéculatives. Ils interviennent rarement directement sur le marché physique.

### 7.1.4 Principaux facteurs

Les prix dépendent à la base du différentiel entre l'offre et la demande ainsi que de sa perception dans le futur. La qualité de l'information sur l'offre et la demande varie suivant les produits et d'une région

à l'autre ; par exemple, les montants des stocks de pétrole sont publiés chaque semaine aux Etats-Unis, ce qui n'est pas le cas dans le reste du monde. De nombreux facteurs affectent l'offre et la demande et ont ainsi une influence sur les prix au comptant et à terme des matières premières. Ils ne sont pas nécessairement indépendants entre eux et leurs importances respectives varient d'un produit à l'autre. On peut cependant en tenter une distinction :

- Facteurs économiques : les facteurs macro-économiques ont un poids évident, que ce soit des phénomènes cycliques comme les récessions, l'inflation et la variation des cours de change, ou des phénomènes à impact plus permanent, comme dernièrement l'entrée de la Chine comme importatrice de métaux, qui a provoqué une montée soutenue des prix.
- Facteurs physiques : conditions climatiques et météorologiques, logistiques et technologiques (techniques de forage pour le pétrole). Le climat est le plus important : suivant les produits, il a un impact sur la production ou la consommation et donc, dans les deux cas, il a un impact majeur sur les prix. Le prix du gaz naturel est particulièrement sensible aux conditions météorologiques court terme car sa consommation dépend du niveau de température ; les prévisions météo sont alors suivies de près par les traders.
- Facteurs politiques et sociaux : changements de réglementations, événements politiques, guerres, grèves. Ils ont une importance très forte sur le niveau de l'offre et sa prévision dans le futur, essentiellement court terme. Quelques exemples : du fait de la pénurie possible résultant des guerres d'Irak en 1991 et 2003, les prix à court et moyen terme du pétrole ont ainsi connu des sommets historiques ; les révoltes de 2002 en Côte d'Ivoire, le producteur le plus important de cacao, ont provoqué une montée des prix à terme ; la déréglementation a permis le développement de marchés à terme et dérivés sur le gaz naturel et l'électricité.
- Facteurs spéculatifs : ce sont les facteurs faisant dévier les prix de leur valeur fondamentale. Ils peuvent s'agir par exemple de rumeurs sur des événements pouvant affecter les prix, ou d'opérations de manipulation évoquées plus haut. On peut donc décomposer les prix à terme en une composante fondamentale (résultant du différentiel entre l'offre et la demande) et une composante spéculative. Ainsi, pendant la période de pré-guerre en Irak, les analystes décomposaient le prix du pétrole en sa composante fondamentale et un "war premium".

## 7.2 Analyse des prix

Les courbes de prix à terme sur matières premières présentent des formes différentes suivant les produits et suivant les périodes, comme l'illustrent les graphiques ci-dessous. Nous présentons ici les notions de base qui permettent d'analyser l'état et les variations de cette courbe.

A une date donnée  $t$  et pour une unité du sous-jacent, on note  $S(t)$  le prix au comptant et  $F(t, T)$  le prix d'un contrat à terme livrant le sous-jacent à une date future  $T$ . On note  $C(t_1, t_2)$  le coût de détention d'une unité du produit physique entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  (rassemblant les coûts de stockage, de transport et de financement, on le suppose déterministe).

### 7.2.1 Arbitrage cash-and-carry

Considérons une matière première *stockable*. On a la relation :

$$F(t, T) \leq S(t) + C(t, T) \quad (7.2.1)$$

En effet, si cette relation était violée, un arbitrage, dit *cash-and-carry*, consisterait à acheter le produit physique et à vendre le contrat à terme simultanément en  $t$  ; le produit serait alors livré à échéance du contrat en  $T$ . Contrairement aux instruments financiers classiques, l'opération inverse (reverse cash-and-carry) est très rarement réalisable en pratique et c'est pourquoi on n'a qu'une relation d'inégalité.

La notion de prix au comptant est en fait théorique pour la plupart des marchés, car il est rarement possible d'obtenir la livraison le jour même. Mais la relation (7.2.1) peut être étendue à un arbitrage entre deux contrats à terme :

$$F(t, T_2) \leq F(t, T_1) + C(T_1, T_2) \quad (7.2.2)$$

Les intérêts financiers, inclus dans  $C$ , sont supposés voisins du taux d'intérêt sans risque car le produit physique stocké peut être utilisé comme collatéral. Bien qu'étant un arbitrage, une telle opération n'est pas sans risque dans la réalité : la livraison finale du produit est soumise au risque de transport, très présente dans le cas du pétrole et du gaz. Certains produits sont de plus périssables et l'arbitrageur doit s'assurer que son état au moment de la livraison remplit les conditions du contrat à terme, auquel cas il devra payer un coût d'ajustement. Tenant compte de ces réalités, la relation (7.2.1) peut cependant être validée en ajoutant les coûts d'assurance dans  $C$ . Une telle relation n'est cependant plus valide dans le cas d'un produit non stockable comme l'électricité.

### 7.2.2 Rendement d'opportunité (convenience yield)

Le rendement d'opportunité est défini comme le bénéfice associé à la détention du produit physique entre deux dates  $t$  et  $T$  ; nous le notons  $Y(t, T)$ . En terme d'option réelle, il peut être formulé comme étant la valeur de l'option de consommation du produit à tout instant, pendant cette période. Il est défini par :

$$F(t, T) = S(t) + C(t, T) - Y(t, T) \quad (7.2.3)$$

Le *rendement d'opportunité net* est  $Y - C$ . Sa structure par terme peut être déduite directement de celle des prix à terme. Le rendement d'opportunité peut aussi s'interpréter comme le revenu tiré du

*prêt* du produit physique.  $Y$  est, de ce fait, souvent exprimé proportionnellement au prix, sous la forme  $Y(t, T) := \delta(t, T)S(t)$ , d'où le terme de *rendement*. Remarquons que, dans le cas de l'or, ce rendement est directement observable ; on l'appelle le *lease rate*, qui correspond en fait à la différence entre le rendement d'opportunité et le coût de stockage, et c'est de cette manière que les prix à terme de l'or sont cotés à Londres.

### 7.2.3 Report (contango) et déport (backwardation)

Une courbe de prix de contrats à terme est dite en *report* (*contango* en anglais) si les prix à terme sont supérieurs au prix au comptant. Elle est dite en *déport* (*backwardation*) dans le cas contraire, i.e. lorsque le rendement d'opportunité est supérieur au coûts de stockage (pour un produit stockable). Le deuxième membre de l'équation (7.2.1) correspond à la courbe "maximale" des prix à terme ; on l'appelle le *report maximum* ou *maximum contango*, ou encore *full carry*. Par contre, il n'y a pas de déport maximum ; le rendement d'opportunité peut être très élevé (la limite correspondant à des prix à terme à zéro). Notons qu'une telle définition n'est pas directement applicable dans le cas de courbes exhibant une saisonnalité forte, comme le gaz naturel, où il est plus judicieux de comparer des prix correspondant au même mois de livraison.

Une courbe en déport correspond en général à une situation de pénurie : en effet, la détention du produit physique a alors plus de valeur que sa détention dans le futur, d'où un rendement d'opportunité élevé ; c'est typiquement le cas du pétrole en périodes de tensions géopolitiques. A l'inverse, une courbe en report correspond à une situation de surplus. Deux théories s'affrontent pour expliquer le report et le déport : la théorie du déport normal et la théorie du stockage ; pour plus de détails, se reporter à [7] ; pour un autre point de vue, voir [17].

Sur la majorité des marchés, la courbe de prix à terme a tendance à s'inverser périodiquement, mais elle peut rester dans un des états pendant plusieurs années. Un exemple célèbre de faillite due à l'inversion de la courbe sur le pétrole est la débâcle de l'entreprise Metalgesellschaft en 1993. Cette entreprise avait alors construit un commerce lucratif en vendant des contrats de livraison à long terme, et sa stratégie de couverture reposait sur l'hypothèse que la courbe de prix resterait toujours en déport. Pour simplifier l'analyse, considérons un tel contrat, de maturité long terme  $T_N$  et de prix  $F(\cdot, T_N)$  livrant un baril en  $T_N$ . Une fois ce contrat vendu en 0, la stratégie de couverture consiste à prendre une position équivalente sur le premier contrat en vie de la courbe ; lorsque ce contrat expire, la position de couverture est revendue et reportée sur le contrat suivant, et ainsi de suite jusqu'à la livraison finale. Une telle stratégie s'appelle *stack-and-roll*. Les cash-flows sont ainsi :

$$\begin{array}{lll}
 \text{date } T_0 : & F(0, T_N) - F(0, T_1) & (\text{vente du contrat long terme}) \\
 \text{date } T_1 : & F(T_1, T_1) - F(T_1, T_2) & \\
 & \vdots & \\
 \text{date } T_n : & F(T_n, T_n) - F(T_n, T_{n+1}) & \\
 & \vdots & \\
 \text{date } T_{N-1} : & F(T_{N-1}, T_{N-1}) - F(T_{N-1}, T_N) & 
 \end{array}$$

et la réception du physique en  $T_N$ , par le contrat future  $F(\cdot, T_N)$ , permet d'assurer la livraison du contrat long terme. Les cash flows générés par cette stratégie étaient donc positifs si la courbe restait en déport, négatifs sinon. L'entreprise comptait sur le premier cas de figure, car cela faisait plusieurs années que la courbe de pétrole était en déport. La courbe s'est cependant inversée en 1993, et la taille de positions prises était telle que les appels de marge ne pouvaient plus être assurés par Metalgesellschaft.



**Fig. 7.1:** Composantes principales

## 7.2.4 Analyse en composantes principales

Après avoir interprété l'état de la courbe de prix à terme à une date donnée, nous cherchons à expliquer ses variations journalières. L'analyse (et ses résultats) est similaire à celle traditionnellement effectuée sur les courbes de taux d'intérêts. Afin d'extraire les facteurs explicatifs des mouvements de la courbe, nous effectuons une analyse en composantes principales. Notre exemple porte sur le pétrole brut coté sur le NYMEX, sur les deux premières années de maturités de la courbe et sur un historique de 6 ans (du 01/10/97 au 30/09/03).

Les éléments des vecteurs propres sont ramenés à des volatilités journalières, de sorte que les rendements journaliers puissent s'écrire :

$$\frac{\Delta F(t, T_i)}{F(t, T_i)} = \sum_{j=1}^p \sigma_{ij} C_t^j, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.2.4)$$

où  $C^1, \dots, C^p$  sont les composantes explicatives ( $p = 2$  ou  $3$  dans notre exemple ci-dessus), d'écart-type de 1. Pour chaque composante, les éléments  $\sigma_{ij}$  annualisés sont visualisés sur la figure 7.1 et le pourcentage de variance expliqué est indiqué dans la légende.

On constate que les deux premières composantes expliquent plus de 99% des variations. La première composante s'interprète comme un facteur de niveau, contribuant à faire varier les prix dans le même sens (mais à des amplitudes différentes, selon les volatilités). La deuxième composante est un facteur d'inversion de courbe, i.e. faisant varier les deux extrémités dans des directions opposées, alors que la troisième s'interprète comme un facteur de courbure ou de déformation.

Les résultats de l'ACP permettent de mettre en place une stratégie de couverture de risque de prix. Considérons un instrument ou un portefeuille portant sur  $n$  ( $n > p$ ) contrats à terme de la courbe. Nous notons  $V(t, F(t, \cdot))$  sa valeur, fonction du temps et des prix de la courbe. On souhaite couvrir le risque de prix linéaire de cet instrument, i.e. le risque en delta. Comme ce risque est expliqué par  $p$  facteurs, on a besoin exactement de  $p$  contrats pour couvrir ce risque. La stratégie consiste à choisir des contrats liquides (nous notons  $T_1 < \dots < T_p$  leurs maturités) et à déterminer leur quantités  $n_1, \dots, n_p$  à détenir ; typiquement avec  $p = 3$  facteurs, l'idée consiste à choisir un contrat court terme, un contrat moyen terme et un contrat long terme. La valeur du portefeuille ainsi couvert s'écrit :

$$H(t, F(t, \cdot)) = V(t, F(t, \cdot)) - \sum_{k=1}^p n_k F(t, T_k) \quad (7.2.5)$$

Nous notons  $\Delta_i := \partial V / \partial F^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) la sensibilité du portefeuille au prix à terme  $F^i$ . Le portefeuille est couvert face aux mouvements de la courbe de prix si sa sensibilité à chaque facteur explicatif est nulle :

$$\frac{\partial H}{\partial C^j} = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (7.2.6)$$

**Fig. 7.2:** Structure par terme de la volatilité implicite du gaz naturel en hiver et en été

Cette condition s'écrit successivement :

$$\sum_{k=1}^p n_k \frac{\partial F^k}{\partial C^j} = \frac{\partial V}{\partial C^j}, \quad j = 1, \dots, p \quad (7.2.7)$$

$$\sum_{k=1}^p \sigma_{kj} n_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial C^j} \frac{\partial V}{\partial F^i} \quad (7.2.8)$$

$$\sum_{k=1}^p \sigma_{kj} n_k = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} \Delta_i \quad (7.2.9)$$

Ecrit sous forme matricielle, avec  $\Sigma_{pn} := [\sigma_{ji}]$  et sa sous-matrice  $\Sigma_{pp} := [\sigma_{jk}]$ , le vecteur de quantités  $N := (n_1, \dots, n_p)'$  s'écrit :

$$N = \Sigma_{pp}^{-1} \cdot \Sigma_{pn} \cdot \Delta \quad (7.2.10)$$

### 7.2.5 Autres propriétés statistiques

Les prix des matières premières présentent des propriétés statistiques particulières, que l'on ne retrouve pas sur les autres marchés financiers. La prise en compte de ces propriétés est fondamentale pour aborder le problème de la modélisation. On rencontre les principaux phénomènes suivants :

- Du fait de l'équilibre à long terme entre l'offre et la demande, le prix au comptant a tendance à exhiber un *retour à la moyenne*, cette moyenne pouvant cependant varier au cours du temps.
- La *saisonnalité* des prix est un phénomène propre à certains marchés. Par exemple, le prix de l'essence est plus fort en été du fait de l'utilisation plus fréquente de l'automobile ; de même, le prix du gaz est plus fort en hiver du fait de la consommation plus importante de chauffage et d'électricité.
- Certains produits ont tendance à exhiber des *sauts de prix*. C'est le cas du gaz naturel et encore plus de l'électricité. En effet, le moins une matière première est stockable, le plus elle est propice à exhiber de tels sauts de prix car sa livraison dépend de la capacité de génération et de transmission : si, pour des raisons techniques ou de demande exceptionnelle, la capacité n'est plus suffisante pour assurer la demande, le prix explose.
- La figure 7.1 ci-dessus montre la volatilité du prix à terme croît lorsque l'on s'approche de sa maturité. Ce fait stylisé se rencontre sur toutes les matières premières et est communément nommé l'*effet Samuelson*. Ceci se comprend intuitivement du fait que l'arrivée d'information affecte principalement les prix sur le court terme, alors que sur le long terme les prix sont supposés retourner au niveau d'une certaine moyenne. Certains produits comme le gaz naturel présentent aussi une volatilité saisonnière : la volatilité du gaz spot est plus forte en hiver, du fait de sa consommation plus importante et de sa forte sensibilité à la température ; ceci se reproduit sur la structure par terme des volatilités implicites, comme l'illustre la figure 7.2 ci-dessous, les pics de saisonnalité se retrouvant sur les contrats expirant en hiver.

## 7.3 Produits dérivés sur matières premières

### 7.3.1 Swaps

Les swaps sont, avec les contrats à terme, les instruments dérivés les plus courants sur les matières premières. Présentons leur principe à travers un exemple : une compagnie aérienne s'approvisionne tous les jours en carburant et souhaite éliminer l'incertitude quant à son coût, en payant un prix fixe. Pour ce faire, elle entre dans un swap d'une durée d'un an pendant laquelle, à la fin de chaque mois et pour un volume fixé :

- elle paie le prix fixe, par exemple \$ 25/bbl.
- elle reçoit la partie flottante correspondant à la moyenne journalière, réalisée au cours du mois, d'un indice de prix spot du carburant. En effet, comme il s'agit d'un approvisionnement journalier, l'entreprise sera plus intéressée de se couvrir contre le prix *moyen* ; c'est le cas de la plupart des matières premières. L'indice est en général soit un prix coté sur un marché, soit un prix de publication indépendante, résultant d'une enquête effectuée auprès des principaux intervenants.

Comme pour les swaps de taux d'intérêt, la *valeur* du swap est la différence entre les valeurs présentes de la jambe flottante et de la jambe fixe. Déterminer le prix du swap consiste à proposer un prix pour la jambe fixe. Il existe ainsi, pour chaque produit, une courbe de prix swaps, correspondant aux prix de la jambe fixe pour les différents mois de paiement.

Beaucoup de produits pétroliers ne possèdent pas de marché listé de contrats futurs, mais leur marché de swaps OTC peut être très liquide. Lorsqu'il existe déjà un marché listé de futurs, l'indice du swap est souvent le *prompt-month* (i.e. le prix du contrat futur de maturité la plus courte) sur l'Energie, ou le prix cash sur les métaux ; il en résulte que, par absence d'arbitrage, le prix du swap peut dans ce cas être calculé à partir des prix des contrats futurs. Sur l'Energie cependant, les marchés des swaps OTC sont plus liquides sur le long terme que les contrats futurs.

### 7.3.2 Options Asiatiques

Les options sur moyenne (Asiatique) constituent, avec les options sur futurs, la classe la plus répandue d'options sur les matières premières. Le principe est le même que les options Asiatiques classiques et la moyenne sous-jacente est calculée de la même manière que pour les swaps. Dans l'exemple ci-dessus, si la compagnie aérienne souhaite se couvrir contre le risque de hausse du carburant mais aussi bénéficier d'une éventuelle baisse, elle peut acheter un call comportant les mêmes caractéristiques que le swap décrit ci-dessus.

### 7.3.3 Options sur spread

Le risque de spread est très important dans les matières premières. On distingue plusieurs catégories de spreads :

- Spread calendaire : différence entre deux prix à terme sur le même produit, de maturités différentes. Une entreprise de stockage est typiquement exposée à ce risque.
- Spread géographique (*locational spread*) : différence entre les prix d'un même produit livré en deux points géographiques différents. Une entreprise de transport est par exemple soumise au risque de ce type de spread.
- Spread inter-commodity : différence entre les prix de deux produits différents. En général, ces deux produits possèdent un lien physique, l'un résultant de la transformation de l'autre. Sur le pétrole, un *crack spread* correspond à la différence entre le prix du brut et celui d'un ou plusieurs produits issus de son raffinage. Un *frac spread* correspond à la différence entre les prix du gaz naturel et du

propane. On parle de *crush spread* pour désigner le rapport entre le prix des graines de soja et le prix combiné de la farine et l'huile de soja. De même, le rapport entre les prix du gaz naturel et de l'électricité est désigné par le *spark spread*. Les entreprises de raffinage et les centrales électriques sont des exemples d'intervenants soumis à ce type de risque.

Il existe ainsi de nombreux acteurs soumis au risque de spread, d'où une demande pour les options sur spread. Pour plus d'exemples sur l'Energie, se référer à [9] et [10]. Du fait de la continuité du processus concerné, le payoff de telles options spread sera en général basé sur la différence entre deux moyennes de prix.

### 7.3.4 Options exotiques

Le marché des options exotiques sur les matières premières reste encore assez restreint. Il est bien sûr impossible de faire une présentation générale de ces options, mais une originalité des matières premières est l'existence de contrats comportant une clause optionnelle sur le prix *et* le volume ; de telles options sont rassemblées sous le terme générique de *swing options* ou options Take-or-Pay (ToP). Nous présentons ici un exemple simplifié dans le cas du gaz naturel : prenons le cas d'une administration souhaitant se couvrir contre un sur-coût du gaz, servant à son chauffage. On lui propose le contrat suivant :

- Période : année 2004.
- Le contrat offre, chaque jour, l'option d'acheter, pour un prix (par unité) fixé  $K = \$4/GJ$ , un volume inférieur à un volume journalier maximal  $V_d^{max} = 10000$  GJ. Le volume total maximal est alors  $V^{max} = 366 \times V_d^{max}$  pour l'année.
- Take-or-Pay ToP = 90% : à la fin de la période, l'administration devra avoir exercé au moins ToP% du volume total maximal  $V^{max}$ , sinon elle devra payer une pénalité  $\pi$  par unité de volume manquante.

On peut remarquer deux cas extrêmes :

- Si la pénalité  $\pi$  est nulle, la dernière clause est inutile et l'option swing est une série simple d'options. En effet, lorsque le payoff est positif, le client aura toujours intérêt à exercer le volume journalier maximal.
- Si la pénalité  $\pi$  et le ToP sont élevés (typiquement ToP de 100%), alors l'administration se voit contrainte d'exercer la totalité du volume journalier maximal. En effet, tout volume non exercé devrait alors être payé à un prix fort. Ce cas se ramène donc à un swap classique.

Ainsi, l'option swing se situe "entre" un swap et une série d'options classiques. Mais la valorisation de ce type d'instrument est complexe et constitue un domaine de recherche actif. De plus, certains contrats imposent un nombre maximum d'exercices (par exemple 300 sur les 366 jours de la période). Pour un exemple d'approche, voir [6].

## 7.4 Modélisation des prix à terme de matières premières

La littérature des commodities a tendance à emprunter des modèles issus des taux d'intérêt. En effet, il existe deux principales familles de modèles :

- Modèles spot : ils consistent à modéliser le prix au comptant du produit physique et le rendement d'opportunité instantané, impliquant ainsi la courbe de prix à terme.
- Modèles de courbe de prix : ils consistent à spécifier directement, dans un cadre HJM, l'évolution des prix des contrats à terme.

La première classe de modèle présente un inconvénient majeur pour la grande majorité des produits : les deux variables modélisées (prix spot et rendement d'opportunité) ne sont en général pas observables (sauf pour certains produits comme l'or). Le prix spot est en effet plus une notion théorique car très peu

de produit sont délivrables le jour même ; les prix réellement observés sont ceux des contrats à terme. De plus, un modèle spot ne pourra en général pas reconstituer parfaitement la courbe de prix à terme. Un modèle de courbe du type HJM est donc un meilleur candidat. Cependant, la relation entre modèle spot et modèle de courbe apporte un intérêt analytique. Nous présentons ici deux exemples classiques de modèles de chacune de ces classes. L'objectif n'est pas ici d'en donner une analyse détaillée mais plutôt de souligner leurs points de départ, qui sont couramment utilisés. Ceux-ci permettent d'étendre alors les modèles classiques en en construisant des versions plus sophistiquées, par exemple en incorporant des composantes de sauts.

#### 7.4.1 Un exemple simple de modèle de courbe : le modèle de Schwartz 1-facteur

Le modèle 1-facteur de Schwartz suppose que la courbe de prix à terme suit la diffusion HJM suivante :

$$dF(t, T) = \sigma \exp^{-\alpha(T-t)} F(t, T) dW_t \quad (7.4.1)$$

où  $W$  est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre. Il s'agit d'un mouvement brownien géométrique généralisé dont la fonction de volatilité cherche à capturer l'effet Samuelson décrit plus haut. On en déduit la dynamique du prix au comptant :

$$dS_t = \alpha(\theta(t) - \ln S_t) S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (7.4.2)$$

$$\theta(t) = \ln F(0, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \ln F(0, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - \exp^{-2\alpha t}) \quad (7.4.3)$$

On retrouve alors une version généralisée du modèle de Schwartz spot 1-facteur, où le prix d'équilibre (ici  $\theta(t)$ ) est supposé constant au cours du temps. Ce dernier modèle avait le défaut de ne générer que des courbes monotones par rapport aux maturités des prix à terme. En partant d'un modèle de courbe, on peut ainsi couvrir une classe plus vaste de courbes (notamment le cas avec saisonnalité des prix).

On remarque ainsi que le paramètre  $\alpha$ , capturant l'effet Samuelson dans (7.4.1), correspond au paramètre de retour à la moyenne du prix au comptant dans (7.4.2). Le phénomène de retour à la moyenne du prix spot se retrouve alors dans la volatilité des prix à terme.

#### 7.4.2 Exemple de modèle spot 2-facteurs : les modèles de Gibson-Schwartz et Schwartz-Smith

Il s'agit en fait de deux spécifications différentes du même modèle. Nous les présentons successivement.

Le modèle de Gibson et Schwartz, introduit dans [5], est un exemple classique de modèle spot à deux facteurs. Le prix spot suit un mouvement brownien géométrique et le rendement d'opportunité instantané suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^1 \quad (7.4.4)$$

$$d\delta_t = \kappa(\bar{\delta} - \delta_t) dt + \sigma_\delta dW_t^2 \quad (\kappa > 0) \quad (7.4.5)$$

$$\langle dW^1, dW^2 \rangle_t = \eta dt \quad (7.4.6)$$

Les auteurs supposent que le produit physique spot est directement échangé. Par contre, le rendement d'opportunité n'est pas échangé ; la probabilité risque neutre n'est alors pas unique et dépend de l'aversion

au risque. Une fois celle-ci spécifiée, la dynamique ajustée au risque s'écrit :

$$dS_t = (r - \delta_t)S_t dt + \sigma_S S_t d\tilde{W}_t^1 \quad (7.4.7)$$

$$d\delta_t = (\kappa(\bar{\delta} - \delta_t) - \lambda_\delta)dt + \sigma_\delta d\tilde{W}_t^2 \quad (7.4.8)$$

$$\langle d\tilde{W}^1, d\tilde{W}^2 \rangle_t = \eta dt \quad (7.4.9)$$

où le taux court est supposé constant et  $\lambda_\delta$  est la prime de risque liée au rendement d'opportunité, supposée constante.

Le modèle de Schwartz et Smith [15] propose une autre approche qui consiste à décomposer le prix spot en un prix court terme et un prix long terme. Le log-prix court terme est modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec une moyenne nulle, reflétant ainsi les déviations du prix spot autour d'un prix long terme qui est modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$\ln S_t = c_t + l_t \quad (7.4.10)$$

$$dc_t = -\alpha c_t dt + \sigma_c dW_t^1 \quad (\alpha > 0) \quad (7.4.11)$$

$$dl_t = \mu_l dt + \sigma_l dW_t^2 \quad (7.4.12)$$

$$\langle dW^1, dW^2 \rangle_t = \rho dt \quad (7.4.13)$$

Comme aucune des deux variables d'état ne correspond à un actif directement échangé, le passage à la probabilité risque-neutre requiert ici aussi la spécification d'une prime de risque pour chacune d'elles, notées  $\lambda_c$  et  $\lambda_l$ , et supposées constantes. La dynamique s'écrit alors :

$$dc_t = (-\alpha c_t - \lambda_c)dt + \sigma_c d\tilde{W}_t^1 \quad (7.4.14)$$

$$l_t = (\mu_l - \lambda_l)dt + \sigma_l d\tilde{W}_t^2 \quad (7.4.15)$$

$$\langle d\tilde{W}^1, d\tilde{W}^2 \rangle_t = \rho dt \quad (7.4.16)$$

On constate que les modèles sont équivalents en identifiant les coefficients :

$$\begin{aligned} \kappa &= \alpha \\ \sigma_S &= \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_l^2 + 2\rho\sigma_c\sigma_l} \\ \sigma_\delta &= \alpha\sigma_c \\ \eta &= \frac{\sigma_c + \rho\sigma_l}{\sigma_S} \\ r - \frac{\sigma_S^2}{2} - \bar{\delta} &= \mu_l - \lambda_l - \lambda_c \\ \lambda_\delta &= \alpha\lambda_c \end{aligned}$$

On suppose les taux d'intérêt déterministes, de sorte que prix à terme et prix futures soient équivalents. Choissant la spécification de Schwartz et Smith, la courbe de prix à terme générée par le modèle a la forme analytique suivante :

$$\begin{aligned} \ln F(0, T) &= \exp^{-\alpha T} c_0 + l_0 + A(T) \\ A(T) &= (\mu_l - \lambda_l)T - (1 - \exp^{-\alpha T}) \frac{\lambda_c}{\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( (1 - \exp^{-2\alpha T}) \frac{\sigma_c^2}{2\alpha} + \sigma_l^2 T + 2(1 - \exp^{-\alpha T}) \frac{\rho\sigma_c\sigma_l}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Pour plus de détails et une discussion, se reporter à [15].

# Bibliographie

- [1] BJORK T. & C.LANDÉN (2000) : On the Term Structure of Futures and Forward Prices, *document de travail*.
- [2] CLEWLOW L. & C.STRICKLAND (2000) : Energy Derivatives, Pricing and Risk Management, *Lacima Publications*.
- [3] CORTAZAR G. & E.SCHWARTZ (1994) : The Valuation of Commodity-Contingent Claims, *The Journal of Derivatives*.
- [4] FEDERAL RESERVE BANK OF CHICAGO (1995) : Energy Derivatives, *product summary*.
- [5] GIBSON R. & E.SCHWARTZ (1990) : Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims, *Journal of Finance*.
- [6] JAILLET P. & AL. (2001) : Valuation of Commodity-Based Swing Options, *document de travail*.
- [7] LAUTHIER D. & Y.SIMON (2001) : Marchés dérivés de Matières Premières et Gestion du Risque de Prix, *Economica*.
- [8] LAUTHIER D. (1998) : Les opérations de Metallgesellschaft sur les marchés à terme de produits pétroliers : spéculation ou couverture? *Finance Contrôle Stratégie*, vol.1 no.3.
- [9] NEW YORK MERCANTILE EXCHANGE : A Guide to Energy Hedging.
- [10] NEW YORK MERCANTILE EXCHANGE : Crack Spread Handbook.
- [11] NEW YORK MERCANTILE EXCHANGE : Risk Management with Natural Gas Futures and Options.
- [12] SCHWARTZ E. (1997) : The Stochastic Behavior of Commodity Prices : Implications for Valuation and Hedging, *Journal of Finance*.
- [13] SCHWARTZ E. (1998) : Valuing Long-Term Commodity Assets, *Financial Management*, vol.27 no.1.
- [14] SCHWARTZ E. & K.R.MILTERSEN (1998) : Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- [15] SCHWARTZ E. & J.E.SMITH (2000) : Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices, *Management Science*, vol.46, no.7.
- [16] SIKORZEWSKI W. : Les Opérations de Manipulation des Marchés à Terme des Matières Premières au XIXème Siècle, *document de travail*.
- [17] THILLE H. : Future-Spot Spread as Returns on Commodity Loans, *document de travail*.
- [18] UNGER G. (2002) : Real Options and Flexibility in Power Production, *technical paper*.

## Annexe 1 : application à la valorisation des options réelles

De nombreux actifs physiques peuvent être valorisés de manière similaire aux options financières, car leur utilisation s'apparente à l'exercice d'une ou plusieurs options. De plus, une telle méthode de

valorisation permet de d'optimiser la gestion de tels actifs. Les méthodes classiques de valorisation des options financières ne peuvent cependant pas s'appliquer directement pour deux principales raisons :

- La valorisation d'un actif physique est beaucoup plus complexe que celle d'une option financière en raison de l'existence de contraintes opérationnelles et d'une marge d'incertitude quant à la quantité qu'un tel actif peut produire et sous quelles conditions il sera effectivement "exercé". Certaines de ces conditions peuvent cependant parfois être négligées, en contreparties de quoi la valorisation se doit d'être conservatrice.
- La condition fondamentale d'absence d'arbitrage n'est pas vérifiée car le sous-jacent (l'actif physique) n'est en général pas échangé. Pour l'appliquer, il est nécessaire de trouver un actif échangé dont la valeur est parfaitement corrélée à celle de l'actif physique, ce qui n'est en général pas le cas. On peut cependant en pratique s'approcher d'une telle condition pour une certaine classe d'actifs, en particulier ceux produisant un produit pour lequel il existe un marché coté. Par exemple, la valeur d'un puits de pétrole est directement liée au revenu tirée de sa production de pétrole, dont on peut observer les prix à terme sur le marché.

Le tableau ci-dessous donne des exemples d'actifs physiques avec les classes d'options auxquelles ils s'apparentent.

**Tab. 7.1:** Exemples d'options réelles

Actif physique	Option correspondante	Condition d'exercice
Puits de pétrole	Série de calls	Production lorsque le prix du pétrole est supérieur au coût d'extraction
Générateur électrique	Série d'options sur spark spread	Production lorsque la différence de prix entre le gaz naturel et l'électricité est supérieure au coût de génération (heat rate)
Réseau de transport ou de transmission	Série d'options sur spread géographique	Le réseau est utilisé si le profit généré par l'achat et la vente du produit aux deux points est supérieur au coût du transport
Mine de cuivre	Série de calls	Extraction lorsque le prix du cuivre est supérieur au coût d'exploitation



**Annexe 2 : liste des abréviations**

Abréviation	Nom du marché
CBOT	Chicago Board of Trade
CME	Chicago Mercantile Exchange
COMEX	Commodity Exchange
EEX	European Energy Exchange
IPE	International Petroleum Exchange
LIFFE	London International Financial Futures and Options Exchange
LBMA	London Bullion Market Association
LME	London Metal Exchange
MATIF	Marché à Terme International de France
NEMMCO	National Electricity Market Management Company Limited
NYBOT	New York Board of Trade
NYMEX	New York Mercantile Exchange
TOCOM	Tokyo Commodity Exchange



## Chapitre 8

# LES MODÈLES CLASSIQUES DE TAUX

L'étude de la structure par terme des taux d'intérêt est d'une grande importance pratique, qui révèle les anticipations des agents sur les risques à venir. En particulier, la compréhension des déformations de la courbe permet d'asseoir une stratégie de gestion de trésorerie (choix de la durée de placement, spéculation sur la structure des taux, éléments de couverture). La volatilité accrue des taux d'intérêt rend techniquement très important tout progrès allant dans le sens d'une plus grande maîtrise de ces problèmes.

Modéliser les déformations futures de la courbe des taux est un enjeu majeur dans de nombreux domaines de la finance, tant pour gérer les risques de taux affectant le bilan des banques, que pour évaluer et couvrir les nombreux produits financiers auxquels recourent les marchés pour faire face au risque de taux et plus généralement de change.

### 8.1 La formation des taux d'intérêt

Précisons<sup>1</sup> la formation des taux d'intérêt. Les taux court terme sont déterminés par la politique monétaire des banques centrales. Par contre, les taux long terme sont déterminés par l'équilibre entre prêteurs et emprunteurs.

#### 8.1.1 L'importance de la Banque Centrale.

##### Rôle de la Banque Centrale.

La Banque Centrale est un établissement financier public, qui a le monopole de l'émission des billets. Une Banque Centrale est donc associée à une monnaie, la BCE (Banque Centrale Européenne pour l'Euro ou Federal Reserve pour le dollar. Toutes les autres banques ont des comptes à la banque centrale, qui servent notamment pour les mécanismes de compensation interbancaire.

Les banques se refinancent en permanence auprès de la Banque Centrale. Aujourd'hui ces banques sont indépendantes, et un partage de rôle d'effectue entre elles et les gouvernements. La Banque Centrale a pour objectif la stabilité des prix, et celle des taux de change, tandis que le gouvernement doit veiller sur la croissance et sur l'emploi.

---

<sup>1</sup>Cette section a été rédigée par Yann Samuelides (CMAP,CAI)

## Instruments de la politique monétaire

Depuis la libéralisation des marchés financiers, les banques centrales ont pratiquement abandonné les instruments directs comme l'encadrement du crédit ou la fixation autoritaire des taux de change <sup>2</sup> et procède essentiellement à une action directe par les taux d'intérêt court terme, puisqu'elle est essentiellement prêteuse aux autres banques à un horizon très court. intuitivement, si elle procède à une injection massive de monnaie centrale, il devient plus facile de se procurer de l'argent, les taux interbancaires à court terme baissent, mais il peut y avoir inflation puisque l'argent devient un bien moins cher en valeur relative.

Aujourd'hui les montants négociés sur les marchés financiers, notamment à cause des fonds de retraite, que la force de frappe de la banque centrale, tant sur l'évolution de la masse monétaire que sur celle du taux de change est limitée. On comprend alors toute l'importance des effets de signaux et des actions psychologiques de la banque centrale. Un exemple emblématique est fourni par le président de la Federal reserve Alan Greenspan, dont les moindres mots ont longuement pesé sur les marchés financiers du monde entier.

## Champ d'action de la politique monétaire

La banque centrale gère la liquidité à très court terme pour empêcher l'inflation. Son action dirige les taux courts du marché interbancaire. Cependant, elle a nécessairement une influence sur les taux à plus long terme qui dirigent les décisions d'investissement. C'est l'origine du débat entre ceux qui pensent que la politique monétaire doit avoir comme objectif la seule lutte contre l'inflation, et ceux qui pensent qu'elle doit également intégrer des considérations portant sur la croissance et l'emploi.

### 8.1.2 Formation des taux longs et anticipation des agents

Les taux à long terme sont des taux négociés, c'est à dire qu'ils résultent de l'équilibre de l'offre et de la demande des capitaux à long terme. Notons que les emprunteurs les plus importants sont les états. Ils quantifient en particulier le compromis entre le placement financier à long terme et l'investissement dans un projet industriel.

Les taux longs ont souvent été vus comme la moyenne géométrique des taux courts anticipés, par définition de ces derniers. A cause de la prime d'échéance qui traduit que les agents ont une préférence pour le présent, afin de disposer de leurs capitaux le plus rapidement possible, le taux long est en général supérieur aux taux courts, mais la pente de la courbe peut s'inverser, et ce pendant des périodes durables ( 87-91 en France par exemple).

Les taux long terme dépendent à la fois des anticipations d'inflation et de croissance, suivant des mécanismes complexes, dont voici quelques exemples :

- En 1997, lorsque le Royaume Uni a proclamé l'indépendance de sa banque centrale, les taux longs anglais ont baissé car les agents ont anticipé une politique monétaire plus efficace et une inflation mieux maîtrisée.
- En 1989, les agents anticipés avec raison la fin d'un cycle de croissance dans les pays industrialisés. Les taux à long terme se sont alors détendus, alors que la politique monétaire restrictive des banques centrales maintenait des taux courts élevés : on a assisté à une inversion de la courbe.
- De manière générale, lorsque les déficits publics augmentent, les taux d'intérêt ont tendance à augmenter, car l'épargne disponible pour les projets d'investissement a tendance à être captée par les émissions de l'Etat.

---

<sup>2</sup>La crise de 1992-1993 contre les monnaies européennes a signé pratiquement la fin du serpent monétaire européen

## Un peu d'histoire

Jusque vers les années 70, les banques centrales agissaient essentiellement par l'encadrement du volume de crédit et la courbe des taux était relativement stable. Pour combattre la tendance permanente à l'inflation, elles ont choisi de modifier leur action ; elles ajustent désormais le taux court au jour le jour, dont les variations se transmettent ou non selon les cas aux taux longs. Il en résulte que la courbe des taux est beaucoup plus mobile et le risque de taux auquel sont exposées les grandes institutions industrielles et financières est beaucoup plus complexe, ce qui a conduit au développement des marchés de dérivés de taux.

En même temps, la plus grande liquidité des produits de taux, la création d'un grand nombre de nouveaux produits non nécessairement optionnels a fait rentrer le marché des taux d'intérêt dans la sphère financière très active, et a conduit à une nouvelle vue ( généralisant la théorie des anticipations rationnelles) sur les liens qui existent entre les taux de différentes maturités. L'absence d'opportunité d'arbitrage entre les obligations de différentes échéances entraîne une liaison très forte entre les taux de différentes maturités, qui implique que les déformations futures ne peuvent affecter de manière absolument quelconque l'ensemble des taux.

Insistons toutefois sur le fait que cette vue issue de l'arbitrage est pertinente pour la gestion au jour le jour des fluctuations des taux d'intérêt, mais ne remplace évidemment pas l'analyse sur les fondamentaux de l'économie qui explique les grandes tendances des mouvements.

### 8.1.3 Spreads et qualité de signature

A tout emprunt est associé un risque de défaut. Il est considéré comme nul lorsque l'emprunteur est l'Etat américain ou l'Etat français, mais peut devenir important lorsqu'il s'agit d'une entreprise proche de la faillite ou d'un pays émergent.

Le **spread** représente alors le différentiel de taux d'intérêt exigé par le prêteur pour compenser la mauvaise qualité de signature de l'emprunteur. Par exemple,

- Au moment de la crise asiatique en 1998, le spread entre la dette de l'Etat coréen libellée en dollars américains et celles des Etats-Unis est passé de 50 bpoints de base ( c'est à dire 0.5%) à 800 points de base.
- Lors du passage à l'an 2000, le spread entre le taux à un jour sur le marché interbancaire européen et le taux directeur de la banque centrale, habituellement négligeable est passé à 70 points de base en raison des anticipations du bug.

Le problème de modéliser ce spread est source de beaucoup d'activité dans les centres de recherche des banques, mais c'est un thème entier à développer. Dans la suite de ce cours, nous ne le prendrons pas vraiment en compte.

### 8.1.4 Les principaux taux fixes ou variables du marché français

#### Les taux fixes

- T.M.P. : LE TAUX MOYEN PONDÉRÉ

Il est calculés par la Banque de France qui recense toutes les opérations de prêts effectués le jour J et d'une durée de 1 jour. Leur échéance est donc en J+1.

Ces opérations sont faites par les Opérateurs Principaux de Marché(OPM). La Banque de France en déduit un Taux Moyen Pondéré des montants, arrondi au 1/16 le plus proche. Ce taux est publié en J+1 à 11h30. Après le passage à l'EURO, le TMP - Taux Moyen Pondere - est remplacé par l'EONIA - Euro OverNight Index Average - (taux exprimé avec deux décimales); le code mnemonique de l'EONIA est EON .

- T4M : LE TAUX MOYEN MENSUEL DU MARCHÉ MONÉTAIRE (OU TMM) est la moyenne arithmétique des TMP du mois civil considéré. Les TMP des jours fériés sont calculés avec les taux au TMP de la veille ouvrée. Le T4M du mois  $i$  est publié le premier jour ouvré du mois  $i+1$ .
- TAM : LE TAUX ANNUEL MONÉTAIRE correspond au taux de rendement d'un placement mensuel à intérêts composés, renouvelé chaque fin de mois au T4M, sur les 12 derniers mois écoulés. Le TAM se calcule en fonction du nombre de jours exact de chaque mois et d'une année de 360 jours.

Mois	Nbrejours	T4M	
$N - 12$	31	8	$P1 = 1 + 8x31/360$
$N - 11$	30	7	$P2 = 1 + 7x30/360$
...	....	..	.....
$N - 1$	31	6	$P12 = 1 + 6x31/360$
		$1 + TAM$	$= P12 \times ...12$

Chaque mois, dès la publication du T4M, un nouveau TAM est calculé et publié.

- TAG : LE TAUX ANNUEL GLISSANT est une généralisation du TAM, mais au lieu de capitaliser 12 T4M, on capitalise 12 périodes mensuelles glissantes dont la durée est égale à celle du mois civil qui précède l'échéance de ces mois glissants. Chaque jour, 12 TAG peuvent être calculés : du TAG 1 mois au TAG 12 mois. Le TAG 12 mois calculé au dernier jour du mois est le TAM du mois  $i$ . De même, le TAG 1mois calculé au dernier jour du mois  $i$  est le T4M du mois  $i$  multiplié par 365 et divisé par 360.
- THE C'est le Taux Hebdomadaire de rendement des Emprunts d'Etat à long terme sur le marché secondaire. Il s'agit de la moyenne des taux de rendement actuariels nets acheteurs avec frais unitaire (sans application du minimum de courtage), calculés à partir du premier cours de bourse des emprunts d'Etat faisant partie d'un échantillon mis à jour quotidiennement. Cette moyenne est pondérée par les encours en valeur nominale. Tous les calculs intermédiaires sont conduits sans arrondis à partir des taux individuels de chaque emprunt exprimés avec deux chiffres décimaux sur lesquels on a ensuite pratiqué un arrondi commercial.
- TME Le Taux Mensuel de rendement des Emprunts d'Etat à long terme sur le marché secondaire. Le TME d'un mois est la moyenne arithmétique simple des THE du mois. Cette moyenne comprend tous les vendredis du mois considéré qu'ils soient ouvrés ou non.
- THO Le Taux Hebdomadaire Obligataire sur le marché primaire est calculé à partir des taux actuariels bruts (unitaires et sans frais) des émissions obligataires à taux fixe d'une semaine. Les taux sont pondérés par les volumes de chaque émission (en valeur nominale).
- TMO Le Taux Mensuel Obligataire sur le marché primaire est calculé à partir des émissions intervenant dans les THO de tous les jeudis appartenant au mois considéré.

### Les taux variables, et taux révisables

- TAUX PIBOR ET EURIBOR

Les taux PIBOR (Paris InterBank Offered Rate) sont des taux moyens pratiqués sur le marché français par certaines banques et pour 12 échéances de 1 à 12 mois. Ils sont exprimés en base 360.

L'AFB calcule ces taux de la manière suivante : pour chaque échéance, les taux constatés à 11h00 pour des signatures nationales de 1ère catégorie. Les 3 plus élevés et les 3 plus bas sont éliminés. La moyenne des restants constitue le PIBOR qui est publié à 11h30.

- Passage à l'EURO :

le PIBOR - Paris InterBank Offered Rate - est remplacé par l'EURIBOR - EURo InterBank

Offered Rate - (taux exprimé avec trois décimales) qui remplace les autres xIBOR (FIBOR pour l'Allemagne, MIBOR pour l'Espagne, BIBOR pour la Belgique, ...) de la zone euro ; le code ISIN de l'EURIBOR sera EU 000965993 7

- La recommandation de l'ISDA, validée par l'IME, préserve la continuité des conditions pour la France
  - EURO MONEY MARKETS = nombre de jours exact / 360
  - EURO BOND MARKETS = nombre de jours exact / nombre de jours exact
 Les conditions standards utilisées par les intervenants du marché sont les suivantes
  - FRF PIBOR = nombre de jours exact / 360
  - FRF TAM et TAG = nombre de jours exact / nombre de jours exact
  - FRF T4M ou TMP = nombre de jours exact / 360
  - xxx LIBOR - BBA = nombre de jours exact / 360 (sauf IEP, BEF et PTE = nombre de jours exact / 365)
  - ESP MIBOR = nombre de jours exact / 360
  - IEP DIBOR = nombre de jours exact / 365
  - PTE LISBOR = nombre de jours exact / 365
  - BEF BIBOR = nombre de jours exact / 365

## 8.2 Taux d'intérêt et absence d'arbitrage

L'objectif de ce chapitre est de montrer sur plusieurs exemples le type de contraintes qui pèsent sur les différents taux et leurs déformations. Le modèle de Vasicek que nous développons en détail joue pour les modèles de taux le même rôle que la formule de Black et Scholes pour les modèles d'action.

Nous développons dans le chapitre suivant un autre point de vue sur ces questions, ainsi que quelques applications à l'évaluation des options sur obligations ou sur taux d'intérêt.

### 8.2.1 Généralités sur les taux d'intérêt

Précisons rapidement les notations relatives aux différentes notions de taux d'intérêt.

**Définition 8.2.1**     $\diamond$  Un zéro-coupon d'échéance  $T$ ,  $B(t, T)$  est le prix en  $t$  de 1Euro payé en  $T$   
 $\diamond$  Le taux actuariel  $\widehat{R}(t, \theta)$  en  $t$  de maturité  $\theta$  est le taux annualisé auquel est prêté l'argent entre les dates  $t$  et  $t + \theta$ , soit

$$B(t, t + \theta) = \frac{1}{(1 + \widehat{R}(t, \theta))^\theta} \quad (8.2.1)$$

$\diamond$  Le taux continu de maturité  $\theta$  est défini par

$$R(t, \theta) = \text{Ln}[1 + \widehat{R}(t, \theta)] = \frac{1}{\theta} \text{Ln} B(t, t + \theta) \quad (8.2.2)$$

$\diamond$  Le taux linéaire, surtout utilisé pour des maturité de moins d'un an est noté  $L(t, \theta)$

$$B(t, t + \theta) = \frac{1}{(1 + \theta L(t, \theta))} \quad (8.2.3)$$

$\diamond$  Le taux court  $r_t$  est la limite des taux continus  $R(t, h)$  quand la maturité tend vers 0.

$$r_t = -\partial_T (\text{Ln} B(t, T))_{T=t} \quad (8.2.4)$$

$\diamond$  La **courbe des taux** est la fonction qui donne les différents taux de la date  $t$  en fonction de leur maturité  $\theta$ , soit  $[\theta \rightarrow R(t, \theta)]$ . La courbe est plate si cette fonction est constante.

En général sur le marché français, notamment sur le marché obligataire, il n'existe pas beaucoup de zéro-coupons, mais des **obligations**, c'est à dire des titres émis par l'Etat français pour financer sa dette, qui versent des coupons  $C_i$  exprimés en pourcentage du nominal à des dates  $T_i$ , généralement annuelles, fixées par contrat, et un nominal à l'échéance de l'obligation  $T = T_n$ . En absence d'arbitrage, la valeur financière d'une obligation à la date  $t$ , dont le nominal est ramené à 100 est la somme actualisée des flux futurs, soit

$$O(t, T) = \sum_{i=0}^n C_i B(t, T_i) + 100B(t, T) \quad (8.2.5)$$

Lorsque la courbe est plate,  $B(t, T_i) = (1 + \hat{R})^{-(T_i - t)}$  et  $O(t, T)$  est une fonction strictement décroissante de  $\hat{R}$ ,  $F(\hat{R})$ .

Lorsque la courbe n'est pas plate, on associe à une obligation son **taux de rendement actuariel** implicite défini par

$$O(t, T) = F(TA(t, T - t))$$

## 8.2.2 Prix et taux à terme

Nous avons vu que les produits dérivés les plus simples sont les contrats à terme, dont la valeur en absence d'opportunité d'arbitrage, peut être déduite des prix de marché aujourd'hui, sans référence à un modèle. Les opérations de prêts et d'emprunts à terme sont des opérations très courantes, qui joueront un rôle central dans la modélisation des taux.

Nous précisons quelques notations.

**Définition 8.2.2**     $\diamond$  Un zéro-coupon forward est la valeur fixée en  $t$  pour le montant à payer en  $T$  pour garantir  $1F$  en  $T + \theta$  qui par arbitrage vaut

$$B_t(T, T + \theta) = \frac{B(t, T + \theta)}{B(t, T)} \quad (8.2.6)$$

$\diamond$  Le taux forward continu, fixé en  $t$ , pour l'échéance  $T$  et la maturité  $\theta$ , soit

$$R_t(T, \theta) = -\frac{1}{\theta} \text{Ln} B_t(T, T + \theta) = -\frac{1}{\theta} [\text{Ln} B(t, T + \theta) - \text{Ln} B(t, T)] \quad (8.2.7)$$

$\diamond$  Le taux court forward de l'opération à terme est

$$f(t, T) = R_t(T, 0) = -\partial_T \text{Ln} B(t, T) \quad (8.2.8)$$

de telle sorte que  $R_t(T, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta f(t, t + u) du$

$\diamond$  le taux court forward pour une échéance glissante est défini comme

$$r(t, \theta) = -\partial_2 \text{Ln} B(t, t + \theta) = -\partial_2 (\theta R(t, t + \theta)) = f(t, t + \theta) \quad (8.2.9)$$

## 8.3 Absence d'arbitrage et modélisation des taux

### 8.3.1 Modèles déterministes et anticipations rationnelles

Si les taux d'inérêt sont déterministes, l'absence d'arbitrage dit que les prix des zéro-coupon, qui correspondent au prix de 1 Euro payé dans le futur doivent vérifier

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt \quad (8.3.1)$$



soit encore, puisque  $B(T, T) = 1$

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad B(t, T) = B(0, T) \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \quad (8.3.2)$$

En particulier,

$$R(t, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} r_u du \quad (8.3.3)$$

### 8.3.2 Les modèles aléatoires

Dans les modèles aléatoires, l'absence d'opportunité d'arbitrage entre les prix  $B(t, T)$  des zéro-coupon de différentes maturités conduit à des résultats très similaires à ceux du cas déterministe. Cette hypothèse permet encore de reconstruire le prix des zéro-coupon à partir de la dynamique du taux court.

Pour décrire cette liaison, nous supposons que pour toutes les maturités  $T$ , les prix des zéro-coupons suivent des processus d'Itô, qui correspondent à des stratégies admissibles. Nous avons vu que l'absence d'opportunité d'arbitrage se traduit par l'existence d'un vecteur  $\lambda_t$  de primes de risque tel que les prix des zéro-coupon évoluent comme

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \langle \Gamma(t, T), d\widehat{W}_t + \lambda_t dt \rangle, \quad B(T, T) = 1 \quad (8.3.4)$$

où  $\widehat{W}$  est un  $\mathbb{P}$  mouvement brownien éventuellement vectoriel.

La famille  $[T \rightarrow, \Gamma(t, T)]$  définit une fonction, éventuellement aléatoire de volatilités. Il est possible d'exprimer différemment cette propriété en introduisant la probabilité  $\mathbb{Q}$  risque-neutre, pour traduire que  $B(t, T)$  est le prix en  $t$  de 1 Euro payé en  $T$ .

**Proposition 8.3.1** *Supposons les primes de risque  $\lambda_t$  et les volatilités bornées.*

*Il existe une probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ , équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que le prix des zéro-coupon vérifient*

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\exp - \int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t] \quad (8.3.5)$$

C'est la transformation classique que nous avons utilisée pour calculer le prix d'un produit financier dans le futur. Il est donc naturel pour modéliser les déformations de la courbe des taux de proposer une dynamique pour le taux court. C'est ce qui est proposé dans la suite du chapitre.

## 8.4 Le modèle de Vasicek

Nous décrivons d'abord les deux modèles les plus classiques, le modèle gaussien de VASICEK ([Vasi]) et le modèle dit en "racine carrée" de COX, INGERSOLL, ROSS ([CIR2]). Ce modèle qui date de 1977, utilise une structure très simple pour modéliser la dynamique du taux court.

Nous proposons deux méthodes différentes pour modéliser les taux et les zéro-coupon de différentes maturités.

1. La première utilise les propriétés particulières du taux court dans le modèle de Vasicek, et même un calcul probabiliste explicite pour la résolution du problème.
2. La deuxième introduit l'EDP d'évaluation, dont les coefficients sont linéaires par rapport au taux court. Des solutions explicites sont alors proposées.

Vasicek suppose qu'il y a un seul aléa ( $W_t$ ), qui influe sur le taux spot, dont la dynamique, dans l'univers risque-neutre, est de la forme :

$$dr_t = a(b - r_t) dt - \sigma dW_t \quad r_0 = r \quad (8.4.1)$$

### 8.4.1 L'équation des taux

L'équation suivie par le taux court est celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire d'un processus gaussien, qui oscille autour d'une tendance centrale  $b$ , avec une force de rappel d'intensité  $a$ . L'équation (8.4.1) se résout comme une équation différentielle ordinaire, bien que son second membre soit aléatoire.

**Proposition 8.4.1** La solution de l'équation (8.4.1) est donnée par :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (8.4.2)$$

C'est donc un processus gaussien, dont la distribution est stationnaire si  $r_0$  est une variable gaussienne, de moyenne  $b$  et de variance  $\frac{\sigma^2}{2a}$ , indépendante du brownien  $W$ . La variable  $I(t, T)$  définie par

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds$$

est gaussienne, de moyenne ( $r_t$  étant donné)  $m(T - t)$ , et de variance  $\Sigma^2(T - t)$ , où :

$$\begin{aligned} m(T - t) &= b(T - t) + (r_t - b) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \\ \text{et } \Sigma^2(T - t) &= -\frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2} (T - t - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}) \end{aligned}$$

PREUVE : Le modèle de taux court est celui de l'ornstein Uhlenbeck dont les propriétés sont bien connues.

- ⇒ La solution de l'équation linéaire ( ?? ) s'obtient comme dans le cas déterministe par la méthode de variation des constantes, en étudiant le processus  $\{e^{at}r_t; t \in [0, T]\}$ , solution de  $d\rho_t = be^{at}dt - \sigma e^{at}dW_t$ . Le caractère stationnaire, qui signifie que  $r_t$  a une distribution indépendante de  $t$  se vérifie facilement.
- ⇒ Pour montrer les propriétés de  $I(t, T)$ , le plus simple est de calculer  $I(t, T)$  à partir de l'équation différentielle en notant que

$$aI(t, T) = -(r_T - r_t) + ab(T - t) - \sigma \int_t^T dW_s$$

Reportons dans cette équation la forme intégrale du taux spot. Il vient :

$$I(t, T) = b(T - t) + (b - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \sigma \int_t^T \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} dW_s$$

Le calcul de la variance se fait à partir de l'intégrale  $\sigma^2 \int_t^T (\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a})^2 ds$ .

Nous aurons souvent à utiliser des processus d'Ornstein-Uhlenbeck non stationnaires, vérifiant

$$dr_t = a_t(b_t - r_t) dt - \sigma_t dW_t \quad r_0 = r \quad (8.4.3)$$

La solution est donnée par :

$$r_s = r_t e^{-\int_t^s a_u du} + \int_t^s e^{-\int_u^s a_v dv} (b_u du + \sigma_u dW_u) \quad (8.4.4)$$

Le calcul de  $I(t, T)$  s'obtient en utilisant une formule d'intégration par parties dans l'intégrale stochastique, soit

$$I(t, T) = r_t \int_t^T e^{-\int_t^s a_u du} ds + \int_t^T \int_u^T e^{-\int_u^s a_v dv} ds (b_u du + \sigma_u dW_u)$$

Les résultats précédents se généralisent alors facilement à cette situation.

Les prix des zéro-coupon et la forme générale des taux actuariels continus se déduisent alors aisément du caractère gaussien de  $I(t, T)$ .

**Théorème 8.4.1** Dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon de maturité  $T$  est donné par :

$$B(t, T) = \exp - \left[ R_\infty(T-t) - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right] \quad (8.4.5)$$

où  $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$

et sa volatilité par

$$\Gamma_V^a(t, T) = \sigma \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (8.4.6)$$

La courbe des taux de la date  $t$  est donnée par :

$$R(t, \theta) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} + \frac{\sigma^2}{4a^3\theta} (1 - e^{-a\theta})^2 \quad (8.4.7)$$

avec  $R(t, +\infty) = R_\infty$  pour tout  $t$ .

PREUVE : La représentation des zéro-coupon est essentiellement une conséquence des calculs précédents et des propriétés de la transformée de Laplace d'une v.a. gaussienne.

$\Rightarrow$  Il nous suffit de calculer  $B(t, T)$  comme :

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-I(t, T)} | \mathcal{F}_t] = e^{-\mathbb{E}(I(t, T)) + \frac{1}{2} \text{var}(I(t, T))} = e^{-m(T-t) + \frac{1}{2} \Sigma^2(T-t)}$$

car la variable  $I(t, T)$  étant gaussienne, sa transformée de Laplace ne dépend que son espérance et de sa variance. La formule explicite est obtenue en regroupant les termes de même nature. L'équation des taux s'en déduit aisément à partir de la formule  $R(t, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln[B(t, t + \theta)]$ .

$\Rightarrow$  Il reste à noter que  $R(t, \theta)$  tend vers :  $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$  (indépendante de  $t$ ) si  $\theta$  tend vers l'infini.

## 8.4.2 La courbe des taux issue du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux aujourd'hui et plus généralement de n'importe quelle date.

Le graphe de la fonction  $\theta \rightarrow R(t, \theta)$  ressemble effectivement à de nombreuses courbes de taux observées sur le marché. Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les courbes dites "inversées", où le taux court  $r$  est plus haut que le taux long  $R_\infty$ , et où apparaît un creux ne peuvent être atteintes par un modèle de ce genre.

### 8.4.3 Le modèle de Vasicek généralisé

En général, le marché préfère introduire la courbe des taux d'aujourd'hui comme une donnée du problème et d'ajuster les paramètres des modèles pour qu'il y ait un ajustement exact avec cette entrée. Dans le cas de Vasicek, il est toujours possible d'introduire une fonction  $b_t$  pour que l'ajustement soit parfait.

Pour cela remarquons que la courbe des taux aujourd'hui est associée à un modèle stationnaire ( $b_t$  constant) de Vasicek, si la courbe des taux spot forwards aujourd'hui vérifie

$$f(0, t) = R_\infty - (R_\infty - r_0)e^{-at} + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})e^{-at} \quad (8.4.8)$$

$$= b + (r_0 - b)e^{-at} - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (8.4.9)$$

Cette fonction vérifie donc l'équation différentielle en maturité

$$\begin{aligned} \partial_t f(0, t) + a(f(0, t) - f(0, +\infty)) - \frac{\sigma^2}{2a}e^{-2at} &= 0 \\ f(0, +\infty) &= R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \\ \partial_t f(0, t) + a(f(0, t) - b) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) &= 0 \end{aligned} \quad (8.4.10)$$

**Proposition 8.4.2** *Le taux court  $r_t$  vérifie le modèle de Vasicek étendu à des coefficients dépendant du temps (Pour simplifier nous avons supposé les volatilités stationnaires) généralisé, ajusté à la courbe des taux forwards ( $f(0, T); T \in \mathbb{R}^+$  si*

$$dr_t = [\partial_t f(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})]dt - ar_t dt - \sigma dW_t \quad (8.4.11)$$

PREUVE : Notons  $r_t^V$  la dynamique d'un Vasicek de même fonction de volatilité, mais de niveau de rappel constant,  $b = f(0, +\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2}$ , partant de  $r_0 = f(0, 0)$  aujourd'hui.

La courbe des spots forwards issue de ce modèle  $f^V(0, t)$  vérifie

$$f^V(0, +\infty) = f(0, +\infty), \quad f^V(0, 0) = f(0, 0) = r_0$$

La différence  $r_t - r_t^V$  satisfait à l'équation linéaire, non stochastique

$$d(r_t - r_t^V) = [a(b_t - b) - a(r_t - r_t^V)]dt, \quad (8.4.12)$$

Cette différence déterministe est encore égale à la différence des taux forwards aujourd'hui associés à chacun des deux modèles. Par suite, les deux courbes  $f(0, t)$  et  $f^{mod}(0, t)$  la courbe forward déduite du modèle sont égales car

$$\begin{aligned} df^{mod}(0, t) + af^{mod}(0, t)dt &= df^V(0, t) + af^V(0, t)dt + a(b_t - b)dt \\ &= ab - \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) + \partial_t f(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) - ab \\ &= \partial_t f(0, t) + af(0, t)dt \end{aligned}$$

### 8.4.4 L'EDP d'évaluation et le prix des options sur zéro-coupons

Nous pouvons employer une méthode plus numérique pour calculer la forme de la courbe des taux et le prix des options sur zéro-coupon. Elle consiste à introduire une EDP d'évaluation. Nous avons vu que le prix d'un zéro-coupon est une fonction exponentielle affine du taux court  $\mathcal{B}(t, r, T)$ . Nous allons retrouver ce résultat par une méthode numérique,

**Théorème 8.4.2** 1. Si le prix d'un zéro-coupon est une fonction régulière du taux court  $\mathcal{B}(t, r, T)$ , nécessairement  $\mathcal{B}$  est solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 \mathcal{B}_r''(t, r, T) + a(b-r)\mathcal{B}_r'(t, r, T) - r\mathcal{B}(t, r, T) + \mathcal{B}_t'(t, r, T) &= 0 \\ \mathcal{B}(T, r, T) &= 1 \end{aligned} \quad (8.4.13)$$

2. Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction régulière du temps et du paramètre  $r$ ,  $\mathcal{C}(t, r, K, T, T+\theta)$ , solution dans  $]0, T[ \otimes \mathbb{R}^+$  de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 \mathcal{C}_r''(t, r) + a(b-r)\mathcal{C}_r'(t, r) - r\mathcal{C}(t, r) + \mathcal{C}_t'(t, r, T) &= 0 \\ \mathcal{C}(T, r, K, T, T+\theta) &= (\mathcal{B}(T, r, T+\theta) - K)^+ \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

3. Alors le prix d'une option de maturité  $T$ , de prix d'exercice  $K$  sur zéro-coupon de maturité  $T+\theta$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t, K, T, T+\theta) &= B(t, T+\theta)\mathcal{N}(d_1) - KB(t, T+\theta)\mathcal{N}(d_0) \\ d_0 &= \frac{1}{\Sigma_{t,T}\sqrt{T-t}} \text{Log}\left(\frac{B(t, T+\theta)}{KB(t, T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma_{t,T}\sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= d_0 + \Sigma_{t,T}\sqrt{T-t} \\ \Sigma_{t,T}^2 &= \frac{1}{T-t} \int_t^T |\Gamma(u, T+\theta) - \Gamma(u, T)|^2 du \end{aligned} \quad (8.4.16)$$

PREUVE : La preuve de l'EDP est très similaire à celle utilisée pour montrer la formule de Black et Scholes.

⇒ Nous appliquons la formule d'Itô à la fonction  $\mathcal{B}(t, r, T)$  et à la solution  $r_t$  de l'équation différentielle stochastique. La comparaison avec l'équation d'autofinancement donne immédiatement le résultat. La vérification est immédiate.

⇒ L'équation aux dérivées partielles ne donne pas immédiatement une solution explicite. L'idée est de faire à la fois un changement de variable en posant  $y = \mathcal{B}(t, r, T)$  et de fonction en posant  $v(t, y) = \frac{u(t, r, f)}{\mathcal{B}(t, r, T)}$ , pour se ramener à une EDP de type Black et Scholes et appliquer la formule connue.

⇒ C'est la traduction en termes de changement de variables de l'observation que le zéro-coupon forward  $B_t(T, T+\theta)$  est une martingale log-normale de volatilité  $\Gamma_t(T, T+\theta) = \sigma e^{-a(T-t)}(1 - e^{-a\theta})$ , sous la probabilité forward  $\mathbb{Q}_T$ , de densité  $\exp - \int_t^T r_s ds B(t, T)^{-1}$ .

Comme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(T, r, K, T, T+\theta) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( \exp - \int_t^T r_s ds (B(T, T+\theta) - K)^+ | r_t \right) \\ &= B(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} (B_T(T, T+\theta) - K)^+ | r_t \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer la formule de Black et Scholes, sans taux d'intérêt, au sous-jacent  $B_t(T, T+\theta)$  de volatilité dépendant du temps  $\Gamma_t(T, T+\theta)$ .

## 8.5 Le modèle de CIR

Pour lever l'objection liée au caractère négatif possible des taux d'intérêt issu du modèle gaussien de Vasicek, COX, INGERSOLL ET ROSS (1985) ont introduit le modèle dit en "racine carrée", sur le taux spot, dans l'univers risque-neutre.

$$dr_t = a(b - r_t)dt - \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad r(0) = r \quad (8.5.1)$$

– **Remarque mathématique**

La fonction  $\sqrt{r}$  n'étant pas une fonction lipschitzienne, l'existence d'une solution de cette équation différentielle stochastique est plus difficile à établir, que dans le cas du modèle de Vasicek. De plus, dans le cas général, il n'existe pas de solution explicite. La preuve de l'existence et de l'unicité peut être trouvée dans KARLIN [Karl]. De plus il est montré que la solution n'atteint pas 0 si  $2ab > \sigma^2$ , car alors le terme en drift dans l'équation est suffisamment important pour empêcher le processus d'atteindre 0.

### 8.5.1 Calcul des prix zéro-coupon

#### Equation aux dérivées partielles d'évaluation

Pour calculer le prix des zéro-coupon, il est nécessaire de procéder un peu différemment que dans le cas du modèle de Vasicek, puisqu'il n'existe pas de formule explicite pour l'équation stochastique. Nous allons plutôt utiliser l'équation aux dérivées partielles d'évaluation, qui permet d'obtenir grâce à un théorème de vérification les formules de prix comme solution d'une équation aux dérivées partielles.

**Théorème 8.5.1** *Supposons qu'il existe une fonction régulière du temps et du paramètre  $r$ ,  $\mathcal{B}(t, r, T)$ , solution dans  $]0, T[ \otimes \mathbb{R}^+$  de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 r \partial_{r^2} \mathcal{B}(t, r, T) + a(b-r)\partial_r \mathcal{B}(t, r, T) - r\mathcal{B}(t, r, T) + \partial_t \mathcal{B}(t, r, T) &= 0 \\ \mathcal{B}(T, r, T) &= 1 \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Alors, pour toute date  $t$ , le prix  $B(t, T)$  d'un zéro-coupon de maturité  $T$  est donné par  $B(t, T) = \mathcal{B}(t, r_t, T)$ . Plus généralement, si l'EDP admet une solution régulière  $u(t, r, f, T)$  lorsque la condition terminale est  $f(T, r)$ ,  $u(t, r_t, f)$  est le prix à la date  $t$  du produit financier qui délivre  $f(T, r_T)$  en  $T$ .

PREUVE : Nous appliquons la formule d'Itô à la fonction  $\mathcal{B}(t, r, T)$  et à la solution  $r_t$  de l'équation différentielle stochastique. Il vient que :

$$d\mathcal{B}(t, r_t, T) = \partial_r \mathcal{B}(t, r_t, T) dr_t + [\partial_t \mathcal{B}(t, r_t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \partial_r^2 \mathcal{B}(t, r_t, T)] dt$$

Le fait que  $\mathcal{B}(t, r, T)$  satisfasse à l'EDP entraîne immédiatement que

$$d\mathcal{B}(t, r_t, T) = r_t \mathcal{B}(t, r_t, T) dt - \partial_r \mathcal{B}(t, r_t, T) \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

Si le processus  $-\partial_r \mathcal{B}(t, r_t, T) \sigma \sqrt{r_t}$  est de carré intégrable,  $\mathcal{B}(t, r_t, T)$  est une martingale sous la probabilité risque-neutre de condition terminale  $\mathcal{B}(T, r_T, T) = 1$ . Par suite, c'est nécessairement le prix d'un zéro-coupon.

Le même argument est utilisé pour montrer que le prix d'une option s'obtient à partir de la solution de l'EDP.

Or l'équation aux dérivées partielles dépend linéairement du taux  $r$ . Il est donc naturel de rechercher pour les zéro-coupon des solutions dont le logarithme dépend de manière affine de  $r$ .

**Théorème 8.5.2** *Les prix des zéro-coupon en  $t$  s'écrivent comme :*

$$B(t, T) = A(t, T) e^{-r_t C(t, T)} \quad (8.5.3)$$

où  $C(t, T) = C(T - t)$  et  $A(t, T) = A(T - t)$  sont donnés par :

$$\begin{cases} C(t) &= \frac{2(e^{\rho t} - 1)}{(\rho + a)(e^{\rho t} - 1) + 2\rho} & \rho &= [a^2 + 2\sigma^2] \frac{1}{2} \\ A(t) &= \varphi(t) \frac{2ab}{\sigma^2} \end{cases} \quad (8.5.4)$$

où  $\varphi$  est définie par  $\varphi(t) = \frac{(\rho+a)t}{2\rho e^{\frac{2}{\rho+a}(e^{\rho t}-1)}+2\rho}$  La courbe des taux à la date  $t$  est donnée par  $R(t, \theta) = r_t \frac{C_\theta}{\theta} - \frac{2ab}{\sigma^2 \theta} \text{Ln} \phi(\theta)$

PREUVE : Nous recherchons les solutions de l'EDP 8.5.3, à priori de la forme d'une exponentielle d'une fonction affine du taux, ce qui est possible puisque la condition terminale est de cette forme. L'identification des coefficients de  $r$  dans l'EDP conduit aux équations différentielles satisfaites par les fonctions  $C(t)$  et  $A(t)$ . Il reste à résoudre explicitement ces équations différentielles pour conclure. L'équation aux dérivées partielles ne donne pas immédiatement une solution explicite. L'idée est de faire à la fois un changement de variable en posant  $y = \mathcal{B}(t, r, T)$  et de fonction en posant  $v(t, y) = \frac{u(t, r, f)}{\mathcal{B}(t, r, T)}$ , pour se ramener à une EDP de type Black et Scholes et appliquer la formule connue.

Comme dans le modèle de Vasicek, la forme analytique de la courbe des taux aujourd'hui est une des conséquences du modèle. La structure des formes a priori possibles est mieux décrite par ce modèle, qui, cependant, est vite plus compliqué à implémenter.

Notons que  $R_\infty = \frac{2ab}{\sigma + a}$ .

## 8.6 Extension

### 8.6.1 Les modèles linéaires

Les deux exemples que nous venons de présenter rentrent dans la classe plus générale des modèles linéaires, pour lesquels les prix des zéro-coupon sont des exponentielles d'une fonction affine du taux spot. Il est montré dans DUFFIE-KAN ([Du-Ka]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

**Proposition 8.6.1** *Le taux spot a une dynamique risque-neutre de la forme :*

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu(r_t, t)dt + \gamma(r_t, t) dW_t, \\ \text{où,} \\ \mu(r, t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t)r \quad \text{et} \quad \sigma(r, t)^2 = \beta_1(t) + \beta_2(t)r \end{aligned}$$

De nombreux autres modèles ont été proposés pour modéliser le taux spot, notamment avec des termes de volatilités  $\sigma(r, t)$  proportionnels à  $r$ , qui dans le cas où les autres paramètres sont aussi proportionnels, conduit à des taux lognormaux.

- Le modèle de DOTHAN :  $\mu(r, t) = \alpha r$ ,  $\sigma(r, t) = \beta r$
- Le modèle de COURTADON :  $\mu(r, t) = \alpha_1 r + \alpha_2$ ,  $\sigma(r, t) = \beta r$
- Le modèle log-normal généralisé :  $\mu(r, t) = \alpha(t)r + \alpha_2 r \log r$   
 $\sigma(r, t) = \beta(t)r$

Toutefois les prix des zéro-coupon n'admettent en général pas des représentations analytiques explicites. Les méthodes numériques sont alors utilisées, mais sont plus lourdes à manier pour les calages implicites aux données du marché.

## 8.7 Calibration de la courbe des taux

Le problème de reconstruire une courbe de taux robuste à partir des données de marché est un enjeu majeur du Risk management des produits de taux. Différentes méthodes sont utilisées dans les banques. Nous en décrivons quelques unes, en évoquant leurs limites.

### 8.7.1 La méthode classique

La méthode habituellement utilisée par les gestionnaires, pour reconstituer cette courbe de taux zéro-coupon, est une méthode récursive qui calcule les taux zéro-coupon de proche en proche. Cette méthode consiste à considérer la courbe des taux actuariels, notés  $TA(\theta)$  obtenue par approximation linéaire entre les taux actuariels des actifs du marché. Le point de départ est le taux actuariel de maturité un an est aussi le taux zéro-coupon de même maturité. Le zéro-coupon de maturité deux ans est obtenu en résolvant en  $B(0, 2)$ , l'équation suivante :

$$100 = TA(2)B(0, 1) + (TA(2) + 100)B(0, 2)$$

Cette équation vient du fait qu'une obligation dont le taux facial est égal au taux actuariel est au pair. La courbe des taux zéro-coupon s'obtient alors par itération ; en effet pour passer zéro-coupon de maturité  $n$  au zéro-coupon de maturité  $n + 1$ , il suffit de calculer le taux  $B(0, n + 1)$  qui vérifie l'équation suivante :

$$100 = \sum_{i=1}^n TA(n + 1)B(0, i) + (TA(n + 1) + 100)B(0, n + 1)$$

**Remarque 8.7.1**      $\diamond$  Cette méthode, simple à mettre en oeuvre, a l'inconvénient de reconstituer des taux zéro-coupon qui dépendent fortement du taux actuariel de l'obligation la plus courte, obligation qui est en général très peu liquide et donc dont le prix ne reflète pas vraiment le taux de marché pour cette maturité. Cette erreur sur le premier taux zéro-coupon se propage ensuite par itération sur toute la courbe.

$\diamond$  L'autre inconvénient majeur de cette méthode est la trop forte dépendance de ses résultats par rapport aux caractéristiques de chaque obligation utilisée dans la procédure. En effet, le calcul pour chaque maturité étant fait par rapport à une obligation donnée, le taux zéro-coupon calculé pour cette maturité dépend alors des spécificités de cette obligation et de celles des obligations choisies dans les étapes précédentes.

### 8.7.2 La méthode des splines

Pour pallier ces inconvénients et vu que la courbe des taux, à un jour donné, a en général une forme assez régulière et présentant peu de changement de convexité, on peut penser à l'approcher par des fonctions simples telles que polynômes, exponentielles de polynômes ..etc.. .

Plusieurs formes fonctionnelles ont été proposées dans ce but, nous en présentons deux.

La première méthode consiste à ajuster sur des plages de maturités judicieusement choisies des polynômes de degré trois ou quatre, les splines. Le calage des paramètres se fait alors sous la contrainte de continuité et de double dérivabilité aux points de raccord .

La question de choisir de manière robuste les points de raccord est une question centrale dans l'utilisation des méthodes de splines. (Voir le cours de Rama sur la calibration). Le marché suggère évidemment des points à prendre en compte naturellement : le un an, car c'est une maturité clé entre le court et le moyen terme. Les points 3,6 mois, car ce sont des maturités très liquides à cause des Swaps, que nous verrons plus tard. 5, 10 et 30 ans sont aussi des maturités incontournables, associées à des produits liquides dans le marché. Cette méthode donne de bons résultats mais présente une forte sensibilité aux points de découpage pour les splines.

### 8.7.3 Paramétrisation à la Vasicek

Une Analyse en Composantes Principales (ACP) sur un historique de courbes de taux zéro-coupon obtenues par cette méthode a montré que trois facteurs expliquent la quasi-totalité des déformations de ces courbes. Ces trois facteurs s'interprètent comme suit :



1. un premier facteur qui présente une forme quasiment plate et qui provoque des déplacements parallèles de la courbe des taux. Ce facteur s'interprète comme un facteur de niveau.
2. un deuxième facteur qui rend compte des inversions de la courbe autour d'un point. Ce facteur s'interprète comme un facteur de pente car il a une influence contraire sur les taux longs et sur les taux courts.
3. Un troisième facteur, qui agit différemment sur trois compartiments de la courbe des taux, et qui s'interprète comme un facteur de courbure.

Ceci laisse à penser qu'une bonne méthode de reconstitution de la courbe des taux zéro-coupon, serait de se donner une fonctionnelle dépendant d'un paramètre de niveau des taux, d'un paramètre de spread (ou de pente) et d'un paramètre de courbure et de caler ensuite ces paramètres sur les données du marché. Or c'est exactement la paramétrisation déduite du modèle de Vasicek, via la représentation

$$R(\theta) = R_\infty - S G_1(\theta) + \gamma G_2(\theta) \quad (8.7.1)$$

C'est cette méthode qui est appliquée dans la suite.

Le paramètre  $a$  dans la fonctionnelle du taux est un paramètre d'échelle, le laisser libre dans le calage des autres paramètres introduirait une trop grande instabilité pour ces derniers, il a été donc décidé de le fixer. Des tests empiriques nous ont alors montré que sa valeur peut être fixée à une valeur comprise entre 0.1 et 0.8.

Le problème revient donc à estimer les paramètres  $R_\infty$ ,  $S$  et  $\gamma$ , sur un panel, bien choisi, d'actifs du marché.

Les valeurs de ces paramètres au moment du calcul sont obtenues par la minimisation, sur le panel d'actifs du marché, de l'écart quadratique moyen suivant :

$$E(t, R_\infty, S, \gamma) = \sum_{i=1}^N m_{i,t} \left( P_{i,t}^{\text{théorique}}(R_\infty, S, \gamma) - P_{i,t}^{\text{marché}} \right)^2 \quad (8.7.2)$$

où :

- $P_{i,t}^{\text{marché}}$  est le prix du marché de l'actif  $i$ . On choisira les actifs les plus liquides du marché, car seuls ces actifs sont bien arbitrés et leurs prix reflètent donc le marché.
- $P_{i,t}^{\text{théorique}}$  est le prix de l'actif  $i$ , en fonction des paramètres, tel qu'il est calculé par le modèle choisi. Ce prix théorique étant estimé par rapport à "une moyenne du marché", on observera à chaque date  $t$  un résidu entre ce prix et le prix de marché de l'actif.

$$P_{i,t}^{\text{marché}} = P_{i,t}^{\text{théorique}} + \epsilon_{i,t}$$

Ce résidu peut refléter soit une option cachée dans l'actif (Possibilité de prorogation aux conditions du marché, possibilité d'échange contre des obligations à taux variable ou révisable), soit par exemple un coupon fort (ou faible) ce qui implique un certain type d'intervenants à cause des problèmes de fiscalité, soit tout autre cause spécifique à l'actif.

- $m_i$  est un facteur de pondération, qui peut-être lié soit à la liquidité du titre, soit à l'inverse de sa maturité résiduelle. On choisira un facteur de pondération plus fort pour les actifs qu'on veut favoriser dans le programme d'optimisation ; c'est ainsi qu'on peut favoriser par exemple, les actifs les plus liquides, les actifs sans clause spéciale ou encore les actifs à faible maturité résiduelle.

L'algorithme de Newton-Raphson permet de converger rapidement vers un minimum (éventuellement local), quant-il en existe un, et permet donc d'obtenir les paramètres de la courbe des taux zéro-coupon correspondant à la date et au panel choisis.

Le panel de données doit recouvrir les différentes parties de la courbe, courte, moyenne longue, et utiliser les instruments les plus liquides possibles, les taux Euribor notamment.

### 8.7.4 Sensibilités aux paramètres de risque

On peut de même calculer la sensibilité de ce prix théorique par rapport à chacun de ces paramètres. La sensibilité du prix  $P_t$  par rapport au paramètre  $p$  est définie par :

$$S_t = \frac{1}{P_t} \frac{\partial P_t}{\partial p}$$

Les sensibilités par rapport aux différents paramètres s'interprètent comme suit :

– **La sensibilité par rapport au taux long**

La sensibilité par rapport au taux long  $S_{R_\infty} = \frac{1}{P_t} \frac{\partial P_t}{\partial R_\infty}$  représente une sensibilité par rapport à une translation de la courbe des taux. Cette sensibilité est donc de la même nature que la duration, qui est la sensibilité du prix  $P_t$  de l'actif par rapport à son taux actuariel  $TA$ , définie par :

$$D_t = -\frac{1}{P_t} (1 + TA) \frac{\partial P_t}{\partial TA}$$

– **La sensibilité par rapport au spread taux long-taux court**

La sensibilité par rapport à ce paramètre,  $S_S = \frac{1}{P_t} \frac{\partial P_t}{\partial S}$ , est en fait une sensibilité par rapport au taux court, le taux long et le paramètre de courbure étant supposés constants. Cette sensibilité définit une duration spread.

– **La sensibilité par rapport au paramètre de courbure**

La sensibilité par rapport à ce paramètre,  $S_\gamma = \frac{1}{P_t} \frac{\partial P_t}{\partial \gamma}$ , est une sensibilité par rapport à un changement de courbure, le niveau des taux long et des taux courts étant inchangés.

Δ

## APPENDICE

▽

### Etude du temps d'atteinte de 0 par le processus de CIR

L'étude repose sur le résultat suivant, que nous appliquons à l'équation 8.7.3 à laquelle on peut toujours ramener l'équation 8.5.1 par le théorème de Girsanov.

$$dr(t) = ab dt - \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \quad r(0) = r \quad (8.7.3)$$

**Lemme 8.7.1** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres positifs ( $\alpha < \beta$ ) et  $T_\beta = \inf \{t; r_t < \beta\}$ . On pose  $V_{\alpha,\beta}(r) = \mathbb{P}(T_\beta < T_\alpha)$ , où  $r_0 = r$

$V$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles,  $Lv(r) = 0$ ,  $v(\alpha) = 1$ ,  $v(\beta) = 0$ , où :

$$\left\{ \begin{array}{l} LV_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{dV^2}{dr^2} + ab \frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{si } 0 < \alpha < r < \beta \\ \text{dont la solution est} \\ V_{\alpha,\beta}(r) = \frac{r^{1-v} - \alpha^{1-v}}{\beta^{1-v} - \alpha^{1-v}} \quad \text{où } v = \frac{2ab}{\sigma^2} \end{array} \right. \quad (8.7.4)$$

Si  $v > 1$ ,  $T_0$  est infini p.s. ; si  $v < 1$ ,  $V(r)$  tend vers  $V_0(r) = \left( \frac{r}{\beta} \right)^{1-v}$ .

PREUVE : On procède par vérification. Il est clair que la fonction  $V(r)$  définie en 8.7.4 est une fonction régulière, qui vérifie l'équation 8.7.3.

Appliquons la formule d'Itô à cette fonction et au processus  $r_t$  arrêté en  $T_\alpha \wedge T_\beta$ . Il vient :

$$dV(r(t)) = V'(r(t)) \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \quad \text{sur } t < T_\alpha \wedge T_\beta$$

$$\text{Puisque } V(\beta) = 1 \text{ et } V(\alpha) = 0 \quad V(r) = \mathbb{E}[V(r(T_\alpha \wedge T_\beta))] = \mathbb{P}(T_\beta < T_\alpha)$$

Puisque  $V(\beta) = 1$  et  $V(\alpha) = 0$ , nous obtenons  $V(r) = \mathbb{E}[V(r(T_\alpha \wedge \hat{T}_\beta))] = \mathbb{P}(\hat{T}_\beta < T_\alpha)$ . Lorsque  $\mu > 1$ , les intégrales du numérateur et du dénominateur divergent, mais sont équivalentes.  $\square$



## Chapitre 9

# LES MODÈLES de DEFORMATION de la COURBE des TAUX

Comme nous l'avons vu, modéliser les déformations futures de la courbe des taux est un enjeu majeur pour les établissements financiers. Dans le chapitre précédent, nous avons vu quels liens peuvent exister entre les taux de différentes maturités, si nous partons d'une modélisation a priori du taux court. Dans un modèle stationnaire, la courbe des taux aujourd'hui ainsi que les courbes futures ne dépendent que de la valeur aujourd'hui du taux court et des paramètres du modèle. La conséquence en est une reconstruction, cohérente avec le modèle de déformation, mais éventuellement imparfaite, de la courbe des taux aujourd'hui.

Pour évaluer et couvrir les principaux produits dérivés de taux d'intérêt, le marché cherche à être exact sur les valeurs de marché des sous-jacents. En d'autres termes, la courbe des taux aujourd'hui, et non seulement la valeur du taux court devient une donnée initiale de la modélisation. Le problème devient un problème de modélisation de dimension infinie, représenter la dynamique de la courbe des taux dans le futur, tout en respectant l'absence d'opportunité d'arbitrage. La conséquence en est une complexité accrue, et une quasi-impossibilité de traiter des produits de type américain. D'où une recherche de modèles mixtes, c'est à dire à facteurs, mais exacts sur la courbe des taux aujourd'hui comme nous l'avons évoqué dans le modèle de Vasicek généralisé.

Les travaux dans cette direction ont été initialisés par Ho & Lee (1985) dans les modèles d'arbre, puis par Heath, Jarrow & Morton (1987-1992) pour les modèles en temps continu.

Comme nous le montrons dans la première partie de ce chapitre, l'hypothèse fondamentale d'absence d'opportunité d'arbitrage dans le marché permet de décrire algébriquement ces contraintes à partir de la seule connaissance de la volatilité, fonction de la maturité, des zéro-coupons.

Le plan de ce chapitre est le suivant : après avoir présenté le cadre dans lequel nous travaillons, nous montrons en toute généralité la nature des contraintes qui lient les différents taux et les conséquences qui en résultent sur l'estimation des déformations futures de la gamme des taux d'intérêt dans le cas où les volatilités locales sont déterministes. La courbe des taux aujourd'hui, et la courbe des taux forwards que

l'on déduit, apparaissent des éléments essentiels à la prévision des taux dans le futur, mais non suffisants. Une attention particulière doit être portée à la forme de la fonction de volatilité locale. La modélisation par arbitrage des taux futurs permet de disputer la théorie des anticipations rationnelles. Une première application à la gestion de portefeuilles de taux est proposée.

## 9.1 Le modèle en absence d'opportunité d'arbitrage

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'absence d'arbitrage introduit des contraintes sur les rendements des titres financiers, qu'ils soient de base, ou valeur de marché de produits dérivés. Lorsqu'on s'intéresse aux problèmes liés aux taux d'intérêt, ce ne sont pas les taux eux-mêmes sur lesquels on va a priori écrire les contraintes, mais sur les prix des opérations financières auxquels ils ont associés. La référence de base sera donc les prix des zéro-coupon, même si pour des maturités supérieures à un an, il n'y a pas de marché vraiment liquide, le marché traitant plutôt de titres avec coupons dont la valeur de marché sera reliée à celle des zéro-coupon par la règle de non arbitrage :

le prix d'un titre qui verse des flux fixes dans le futur est donné par la somme de ses flux pondérés par les prix des zéro-coupon des dates de paiement

### 9.1.1 Le modèle pour les zéro-coupon

Nous supposons un marché qui traite en temps continu les zéro-coupon de toutes les maturités, sans arbitrage. L'incertain du marché s'exprime via la présence de sources de bruit additives et indépendantes que nous représentons à travers  $k$  mouvements browniens, notés  $\widehat{W}$ , non corrélés, définis sur l'ensemble de probabilité <sup>1</sup>  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . La probabilité a priori  $\mathbb{P}$  des agents du marché, peut être établie à partir des données historiques ou refléter leurs anticipations. Mais c'est la même pour tout le monde.

Nous modélisons les zéro-coupon en supposant que leur dynamique respecte les contraintes dues à l'absence d'arbitrage que nous avons établies au chapitre 4. Nous avons montré qu'un marché est caractérisé par le processus de taux court  $r_t$  et le vecteur (de dimension  $k$ ) des primes de risque  $\lambda_t$ . Les prix négociés sont alors uniquement différenciés par leur vecteur de volatilité, et leur valeur d'aujourd'hui. Aussi nous faisons les hypothèses suivantes :

La dynamique des prix  $B(t, T)$  des zéro-coupon est représentée par

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) d\widehat{W}_t, \quad B(T, T) = 1, \quad (9.1.1)$$

### Fonction de volatilité

$\Gamma(t, T)$  est la famille des volatilités locales, éventuellement aléatoire des zéro-coupon, paramétrée par les dates d'échéance  $T$ . Comme à l'échéance, le prix du zéro-coupon est égal à  $1F$ , il est donc connu avec certitude. Nous supposons donc que  $\Gamma(T, T) = 0$ , et que plus généralement pour toutes les dates postérieures à l'échéance  $T$ . Cette convention revient à considérer que le flux est réinvesti dans le marché au taux sans risque.

Nous supposons que la fonction de volatilité est continue et dérivable par rapport à la maturité  $T$  et que les dérivées sont uniformément bornées, ou au moins uniformément majorée par une v.a. intégrable, soit si  $K_t$  est un processus adapté, borné ou suffisamment intégrable

$$|\partial_T \Gamma(t, T) = \gamma(t, T)| \leq K_t \quad (9.1.2)$$

---

<sup>1</sup>la famille de tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  représente la structure d'information disponible au cours du temps aux agents. ce sera souvent la filtration des mouvement browniens

– **Remarques techniques**

Lorsque le mouvement brownien est vectoriel, la notation  $d\widehat{W}_t$  représente un vecteur colonne de dimension  $(d, 1)$  et de composantes  $d\widehat{W}_t^j$ .  $\Gamma(t, T)$  une matrice de dimension  $(1, d)$ , de composantes  $\Gamma_j(t, T)$  de telle sorte que la quantité

$$\Gamma(t, T)d\widehat{W}_t = \sum_{j=1}^k \Gamma_j(t, T)d\widehat{W}_t^j$$

soit un réel.

## Probabilité risque-neutre

L'absence d'opportunité d'arbitrage implique que tous les prix des titres du marché dépendent fondamentalement du processus  $W_t$  défini par :

$$dW_t = \lambda_t dt + d\widehat{W}_t. \quad (9.1.3)$$

$\{\widehat{W}_t; t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien sous la probabilité objective  $\mathbb{P}$ , qui régit les aléas observés sur les taux. Par suite,  $W$  est un mouvement brownien vectoriel décentré sous  $\mathbb{P}$ , le paramètre de décentralité étant le vecteur des primes de risque  $\lambda_t$ .

Nous annulons l'effet de la prime de risque en introduisant la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  pour laquelle  $\{W_t; t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien centré. Nous dirons que  $\{W_t; t \in [0, T]\}$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien. Dans ce contexte, l'équation donnant les prix des zéro-coupon devient

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T)dW_t \quad (9.1.4)$$

## Dimension des bruits et volatilité

Il est traditionnel lorsqu'on modélise la dynamique du prix d'un actif risqué de lui associer sa volatilité, que nous noterons dans le cas des zéro-coupon  $vol(t, T)$ , qui mesure le risque instantané du rendement du titre. C'est donc un processus réel et positif tel que

$$dB(t, T) = B(t, T)[r_t dt + vol(t, T)dZ_t^T]$$

où  $dZ_t^T$  est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre. Ainsi, dans un marché dans lequel un nombre très grand de titres est négocié, le point de vue traditionnel conduit à introduire autant de bruits que de maturités négociées. Un point délicat à préciser alors est la corrélation de tous ces mouvements browniens entre eux.

Nous avons donc choisi de modéliser a priori la structure des ces corrélations par l'intermédiaire d'un nombre fini de mouvements browniens indépendants et d'un vecteur de volatilité désigné par  $\Gamma(t, T)$ .

– **Remarque mathématique**

D'après les propriétés de l'intégrale stochastique et du mouvement brownien, il est bien connu que l'intégrale stochastique  $\Gamma(t, T)dW_t = \sum_{j=1}^k \Gamma_j(t, T)dW_t^j$  peut se représenter à l'aide de la volatilité  $vol(t, T)$  et d'un mouvement brownien unidimensionnel  $Z_t^T$  (défini sur un espace éventuellement augmenté [Ka.Sh]) sous la forme

$$\Gamma(t, T)dW_t = vol(t, T)dZ_t^T$$

Le lien entre le vecteur de volatilités locales et la volatilité des zéro-coupon est,

$$[vol(t, T)]^2 = \sum_{j=1}^k [\Gamma_j(t, T)]^2. \quad (9.1.5)$$

soit en utilisant des notations vectorielles, notamment le module du vecteur  $\Gamma(t, T)$ ,  $vol(t, T) = |\Gamma(t, T)|$ . Le vecteur de volatilités locales permet de calculer facilement les corrélations instantanées entre les différents zéro-coupon sous la forme

$$cov_t\left(\frac{dB(t, T + \theta)}{B(t, T + \theta)}, \frac{dB(t, T)}{B(t, T)}\right) = \Gamma(t, T)\Gamma(t, T + \theta)^* dt$$

## 9.2 Equation structurelle des taux

### 9.2.1 Taux zéro-coupon et conditions initiales

L'équation différentielle donnant les prix des zéro-coupon admet une solution explicite, fonction de leur condition initiale, du taux spot  $r_t$  et de leur vecteur de volatilité. Mais le taux spot  $r_t$  est une fonction des prix des zéro-coupon que nous pouvons éliminer. Les prix des zéro-coupon à la date  $t$  dépendent alors seulement des conditions initiales, constituées par la famille des prix zéro-coupon aujourd'hui et de la structure des volatilités locales. En général, une telle propriété est plutôt énoncée sur les taux que sur les prix, sous la forme :

*la dynamique des taux n'est fonction que de la courbe des taux aujourd'hui et de la structure des volatilités locales des prix zéro-coupon .*

Les relations les plus simples sont obtenues pour les taux courts forwards.

### Analyse des prix des zéro-coupon

**Proposition 9.2.1** *Le prix en  $t$  d'un zéro-coupon d'échéance  $T$  est donné par :*

$$B(t, T) = B(0, T) \exp\left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds\right] \quad (9.2.1)$$

*L'élimination du taux court conduit à :*

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left[\int_0^t [\Gamma(s, T) - \Gamma(s, t)] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t [|\Gamma(s, T)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds\right] \quad (9.2.2)$$

PREUVE : La solution explicite <sup>2</sup> de l'équation différentielle stochastique linéaire (9.1.4) est donnée par :

$$B(t, T) = B(0, T) \exp\left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds\right] \quad (9.2.3)$$

---

<sup>2</sup>Il est facile de justifier cette écriture de la manière suivante :

- si la volatilité est nulle, il s'agit d'une équation différentielle linéaire ordinaire, dont la solution est une exponentielle
- si le taux est nul, il s'agit d'une équation stochastique dont la solution doit être d'espérance constante. La solution est alors une exponentielle faisant intervenir deux termes : une intégrale stochastique et la variation quadratique associée à cette intégrale stochastique. Cette propriété est justifiée en Appendice pour le théorème de Girsanov.



$\Rightarrow$  Il est possible d'éliminer  $r_t$  dans cette formule en utilisant la condition frontière  $B(t, t) = 1$ , qui s'exprime par

$$1 = B(0, t) \exp\left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, t) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, t)|^2 ds\right] \quad (9.2.4)$$

Faisons le quotient de l'équation donnant  $B(t, T)$  par celle donnant  $B(t, t)$ . Il vient :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left[\int_0^t [\Gamma(s, T) - \Gamma(s, t)] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (|\Gamma(s, T)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2) ds\right]$$

La première égalité (9.2.1) met en jeu le prix à la date 0 du zéro-coupon d'échéance  $T$ , le taux court, et le vecteur des volatilités locales de l'échéance  $T$ . La deuxième relation (9.2.2) montre que l'élimination de  $r_t$  conduit à prendre en compte plus d'information sur la courbe des taux aujourd'hui, par l'intermédiaire notamment du prix forward en  $t$  du zéro-coupon d'échéance  $T$ ,  $\frac{B(0, T)}{B(0, t)}$ , ainsi que sur la structure des volatilités locales.

## Les équations intégrales des taux

Nous traduisons maintenant en termes de taux d'intérêt les contraintes que nous avons mis en évidence sur les prix des zéro-coupon. Les principales notations ont été introduites au chapitre précédent. Les équations des taux s'obtiennent aisément à partir des formules de prix que nous venons d'établir. Toutefois pour justifier mathématiquement les formules donnant les équations des taux courts forwards, nous utiliserons que le vecteur des volatilités locales a été supposé dérivable par rapport à la maturité, à dérivée bornée<sup>3</sup>. Nous insistons sur le fait qu'il n'est pas fait dans cette section d'hypothèse de volatilité déterministe, même si les notations ne le rappellent pas toujours. La dérivée de  $\{\Gamma(t, T); t \leq T\}$  par rapport à l'échéance  $T$ , c'est à dire la deuxième variable a été notée

$$\partial_T \Gamma(t, T) = \gamma(t, T) \quad (9.2.5)$$

**Théorème 9.2.1** *La représentation des taux à l'instant futur  $t$  est donnée par :*

$$R(t, \theta) = R_0(t, \theta) - \int_0^t \frac{\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)}{\theta} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\theta} [|\Gamma(s, t + \theta)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds \quad (9.2.6)$$

$R_0(t, \theta) = \frac{1}{\theta} [\ln B(0, t) - \ln B(0, t + \theta)]$  est le taux forward vu de 0, pour l'échéance  $t$ , de maturité  $\theta$ . Ce taux est lu sur la courbe des taux aujourd'hui.

De même, la représentation des taux courts forwards dans le futur est donnée par

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \gamma(s, T) dW_s + \int_0^t \gamma(s, T) \Gamma(s, T)^* ds \quad (9.2.7)$$

En particulier, la représentation du taux court est :

$$r_t = f(0, t) - \int_0^t \gamma(s, t) dW_s + \int_0^t \gamma(s, t) \Gamma(s, t)^* ds^4 \quad (9.2.8)$$

Si l'on souhaite donner moins d'importance à la courbe des taux aujourd'hui, et plus au taux court  $r$ , on peut donner une autre forme à la relation donnant les taux forwards

$$f(t, T) = r_T + \int_t^T \gamma(s, T) dW_s - \int_t^T \gamma(s, T) \Gamma(s, T)^* ds \quad (9.2.9)$$

<sup>3</sup>L'hypothèse de bornitude du vecteur des volatilités locales et de leur dérivées peut être remplacée par l'hypothèse moins forte suivante : il existe un processus de carré intégrable adapté  $\kappa_t$  positif, tel que  $|\gamma(t, T)| \leq \kappa_t dt \otimes d\mathbb{P}$  p.s. Des hypothèses d'intégrabilité plus fortes seront établies si nécessaire.

<sup>4</sup>Ce terme est aussi la dérivée par rapport à la maturité du carré de la volatilité locale du zéro-coupon,  $|\Gamma(s, t)|^2 = vol(s, t)^2$ , au coefficient  $\frac{1}{2}$  près, et nous utiliserons indifféremment les deux notations.

### Commentaire historique

Les équations (9.2.7) et (9.2.8) ont été obtenues pour la première fois par HEATH-JARROW-MORTON en 1987 [H.J.M.]. Ces derniers partent à priori d'un modèle pour les taux forwards et formulent un peu différemment la relation (9.2.7) sous la forme :

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \gamma(s, T) dW_s + \int_0^t \gamma(s, T) \left( \int_s^T \gamma(s, u) du \right)^* ds \quad (9.2.10)$$

mais contrairement à de nombreux auteurs, nous n'y faisons pas référence comme au **modèle** de HJM, car il s'agit en fait d'équations conséquences structurelles de l'absence d'arbitrage. Nous appellerons modèle de HJM le modèle que nous évoquerons brièvement à la fin de ce chapitre, où le choix d'une fonction de volatilité est proposé sous la forme

$$\gamma(s, t) = \sigma(s, f(s, t)) \quad (9.2.11)$$

Ces équations ont été le point de départ à la fois d'une réflexion de nature différente sur les taux d'intérêt, ainsi que de très nombreuses publications sur le sujet. (HULL ET WHITE, JAMSHIDIAN, EL KAROUI-GEMAN, EL KAROUI-MYNENI-VISWANATHAN, BRACE-MUSIELA).

PREUVE :

- ⇒ La première relation dérive immédiatement de la définition du taux actuariel continu  $R(t, \theta)$ , et des formules explicites des prix de zéro-coupon.
- ⇒ L'équation des taux courts forwards s'obtient soit en passant à la limite dans les relations précédentes, soit directement en prenant la dérivée logarithmique des prix des zéro-coupon :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\partial_T \text{Ln} B(t, T) = f(0, T) - \partial_T \left( \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds \right) \\ &= f(0, T) - \int_0^t \partial_T \Gamma(s, T) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_T |\Gamma(s, T)|^2 ds \end{aligned}$$

La dérivation sous l'intégrale ou intégrale stochastique est justifiée par les hypothèses de bornitude faites sur la dérivée par rapport à la maturité de la fonction de volatilité.

En particulier, si nous désignons par  $r(t, 0) = f(t, t)$  le taux court forward d'échéance  $t$ , il est clair que  $r(t, 0)$  satisfait l'équation (9.2.8).

- ⇒ Il est intéressant de montrer que les deux processus  $r(t, 0)$  et  $r_t$  coïncident, même si cette propriété est en général considérée comme acquise dans la littérature financière. Avec le point de vue que nous avons adopté, la preuve n'est pas immédiate.
- ⇒ Pour montrer l'identité de  $r(t, 0)$  et de  $r_t$ , nous calculons les intégrales  $I_1 = \int_0^t r(s, 0) ds$  et  $I_2 = \int_0^t r_s ds$ . La deuxième s'obtient à partir de l'équation (9.2.4)

$$I_2 = \int_0^t r_s ds = \int_0^t f(0, s) ds - \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, t)|^2 ds$$

La première s'obtient à partir de l'équation (9.2.7) appliquée à  $r(t, 0) = f(t, t)$ ,

$$I_1 = \int_0^t r(s, 0) ds = \int_0^t f(0, s) ds - \int_0^t ds \int_0^s \gamma(u, s) dW_u + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s \partial_s |\Gamma(u, s)|^2 du$$

Grâce à la formule d'intégration par parties (ou théorème de Fubini) déterministe ou stochastique, justifiée par les hypothèses d'intégrabilité (bornée ou de carré intégrable) faites sur la volatilité des taux forwards, nous pouvons faire les transformations suivantes qui utilisent le fait que  $\Gamma(u, u) = 0$ ,

$$\int_0^t ds \int_0^s \gamma(u, s) dW_u = \int_0^t \left( \int_u^t \gamma(u, s) ds \right) dW_u = \int_0^t [\Gamma(u, t) - \Gamma(u, u)] dW_u = \int_0^t \Gamma(u, t) dW_u$$

De même,

$$\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s \partial_2 |\Gamma(u, s)|^2 du = \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, t)|^2 ds$$

En regroupant ces égalités, nous voyons que les quantités  $I_1$  et  $I_2$  que nous cherchons à évaluer sont égales.

## Les équations différentielles des taux

Nous nous proposons maintenant de mesurer le comportement infinitésimal des déformations de la courbe entre deux dates très rapprochées, et d'en déduire la dynamique des taux de différentes maturités, et du taux court en particulier.

Comme nous le montrons, la pente de la courbe des taux forwards est un élément important pour expliquer la dynamique infinitésimale des taux.

**Théorème 9.2.2** *L'équation différentielle du taux actuariel de maturité  $\theta$  tient compte du taux forward en  $t + dt$  de même maturité  $\theta$  et de la structure des volatilités locales sous la forme :*

$$dR(t, \theta) = \partial_T F_t(t, \theta) dt + \frac{1}{2\theta} |\Gamma(t, t + \theta)|^2 dt - \frac{1}{\theta} \Gamma(t, t + \theta) dW_t \quad (9.2.12)$$

où  $\partial_T F_t(t, \theta)$  est la dérivée du taux forward de maturité  $\theta$  par rapport à l'échéance  $T$ , prise en  $T = t$ . De plus

$$\begin{aligned} \partial_T F_t(T, \theta)_{T=t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [F_t(t + \Delta t, \theta) - F_t(t, \theta)] \\ &= \partial_2 R(t, \theta) + \frac{1}{\theta} [R(t, \theta) - r_t] = \frac{1}{\theta} [f(t, t + \theta) - r_t] \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Les taux courts forwards  $r(t, u)$  évoluent comme

$$dr(t, u) = \partial_2 r(t, u) dt + \frac{1}{2} \partial_2 |\Gamma(t, t + u)|^2 dt - \gamma(t, t + u) dW_t \quad (9.2.14)$$

En particulier le taux court a une dynamique de la forme :

$$dr_t = 2\partial_2 R(t, 0) dt - \gamma(t, t) dW_t = \partial_2 r(t, 0) dt - \gamma(t, t) dW_t \quad (9.2.15)$$

M. MUSIELA en 1993 [?] est le premier à avoir montré l'importance de ces relations dans la modélisation des déformations de la courbe des taux, en notant en particulier que structurellement le système différentiel qui dirige la déformation de la courbe des taux est de dimension infinie. Nous verrons dans le paragraphe sur les variables d'état quel type de contraintes pèse sur la forme des volatilités locales pour que l'on puisse réduire la dimension de ce système.

L'interprétation économique de l'équation (9.2.14) n'a pas été clairement explicitée à ce jour (dans la littérature), à savoir la relation entre l'espérance de l'accroissement du taux et la théorie des anticipations rationnelles. Ceci sera développé dans la section suivante.

**PREUVE :** L'équation différentielle satisfaite par le logarithme des cours des zéro-coupon  $\text{Ln}(B(t, T))$  est donnée simplement par :

$$d_t \text{Ln}(B(t, T)) = r_t dt - \frac{1}{2} |\Gamma(t, T)|^2 dt + \Gamma(t, T) dW_t.$$

⇒ Pour en déduire l'équation différentielle satisfaite par les taux, la première étape est de rendre l'échéance glissante, puisque nous avons la relation :

$$\theta R(t, \theta) = -\text{Ln}B(t, t + \theta)$$

Par la formule de différentiation composée<sup>5</sup>, la dynamique d'un taux de maturité fixe et donc d'échéance variable est donnée par :

$$\begin{aligned} d_t[\theta R(t, \theta)] &= d_t(-\text{Ln}B(t, t + \theta)) = -\partial_2 \text{Ln}B(t, t + \theta)dt - d_t \text{Ln}B(t, T)_{T=t+\theta} \\ &= \partial_2(\theta R(t, \theta))dt - r_t dt + \frac{1}{2}|\Gamma(t, t + \theta)|^2 dt - \Gamma(t, t + \theta)dW_t \end{aligned}$$

⇒ Il nous reste donc à interpréter la quantité  $\partial_\theta(\theta R(t, \theta)) - r_t = f(t, t + \theta) - r_t$  qui est aussi égale à  $[R(t, \theta) + \theta \partial_\theta R(t, \theta) - r_t]$  comme la dérivée d'un taux forward par rapport à la date d'échéance du taux. Or  $R_t(T, \theta) = -\frac{1}{\theta}[\text{Ln}B(t, T + \theta) - \text{Ln}B(t, T)]$  admet comme dérivée par rapport à la date  $T$ ,

$$\partial_T r_t(T, \theta) = \frac{1}{\theta}[f(t, T + \theta) - f(t, T)]$$

ce qui prouve la propriété recherchée. Il en résulte que

$$dR(t, \theta) = \partial_T(R_t(\cdot, \theta))_{T=t}dt + \frac{1}{2\theta}|\Gamma(t, t + \theta)|^2 dt - \frac{1}{\theta}\Gamma(t, t + \theta)dW_t$$

Pour obtenir l'équation du taux court, il suffit de faire tendre  $\theta$  vers 0 dans ces relations.

⇒ Pour obtenir celle des taux courts forwards, il suffit de dériver l'équation de  $(uR(t, u))$ . La dynamique du taux court dépend de la pente de la courbe à l'origine.

Par le même argument, il est possible d'écrire la dynamique de toutes les dérivées successives par rapport à la maturité de  $\partial_2(uR(t, u)) =: r(t, u)$ , à condition de supposer que *le vecteur de volatilités locales est indéfiniment dérivable par rapport à la maturité* et que toutes les dérivées sont majorées par des processus de carré intégrable. Nous notons  $r^{(n)}(t, u)$  la dérivée n-ième par rapport à la maturité  $u$  du taux court forward d'échéance glissante.

$$dr^{(n)}(t, \theta) = r^{(n+1)}(t, \theta)dt + \frac{1}{2}\partial_2^{(n+1)}[\text{vol}(t, t + \theta)^2]dt - \partial_2^{(n+1)}\Gamma(t, t + \theta)dW_t \quad (9.2.16)$$

## 9.3 Exemples de fonctions de volatilité

### 9.3.1 Un modèle faiblement stationnaire

Supposons que le vecteur des volatilités locales des zéro-coupon se factorise en un produit de deux processus, l'un qui est un vecteur aléatoire que nous noterons  $(\sigma_t)$  et l'autre une fonction déterministe  $G(T - t)$  de dérivée  $g(T - t)$  de telle sorte que

$$\Gamma(t, T) = G(T - t)\sigma_t; \quad \gamma(t, T) = g(T - t)\sigma_t; \quad g(0) = 1$$

Les équations des taux se simplifient un peu en

$$dR(t, \theta) = \frac{1}{\theta}[r(t, \theta) - r_t]dt + \frac{1}{2\theta}G^2(\theta)|\sigma_t|^2 dt - \frac{1}{\theta}G(\theta)\sigma_t dW_t \quad (9.3.1)$$

---

<sup>5</sup>Il s'agit de l'analogue différentiel de la formule d'intégration par parties que nous avons utilisée précédemment

Nous retrouverons cette forme à plusieurs reprises dans les exemples décrits ci-dessous. En particulier, dans le cas stationnaire, ( $\sigma$  indépendant du temps), l'équation des taux forwards (9.2.9) devient

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t g(T-s) \sigma dW_s + |\sigma|^2 [G^2(T) - G^2(T-t)] \quad (9.3.2)$$

Nous décrivons ci-dessous un certain nombre de fonctions de volatilité locale, couramment utilisées dans la pratique, en faisant référence explicitement aux modèles auxquelles elles sont associées et qui ne seront présentées que dans la deuxième partie de ce chapitre.

### 9.3.2 Le cas unidimensionnel

Nous supposons le nombre de browniens égal à 1 .

#### Volatilité locale de Vasicek et Ho et Lee

La fonction de volatilité est une fonction non aléatoire définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\begin{aligned} \Gamma_V^a(t, t+\theta) &= \sigma \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} & \theta \geq 0 \\ \gamma_V^a(t, t+\theta) &= \sigma e^{-a\theta} \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

pour le modèle de VASICEK.

La limite de cette fonction lorsque  $a$  tend vers 0 est la volatilité du modèle de HO ET LEE en temps continu.

$$\begin{aligned} \Gamma_{Ho.Lee}(t, t+\theta) &= \sigma\theta \\ \gamma_{Ho.Lee}(t, t+\theta) &= \sigma \end{aligned}$$

Ces modèles sont stationnaires, associés à la fonction  $G^a(\theta) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\theta})$ ; leur version faiblement stationnaire consiste à faire dépendre du temps le paramètre  $\sigma$ .

L'une des propriétés remarquables de cette classe de fonctions de volatilité est la factorisation suivante :

$$\Gamma_V^a(u, t+\theta) - \Gamma_V^a(u, t) = \Gamma_V^a(0, \theta) e^{-a(t-u)} \quad (u \leq t). \quad (9.3.4)$$

L'identité suivante est également très utile

$$\begin{aligned} & \int_0^t |\Gamma_V^a(u, t+\theta)|^2 du \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \int_0^t [(1 - e^{-a(t+\theta-u)}) - (1 - e^{-a(t+\theta-u)})e^{-a(t+\theta-u)}] du \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ t - \frac{e^{-a\theta}}{a} (1 - e^{-at}) - \frac{(1 - e^{-a(t+\theta)})^2}{2a} + \frac{(1 - e^{-a\theta})^2}{2a} \right] \end{aligned}$$

La représentation des taux se simplifie considérablement sous la forme

$$R(t, \theta) = R_0(t, \theta) + \Phi^a(t, \theta) - \Gamma_V^a(0, \theta) \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \quad (9.3.5)$$

$\Phi(t, \theta)$  est une fonction que l'on peut expliciter à partir des calculs précédents mais nous verrons que c'est rarement nécessaire.

– Pour  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned}\Phi^a(t, \theta) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ (1 - e^{-a\theta}) \frac{1 - e^{-at}}{a} - \frac{(1 - e^{-a(t+\theta)})^2}{2a} \right] \\ &+ \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ \frac{(1 - e^{-at})^2}{2a} + \frac{(1 - e^{-a\theta})^2}{2a} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} [(G^a(t) + G^a(\theta))^2 - (G^a(t + \theta))^2]\end{aligned}\quad (9.3.6)$$

Pour  $a = 0$

$$\Phi^0(t, \theta) = \frac{\sigma^2}{3} [(t + \theta)^3 - \theta^3 - t^3] = \sigma^2 t \theta (t + \theta) \quad (9.3.7)$$

**Exemple 9.3.1** Des tests empiriques faits à partir de prix d'OAT montrent que sur le marché français, des valeurs raisonnables de  $a$  se situent entre 0,1 et 0,8 et pour  $\sigma$  entre 0,4% et 4%.

### Volatilité de CIR

La fonction de volatilité est une fonction du taux spot, définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\Gamma_{CIR}(t, t + \theta) = \sigma \sqrt{r_t} G(T - t) \quad (9.3.8)$$

où  $G$  est une fonction déterministe solution d'une certaine équation différentielle de type Ricatti (?). Dans cet exemple la fonction de volatilité est aléatoire.

### 9.3.3 Le cas multi-dimensionnel

Nous supposons que maintenant deux sources de bruit perturbent les prix. La fonction de volatilité est supposée de la forme

$$\begin{aligned}\Gamma(u, t)_1 &= \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} \sigma_{11} + \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha} \sigma_{21} \\ \Gamma(u, t)_2 &= \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} \sigma_{12} + \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha} \sigma_{22}\end{aligned}\quad (9.3.9)$$

Par les mêmes calculs que précédemment, il vient

$$\begin{aligned}R(t, \theta) &= R_0(t, \theta) + \hat{\Phi}(t, \theta) - \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} \left[ \int_0^t e^{-a(t-u)} \sigma_{11} dW_u^1 + \sigma_{12} dW_u^2 \right] \\ &- \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \left[ \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} \sigma_{21} dW_u^1 + \sigma_{22} dW_u^2 \right]\end{aligned}\quad (9.3.10)$$

**Exemple 9.3.2** Dans ce modèle vectoriel, les tests menés dans le travail de (El Karoui, Geman, Lacoste), montrent que des valeurs raisonnables de  $a$  se situent entre 0,1 et 0,8 et pour  $\alpha$  entre 0,001 et 0,01. Les ordres de grandeurs des paramètres  $\sigma_{ij}$  sont de 0,1% à 5%.

*Tracer la courbe des volatilités locales des taux forwards pour montrer les bosses de volatilités*

## 9.4 ANALYSE en TERME de VARIANCE-COVARIANCE

Dans la première partie de ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse que la volatilité des taux est **déterministe**, ainsi que le vecteur  $\lambda$  des primes de risque. Les équations précédentes montrent que les prix des zéro-coupon ont une distribution *log-normale* et que les taux des différentes maturités sont *gaussiens*. Les paramètres d'espérance et variance sont donc très importants à calculer puisqu'ils spécifient complètement la loi :

- l'étude de la matrice de variance-covariance permet de quantifier le risque de taux et de préciser les corrélations entre les taux de diverses dates et de diverses maturités. Le rang de la matrice donne le nombre de liaisons affines existant entre des taux de diverses maturités.
- comme conséquence de l'arbitrage, nous voyons que les espérances se calculent uniquement à partir de la matrice de variance covariance des taux, des primes de risque et bien sûr des taux forwards lus sur la courbe des taux aujourd'hui.

### 9.4.1 Etudes des corrélations

Le caractère gaussien des taux d'intérêt permet une étude simple des matrices de variance-covariance dont les propriétés dépendent beaucoup plus de la forme des volatilités que du nombre de browniens sous-jacents. Pour comprendre aisément les calculs ci-dessous, rappelons l'équation de référence (?)

$$\begin{aligned} R(t, \theta) = F_0(t, \theta) &= \frac{1}{\theta} \int_0^t [\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)] [d\widehat{W}_s + \lambda_s ds] \\ &+ \frac{1}{2\theta} \int_0^t [|\Gamma(s, t + \theta)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

**Théorème 9.4.1** *La matrice de variance-covariance des taux de différentes dates et de différentes maturités est donnée par :*

$$\begin{aligned} K_{t,s}(\theta, \tilde{\theta}) &= \text{cov}(R(t, \theta), R(s, \tilde{\theta})) \\ &= \frac{1}{(\theta\tilde{\theta})} \int_0^{t \wedge s} [\Gamma(u, t + \theta) - \Gamma(u, t)] [\Gamma(u, s + \tilde{\theta}) - \Gamma(u, s)]^* ds \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

où  $t \wedge s$  désigne le minimum de  $t$  et de  $s$ .

**Remarque :** Lorsque les primes de risque sont déterministes, les taux sont gaussiens dans l'univers historique comme dans l'univers risque-neutre. La matrice de variance-covariance est alors la même dans les deux univers. C'est la raison pour laquelle il n'est pas spécifié de probabilité dans l'énoncé ci-dessus.

PREUVE :

⇒ La covariance de deux taux est celle des intégrales de Wiener qui leur sont associées, c'est à dire l'intégrale du produit des fonctions de volatilité. Nous faisons le calcul dans l'univers historique.

$$\begin{aligned} \text{cov}[R(t, \theta), R(s, \tilde{\theta})] &= \\ \frac{1}{\theta\tilde{\theta}} \text{cov} \left[ \int_0^t -(\Gamma(u, t + \theta) - \Gamma(u, t)) d\widehat{W}_u, \int_0^s -(\Gamma(u, s + \tilde{\theta}) - \Gamma(u, s)) d\widehat{W}_u \right] \\ &= \frac{1}{(\theta\tilde{\theta})} \int_0^{t \wedge s} [\Gamma(u, t + \theta) - \Gamma(u, t)] [\Gamma(u, s + \tilde{\theta}) - \Gamma(u, s)]^* ds \end{aligned}$$

⇒ Pour établir cette relation, nous avons utilisé le fait que, toute intégrale stochastique de fonction déterministe sur l'intervalle  $[t, s]$  ( $t \leq s$ ) par rapport au mouvement brownien est indépendante des variables qui sont des intégrales stochastiques entre  $[0, t]$  car le mouvement brownien est à accroissements indépendants. Les covariances de telles variables sont donc nulles. C'est ce qui explique le terme en  $t \wedge s$  dans les formules de covariance de l'énoncé.

**Exemple** LA FONCTION DE VOLATILITÉ DE VASICEK

- Lorsque la fonction de volatilité est la fonction  $\Gamma_V(t, t + \theta) = \sigma \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}$ , nous avons vu (??) que le bruit qui affecte à une date donnée les taux de différentes maturités est proportionnel à une même variable

gaussienne centrée  $\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u$ . Le coefficient de proportionnalité du taux  $R(t, \theta)$  est  $\sigma \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta}$ . La variance  $\text{var}[R(t, \theta)]$  est donnée par :

$$\text{var}[R(t, \theta)] = \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} \right)^2 \left( \frac{1 - e^{-2a\theta}}{2a} \right) = \sigma^2 (G_a(\theta))^2 G_{2a}(t) \quad (9.4.3)$$

Les taux de même date de maturités différentes sont parfaitement corrélés.

- Les taux associés à des dates d'observation différentes sont corrélés de manière toujours positive,

$$\begin{aligned} \text{cov}[R(t, \theta), R(t+h, \tilde{\theta})] &= \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} \right) \left( \frac{1 - e^{-a\tilde{\theta}}}{a\tilde{\theta}} \right) e^{-ah} \left( \frac{1 - e^{-2a\theta}}{2a} \right) \\ &= e^{-ah} \text{cov}[R(t, \theta), R(t, \tilde{\theta})] \end{aligned}$$

Notons que ce n'est pas l'hypothèse d'un brownien unique faite dans cet exemple, qui implique que les taux sont complètement corrélés entre eux, mais le choix de la fonction de volatilité. Nous allons illustrer ce point sur un exemple.

#### Exemple FONCTION DE VOLATILITÉ QUADRATIQUE

- ⇒ Supposons par exemple que la fonction de volatilité soit une fonction quadratique de la maturité restante, par exemple la plus simple

$$\Gamma(t, t+\theta) = \sigma[(\theta - \alpha)^2 - \alpha^2] \quad \text{et donc } \gamma(t, t+\theta) = 2\sigma(\theta - \alpha)$$

La fonction  $\Gamma(t, s)$  n'est pas toujours positive, mais rappelons que c'est son module qui est la volatilité (au sens habituel) des zéro-coupon. Une telle fonction de volatilité  $|\Gamma(t, s)|$  n'est pas une fonction croissante de la maturité puisqu'elle décroît sur l'intervalle  $[\alpha, 2\alpha]$  et croît ailleurs.

- ⇒ Pour ne pas introduire des calculs trop fastidieux, nous étudions les corrélations des taux courts forwards, données par

$$\begin{aligned} \text{cov}[r(t, \theta), r(t+h, \tilde{\theta})] &= \int_0^t \gamma(u, t+\theta) \gamma(u, t+h+\tilde{\theta}) du \\ &= 4\sigma^2 \int_0^t (t+\theta-\alpha-u)(t+h+\tilde{\theta}-\alpha-u) du \\ &= 4\sigma^2 [(\theta-\alpha)(\tilde{\theta}-\alpha)t + (\theta+\tilde{\theta}+h-2\alpha)\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3] \end{aligned}$$

Les taux ne sont pas complètement corrélés et les covariances ne sont pas toujours positives si  $\theta < \alpha < \tilde{\theta}$ .

En particulier, elles sont négatives pour  $t$  petit.

Dans le cas d'un mouvement brownien vectoriel, il est aisé de trouver des structures de corrélations pouvant être négatives. Pour des fonctions de volatilités bien choisies, on peut garder à la fois cette richesse dans les corrélations et une certaine facilité dans la mise en oeuvre comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple VOLATILITÉ DE TYPE HULL ET WHITE, OU VASICEK VECTORIEL

- ⇒ Reprenons l'exemple de la fonction de volatilité vectorielle donnée aux équations (9.3.9). Comme nous l'avons vu dans cet exemple, les taux sont maintenant des combinaisons affines de deux processus gaussiens de base, centrés et corrélés

$$\begin{aligned} \hat{Z}_t^1 &= \int_0^t e^{-a(t-u)} \sigma_{11} d\hat{W}_u^1 + \sigma_{12} d\hat{W}_u^2 \\ \hat{Z}_t^2 &= \int_0^t e^{-a(t-u)} \sigma_{21} d\hat{W}_u^1 + \sigma_{22} d\hat{W}_u^2 \\ \text{cov}[\hat{Z}_t^1, \hat{Z}_t^2] &= (\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22})G_{a+\alpha}(t) \quad \text{où } G_a(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a} \end{aligned}$$

Comme la partie stochastique de  $R(t, \theta)$  est  $\frac{1}{\theta}[-G_a(\theta)\hat{Z}_t^1 - G_\alpha(\theta)\hat{Z}_t^2]$  la matrice de variance covariance des taux s'en déduit aisément.

- Dans cet exemple, la volatilité des zéro-coupons est donnée par

$$\text{vol}(t, t+\theta)^2 = G_a(\theta)^2[\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2] + G_\alpha(\theta)^2[\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2] + 2G_a(\theta)G_\alpha(\theta)[\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}]$$

Si les processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $\hat{Z}^1$  et  $\hat{Z}^2$  sont corrélés négativement, la volatilité des taux n'est pas une fonction croissante de la maturité. En particulier, s'il vaut  $-1$ , ce qui implique que les processus  $Z^1$  et



$Z^2$  sont parfaitement corrélés de manière instantanée, la volatilité est égale au module de la différence de deux fonctions croissantes.

Comme nous le voyons sur ces exemples, l'hypothèse souvent introduite que la volatilité des zéros-coupons est croissante avec la maturité est probablement trop contraignante dans la mesure où elle implique fréquemment que les corrélations entre les taux sont positives.

### 9.4.2 Espérance et anticipations

Les propriétés des variances-covariances des taux sont des conséquences de la modélisation retenue pour les volatilités des zéro-coupon, et de l'écriture des taux comme des fonctions des ces zéro-coupon. L'absence d'opportunité d'arbitrage porte fondamentalement sur l'espérance des taux comme le montre l'équation intégrale (9.4.1). Le choix de la probabilité de référence influe sur les calculs. Nous donnerons systématiquement les énoncés d'abord sous la probabilité risque-neutre qui permet de faire les calculs d'évaluation et de couverture et parce qu'ils sont les plus simples, puis sous la probabilité historique, qui est la référence en terme de tests statistiques et de ce que les opérationnels ont à l'esprit.

**Théorème 9.4.2** *Le taux  $R(t, \theta)$  a comme espérance sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R(t, \theta)] &= F_0(t, \theta) + \frac{1}{2\theta} \int_0^t [|\Gamma(s, t + \theta)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds \\ &= F_0(t, \theta) + \frac{\theta}{2} \text{var}(R(t, \theta)) + \int_0^t \text{cov}[r_s, R(t, \theta)] ds\end{aligned}$$

En particulier, le taux court a comme caractéristiques :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t) = f(0, t) + \int_0^t \text{cov}[r_s, r_t] ds = f(0, t) + \text{cov}(\text{Ln}S_t^0, r_t) \quad (9.4.4)$$

PREUVE :

⇒ L'équation intégrale des taux (9.4.1) donne immédiatement la première relation.

⇒ La seconde égalité repose, d'une part sur la formule donnant la variance et sur l'identité

$$|\Gamma(s, t + \theta)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2 = |\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)|^2 - 2[\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)]\Gamma(s, t)^*$$

d'autre part, sur les propriétés de  $\int_0^t r_s ds$ . Or d'après la formule (9.2.1) et la condition  $B(t, t) = 1$ , il est clair que  $\int_0^t r_s ds$  est une variable gaussienne dont la partie bruit est l'intégrale stochastique de  $(-\Gamma(s, t))$  par rapport à  $dW_s$ . Il en résulte aisément que :

$$\int_0^t \text{cov}[r_s, \theta R(t, \theta)] ds = \int_0^t r[\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)]\Gamma(s, t)^* ds$$

et que

$$\int_0^t \text{cov}[r_s, r_t] ds = \int_0^t \Gamma(s, t)\gamma(s, t)^* ds$$

Mais ce dernier terme est exactement celui qui intervient dans l'équation intégrale du taux court  $r_t$ . L'interprétation de l'espérance de  $r_t$  en résulte aisément.

⇒ Le biais de volatilité qui apparaît dans l'équation d'un taux traduit la corrélation du taux de référence à la date  $t$  avec les taux courts des dates antérieures. Cette covariance peut être interprétée un peu

différemment en introduisant le processus  $(S_t^0)$  qui décrit la valeur en  $t$  de 1F placé à la banque à la date 0, puisque  $\text{Ln}S_t^0 = \int_0^t r_s ds$ . Ainsi,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R(t, \theta)] = F_0(t, \theta) + \frac{\theta}{2} \text{var}[R(t, \theta)] + \text{cov}[\text{Ln}S_t^0, R(t, \theta)]$$

epreuve

### Anticipations dans l'univers historique

Dans l'univers historique, il faut introduire le biais dû à la prime de risque, que nous avons supposée déterministe. Pour obtenir une interprétation très similaire à la précédente, nous introduisons le numéraire de marché.

Considérons un portefeuille dont la volatilité est exactement la prime de risque, (plus exactement le vecteur  $\lambda_t^*$  transposé du vecteur des primes de risque) et dont la valeur financière à la date 0 est égale à 1. Nous l'appelons "le numéraire de marché". (Il convient de ne pas le confondre avec le portefeuille du marché qui joue un rôle fondamental dans le Capital Asset Pricing Model). Son prix  $\Phi_t$  vérifie

$$\frac{d\Phi_t}{\Phi_t} = r_t dt + |\lambda_t|^2 dt + \lambda_t^* dW_t, \quad \Phi_0 = 1. \quad (9.4.5)$$

La probabilité historique est la probabilité risque-neutre lorsque le numéraire de marché est pris comme référence. En termes de taux d'intérêt, le numéraire de marché joue le même rôle que  $S^0$  dans l'analyse des taux anticipés.

**Théorème 9.4.3** *Le taux  $R(t, \theta)$  de maturité  $\theta$  a comme espérance sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R(t, \theta)] &= F_0(t, \theta) - \int_0^t \frac{1}{\theta} [\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)] \lambda_s ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\theta} [|\Gamma(s, t + \theta)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R(t, \theta)] - \int_0^t \frac{1}{\theta} [\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)] \lambda_s^* ds \end{aligned}$$

*Ce dernier terme s'interprète en termes de numéraire de marché.*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R(t, \theta)] = F_0(t, \theta) + \frac{\theta}{2} \text{var}[R(t, \theta)] + \text{cov}[\text{Ln}\Phi_t, R(t, \theta)] \quad (9.4.6)$$

bpreuve

$\Rightarrow$  Les preuves sont les mêmes que précédemment, mais en prenant en compte le fait que sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(dW_t) = \lambda_t dt$ .

Par définition du numéraire de marché,  $\text{Ln}\Phi_t$  a comme partie aléatoire  $\int_0^t r_s ds - \lambda_s ds$  dont la covariance avec  $R(t, \theta)$  est exactement

$$\int_0^t \frac{1}{\theta} [\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)] [\Gamma(s, t) - \lambda_s]^* ds$$

### 9.4.3 Pouvoir prédictif des taux forwards

Les formules (9.4.1) que nous venons d'établir montrent la dynamique structurelle qui dirige la déformation future de la courbe des taux. Toutes ces équations sont construites sur le même principe :

un terme lu sur la courbe des taux aujourd'hui, augmenté d'un biais dû à la volatilité des taux, plus un bruit centré sous la probabilité risque-neutre.

Le taux forward  $F_0(t, \theta)$ , lu sur la courbe des taux au jourd'hui est un estimateur biaisé du taux en  $t$ ,  $R(t, \theta)$ , le biais étant un biais de volatilité. Lorsque  $[vol(t, T)]^2$  est une fonction croissante de la maturité (ce qui est une hypothèse couramment faite sur les marchés), le biais de volatilité est toujours positif dans l'univers risque-neutre.

*La courbe des taux forwards, déduite de la courbe des taux aujourd'hui sous-estime l'espérance risque-neutre des taux futurs.*

Pour l'estimation future de la courbe des taux, en vue d'établir des stratégies de couverture notamment, ou de l'analyse de performance de certaines stratégies de portefeuille, l'étude est à mener dans l'univers objectif ou historique. Il faut donc rajouter au biais de volatilité pur, le biais lié aux primes de risque dont nous avons vu qu'il mesure la covariance entre les taux et le rendement du numéraire de marché.

Autour de cette courbe moyenne estimée, nous construisons les courbes frontières d'intervalles de confiance, et dont l'écartement dépend de la maturité des taux considérés, par l'intermédiaire de leur volatilité. Toutefois, compte-tenu du niveau assez faible de la volatilité des taux, l'approximation qui consiste à estimer la courbe des taux futurs par la courbe des taux forwards lue sur la courbe des taux aujourd'hui est souvent acceptable "au premier ordre". (voir le graphique)

La question d'identifier les éléments à prendre en compte pour expliquer les déformations de la courbe des taux est complexe. Une technique classique pour aborder ce problème est *l'analyse en composantes principales*, qui permet de déterminer les mouvements principaux des courbes des taux et leur importance relative au cours du temps. De nombreux tests effectués sur le marché français (Lacoste [?]), américain (Scheinkman [?]) ou anglais (Schaeffer [?]) montrent que les principaux mouvements sont au nombre de trois, les déplacements parallèles, la torsion due à une modification de l'écart taux court taux-long, et une variation de la courbure. Le premier mouvement a un pouvoir explicatif très important (environ 80%), le deuxième un pouvoir moindre mais encore signifiant (17%), le dernier expliquant seulement 3% de la variation des courbes. Le type de mouvements significatifs est très stable au cours du temps, mais leur pouvoir explicatif peut changer un peu selon les pays ou les périodes. Ce débat est repris sous d'autres aspects dans le chapitre suivant, dans la partie relative aux modèles de taux à facteurs.

#### 9.4.4 Anticipation et gestion de portefeuille

Une bonne identification des paramètres de la loi des taux est d'une grande importance dans la gestion de portefeuille.

Considérons un investisseur qui souhaite placer un capital de  $x_F$  pour une période de  $T$  années, uniquement dans du monétaire ou des zéro-coupon. Plusieurs possibilités s'offrent à lui :

- faire un placement au jour le jour à la banque, qui lui permet notamment de ne pas immobiliser son capital
- investir directement dans un zéro-coupon de maturité  $T$
- faire un placement monétaire jusqu'à la date  $H$ , et investir ensuite dans un zéro-coupon de maturité  $T - H$
- faire un placement dans un zéro-coupon de maturité  $H$  puis un placement monétaire sur la valeur liquidative de portefeuille en  $H$

La valeur liquidative en  $T$  de son portefeuille  $S_T$  diffère suivant les différentes stratégies adoptées. Elle

peut toujours s'écrire comme  $xe^{X_T}$  où :

$$\begin{aligned} X_T^1 &= \int_0^T r_s ds, & X_T^2 &= \int_0^T f(0, T) ds \\ X_T^3 &= \int_0^H r_s ds + \int_H^T f(H, u) du = \int_0^H r_s ds + (T - H)R(H, T - H) \\ X_T^4 &= \int_0^H f(0, s) ds + \int_H^T r_s ds = HR(0, H) + (T - H)R(H, T - H) \end{aligned}$$

Comme toutes ces variables sont gaussiennes, l'espérance de la valeur finale du portefeuille, et sa variance se calculent aisément comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_T] &= e^{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_T) + \frac{1}{2}\text{var}(X_T)} \\ \text{var}[S_T] &= (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_T])^2 [e^{\text{var}(X_T)} - 1] \end{aligned} \quad (9.4.7)$$

La deuxième stratégie est sans risque. En ce qui concerne les autres, leurs espérances et variances mettent en jeu la variance des  $X_T^i$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{var}[X_T^1] &= \int_0^T |\Gamma(s, T)|^2 ds, & \text{var}[X_T^2] &= 0 \\ \text{var}[X_T^3] &= \int_0^H |\Gamma(s, T)|^2 ds \\ \text{var}[X_T^4] &= \int_H^T |\Gamma(s, T)|^2 ds \end{aligned}$$

Pour le calcul des espérances, nous avons de même que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[X_T^1] &= TR(0, T) + 1/2 \int_0^T |\Gamma(s, T)|^2 ds - \int_0^T \Gamma(s, T) \lambda_s ds, \\ \mathbb{E}_P[X_T^2] &= TR(0, T) \\ \mathbb{E}_P[X_T^3] &= TR(0, T) + 1/2 \int_0^H |\Gamma(s, T)|^2 ds - \int_0^H \Gamma(s, T) \lambda_s ds \\ \mathbb{E}_P[X_T^4] &= TR(0, T) + 1/2 \int_H^T |\Gamma(s, T)|^2 ds - \int_H^T \Gamma(s, T) \lambda_s ds \end{aligned}$$

Si l'investisseur est neutre au risque, la connaissance de la fonction de volatilité détermine complètement les différents couples (rendement- risque) de ces stratégies. Plus précisément, pour un niveau de risque donné, les stratégies admissibles ont le même rendement.

Lorsque le risque est rémunéré, se donner la variance du portefeuille ne détermine pas complètement le rendement. A un niveau de risque donné, certaines stratégies ont un rendement moyen supérieur aux autres. La préférence que l'on peut avoir pour telle stratégie par rapport à telle autre révèle les anticipations de l'investisseur concernant l'évolution du marché mais aussi ses primes de risque.

### 9.4.5 Arbitrage et théorie des anticipations instantanées

Pour clore cette section, nous revenons à une situation générale où les volatilités des zéro-coupons ne sont plus supposées déterministes. L'analyse précédente reste valable, mais seulement localement, c'est à dire que les anticipations de rendement et de variance doivent être menées entre  $t$  et  $t + dt$  seulement : pour la loi vue de  $t$ , la distribution des rendements peut être localement assimilée à celle de combinaison affines de variables gaussiennes.

Comme nous l'avons présentée dans le chapitre 1, la théorie des anticipations instantanées compare le taux moyen espéré en  $t + dt$  pour une maturité  $\theta$ , vu de  $t$  avec le taux forward en  $t$  pour l'échéance  $t + dt$  et une maturité  $\theta$ ,  $F_t(t + dt, \theta)$ . L'écart de rendement espéré en sur l'intervalle  $(t, t + dt)$  est une *prime de terme instantanée*. Elle est donc mesurée par la quantité

$$\begin{aligned} \text{prime de terme } (t, \theta)dt &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^t[R(t + dt, \theta)] - F_t(t + dt, \theta) \\ &\simeq \frac{1}{2\theta} |\Gamma(t, t + \theta)|^2 dt - \frac{1}{\theta} \Gamma(t, t + \theta) \lambda_t dt \\ &= \frac{\theta}{2} \text{var}_t(R(t + dt, \theta) - \text{cov}_t(R(t + dt, \theta), L_n \Phi_t)) \end{aligned} \quad (9.4.8)$$

Si la volatilité et les primes de risque sont déterministes, alors la prime de terme instantanée est constante dans tous les états du monde.

Dans l'univers risque-neutre ( $\lambda_t = 0$ ), cette prime est toujours strictement positive.

Dans l'univers historique, la situation est plus subtile et prend en compte l'ordre de grandeur des primes de risque intrinsèques au marché  $\lambda_t$  et la volatilité du zéro-coupon de même maturité que le taux.

Il n'est pas possible de trouver un vecteur de primes de risque pour lequel l'univers associé conduirait à des anticipations rationnelles (voir section ?) pour toutes les maturités, car si on anticipe que  $\lambda_t = \frac{1}{2}\Gamma(t, t+\theta_0)^*$  pour une maturité  $\theta_0$  particulière, le taux de maturité  $\theta_0$  sera bien anticipé par le forward, mais pour les autres taux, la prime de terme sera de  $\frac{1}{2\theta}\Gamma(t, t+\theta)[\Gamma(t, t+\theta) - \Gamma(t, t+\theta_0)]^*$ .

Dans les modèles à volatilité aléatoire, la prime de terme <sup>6</sup> peut être différente suivant les états du monde, et dépendre notamment pour une échéance donnée du niveau des taux.

---

<sup>6</sup>Constantinides (1993) fait une analyse précise de cette question dans le cas d'un modèle quadratique gaussien



## Chapitre 10

# PRODUITS DÉRIVÉS sur TAUX d'INTÉRÊT

### 10.1 Les INSTRUMENTS de COUVERTURE : FRAs, Futures, Swaps, Caps, Floors et Swaptions

Les contrats futurs sont cotés sur les marchés organisés ce qui leur assure une grande liquidité et peu de frais de transaction.

#### 10.1.1 Contrats forward et FRA's

Un contrat **Forward** est un accord entre deux parties d'acheter ou vendre un sous-jacent au temps future  $T$ . Dans un contrat **Forward**, tous les paiements ont lieu en  $T$ .

Un contrat **Forward** signé en  $t$ , délivrant  $\Phi$  en  $T$ , et de **prix forward**  $F_t(T, \Phi)$  est défini par les flux suivants :

- Le signataire du contrat reçoit en  $T$  la quantité  $\Phi$  de l'émetteur du contrat.
- Le signataire du contrat paie en  $T$  le montant  $F_t(T, \Phi)$  à l'émetteur.
- Le prix forward  $F_t(T, \Phi)$  est déterminé en  $t$  de façon telle que la valeur du contrat soit nulle en  $t$ . Le contrat forward se résume donc à un payoff de  $\Psi = F_t(T, \Phi) - \Phi$  en  $T$ . Par conséquent, sa valeur est déterminée à toute date intermédiaire par la règle d'évaluation habituelle.

Il convient de préciser la différence entre le prix forward et la valeur d'un contrat signé en  $t$  d'expiration  $T$  et de payoff  $\Phi$ . Pour ce faire, considérons un temps  $t < s < T$  :

- Le prix forward (souvent appelé le strike forward)  $F_s(T, \Phi)$  correspond au montant versé en  $T$  à l'émetteur du contrat signé en  $s$ .
- La valeur en  $s$  du contrat signé en  $t$  est :

$$F_t(T, \Phi)B(s, T) - \Pi(s, \Phi) = B(s, T)(F_t(T, \Phi) - F_s(T, \Phi)) \quad (10.1.1)$$

**Exemple 10.1.1** Si l'on considère un contrat forward sur un actif  $S_t$ , défini par le processus adapté  $d \ln S_t = r(t) dt + h(t) dW_t^{\mathbb{Q}}$  sous la mesure de probabilité *risque neutre*  $\mathbb{Q}$  en absence d'opportunité d'arbitrage, alors :

$$\mathbb{E}_{t, S_t}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) S_T \right] = S_t \text{ et } f(t, T, S_T) = \frac{S_t}{B(t, T)}$$

## Les options sur forward

Considérons une option *call* d'échéance  $T$  sur le prix forward associé au contrat signé en  $t$  d'échéance  $T_F > T$ . Le flux terminal de l'option en  $T$  est  $\Psi_T$  :

$$\Psi = B(T, T_F)(F_T(T_F, \Phi) - K)_+$$

### 10.1.2 Les contrats Future

Un contrat **Future** diffère du contrat forward par le fait que le paiement se fait continûment durant la vie du contrat, de façon à ce que la valeur du contrat soit constamment nulle.

Un contrat **Future** signé en  $t$  sur  $\Phi$ , d'échéance  $T$  est caractérisé par les propriétés suivantes :

- Sur la période  $[t, T]$ , le **prix future** de livraison de  $\Phi$  en  $T$  est coté sur le marché.
- Le signataire du contrat paie en  $T$  le montant  $Fu_T(T, \Phi)$  et reçoit la quantité  $\Phi$  de la contre partie.
- Sur l'intervalle  $[s, s + ds)$ ,  $s \in [t, T)$ , le signataire du contrat reçoit la quantité  $Fu_s(T, \Phi) - F(s + ds, T, \Phi)$ , de la contre partie.
- La valeur du contrat future  $\Pi_s$  est nulle  $\forall s \in [t, T]$ .

Le contrat future peut donc être vu comme un instrument financier payant des dividendes continûment, et dont l'achat ou la vente ne coûte rien. Il en découle que  $Fu_T(T, \Phi) = \Phi$ , et par conséquent il est inutile de délivrer le sous-jacent  $\Phi$ . De plus, en aucun moment on ne paie le montant  $Fu_t(T, \Phi)$  mais uniquement ses variations, ce pourquoi le terme *prix* utilisé pour  $F$  est source de confusions. Comme le future est un contrat forward qui paye un dividende, son évaluation diffère des règles standards. On a en particulier

Le **prix future** est un processus  $Fu_t(T, \Phi)$  définit par :

$$Fu_t(T, \Phi_T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\Phi_T] \quad (10.1.2)$$

**Remarque 10.1.1** Dans le cas où les taux d'intérêts sont déterministes, le prix forward est le même que le prix future.

### 10.1.3 Les options sur future

En fonction de la place de marché, les options sur futures sont traitées différemment. Dans certains cas, la prime de l'option n'est pas payée, et le vendeur reçoit quotidiennement les variations du prix de l'option. Ce sont les *future-like* options. Dans d'autres cas, le vendeur de l'option reçoit la prime, puis doit payer des appels de marges jusqu'à l'échéance de l'option. Ces options sont dites *marked-to-market*. Leur évaluation est très difficile, car les appels de marges sont fonction du calcul de risque *SPAN*<sup>1</sup> que la caisse de compensation applique aux portefeuilles des traders en fonction de leur contenu. Cependant, en négligeant ces derniers, il est possible d'en calculer le prix explicitement.

sc Les *NOT-marked-to-market* options

Prenons le cas d'un future obligataire livrant à l'échéance  $T_F$  un zéro coupon  $B(T_F, T_O)$  et considérons une option *call* sur ce dernier, d'échéance  $T$  où  $t < T < T_F < T_O$ . Alors le prix de l'option est donné par :

$$C(t, b; T, K) = \mathbb{E}_{t,b}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( \int_t^T r(s) ds \right) \left( \mathbb{E}_T^{\mathbb{Q}} [B(T_F, T_O)] - K \right)_+ \right] \quad (10.1.3)$$

sc Les *future-like* options

Les *future-like* options sont traitées exactement comme des contrats future, c'est-à-dire que le flux journalier correspond à la variation du prix de l'option et à l'échéance, l'acheteur paie le prix initial de l'option

---

<sup>1</sup>Standard Portfolio ANalysis of risk



et le vendeur le payoff de cette dernière. Ceci rend l'évaluation beaucoup plus simple. Se basant sur le même argument que pour les futures (cf. page 182), le prix d'un *call* est :

$$C(t, F(t, T_F, \Phi); T, K) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \left( F_{u_T}(T_F, \Phi) - K \right)_+ \right]$$

### 10.1.4 Les Swaps

Quand la maturité augmente, comme pour les prêts et les emprunts, les mécanismes mis en place dans les années 80 conduisent à échanger à des dates pluriannuelles les coupons variables contre des coupons fixes payés aux mêmes dates. L'opération s'appelle un swap.

Historiquement, les premiers swaps conclus au début des années 1980 étaient des swaps de devises. La simplicité du mécanisme financier ainsi que le fait que le risque de contrepartie soit limité à un flux d'intérêt et ne concerne pas le nominal expliquent le formidable succès des swaps de taux d'intérêt.

Un swap (du mot anglais signifiant échange) de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré aux termes duquel deux parties s'engagent à échanger pendant un nombre d'années et pour un montant nominal définis dans le contrat des flux d'intérêt annuels (ou pluriannuel) calculés pour une partie sur la base d'un taux variable constaté à des dates préfixées et pour l'autre partie sur la base d'un taux fixe, appelé **taux de swap**.

Nous avons vu que le prix des contrats à terme se déduit des prix de marché, par absence d'arbitrage. Ils sont caractérisés par le fait que la valeur financière globale de l'opération est nulle à la date de signature du contrat. Cette même règle prévaut pour les Swaps, qui prennent de la valeur dès qu'ils commencent à vivre.

Nous verrons dans la suite que si le taux variable est prédéterminé et ajusté à la période de paiement, sa valeur peut être déterminée à partir des données de marché, sans référence à un modèle spécifique.

### 10.1.5 Les instruments optionnels de taux

Les contrats à terme et les futures sont l'objet d'options dont certaines sont négociées sur le MATIF. Un contrat à terme est symétrique en terme de risque pour l'acheteur et le vendeur. Par contre,

Moyennant le paiement d'une prime à la date de signature du contrat, une option sur contrat à terme de taux d'intérêt garantit à son détenteur le droit d'emprunter ou de prêter à la date d'échéance, pour une maturité qui est celle du taux de référence, à un cours garanti, qui est souvent proche de la valeur du taux forward. On parle aussi de caplet ou de floorlet

Concernant les Swaps, plusieurs types d'options sont proposées

- Les Caps

Un investisseur a une dette pluri-annuelle, indexée sur un taux variable, par exemple l'EURIBOR trois mois. Il désire swaper cette dette contre le paiement de coupons fixes, mais seulement si les taux variables ont beaucoup monté. Il achète donc un Cap, qui lui permet à chaque date de paiement de coupon de comparer le taux variable avec le taux garanti. Si le taux variable est plus grand que le taux garanti, il exerce son droit. Si le taux variable est inférieur au taux garanti, il y renonce.

Un point important : le taux garanti est le même pour toutes les dates de paiement.

- Les floors

Les floors sont les analogues des caps, mais sur le principe de l'option de vente.

- Les swaptions

Un investisseur désire rentrer dans un swap dans le futur. Moyennant une prime, il veut se garantir

contre une hausse excessive du taux de swap, en achetant une option, qui est une option "d'achat" sur taux de swap, qui lui garantit un taux fixe plafonné. Ce taux est souvent proche du taux de Swap forward. Suivant sa position dans le Swap, il peut être plutôt intéressé par une option de vente. Il faut noter qu'en cas d'exercice, ce sont tous les paiements futurs qui seront affectés par l'option.

Ces dernières années des produits "exotiques" de taux d'intérêt, de type américain, ont rencontré beaucoup de succès. Il s'agit des **Swaptions Bermuda**, où l'investisseur peut choisir le moment où il rentre dans une swaption. S'il rentre après le début de l'option, la maturité du Swap sera réduite d'autant.

Les **flex-caps** ont également rencontré un succès certain, par la possibilité qu'ils offrent de choisir les caplets du Cap qui seront exercés (en nombre fixé dans le contrat). La prime est moins élevée que celle d'un Cap standard.

D'autres options sont couramment traitées, comme les **options corridor ou Boost**, qui parient sur la stabilité des taux : moyennant une prime, on reçoit un montant proportionnel au nombre de jours passés par le taux de référence à l'intérieur d'un corridor, pendant la durée du contrat.

De nombreuses variantes existent, les **options à cliquets**, qui autorisent périodiquement la redéfinition du corridor.....

Les **Caps CMS** échangent périodiquement un taux de Swap de maturité fixé dans le contrat contre un taux fixe, si l'opération est favorable à celui qui a payé la prime.

Les profonds mouvements de taux d'intérêt qui ont affectés les marchés européens pendant les années 92-95, la grande volatilité des taux sur le marché américain, le passage à l'Euro, ont amplifié l'intérêt porté aux produits dérivés de taux ; en particulier, les marchés des Swaps, des Caps et des Floors, et des options exotiques sur taux ont vu leurs volumes de transaction exploser....

## 10.2 Introduction aux méthodes d'évaluation

Le problème de l'évaluation et de la couverture de produits de taux est un problème majeur depuis de nombreuses années. Pour traiter ce problème, la première étape est celle de **la description précise de l'échéancier** associé au portefeuille, c'est à dire l'identification des dates de paiement et des flux connus ou aléatoires attendus dans l'avenir. Lorsque le portefeuille contient des produits hors bilan comme des Swaps, des Caps, des Floors, ou d'autres produits dérivés, cette identification peut être complexe..

Lorsque les flux attendus dans le futur sont connus, notamment pour un portefeuille d'obligations à taux fixe, la valeur financière du titre aujourd'hui est, comme nous l'avons vu à de nombreuses reprises, représentable en absence d'opportunité d'arbitrage à l'aide des prix zéro-coupon .

Un flux aléatoire  $\Phi$  payé à une date future  $T$  est pour le détenteur du titre auquel il est associé doublement risqué :

- par suite de l'incertitude d'évaluation qui résulte du fait qu'il n'est pas connu aujourd'hui
- à cause du risque de taux associé au fait que le paiement a lieu à une date future  $T$ .

Aussi lorsque les flux attendus sont aléatoires, leur évaluation demande un modèle cohérent de déformation de la courbe des taux, et un principe d'évaluation qui repose lui aussi sur l'AOA.

Lorsqu'on cherche à évaluer et couvrir un produit dérivé sur un sous-jacent qui est un actif négocié du marché, le principe de l'évaluation qui est à la base de la formule de Black et Scholes est le suivant : on construit un portefeuille autofinçant qui duplique les flux aléatoires attendus dans le futur. Le prix du produit dérivé est la valeur financière de ce portefeuille qui est le portefeuille de couverture.

Dans un marché où les taux sont aléatoires, au risque propre du sous-jacent, en général mesuré par sa volatilité, s'ajoute donc le risque de taux. Comment dans ce contexte, calculer le prix de certains produits

et les couvrir ?

Dans le cas des options sur taux, le risque spécifique est directement lié au risque de taux. Dans ce contexte, peut-on encore calculer les prix d'options du type cap et floor et autres produits dérivés, avec des formules de type Nlack et Scholes. ?

L'évaluation et la couverture des produits de taux d'intérêt repose qu'il s'agisse d'obligations, d'obligations à taux variable, de Swaps, ou de Caps ou de Floors sur la même méthodologie

- modéliser les flux aléatoires ou non attendus et leurs dates de paiement
- évaluer l'équivalent certain, (ou contrat forward) vu d'aujourd'hui, de ces flux .

## 10.3 Identification de l'échéancier

### 10.3.1 Quelques exemples d'échéanciers

#### Obligation taux fixe

Soit une obligation de taux de coupon  $C$ , annuel, de nominal  $100F$  et de maturité  $T = t + N$ . Les flux sont de la forme  $(C, T_i)$  pour  $i = 1, \dots, N - 1$  et  $(100 + C), T_N$  à l'échéance

**Exemple 10.3.1** Considérons l'OAT 10024, d'échéance le 21 Janvier 2005, de taux de coupon 9,7%. A la date du 21 Janvier 1995 l'échéancier est le suivant :

$$T_i = 21/01/1995 + i, C_i = 9,7, \quad T_N = 21/01/2005, C_N = 100 + 9,7$$

A la date du 30 Mars 1995, l'échéancier est le même. En particulier il n'est pas intégré dans cette représentation, la variation du coupon couru.

#### Obligation à taux variable

Soit une obligation référencée sur un taux de marché noté  $TM$  qui peut être le TAM, le T4M, ou le TME par exemple, de nominal  $100F$  et de maturité  $T = t + N$ .

Si les taux sont postcomptés les flux sont de la forme  $(TM(T_i), T_i)$  pour  $i = 1, \dots, (N - 1)$  et  $(100 + TM(T_N)), T_N$  à l'échéance.

Si les taux sont précomptés, les flux ont la même forme, mais mettent en jeu des taux de la forme  $(TM(T_i - d), T_i)$ , où  $d$  est la fraction d'année qui mesure l'écart entre le moment où le taux est connu et celui où il est payé.

Les Swaps CMS rentrent dans cette catégorie.

**Exemple 10.3.2** L'obligation à taux variable référencée sur le TME a comme échéance le 31 Mars 2000. Les coupons annuels sont référencés sur le TME de la date de paiement. Le TME étant un taux long, il y a dans ce cadre un grand décalage entre la maturité des taux et l'espacement des paiements. Nous verrons que ceci induit un risque réel.

### Swaps

Dans la description de l'échéancier d'un Swap, on distingue la branche variable, qui correspond à des paiements régulièrement espacés (par exemple tous les trois mois) d'une fraction (égale à nombre de jours du mois/360) du taux variable de référence, (par exemple le taux Euribor 3 Mois), constaté à la date de paiement précédente. En d'autres termes, le paiement en  $T_{i+1} = T_i + \delta$  est le taux  $\delta L(T_i, \delta)$ .

La branche fixe consiste au paiement aux mêmes dates du taux fixe, ou taux de Swap,  $T^{Swap}$  qui est fixé

dan le contrat.

L'échéancier est donc de la forme  $(\delta L(T_i, \delta) - T^{SW}, T_{i+1})$ , pour des indices  $i=1, \dots, N$ , et des dates  $T_i = T_0 + i\delta$ .

Noter que par un artifice, on peut toujours rajouter 100FF à la branche variable, à l'échéance du Swap et 100FF à la branche fixe à la même date et que cela n'a pas d'importance si la courbe d'actualisation est la même. Le Swap ressemble alors à une obligation à taux variable.

### Option d'achat sur obligation

Les caractéristiques de l'option sont son échéance  $T_C$  et son prix d'exercice  $K$ , celles de l'obligation sont sa maturité  $T > T_C$ , et les coupons  $C_i$  payés après la maturité de l'option aux dates :

$$T_{O_C} = T_C < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T$$

Nous notons  $O_t$  la valeur financière en  $t$  de cette obligation.

Les flux attendus dépendent du fait qu'il y a exercice ou non en  $T_C$ .

Désignons par  $\mathcal{E}$  l'événement aléatoire : il y a exercice à la date  $T_C$ ,

$$\mathcal{E} = \{O_{T_C} \geq K\}$$

Les flux aléatoires associés à cette option peuvent être décrits de deux manières :

- Lors de l'exercice, le titre est livré. Les flux attendus sont alors de : 0 si  $\mathcal{E}$  n'est pas réalisé et sur  $\mathcal{E}$  de la forme,  $(-K, T_C)$  et  $(C_i, T_i)$   $i = 1, \dots, n$
- Le titre peut aussi être renégocié immédiatement à sa valeur financière, sans coût de transaction et le flux est alors de  $O_{T_C} - K$  sur  $\mathcal{E}$ , 0 ailleurs.

## 10.4 Evaluation forward

La deuxième étape est l'évaluation et la couverture de ces flux, payés dans le futur, et donc à priori soumis au risque de taux.

Lorsque les flux sont connus, comme par exemple dans le cas des obligations, la connaissance des prix des zéro-coupon aujourd'hui suffit à déterminer sous l'hypothèse d'AOA la valeur financière de tels titres. En particulier le prix à la date  $t$  d'une obligation est donné par

$$O_t = \sum_{i=1}^N C_i B(t, T_i) \quad (10.4.1)$$

Si les flux sont aléatoires, notamment par exemple pour une obligation à taux variable, ou dans la branche variable d'un Swap, il est souhaitable d'obtenir une représentation du prix à la date  $t$  par une relation similaire, ce qui revient à remplacer le flux aléatoire  $(X_i, T_i)$  par un son "équivalent certain" vu de la date  $t$ .

En d'autre terme, cela revient à fixer à la date  $t$  le prix auquel on serait prêt à financer le flux aléatoire  $X_i$  en  $T_i$ . Mais c'est exactement la définition du prix à terme négocié en  $t$ , dont nous noterons le cours  $\Phi_t(X_i, T_i)$ , calculé de manière à donner une valeur financière nulle au contrat à terme à la date  $t$  de négociation. Le prix d'une obligation à flux éventuellement variable est alors

$$O_t = \sum_{i=1}^N \Phi_t(X_i, T_i) B(t, T_i) \quad (10.4.2)$$

### 10.4.1 Exemples de contrats dont l'évaluation ne demande pas de modèle

#### Contrat forward sur un actif financier

Lorsque  $X_T$  est la valeur en  $T$  d'un actif  $S$ , c'est à dire lorsqu'on écrit un contrat forward sur un actif qui ne paye pas de dividende, nous avons vu que par un petit raisonnement d'arbitrage

$$\boxed{\Phi_t(S_T, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}} \quad (10.4.3)$$

En particulier, le montant à investir en  $T$  pour se garantir  $1FF$  payé en  $T+\theta$  peut être évalué en  $t$  comme le prix d'un contrat forward sur le zéro-coupon  $B_t(T, T+\theta)$ , soit  $\frac{B(t, T+\theta)}{B(t, T)}$ . Le taux de rendement linéaire de cette opération est le taux forward linéaire  $L_t(T, \theta)$ .

#### Contrat forward sur un taux prédéterminé

Considérons un taux variable précompté de  $h$  intervenant dans les flux d'une obligation à taux variable, ou dans la branche variable d'un Swap.

Si le taux linéaire,  $L(T-h, T)$  est payé en  $T$ , l'équivalent certain de ce taux est le taux linéaire forward entre les dates  $T-h$  et  $T$ .

$$\boxed{\Phi_t(L(T-h, h), T) = L_t(T-h, h)} \quad (10.4.4)$$

PREUVE : En effet, considérons un investisseur qui cherche à se garantir un revenu en  $T$  associé au placement de  $1Euro$  à la date  $T-h$ . Le flux aléatoire garanti est

$$1 + hL(T-h, h)$$

Mais un contrat à terme sur la même opération lui garantit en  $T$  le paiement associé au taux à terme

$$1 + hL_t(T-h, h)$$

Ces deux opérations à terme garantissent le même flux en  $T-h$ , elles ont donc la même valeur aux dates intermédiaires, soit

$$1 + h\Phi_t(L(T-h, h), T) = 1 + hL_t(T-h, h) = \frac{B(t, T-h)}{B(t, T)}$$

En terme de taux d'intérêt, cela s'exprime par

$$\Phi_t(L(T-h, T), T) = L_t(T-h, h) \quad (10.4.5)$$

#### Calcul du taux de Swap

La branche variable d'un taux de Swap est donc donnée par

$$\begin{aligned} \text{branche variable}_t &= \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \delta \Phi_t(L(T_{i-1}, \delta), T) \\ &= \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \left[ \frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right] = B(t, T_0) - B(t, T_N) \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

Cette remarque jointe au fait que la valeur d'un Swap est nulle au moment de la signature du contrat, conduit à la caractérisation suivante du taux de Swap

$$\boxed{T_t^{SW}(T_0, T_N) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_N)}{\sum_{i=1}^N B(t, T_i)}} \quad (10.4.7)$$

### Contrat à terme sur le taux court

Supposons maintenant que le taux de référence payé en  $T$  soit le taux court  $r_T$ , c'est à dire aussi la limite quand  $h$  tend vers 0 de  $L(T-h, T)$ . De même, le taux spot forward  $f(t, T)$  est la limite des taux forwards  $L_t(T-h, T)$ . Ces taux sont donc liés par

$$\boxed{\Phi_t(r_T, T) = f(t, T)} \quad (10.4.8)$$

#### 10.4.2 Marché à terme et probabilité forward neutre

Dans le cas général, un flux aléatoire  $X_T$  versé à l'échéance  $T$  est évalué suivant le principe habituel de l'évaluation dégagé dans le Chapitre 4 sous le nom d'évaluation risque-neutre, comme la valeur moyenne sous la probabilité risque neutre du flux terminal actualisé

$$\Pi_t(X_T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\exp(-\int_t^T r_s ds) X_T] \quad (10.4.9)$$

Il faut donc à priori modéliser les corrélations entre les taux et les flux aléatoires. De même le contrat forward se calcule comme

$$\Phi_t(X_T) = \frac{\Pi_t(X_T)}{B(t, T)} = \frac{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\exp(-\int_t^T r_s ds) X_T]}{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\exp(-\int_t^T r_s ds)]} \quad (10.4.10)$$

Ainsi, de même que le prix s'écrit comme une espérance, de même le contrat forward s'écrit comme une espérance par rapport à la probabilité appelée **forward-neutre** et notée  $\mathbb{Q}_T$ .

$$\Phi_t(X_T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}[X_T] \quad (10.4.11)$$

Dans ce cadre, les instruments de couverture seront naturellement les contrats forwards de la maturité  $T$ .

Nous avons plusieurs manières de caractériser cette probabilité forward :

- En calculant sa densité par rapport à la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , grâce à la comparaison des deux formules d'évaluation (10.4.9) et (10.4.11).

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp(-\int_0^T r_s ds)}{B(0, T)} b \quad (10.4.12)$$

L'équation des prix zéro-coupons, jointe à la condition  $B(t, t) = 1$  entraîne que cette densité est une martingale exponentielle, associée au vecteur de volatilité du zéro-coupon de maturité  $T$ .

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} = \exp \int_0^T \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T |\Gamma(s, T)|^2 ds \quad (10.4.13)$$

- En écrivant que sous la probabilité  $\mathbb{Q}_T$ , la dynamique des contrats forwards  $\frac{B(t, T+\theta)}{B(t, T)}$  déduites des équations de chapitre précédent a un rendement instantané nul.

On voit alors facilement que

$$W_t^T = W_t - \int_0^t \Gamma(s, T) ds \quad (10.4.14)$$

doit être un  $\mathbb{Q}_T$  mouvement brownien.

La probabilité forward  $\mathbb{Q}_T$  est la probabilité risque-neutre attachée au choix de l'argent de la date  $T$  comme numéraire, dont la valeur en  $t$  est  $B(t, T)$

L'équation d'évaluation montre que tous les contrats forwards ont des prix martingales (locales) par rapport à la probabilité forward. En particulier, la relation (10.4.8) montre que le spot forward est une martingale.

### 10.4.3 Correction de convexité pour les contrats forwards

Nous avons vu que le contrat forward associé à un taux prédéterminé est le taux forward. Lorsqu'il n'y a pas adéquation entre le période qui sépare les dates de paiement et la maturité du taux, on doit corriger le taux forward pour avoir la valeur du contrat forward, qui jouera un rôle déterminant dans la théorie des options.

#### Les formules générales

L'une des caractéristiques des produits de taux d'intérêt est le fait que le taux payé à une date donnée est souvent connu en avance. Plus généralement, cela revient à considérer un flux aléatoire, connu à la date  $T$ ,  $X_T$ , et payé à une date future  $T + h$ . Dans le cas des taux par exemple, on connaît l'espérance de cette variable sous  $\mathbb{Q}_{T+h}$  et on voudrait la connaître sous  $\mathbb{Q}_T$ . Plus généralement, on peut être intéressé à connaître la distribution sous  $\mathbb{Q}_T$ , connaissant celle sous  $\mathbb{Q}_{T+h}$ .

Le résultat général suivant donne une intuition de la nature de la correction.

#### Théorème 10.4.1 Evaluation en retard

Soit  $X_T$  une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. La valeur du contrat à terme d'échéance  $T$  diffère de celle d'échéance  $T + h$  par :

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}[X_T] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T+h}}[X_T] + \text{cov}_t^{\mathbb{Q}_{T+h}}\left(X_T, \frac{hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}\right) \quad (10.4.15)$$

La covariance est une covariance globale et non locale.

Plus généralement, la densité de probabilité de  $\mathbb{Q}_T$  par rapport à  $\mathbb{Q}_{T+h}$ , sur la tribu  $\mathcal{F}_T$  est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}_{T+h}} = \frac{1 + hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)} \quad (10.4.16)$$

#### Evaluation en avance

Soit  $X_T$  une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T-h}}[X_T] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}[X_T] + \int_{T-h}^T \text{cov}_t^{\mathbb{Q}_s}(X_T, r_s) ds \quad (10.4.17)$$

En particulier, le prix d'un contrat future diffère du prix forward par

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[X_T] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}[X_T] + \int_0^T \text{cov}_t^{\mathbb{Q}_s}(X_T, r_s) ds \quad (10.4.18)$$

PREUVE :

⇒ Par construction des probabilités  $\mathbb{Q}_T$  et  $d\mathbb{Q}_{T+h}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}[X_T] &= \frac{B(t, T+h)}{B(t, T)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T+h}}[X_T B(T, T+h)^{-1}] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T+h}}\left[X_T \frac{1 + hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T+h}}[X_T] + \text{cov}_t^{\mathbb{Q}_{T+h}}\left[X_T, \frac{1 + hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}\right] \end{aligned}$$

⇒ Si maintenant on s'intéresse à l'évaluation d'un taux connu seulement dans le futur, par rapport à la date de maturité du contrat, c'est à dire à un flux qu'on constatera plus tard Le plus simple est de

tout ramener à la probabilité risque neutre en notant que la différence des densités de  $Q_T$  et de  $Q_{T-h}$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dQ_T}{dQ} - \frac{dQ_{T-h}}{dQ} | \mathcal{F}_t &= e^{-\int_t^{T-h} (r_s - f(t,s)) ds} \left( e^{-\int_{T-h}^T (r_u - f(t,u)) du} - 1 \right) \\ &= e^{-\int_t^{T-h} (r_s - f(t,s)) ds} \left[ - \int_{T-h}^T e^{-\int_{T-h}^s (r_u - f(t,u)) du} (r_s - f(t,s)) ds \right] \\ &= - \int_{T-h}^T e^{-\int_t^s (r_u - f(t,u)) du} (r_s - f(t,s)) ds \end{aligned}$$

Il suffit de prendre l'espérance de la variable  $X_T$  par rapport à ces deux probabilités, pour obtenir la formule du théorème, en utilisant que l'espérance forward du taux spot est le spot forward.

**Exemple 10.4.1** Nous considérons le paiement à la date  $T$  d'un taux connu en  $T-h$  et de maturité  $h + \delta$ . Le contrat forward sur le taux associé au paiement en  $T + \delta$  est connu comme le taux forward  $L_t(T-h, h + \delta)$ .

La correction de convexité conduit à

$$\mathbb{E}_t^{Q_T} [L(T-h, h + \delta)] = L_t(T-h, h + \delta) + \text{cov}_t^{Q_{T+h}} [L(T-h, h + \delta), \frac{hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}] \quad (10.4.19)$$

#### 10.4.4 Correction de convexité lorsque les volatilités sont déterministes

##### Hypothèse

Les volatilités des zéro-coupon sont des fonctions déterministes.

Les zéro-coupon sont log-normaux et les taux continus, dont les taux spot forwards sont gaussiens.

Ces propriétés sont conservées sous toutes les probabilités forwards. De plus dans l'évaluation des moments des variables gaussiennes, les structures de variance et covariance ne dépendent pas de la probabilité de référence. Une application immédiate de cette remarque et des résultats ci-dessus est la proposition suivante

##### Proposition 10.4.1 Correction des taux continus

Sous la probabilité  $Q_T$ , les taux instantanés ont comme espérance :

$$\mathbb{E}_{Q_T}(R(T, \theta)) = R_0(T, \theta) + \frac{\theta}{2} \text{var}(R(T, \theta)) \quad (10.4.20)$$

Sous la probabilité  $Q_{T+h}$ , les taux instantanés ont comme espérance :

$$\mathbb{E}_{Q_{T+h}}(R(T, \theta)) = \mathbb{E}_{Q_T}(R(T, \theta)) - h \text{cov}(R(T, \theta), R(T, h)) \quad (10.4.21)$$

#### 10.4.5 Options sur zéro-coupon et caplet

##### Option sur zéro-coupon

On considère un Call de strike  $K$  et de maturité  $T_C$ , sur le zéro-coupon  $B(t, T), T \geq T_C$ . Son prix à l'instant  $t$  est donné par

$$C_t(T_C, K, T) = B(t, T_C) \mathbb{E}_{Q_{T_C}} ((B(T_C, T) - K)^+) \quad (10.4.22)$$



Sous la probabilité  $Q_{T_C}$ , le contrat forward  $B_t(T_C, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T_C)}$  est une martingale de vecteur de volatilité  $\Gamma(t, T) - \Gamma(t, T_C)$ . Dans le cas où **ces volatilités sont déterministes**, on peut appliquer la formule de Black, qui donne le prix sous la forme

$$C_t(T_C, K, T) = B(t, T)\mathcal{N}(d_1) - KB(t, T_C)\mathcal{N}(d_0) \quad (10.4.23)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\Sigma_{t, T_C} \sqrt{T_C - t}} \text{Log}\left(\frac{B(t, T)}{KB(t, T_C)}\right) + \frac{1}{2} \Sigma_{t, T_C} \sqrt{T_C - t} \\ d_0 &= d_1 - \Sigma_{t, T_C} \sqrt{T_C - t} \\ |\Sigma_{t, T_C}|^2 &= \int_t^{T_C} |\Gamma(s, T) - \Gamma(s, T_C)|^2 ds \end{aligned} \quad (10.4.24)$$

La couverture se fait à partir de  $\mathcal{N}(d_1)$  zéro-coupon de maturité  $T$  et  $\mathcal{N}(d_0)$  zéro-coupon de maturité  $T_C$ .

### Caplet

Un caplet de strike et de maturité  $T$  est un produit dérivé qui garantit la possibilité d'emprunter en  $T_C$  au taux Euribor de maturité  $\delta$  au niveau maximum de  $K$ . Le flux garanti est  $\delta(L(T_C, \delta) - K)^+$  en  $T_C + \delta$ . Mais l'opération est équivalente à acheter en  $T_C$  une option de vente sur zéro-coupon de maturité  $T$  de strike  $\frac{1}{1+\delta K}$ , en nombre  $1 + \delta K$ .

C'est donc un Put sur un zéro-coupon, que nous pouvons évaluer de manière très similaire.

Le marché, comme nous le verrons dans le chapitre suivant travaille plutôt avec une modélisation log-normale du taux Euribor, ce qui l'amène à appliquer la formule de Black et Scholes au taux forward directement.

## 10.5 Options sur obligations à coupons, Swaptions

Considérons un échéancier de flux aléatoires, caractérisé par :

- les dates de tombée des flux, qui sont désignées par :  

$$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n = T$$
- le flux aléatoire  $F_i$  attendu à la date  $T_i$ .

La valeur financière en 0 de cet échéancier est donnée par la somme des flux futurs actualisés, soit :

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=n} \hat{F}_i B(0, T_i) \quad \hat{F}_i = E_{Q_{T_i}}(F_i) \quad (10.5.1)$$

La règle d'évaluation des flux aléatoires donne immédiatement le prix de cette option

$$\text{Call}(t, T_C, K, T_C + \delta) = \sum_{i=1}^d B(0, T_i) C_i \mathbb{Q}_{T_i}(\mathcal{E}) - KB(0, T_C) \mathbb{Q}_{T_C}(\mathcal{E}) \quad (10.5.2)$$

Pour obtenir un résultat complet, il reste à décrire de manière simple l'ensemble d'exercice. Ceci est notamment possible dans le cadre du modèle de Vasicek étendu, car les zéro-coupon sont des fonctions déterministes décroissantes du taux court. Il existe donc une valeur du taux court  $\mathbf{r}_K$  telle que

$$O(T_C, T_C + \delta, r_K) = K \quad (10.5.3)$$

de telle sorte qu'en posant  $K_j = \mathcal{B}(T_C, T_j, r_K)$ , le prix de l'option devient

$$\begin{aligned}
 \text{Call}(t, T_C, K, T_C + \delta) &= \sum_{i=1}^d B(0, T_i) C_i \mathcal{N}(d_j) - K B(t, T_C) \mathcal{N}(d_j) \\
 d_j &= \frac{1}{\Sigma_{t, T_C} \sqrt{T_C - t}} \text{Log}\left(\frac{B(t, T_j)}{K_j B(t, T_C)}\right) + \frac{1}{2} \Sigma_{t, T_C} \sqrt{T_C - t} \\
 d_0 &= d_1 - \Sigma_{t, T_C} \sqrt{T_C - t}
 \end{aligned}
 \tag{10.5.4}$$

Cela permet d'obtenir une généralisation de la formule de Black, où il n'est pas difficile de montrer que le prix de l'obligation est une fonction monotone de  $Z_t$  (Hypothèse 7). Le prix de l'option prend alors la forme d'une formule de Black généralisée.

## Chapitre 11

# LE MODELE LOG-NORMAL sur TAUX PIBOR

### Introduction

Dans les travaux récents sur les taux d'intérêt, le modèle log-normal de Brace-Gatarek-Musiela a reçu un écho important dans de nombreux établissements financiers, parce qu'il semble utiliser au mieux les données du marché sur les caps et floors, garantit que les taux forwards restent positifs et donc aussi les taux de swaps. Il est à mettre en regard avec les modèles à volatilité déterministe sur les prix zéro-coupon, calibrés à partir de la courbe des taux aujourd'hui du type Heath, Jarrow, Morton, ou encore Hull et White. Des références importantes sur le sujet sont aussi les travaux de Miltersen-Sandmann-Sondermann.

Plus difficile à mettre en oeuvre que les modèles log-normaux sur les prix, car il n'existe pas de formules exactes pour le pricing des swaptions, ce modèle est malgré tout calibrable, car au prix de petites approximations, il est possible de donner des méthodes de calcul numérique rapides des prix de swaptions. Ceci est indispensable pour faire tourner rapidement les procédures de minimisation quadratique pour l'identification des paramètres, qui incluent en général une vingtaine d'options.

Nous nous proposons de montrer rapidement les fondements de ces deux modèles, et d'en discuter l'efficacité en termes de modélisation et de calibration.

Pour amorcer la discussion, commençons par quelques remarques sur le pricing des caplets.

### 11.1 Pricing des caplets

Nous abordons sur l'exemple des caplets l'incidence d'une modélisation log-normale en prix et une modélisation en log-normale en taux. Or la discussion sur l'existence d'un lien structurel entre les options sur taux et celles sur prix, ne se révèle pertinente que si on prend en compte les dates de paiement des flux optionnels. L'analogie est avec la symétrie Call domestique-Put foreign entre deux marchés mérite d'être soulignée.

Ceci nous amène à introduire les deux marchés à terme qui sont naturellement associés au problème.

1. Le marché à terme d'échéance  $T + \delta$  où  $T + \delta$  est l'échéance du caplet, dans lequel est payé le différentiel de taux, lorsque l'option est exercée.
2. Le marché à terme d'échéance  $T$  correspond à l'échéance des options sur prix zéro-coupon.

Ces marchés sont référencés sur des numéraires différents. Le "taux de change" "franc de terme  $(T + \delta)$  - franc de terme  $T$ " est égal au zéro-coupon forward, noté  $B_t(T, T + \delta)$  et inversement le taux <<franc à terme  $T$  - franc de terme  $T + \delta$ >> est égal au facteur de capitalisation forward

$$B_t(T, T + \delta)^{-1} = 1 + \delta L_t(T, \delta) = \widehat{L}_t(T, \delta) \quad (11.1.1)$$

La question posée en terme de pricing sur taux ou pricing sur prix est alors une question de choix du marché d'évaluation.

### Symétrie Call sur taux- Put sur prix

L'absence d'arbitrage entre ces deux marchés à terme implique qu'une option d'achat sur les taux d'intérêt payés à échéance  $T + \delta$ , transformée par le taux de change est équivalente à une option de vente d'échéance  $T$ , sur un zéro-coupon forward  $B_t(T, T + \delta)$ . En effet

DATE	FLUX	FLUX
$T + \delta$	$1 + \delta L(T, \delta)$	$1 + \delta K = \widehat{K}$
$T$	1	$(1 + \delta K)B(T, T + \delta)$

En résumé, on a la symétrie suivante :

$$\text{Callforward}_t(\widehat{L}, T + \delta, \widehat{K}) = \text{Callforward}_t(L, T + \delta, K) \quad (11.1.2)$$

$$= \widehat{L}_t(T, \delta) \widehat{K} \text{Putforward}_t(B, T, \widehat{K}^{-1}) \quad (11.1.3)$$

Cette formule conduit naturellement à son analogue en prix d'aujourd'hui, qui, bien que plus simple, est en fait moins utilisable, car les prix forwards n'ont pas de propriétés simples dans le marché d'aujourd'hui.

$$\text{Call}_t(L, T + \delta, K) = (1 + \delta K) \text{Put}_t(B, T, (\widehat{K})^{-1}) \quad (11.1.4)$$

#### 11.1.1 Dynamique des taux-dynamique des prix

Si nous souhaitons poursuivre l'analogie avec les taux de change, notons que puisque les deux marchés de référence n'ont pas de taux d'intérêt, dans le  $T$ -marché le "taux de change"  $B_t(T, T + \delta)$  est de rendement nul, et qu'il en est de même dans le  $(T + \delta)$ -marché pour  $1 + \delta L_t(T, \delta)$  et ces deux processus ont la même volatilité, aléatoire éventuellement.

Plus précisément, la dynamique du zéro-coupon est donnée par sa volatilité  $\{\sigma_s(T, \delta); s \leq T\}$ ,

$$\frac{dB_t(T, \delta)}{B_t(T, \delta)} = -\Gamma_t(T, \delta) dW_t^T \quad (11.1.5)$$

A priori  $W^T$  est un mouvement brownien pour le  $T$ -marché, multidimensionnel, et la fonction  $\sigma$  est aléatoire et vectorielle. De même

$$\frac{d\widehat{L}_t(T, \delta)}{\widehat{L}_t(T, \delta)} = \Gamma_t(T, \delta) dW_t^{T+\delta} \quad (11.1.6)$$

où  $W^{T+\delta}$  est un brownien multidimensionnel dans le  $(T + \delta)$ -marché.

Il est utile de noter pour la suite que les liens entre ces deux processus sont simples

$$dW_t^{T+\delta} = dW_t^T + \Gamma_t(T, \delta) dt \quad (11.1.7)$$

$L_t(T, \delta)$  est aussi de rendement nul, et sa volatilité  $\{\sigma_s(T, \delta); s \leq T\}$  est reliée à celle des prix forwards par,

$$\Gamma_s(T, \delta) = \frac{\delta L_s(T, \delta)}{1 + \delta L_s(T, \delta)} \sigma_s(T, \delta) \quad (11.1.8)$$

En particulier, si  $B_t(T, T + \delta)$  est **log-normal** dans le  $T$ -marché,  $\hat{L}_t(T, \delta)$  est **log-normal** avec la même volatilité dans le  $(T + \delta)$ -marché et la distribution de  $L(T, \delta)$  est la loi log-normale décalée.

### 11.1.2 Pricing en taux et pricing en prix

Cette remarque permet de simplifier considérablement la discussion sur le modèle en taux ou en prix.

1. La présence d'un marché de futures de taux d'intérêt conduit naturellement le marché à préférer une modélisation en terme de taux, sur le marché à terme d'échéance  $T + \delta$ .
2. La formule du marché suppose que dans le  $(T + \delta)$ -marché, le taux forward  $L_t(T, \delta)$  diffuse de manière lognormale à partir du taux forward.
3. Considérons maintenant une modélisation log-normale sur les prix des zéro-coupon, dans le  $T$ -marché. Le facteur de capitalisation  $\hat{L}_t(T, \delta)$  est d'après la remarque précédente log-normal dans le  $(T + \delta)$ -marché, et la discussion sur le pricing se ramène simplement à savoir si on applique la formule de Black au taux ou au facteur de capitalisation.

Le résultat est sensiblement différent puisque dans le premier cas, nous aurons

$$\begin{aligned} Caplet_t^{tx} &= B(t, T + \delta) \delta [L_t(T, \delta) N(d_1^{tx}) - K N(d_0^{tx})] \\ d_0^{tx} &= \frac{1}{\Sigma_{t,T} \sqrt{T-t}} \text{Ln} \left[ \frac{L_t(T, \delta)}{K} \right] - \frac{1}{2} \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t} \\ d_1^{tx} &= d_0^{tx} + \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

où  $\Sigma_{t,T}^2(T-t) = \int_t^T |\sigma_s(T, \delta)|^2 ds$  désigne le carré de la volatilité moyenne du taux Pibor. Dans le deuxième cas,

$$\begin{aligned} Caplet_t^{px} &= B(t, T + \delta) [(1 + \delta L_t(T, \delta)) N(d_1^{px}) - (1 + K\delta) N(d_0^{px})] \\ d_0^{px} &= \frac{1}{\Gamma_{t,T} \sqrt{T-t}} \text{Ln} \left[ \frac{1 + \delta L_t(T, \delta)}{(1 + K\delta)} \right] - \frac{1}{2} \Gamma_{t,T} \sqrt{T-t} \\ d_1^{px} &= d_0^{px} + \Gamma_{t,T} \sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (11.1.10)$$

où  $\Gamma_{t,T}^2(T-t) = \int_t^T |Gamma_s(T, \delta)|^2 ds$  désigne le carré de la volatilité moyenne du zéro-coupon sur la période  $t, T$ .

#### Remarque

- Dans le cas des options à la monnaie, cela conduit à

$$\begin{aligned} Caplet_t^{tx} &= B(t, T + \delta) \delta [L_t(T, \delta) N(\frac{1}{2} \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t}) - N(-\frac{1}{2} \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t})] \\ Caplet_t^{px} &= B(t, T + \delta) [(1 + \delta L_t(T, \delta)) N(\frac{1}{2} \Gamma_{t,T} \sqrt{T-t}) - N(-\frac{1}{2} \Gamma_{t,T} \sqrt{T-t})] \end{aligned}$$

Comme la volatilité des zéro-coupon est très petite par rapport à celle des taux, nous avons l'approximation suivante, pour les volatilités implicites suivant le modèle retenu,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma_{t,T} \sqrt{T-t} = \frac{\delta L_t(T, \delta)}{1 + \delta L_t(T, \delta)} [N(\frac{1}{2} \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t}) - N(-\frac{1}{2} \Sigma_{t,T} \sqrt{T-t})] \quad (11.1.11)$$

Le débat amorcé sur la log-normalité taux versus log-normalité prix se ramène à un débat sur la log-normalité de  $L_t(T, \delta)$  versus  $1 + \delta L_t(T, \delta)$ .

**En d'autres termes, la question est de savoir si la distribution forward du taux  $L(T, \delta)$  est une loi log-normale ou une loi log-normale décalée.** Seules les options en dehors de la monnaie donnent une information sur ce point.

## 11.2 Pricing des swaptions

### 11.2.1 Calcul du taux de swap, et du pay-off des swaptions

#### Taux de swap

En égalant les valeurs aujourd'hui des branches variable et fixe d'un swap initialisé en  $T$ , associé à des échanges de flux régulièrement espacés de  $\delta$ , le taux de swap-forward se calcule aisément.

$$\begin{aligned} \omega_t(T, n, \delta) &= \frac{1 - B_t(T, T + n\delta)}{\delta \sum_{j=1}^n B_t(T, T + j\delta)} = \frac{B(t, T) - B(t, T + n\delta)}{\delta \sum_{j=1}^n B(t, T + j\delta)} \\ &= \frac{\hat{L}_t(T, n\delta) - 1}{\delta \sum_{j=1}^n \hat{L}_t(T + j\delta, (n-j)\delta)} = \frac{nL_t(T, T + n\delta)}{\sum_{j=1}^n 1 + (n-j)\delta L_t(T + j\delta, (n-j)\delta)} \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

La première équation donne la représentation en prix du taux de swap, et la deuxième la représentation en facteur de capitalisation ou en taux forward.

Le taux de swap est donc une fonction des taux forwards de différentes maturités  $\{L_t(T + j\delta, (n-j)\delta); j = 1 \dots n-1\}$ , ou de manière analogue de différents taux de capitalisation  $\{\hat{L}_t(T + j\delta, (n-j)\delta); j = 1 \dots n-1\}$ .

#### Pay-off des swaptions

##### FORMULE EN PRIX

Une SWAPTION de prix d'exercice  $\omega_0$  est associée à une promesse de flux  $(\omega(T, n) - \omega_0)^+$  aux dates  $\{T + j\delta; j = 1 \dots n\}$ .

Vu de l'échéance  $T$ , cela revient au flux

$$\Phi_T^{px} = \delta(\omega(T, n) - \omega_0)^+ \sum_{j=1}^n B(T, T + j\delta) = [1 - B(T, T + n\delta) - \omega_0 \delta \sum_{j=1}^n B(T, T + j\delta)]^+$$

Le pay-off est alors le même que celui d'un Put sur une obligation. On a donc une généralisation de la propriété des caplets (cas  $n=1$ ).

##### FORMULE EN TAUX

D'un point de vue forward de l'échéance ( $T + n\delta = T_n$ ) du dernier cash-flow, les paiements intermédiaires sont capitalisables au taux forward et donc le payoff devient :

$$\begin{aligned} \Phi_T^{tx} &= \delta(\omega(T, n) - \omega_0)^+ \sum_{j=1}^n \hat{L}(T + j\delta, (n-j)\delta) \\ &= (\hat{L}_T(T, n\delta) - 1 - \omega_0 \delta \sum_{j=1}^n \hat{L}_T(T + j\delta, (n-j)\delta))^+ \\ &= (nL_T(T, n\delta) - \omega_0 \sum_{j=1}^n (1 + (n-j)\delta L_T(T + j\delta, (n-j)\delta)))^+ \end{aligned}$$

## FORMULE DE MARCHÉ

Le marché n'adopte pas volontiers ces transformations, qui traduisent l'absence d'arbitrage entre l'échéance et le futur. Il préfère modéliser directement la distribution du taux de swap comme log-normale autour de sa valeur forward. Ceci n'est licite que sous une probabilité adéquate, qui est la probabilité forward de numéraire  $\sum_{j=1}^n B(T, T + j\delta)$ , c'est à dire une combinaison convexe des probabilités forwards des différentes dates de paiement. Cette modélisation garantit au taux de swap d'être toujours positif, mais n'est pas compatible avec l'évaluation log-normale des caplets.

## 11.2.2 Evaluation de la swaption dans le cas log-normal sur les prix

Quelque soit le point de vue adopté, l'évaluation de la swaption demande de connaître les lois jointes d'un certain nombre de facteurs de capitalisation ou de taux forwards, associés à des échéances qui sont des multiples de  $\delta$ .

Nous savons déjà que les facteurs ou les taux qui sont associés à des paiements à la date finale, diffusent autour de leur valeur d'aujourd'hui dans le marché forward de cette date mais leur volatilité peut être stochastique, et la distribution peut être difficile à calculer. Lorsque les facteurs de capitalisation sur une période  $\delta$  sont log-normaux, cette propriété se généralise aux facteurs associées à des périodes qui sont des multiples de  $\delta$ . Cette propriété n'est pas conservée dans le cas des taux log-normaux.

## Volatilités des facteurs de capitalisation et log-normalité

Désignons par  $\hat{L}_t(T, k\delta)$  le facteur de capitalisation forward entre  $T$  et  $T + k\delta$ . La possibilité de capitaliser par roll-over induit des propriétés multiplicatives sur ces facteurs, au sens où

$$\begin{aligned}\hat{L}_t(T, k\delta) &= \hat{L}_t(T, \delta)\hat{L}_t(T + \delta, \delta)\dots\hat{L}_t(T + j\delta, \delta)\dots\hat{L}_t(T + (k-1)\delta, \delta) \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \hat{L}_t(T + j\delta, \delta)\end{aligned}\quad (11.2.2)$$

Comme les volatilités sont additives pour les produits, nous voyons que la volatilité  $\Gamma_t(T, k\delta)$  de  $\hat{L}_t(T, k\delta)$  est égale à la somme des volatilités des zéro-coupon ,

$$\Gamma_t(T, k\delta) = \sum_{i=0}^{k-1} \Gamma_t(T + i\delta, \delta) \quad (11.2.3)$$

En particulier, si la volatilité  $\Gamma_t(T + i\delta, \delta)$  est déterministe, dans le marché à terme  $(T + \delta)$ , il est de même de la volatilité  $\Gamma_t(T, k\delta)$ , et les facteurs de capitalisation  $\hat{L}_t(T, k\delta)$  ont une volatilité déterministe. Comme ils sont de rendement nul, leur loi est log-normale.

En particulier, ils peuvent éventuellement devenir plus petits que 1, ce qui conduit un taux de swap négatif éventuellement. C'est l'une des objections majeures à ce modèle.

## Evaluation de la swaption

Le pay-off de la swaption est une fonction des facteurs de capitalisation. Son prix est donc calculable à partir de la distribution des variables gaussiennes centrées

$$U_j = \int_t^T \Gamma_s(T + j\delta, (n-j)\delta) dW_s^{T_n} \quad (11.2.4)$$

puisque  $\widehat{L}(T + j\delta, (n - j)\delta) = \widehat{L}_t(T + j\delta, (n - j)\delta) \exp[U_j - \frac{1}{2}var U_j]$ .

Le domaine d'intégration est donc un ensemble de la forme

$$\sum_{j=1}^n K_j e^{U_j} \geq 1$$

La matrice de covariance des  $U_j$  est celle des  $\text{Ln}(\widehat{L}(T + j\delta, (n - j)\delta))$  et est désignée par  $K$ .

**Numériquement**, et le même argument sera repris dans l'autre modèle, il est indispensable de mettre en oeuvre une procédure efficace de calcul de l'intégrale multiple, en essayant en particulier de la ramener à une intégrale simple. B-G-M proposent de diagonaliser la matrice et d'en retenir le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre comme facteur explicatif. En d'autres termes, cela revient à remplacer les variables par leurs projections sur ce vecteur  $V$ , et ramener ainsi le problème à une intégrale simple. Si on a une bonne information sur les variances des variables, alors on peut faire la même procédure avec la matrice des corrélations.

Pour des choix pertinents de fonctions de volatilités, la réduction de dimension s'effectue d'elle-même car on est alors dans des modèles gaussiens à facteurs.

### 11.2.3 Evaluation de la swaption dans le cas log-normal sur les taux forwards

#### Volatilités des taux de différentes maturités

Dans cette partie, nous fixons une maturité donnée  $\delta$ , et supposons que les taux forwards de n'importe quelle échéance sont log-normaux, de volatilité notée  $\sigma_t(T)$ .

Pour simplifier les notations relatives aux pricing de swaptions, nous fixons la date  $T$  d'échéance de la swaption, et notons  $L_t(j, j + k) = L_t(T + j\delta, k\delta)$  et  $L_t^j = L_t(j, 1)$ .

La formule de composition des taux de capitalisation implique donc que

$$[1 + k\delta L_t(j, j + k)] = [1 + \delta L_t^j][1 + \delta L_t^{j+1}] \dots [1 + \delta L_t^{j+k-1}] \quad (11.2.5)$$

La propriété de volatilité déterministe n'est donc manifestement pas conservée dans ce produit à cause du décalage, contrairement à l'autre modèle.

Deux voies se présentent pour modéliser les taux  $L_t(j, n - j)$  sous la probabilité finale.

1. exploiter le fait que les  $L_t(j, n - j)$  sont centrés autour de leur valeur forward, mais à volatilité aléatoire,

$$\sigma_t(j, j + k) = \frac{\widehat{L}_t(j, j + k)}{\delta L_t(j, j + k)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta L_t^{j+i}}{\widehat{L}_t^{j+i}} \sigma_t(j + i)$$

avec des notations évidentes et essayer de trouver une approximation de cette volatilité.

2. soit utiliser la formule (11.2.7), et chercher à modéliser seulement la loi des  $L_t^j$  sous la probabilité finale.

C'est la solution proposée par B-G-M.

Mais bien que ces taux aient une volatilité déterministe, le problème n'est pas complètement résolu car ils ne sont pas centrés autour de leur valeur forward sous la probabilité de la date finale, mais sous la probabilité de l'échéance  $T + \delta j$ . Ces taux ont en fait un "dividende" aléatoire dont il faut tenir compte. B-G-M proposent de simplifier le problème en le considérant comme déterministe, affectant seulement le niveau autour duquel le taux diffuse, soit

$$L_T^j \simeq \mathbb{L}_T^j = L_t^j \alpha_j \exp[X_j - \frac{1}{2}var(X_j)] \quad (11.2.6)$$



où les  $X_j$  sont des variables gaussiennes centrées, dont la matrice de covariance est approximativement celle des  $\text{Ln}(L_T^j)$ .

Les coefficients  $\alpha_j$  peuvent être ajustés de plusieurs manières :

1. B-G-M propose de les calculer en remplaçant le coefficient aléatoire du drift par sa valeur à la date  $t$  d'évaluation.
2. On peut aussi demander que avec cette approximation,

$$E_t^{T+n}[1 + \delta L_T^j][1 + \delta L_T^{j+1}] \dots [1 + \delta L_T^{n-1}] = [1 + k\delta L_t(j, k)] \quad (11.2.7)$$

pour tous les  $j$  entre 0 et  $n - 1$ , ce qui fait un système linéaire à résoudre.

L'intérêt de ce point de vue est que le moment d'ordre 1 des taux intervenant dans la formule est conservé.

On s'est donc ramené à une situation très proche de celle du modèle log-normal sur les prix, mais la fonction à intégrer a une forme différente, a priori beaucoup plus difficile à intégrer. Les mêmes remarques sur la manière de se ramener à une intégrale simple sont utilisées.

Les tests empiriques montrent que la matrice de variance-covariance a une première valeur propre plus de 10 fois supérieure à la seconde, ce qui justifie l'approximation uni-dimensionnelle.

Nous pouvons donc considérer que vu de la date finale, le modèle de taux est quasi-log-normal.

#### 11.2.4 Calibration de la fonction de volatilité

La méthode de calibration proposée par B-G-M est de type non-paramétrique, pour un modèle deux-dimensionnel. Ils supposent qu'il y a deux paramètres de volatilité  $\sigma_t^1(T)$ ,  $\sigma_t^2(T)$  pseudo-stationnaires au sens o

$$\sigma_t^i(T) = f(t)\lambda^i(T - t)$$

Les valeurs de  $f$  et  $\lambda^i(T)$  sont ajustées sur des prix de caps et floors et swaptions et sur les données de corrélations entre futures espacés de différentes échéances. Les exemples montrent une fonction  $f$  proche de 1, et deux facteurs dont aucun ne domine vraiment l'autre.

#### 11.2.5 Conclusion

Le point de vue log-normal sur les taux conduit à de propriétés satisfaisantes de la famille des différents taux qu'il engendre. De plus, des approximations raisonnables, permettent de calculer les swaptions avec à peine plus de difficultés que dans le cas log-normal sur zéro-coupon. Toutefois la calibration des fonctions de volatilités reste assez complexe à réaliser effectivement.

Un autre inconvénient est le caractère non-markovien, qui fait qu'il ne peut être implémenté numériquement sur un arbre. Il rend par suite difficile le pricing d'options à barrière sur les taux par exemple. Pour ces raisons, les modèles à facteurs de type Cheyette, ou Li-Ritcken-Subramanya etc... trouvent un regain d'intérêt.

#### Références

- A.BRACE,D.GATAREK,M.MUSIELA (1997). *The market model of interest rates dynamics*. Mathematical Finance, Vol 7,no2, April 1997, 127-155
- K.MILTERSEN,K.SANDMANN, D.SONDERMANN(1995) *Closed Form solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal interest rates*. Preprint Universite of Bonn
- F.JAMSHIDIAN (1996) *Libor and Swap Market Models and Measures* preprint Sakura



## Chapitre 12

# Le modèle de marché : évaluation des swaptions et calibration

**Remerciements** Ce chapitre a été écrit par **Alexandre d’Aspremont** de l’université de Stanford. Je le remercie bien vivement de sa contribution. La cohérence des notations avec le chapitre précédents n’est pas parfaite, mais je n’ai pas eu le temps de tout corriger.

Dans le modèle classique de [?] sur un actif, calibrer le paramètre de volatilité pour que le modèle reproduise le prix d’une option cotée par le marché consiste simplement à inverser la formule du prix. Ce prix étant une fonction strictement croissante de la volatilité, cette inversion ne pose pas de problème numérique particulier.

Cependant, ceci n’est plus aussi simple pour des modèles plus complexes destinés à capturer plus fidèlement le smile sur le marché action, ou les mouvements de la courbe des taux par exemple sur le marché des taux. Pour calculer des prix d’options européennes tous les paramètres du modèle étant connus, Monte-Carlo est une solution idéale. Mais pour résoudre le problème inverse, *i.e.* calculer la valeur des paramètres du modèle qui réplique au mieux les prix d’options observés dans le marché, les méthodes de Monte-Carlo sont à la fois trop lentes et trop instables pour permettre une calibration efficace et fiable.

Ceci explique donc (en partie) pourquoi tant d’efforts sont consacrés à l’obtention de formules fermées pour le prix des instruments de base. Cependant, il ne s’agit que de l’un des éléments nécessaires à une résolution satisfaisante du problème de calibration. Au delà du calcul des prix, il faut en effet pouvoir résoudre numériquement le problème d’optimisation des paramètres du modèle. Ceci n’est en pratique jamais simple, et la méthode qui consiste simplement à minimiser un critère (non convexe) du type moindre carrés entre les prix du modèle et les prix de marché peut s’avérer dangereusement lente et instable.

Ci-dessous, nous allons examiner un cas où tout se passe bien, celui du modèle de marché sur les taux LIBOR. On verra comment une bonne approximation numérique du prix des swaptions dans ce modèle permet de formuler le problème de calibration comme un programme semi-défini, programme qu’une extension récente des méthodes de programmation linéaire permet de résoudre très efficacement.

## 12.1 Instruments de base

### 12.1.1 Zéro-coupon et taux court

Comme c'est le cas dans tous les modèles du type Heath-Jarrow-Morton, la description de la dynamique de la courbe commence par l'écriture de celle des zéro-coupons, définis sur un espace de probabilité  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}, \mathbf{Q})$  où  $\mathbf{Q}$  est une probabilité risque neutre et  $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  est la  $\mathbf{Q}$ -augmentation de la filtration naturelle du mouvement brownien de dimension  $d$ ,  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ .

$$\frac{dB(s, T)}{B(s, T)} = r_s ds + \Sigma^B(s, T - s) dW_s,$$

où  $\theta \geq 0$ . On suppose que la volatilité  $\{\Sigma^B(t, \theta) = \Gamma(t, t + \theta); \theta \geq 0\}$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , et que la dérivée  $\partial/\partial\theta(\Sigma^B(t, \theta))$  est bornée sur  $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ .

Le taux court  $r(t)$  satisfait

$$dr(s) = \left( \frac{\partial}{\partial\theta} r(s, \theta) \right)_{\theta=0} ds + \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \Sigma^B(s, \theta) \right)_{\theta=0} dW_s$$

et  $\beta(t)$  représente la valeur en  $t$  d'une unité de compte capitalisée en continu au taux court depuis l'instant 0. L'absence d'arbitrage entre le taux court et les zéro-coupons impose alors à

$$\frac{B(t, T)}{\beta_t} = B(0, T) \exp \left( - \int_0^t \Sigma^B(s, T - s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Sigma^B(s, T - s)|^2 ds \right)$$

d'être une martingale sous la mesure  $\mathbf{Q}$  pour tout  $T > 0$ . Dans le cadre des modèles par arbitrage à la [?], la dynamique de la courbe est alors entièrement spécifiée par la donnée de la courbe des taux aujourd'hui et de la volatilité des zéro-coupons  $\sigma^B(s, T - s)$ . La particularité du modèle de marché est de spécifier cette volatilité non pas directement, mais par l'intermédiaire de contraintes sur la dynamique de taux forwards, les LIBORs.

### 12.1.2 Taux LIBOR et swaps

Vers le milieu des années 80, la liquidité dans les marchés de taux s'est très rapidement déplacée des obligations vers les swaps. Les taux swaps et les taux forwards correspondants (par ex. le LIBOR, pour London Inter Bank Offered Rates) ont donc rapidement remplacé les taux zéro-coupons comme instruments de référence dans la construction de la courbe.

#### Taux LIBOR

On note  $L(t, \delta)$  le taux LIBOR

$$\frac{1}{1 + \delta L(t, \delta)} = B(t, t + \delta)$$

où  $\delta$  est égal à trois ou six mois en général. Le taux forward LIBOR d'échéance glissante  $\theta$  est noté  $L_\delta(t, \theta) = L_t(t + \theta, \delta)$ , où dans l'équation de droite on fait référence aux notations du chapitre précédent. L'absence d'arbitrage impose

$$\frac{1}{1 + \delta L_\delta(t, \theta)} = \frac{B(t, t + \delta + \theta)}{B(t, t + \theta)} = B_t(t + \theta, t + \delta + \theta)$$

ou encore

$$L_\delta(t, \theta) = \frac{B(t, t + \theta) - B(t, t + \delta + \theta)}{\delta B(t, t + \delta + \theta)}.$$

Pour simplifier, on suppose  $\delta$  constant dans toute la suite et on écrira  $L(t, \theta)$  à la place de  $L_\delta(t, \theta)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté. On note également  $K(t, T)$  le taux forward Libor dont la maturité est fixée à la date  $T$ , avec  $K(t, T) = L(t, T - t)$ .

## Taux swap

Le taux swap est le taux qui annule la valeur aujourd'hui de l'échange de coupons fixes (taux swap) contre des coupons flottants (taux LIBOR par exemple) à une série de dates  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dans le cas d'un  $swap(t, T, T_n)$  dont la branche flottante paye  $L_\delta(T_i, 0)$  aux dates  $T_i = T + i\delta$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la valeur aujourd'hui de la branche flottante est égale à  $B(t, T) - B(t, T_n)$  et le taux swap s'écrit

$$swap(t, T, T_n) = \frac{B(t, T) - B(t, T_n)}{Level(t, T, T_n)}$$

où

$$Level(t, T, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta B(t, T_i)$$

et  $swap(t, T, T_n)Level(t, T, T_n)$  est la valeur aujourd'hui de la branche fixe du swap.

Dans ce qui suit, on utilisera une autre représentation du swap en tant que panier de taux forwards. En effet on peut écrire

$$swap(t, T, T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i+1}(t) K(t, T_i)$$

avec

$$\omega_i(t) = \frac{\delta B(t, T_i)}{Level(t, T, T_n)}$$

si on note  $T_0 = T$ . On observe en pratique que la volatilité des poids  $\omega_i(t)$  est négligeable par rapport à celle des taux forward  $K(t, T_i)$ , ce qui veut dire qu'on peut assimiler le taux swap à un panier de taux forward à coefficients constants (voir [?]). Notons également que l'on a  $\omega_i(t) \geq 0$  avec

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(t) = 1$$

et le swap est donc assimilé en pratique à une combinaison convexe de taux forward.

## 12.2 Modèle de marché

### 12.2.1 Définition

A mesure que l'activité se déplaçait des taux zéro-coupons vers les taux LIBOR et swaps, des options ont naturellement commencé à être traitées sur ces différents taux et le marché a, par habitude, commencé à les coter en termes de volatilité de type Black et Scholes, alors que rien dans la modélisation ne justifiait cette pratique. La question s'est alors rapidement posée de savoir s'il était possible de spécifier un modèle arbitré au sens de HJM qui donne une volatilité déterministe aux taux LIBOR et swap sous les probas forwards appropriées. La réponse est un oui partiel, comme le montre ce qui suit. La solution proposée par [?] et [?] est de spécifier la volatilité des zéro-coupons à partir de celle des LIBOR.

La description du modèle commence donc par imposer une volatilité lognormale au taux LIBOR

$$dL(t, \theta) = (...)dt + L(t, \theta)\rho(t, \theta)dW_t$$

où la fonction  $\rho : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+^d$  est bornée par  $\bar{\rho} \in \mathbb{R}_+$ . La dynamique des zéro-coupons impose d'autre part

$$\begin{aligned} dL(t, \theta) &= \left( \frac{\partial L(t, \theta)}{\partial \theta} + \frac{(1 + \delta L(t, \theta))}{\delta} \sigma^B(t, \theta + \delta) (\sigma^B(t, \theta + \delta) - \sigma^B(t, \theta)) \right) dt \\ &+ \frac{1}{\delta} (1 + \delta L(t, \theta)) (\sigma^B(t, \theta + \delta) - \sigma^B(t, \theta)) dW_t. \end{aligned}$$

Pour obtenir une volatilité lognormale, il faut donc imposer à la volatilité des zéro-coupons de satisfaire

$$\sigma^B(t, \theta + \delta) - \sigma^B(t, \theta) = \frac{\delta L(t, \theta)}{1 + \delta L(t, \theta)} \rho(t, \theta).$$

La dynamique du LIBOR devient alors

$$dL(t, \theta) = \left( \frac{\partial}{\partial \theta} L(t, \theta) + \rho(t, \theta) \sigma^B(t, \theta + \delta) L(t, \theta) \right) dt + L(t, \theta) \rho(t, \theta) dW_t.$$

Si, pour simplifier, on impose ensuite  $\sigma^B(t, \theta) = 0$  pour tout  $\theta \in [0, \delta]$ , on obtient

$$\sigma^B(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\lfloor \delta^{-1} \theta \rfloor} \frac{\delta L(t, \theta - k\delta)}{1 + \delta L(t, \theta - k\delta)} \rho(t, \theta - k\delta).$$

La volatilité des zéro-coupons est donc stochastique (et relativement complexe), par contre celle des LIBOR est déterministe égale à  $\rho(t, \theta)$ .

## 12.2.2 Options sur taux

### Caps

Le prix d'un cap dont les cash-flows sont  $\delta(L_\delta(T_{i-1}, 0) - K)^+$  aux dates  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  est donné par

$$cap_t = \sum_{j=1}^n E_t \left[ \exp - \int_t^{T_j} \delta (L_\delta(T_{j-1}, 0) - K)^+ \right],$$

soit

$$cap_t = \sum_{j=1}^n B(t, T_j) E_t^{T_j} \left[ \delta (L_\delta(T_{j-1}, 0) - K)^+ \right]$$

où  $E^{T_j}$  est l'espérance sous la mesure forward définie par

$$\frac{d\mathbf{Q}^{T_j}}{d\mathbf{Q}}|_t = B(t, T_j)^{-1} \exp - \left( \int_t^{T_j} r_s ds \right) = \mathcal{E}_{t, T_j}(\sigma^B(\cdot, T_j - \cdot)).$$

Ici,  $\mathcal{E}_{t, T_j}(\cdot)$  est la martingale exponentielle, prise entre les dates  $t$  et  $T_j$  définie par

$$\mathcal{E}_{t, T_j}(\sigma^B(\cdot, T_j - \cdot)) = \exp \left( \int_t^{T_j} \sigma^B(s, T_j - s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_j} \|\sigma^B(s, T_j - s)\|^2 ds \right).$$

Le sous-jacent du caplet payé en  $T_{i+1}$  est le taux forward à maturité fixe  $K(t, T_i)$  avec  $K(t, T_i) = L(t, T_i - t)$  dont la dynamique dans le modèle de marché est donnée par

$$dK(s, T_i) = K(s, T_i) \rho(s, T_i - s) dW_s^{T_{i+1}}$$

et  $K(t, T_i)$  est donc lognormal sous la mesure  $\mathbf{Q}_{T_{i+1}}$ . Chaque caplet peut donc être évalué en utilisant la formule de Black avec une variance  $V_{T_i}$  égale à

$$V_{T_i} = \int_t^{T_i} \|\rho(s, T_i - s)\|^2 ds,$$

en adoptant la convention  $\rho(s, T - s) = 0$  quand  $T - s < 0$ .

## Swaptions

Le prix d'une swaption de strike  $K$ , de maturité  $T$  écrite sur le swap

$$swap(t, T, T_n) = \frac{B(t, T) - B(t, T_{n+1})}{Level(t, T, T_n)}$$

est donné à la date  $t$  par

$$Ps(t) = B(t, T) E_t^{Q^T} \left[ \sum_{i=1}^n (\exp - \int_T^{T_i} r_s ds) \delta (swap(T, T, T_n) - K)^+ \right].$$

Cette formule d'évaluation calcule le prix d'une swaption comme la somme des prix des swaptlets qui la compose.

Nous verrons qu'il est plus avantageux d'utiliser ici une approche à la Jamshidian, ([?]), qui écrit le prix d'une swaption comme celui d'un call sur le taux swap, sous une mesure martingale bien choisie.

On définit donc la mesure martingale swap  $\mathbf{Q}^{LVL}$  avec

$$\frac{d\mathbf{Q}^{LVL}}{d\mathbf{Q}^T} \Big|_t = \frac{\sum_{i=1}^n (\exp - \int_T^{T_i} r_s ds)}{E_t^{Q^T} \left[ \sum_{i=1}^n (\exp - \int_T^{T_i} r_s ds) \right]} = B(t, T) \frac{\sum_{i=1}^n (\exp - \int_T^{T_i} r_s ds)}{Level_t(T, T_n)} \quad (12.2.1)$$

où  $Level_t(T, T_n)$  est encore une fois

$$Level_t(T, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta B_t(T, T_i).$$

Ce choix de mesure martingale revient à prendre  $Level_t(T, T_n)$  comme numéraire.

La densité  $d\mathbf{Q}^{LVL}/d\mathbf{Q}^T|_t$  est donnée par la martingale exponentielle

$$\mathcal{E}_{t, T_n}(h_\bullet) = B(t, T) \frac{\sum_{i=1}^n \exp - \int_T^{T_i} r_s ds}{Level_t(T, T_n)} \quad (12.2.2)$$

$$= \exp \left( \int_t^{T_n} h_s dW_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_n} \|h_s\|^2 ds \right) \quad (12.2.3)$$

avec

$$h_t = \sum_{i=1}^n \frac{\delta B(t, T_i)}{Level(t, T, T_n)} \left( \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\delta K(t, T_j)}{1 + \delta K(t, T_j)} \rho(t, T_j - t) \right).$$

Comme dans [?], le théorème de Girsanov montre alors que

$$dW_t^{LVL} = dW_t^T + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta B(t, T_i)}{level(t, T, T_n)} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\delta K(t, T_j)}{1 + \delta K(t, T_j)} \rho(t, T_j - t) \right) dt$$

est un  $\mathbf{Q}^{LVL}$ -mouvement brownien et on peut réécrire le prix de la swaption comme

$$Ps(t) = Level(t, T, T_n) E_t^{Q^{LVL}} \left[ (swap(T, T, T_n) - K)^+ \right]$$

sachant que le swap forward est une martingale sous la mesure  $\mathbf{Q}^{LVL}$ .

## 12.3 Evaluation des swaptions

### 12.3.1 Approximation de la dynamique du taux swap

La section précédente montre que le prix de la swaption peut s'écrire

$$Ps(t) = Level(t, T, T_n) E_t^{Q^{LV L}} \left[ (swap(T, T_n) - K)^+ \right]$$

où le swap

$$swap_t(T, T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i+1}(t) K(t, T_i)$$

avec

$$\omega_i(t) = \frac{\delta B(t, T_i)}{Level(t, T, T_n)},$$

est une  $\mathbf{Q}^{LV L}$ -martingale dont la dynamique est donnée par

$$dswap_s(T, T_n) = (\sigma^{poids}(s) + \sigma^{panier}(s)) dW_s^{LV L}$$

où  $\sigma^{poids}(s)$  est la contribution des poids dans la volatilité

$$\sigma^{poids}(s) = \sum_{k=1}^n \omega_k(s) K(s, T_{k-1}) \left( \sigma^B(s, T_k - s) - \sum_{i=1}^n \omega_i(s) \sigma^B(s, T_i - s) \right)$$

et  $\sigma^{panier}(s)$  est un terme provenant de la dynamique des forwards

$$\sigma^{panier}(s) = \sum_{i=1}^n \omega_i(s) K(s, T_{i-1}) \rho(s, T_i - s).$$

ce dernier terme étant une moyenne pondérée par  $\omega_i(s)$  des volatilités des taux forward  $K(t, T_i)$ . L'objectif de cette section est d'obtenir une formule d'évaluation suffisamment simple pour permettre la résolution du problème de calibration du modèle de marché aux prix de swaptions. Pour cela, il est nécessaire de commencer par faire deux approximations sur la dynamique des swaps (voir [?] ou [?] pour plus de détails).

- On suppose d'abord que les poids sont constants égaux à leur valeur aujourd'hui  $\omega_i(t)$  (les poids sont des  $\mathbf{Q}^{LV L}$ -martingales et leur volatilité est faible).
- On ignore l'effet du changement de mesure  $\mathbf{Q}^{T_i}$  vers  $\mathbf{Q}^{LV L}$  et on néglige donc le terme de drift de  $K(t, T_i)$  sous  $\mathbf{Q}^{LV L}$ .

Moyennant ces hypothèses simplificatrices, le problème d'évaluation de la swaption se réduit à calculer

$$Ps(t) = Level(t, T, T_n) E_t^{Q^{LV L}} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i+1}(t) K^{LV L}(T, T_i) - K \right)^+ \right]$$

où la valeur de  $Level(t, T, T_n)$  est donnée par le marché et

$$dK^{LV L}(s, T_i) = K^{LV L}(s, T_i) \rho(s, T_i - s) dW_s^{LV L}$$

avec comme valeur initiale  $K^{LV L}(t, T_i) = K(t, T_i)$ . Ceci revient à évaluer un call sur panier dans un modèle de Black-Scholes multivarié.



### 12.3.2 Calcul du prix

Il n'y a pas de formule exacte pour calculer le prix de telles options, mais encore une fois, une approximation suffit dans le cas particulier des swaptions. En effet, la volatilité du swap devient

$$d\text{swap}_s(T, T_n)/\text{swap}(s, T, T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\omega_{i+1}(t)K^{LV L}(s, T_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i+1}(t)K^{LV L}(s, T_i)} \rho(s, T_i - s) dW_s^{LV L}.$$

Pour pouvoir évaluer le prix du call de manière explicite, on peut, en première approximation, remplacer la volatilité stochastique du swap

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\omega_{i+1}(t)K^{LV L}(s, T_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i+1}(t)K^{LV L}(s, T_i)} \rho(s, T_i - s)$$

par une volatilité déterministe obtenue en substituant aux forward  $K^{LV L}(s, T_i)$  leur valeur aujourd'hui  $K(t, T_i)$ . On obtient finalement une  $\mathbf{Q}^{LV L}$ -martingale lognormale qui approxime le swap

$$d\text{swap}_s(T, T_n)/\text{swap}(s, T, T_n) = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \rho(s, T_{i-1} - s) dW_s^{LV L}$$

avec

$$\hat{\omega}_i = \frac{\omega_{i+1}(t)K(t, T_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i+1}(t)K(t, T_i)}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\hat{\omega}_i(t) = \omega_i(t) \frac{K(t, T_i)}{\text{swap}_t(T, T_n)}$$

Ceci permet d'évaluer les swaption en utilisant directement la formule de [?], pour obtenir

$$Ps(t) = \text{Level}_t(T, T_n) BS(\text{swap}_t(T, T_n), T, V_T)$$

ou encore

$$Ps(t) = \text{Level}_t(T, T_n) \left( \text{swap}_t(T, T_n) \mathcal{N}(h) - K \mathcal{N}(h - \sqrt{V_T}) \right)$$

avec

$$h = \frac{\left( \ln \left( \frac{\text{swap}_t(T, T_n)}{K} \right) + \frac{1}{2} V_T \right)}{\sqrt{V_T}}$$

où

$$V_T = \int_t^T \|\rho^\omega(s)\|^2 ds \quad \text{avec} \quad \rho^\omega(s) = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i(s) \rho(s, T_i - s).$$

Cette dernière expression donne une approximation du prix des swaptions dont la précision est de l'ordre de 1 à 4 points de base (ce qui signifie une erreur de  $10^{-4}$  sur le prix d'une swaption sur un montant nominal égal à 1). Ceci est bien inférieur à la taille des fourchettes achat-vente qui sont plutôt de l'ordre de 10 – 25 points de base.

## 12.4 Calibration

### 12.4.1 Contraintes sur les prix de swaptions

Dans cette section, on s'intéresse au problème inverse. On dispose de données de marché sur les prix de swaptions sur les swaps  $swap_t(T_k, T_{n,k})$ ,  $k = 1, \dots, m$ . On dispose également d'un ensemble de données sur la courbe des taux qui permettent d'évaluer  $swap_t(T_k, T_{n,k})$ ,  $Level_t(T_k, T_{n,k})$  et  $\hat{\omega}_{i,k}(t)$  et on cherche à calibrer la volatilité  $\rho(s, T_i - s)$  sur les prix de swaptions (pour simplifier, on ne s'intéresse ici qu'aux prix de swaptions, sachant que les caplets peuvent être traités comme des swaptions à une période).

Par simple inversion de la formule de Black, on commence donc par calculer pour chaque prix de swaption  $p_k$  une variance de Black  $V_{T,k}$  de telle sorte que

$$Level_t(T_k, T_{n,k}) \left( swap_t(T_k, T_{n,k}) \mathcal{N}(h) - K \mathcal{N}(h - \sqrt{V_{T,k}}) \right) = p_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

La variance  $V_T$  dans cette formule peut s'écrire

$$\begin{aligned} V_T &= \int_t^T \|\rho^\omega(s)\|^2 ds \\ &= \int_t^T \sum_{i,j=1}^n \hat{\omega}_i(t) \hat{\omega}_j(t) \rho(s, T_i - s) \rho(s, T_j - s) ds \\ &= \int_t^T \mathbf{Tr}(\Omega X_s) ds \end{aligned}$$

où  $\mathbf{Tr} X$  désigne la trace de la matrice  $X$ , ayant défini

$$\Omega_{ij} = \hat{\omega}_i(t) \hat{\omega}_j(t) \quad \text{et} \quad (X_s)_{ij} = \rho(s, T_i - s) \rho(s, T_j - s).$$

Si on discrétise la covariance  $X_s$  dans le temps, ceci devient

$$V_T = \int_t^T \mathbf{Tr}(\Omega X_s) ds = \sum_t^T \mathbf{Tr}(\Omega X_s) \Delta t = \mathbf{Tr}(\Omega X) \Delta t,$$

où les matrices  $\Omega$  et  $X$  sont maintenant bloc-diagonales. Pour reproduire les prix de marché  $p_k$ , il suffit donc en fait d'imposer les contraintes suivantes

$$\Delta t \mathbf{Tr}(\Omega X) = V_{T,k}, \quad m = 1, \dots, m,$$

ces contraintes étant *linéaires* en la matrice de covariance  $X$ . Finalement, trouver une matrice de covariance qui satisfait les contraintes de marché revient à résoudre le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver} & X \\ \text{avec} & \Delta t \mathbf{Tr}(\Omega X) = V_{T,k}, \quad k = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0. \end{array}$$

L'ensemble des matrices  $X$  qui sont solutions du problème ci-dessus est convexe, comme l'intersection du cône convexe des matrices positives semidéfinies avec un espace affine. Nous allons voir que ceci implique que ce problème peut-être résolu très efficacement en utilisant des résultats récents sur l'optimisation convexe.

### 12.4.2 Objectifs

Reste maintenant à choisir une matrice parmi l'ensemble des matrices calibrées décrit en (12.4.1). Plusieurs types d'objectifs sont possibles, le plus simple consiste à minimiser la trace de la matrice  $X$  et de résoudre

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \mathbf{Tr} X \\ \text{avec} & \Delta t \mathbf{Tr}(\Omega X) = V_{T,k}, \quad k = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0. \end{array}$$

Ce programme de minimisation d'un objectif linéaire avec contraintes linéaires sur une matrice semidéfinie positive s'appelle un programme semidéfini. Il s'agit donc d'un programme convexe et une extension récente (voir [?], [?] ou encore [?]) des algorithmes de programmation linéaire permet de résoudre ce type de programme très rapidement (typiquement, moins d'une seconde pour les problèmes considérés ici). Il est également possible de mélanger des contraintes quadratiques convexes aux contraintes de calibration, on peut ainsi choisir de lisser la matrice calibrée en résolvant

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \sum_{i,j=1}^{n-1} \|X_{i+1,j} - X_{i,j}\|^2 + \|X_{i,j+1} - X_{i,j}\|^2 \\ \text{avec} & \Delta t \mathbf{Tr}(\Omega X) = V_{T,k}, \quad k = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0. \end{array}$$

On peut aussi remplacer les contraintes exactes sur les prix par des fourchettes achat-vente, et résoudre par exemple

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \mathbf{Tr} X \\ \text{avec} & V_{T,k}^{Bid} \leq \Delta t \mathbf{Tr}(\Omega X) \leq V_{T,k}^{Ask}, \quad k = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0. \end{array}$$

Enfin, il est évidemment possible de mélanger tous ces objectifs.

La seule difficulté qui subsiste dans la résolution du problème de calibration vient du fait qu'il n'est pas possible d'imposer un rang maximum à la matrice calibrée et donc de limiter le nombre de facteurs du modèle. Ceci est rendu nécessaire par la difficulté d'évaluer les options américaines dans un modèle à plus de deux facteurs. Le programme de calibration avec contrainte de rang devient NP-dur et il n'existe pas à l'heure actuelle de méthode pour produire une solution avec la même efficacité et fiabilité que pour le programme de rang libre. Cependant, on constate en pratique (voir [?]) que minimiser la trace tend à produire des solutions de rang faible.



## Chapitre 13

# Appendice : Volatilité stochastique (par Julien Guyon)

Ce chapitre a été rédigé par Julien Guyon, d'après le stage qu'il a fait au Crédit Lyonnais, auprès de l'équipe de Christophe Michel. Qu'ils soient tous remerciés.

### 13.1 Introduction

#### 13.1.1 Notations

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier un modèle à volatilité stochastique proposé par Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [1]. Nous reprenons le travail théorique des auteurs, puis nous proposons des exemples de simulation informatique. Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \end{cases} \quad (13.1.1)$$

Dans cette écriture :

- $X$  représente le sous-jacent,  $X_t$  son cours à la date  $t$ ,
- $\mu$  est le rendement instantané, supposé constant,
- $\sigma_t$  est la valeur à la date  $t$  de la volatilité du cours du sous-jacent ; elle mesure l'intensité du bruit  $\sigma_t X_t dW_t$  auquel est soumis le cours du sous-jacent
- $W$  est un mouvement brownien standard, la volatilité  $\sigma$  est elle-même un processus stochastique, fonction déterministe du processus  $Y$  ; la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs strictement positives,
- $Y$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, de moyenne à long terme  $m$  et de variance à long terme  $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ ,
- $\hat{Z}$  est un mouvement brownien standard éventuellement corrélé à  $W$  ; nous supposons dans la suite cette corrélation constante et nous la notons  $\rho$ , avec  $\rho \in ]-1, 1[$ , de sorte que  $d\langle W, \hat{Z} \rangle_t = \rho dt$ . Si nous définissons  $Z_t$  par l'égalité  $\hat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t$ , alors  $W$  et  $Z$  sont deux browniens indépendants.

On donne ci-dessous un exemple de trajectoires possibles pour les trajectoires de  $(W, Z)$  et de  $(W, \hat{Z})$ , dans le cas où  $\rho = 0.5$  puis dans le cas où  $\rho = -0.5$ . Dans les trois cas, on a utilisé les mêmes séries d'aléas. On a utilisé un code C pour générer ces trajectoires.

Nous nous plaçons sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, Z_s, 0 \leq s \leq t)$ . Par exemple, on pourra considérer l'espace  $\Omega = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$  des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Wiener sur cette tribu. Dans ce cas, il faut voir un événement ponctuel  $\omega$  comme une trajectoire  $t \mapsto (W_t(\omega), Z_t(\omega))$ . Par ailleurs, la filtration  $\mathcal{F}_t$  représente l'information sur les deux mouvements browniens  $W$  et  $Z$  jusqu'à la date  $t$ ; c'est l'augmentation habituelle de la tribu engendrée par les ensembles de la forme  $\{\omega \in \Omega \mid |W_s| \leq R_1, |Z_s| \leq R_2, 0 \leq s \leq t\}$ .

Dans toute la suite, nous nous plaçons sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Plus précisément, nous supposons l'existence d'une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  sous laquelle le prix des actifs actualisé est une martingale locale.

### 13.1.2 Interprétation

F. BLACK et M. SCHOLES ont proposé [2] de modéliser la dynamique du cours  $X_t$  du sous-jacent par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x. \quad (13.1.2)$$

Typiquement, le sous-jacent est une action ou un indice boursier. Dans ce modèle,  $\sigma$  est une constante strictement positive, i.e. une quantité supposée indépendante du temps et du hasard, qu'on appelle "volatilité". Nous considérons également un actif sans risque  $X^0$  dont la valeur à la date  $t$  est  $X_t^0 = e^{rt}$ . Ceci revient à supposer le taux d'intérêt à court terme constant égal à  $r$ . L'équation (13.1.2) a des conséquences importantes :

- Le processus  $X$  est un mouvement brownien géométrique; on dispose d'une expression explicite pour  $X_t$  :

$$X_t = x \exp \left( \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \quad (13.1.3)$$

qui prouve que le logarithme du cours  $X_t$  suit une loi gaussienne de moyenne  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$  et de variance  $\sigma^2 t$ . On peut réécrire (13.1.3) sous la forme  $X_t = e^{\mu t} M_t$ , où  $M_t = \exp \left( \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right)$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale de moyenne 1. La figure suivante présente quatre trajectoires possibles du processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$  et la trajectoire moyenne.

- Le marché est *viable* et *complet* :
  - Il existe *une et une seule* probabilité  $\mathbb{P}^*$  sous laquelle le processus des prix actualisés  $(e^{-rt} X_t)_{t \geq 0}$  de l'actif risqué est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale. Cette probabilité est appelée probabilité risque-neutre.
  - L'évolution du sous-jacent s'écrit

$$dX_t = r X_t dt + \sigma X_t dW_t^*, \quad X_0 = x,$$

où  $W^*$  est un  $\mathbb{P}^*$ -mouvement brownien.

- Toute option européenne de payoff  $H \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$ , c'est-à-dire toute option définie par une variable aléatoire  $H$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité  $\mathbb{P}^*$ , est simulable : il existe un unique portefeuille admissible, i.e. autofinancé et minoré, ne contenant que de l'actif sans risque et de l'actif risqué, dont la valeur en  $T$  est  $H$ . De plus, la valeur  $V(t)$  de l'option est, sous la probabilité risque-neutre, l'espérance actualisée du flux terminal  $H$  :

$$V(t) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-r(T-t)} H \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Ceci est une conséquence du théorème de représentation des martingales browniennes (notons que  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq t) = \sigma(W_s^*, 0 \leq s \leq t)$ ). Autrement dit, on peut se couvrir parfaitement - éliminer le risque - en gérant dynamiquement un portefeuille ne contenant que du liquide et du sous-jacent. Notons que  $V(t)$  est indépendant de la tendance  $\mu$ .

- Dans le cas particulier où  $H = h(X_T)$ , avec  $h$  continue et positive, le prix de l'option se met sous la forme  $P(t, X_t)$  avec

$$P(t, x) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-r(T-t)} h \left( x \exp^{\sigma(W_T^* - W_t^*) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \right) \right]. \quad (13.1.4)$$

La fonction  $P$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\sigma)P = 0, \\ \forall x > 0, P(T, x) = h(x), \end{cases} \quad (13.1.5)$$

où

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right). \quad (13.1.6)$$

De plus, la quantité d'actif risqué à détenir à la date  $t$  est

$$a_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t),$$

quantité qu'on appelle le "delta". Par conséquent, le portefeuille de couverture contient

$$b_t = e^{-rt} \left( P(t, X_t) - X_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t) \right)$$

unités d'actif sans risque.

- Le cas du call correspond au payoff  $h(x) = (x - K)_+$ , on note alors  $P(t, x) = C_{BS}(t, x; K, T; \sigma)$  et

$$C_{BS}(t, x; K, T; \sigma) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \quad (13.1.7)$$

où

$$\begin{cases} d_+ = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_- = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}. \end{cases} \quad (13.1.8)$$

On donne ci-dessous le graphe de la fonction  $x \mapsto C_{BS}(t, x; K, T; \sigma)$  pour les valeurs suivantes des paramètres :  $t = 0$ ,  $K = 1.1$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 0.15$ ,  $r = 0.05$ . On a superposé le graphe donnant le payoff du call, i.e.  $x \mapsto (x - K)_+$ .

Ci-dessous, on modifie la valeur de  $\sigma$ , toutes choses égales par ailleurs. On regarde successivement une volatilité de 5% puis une volatilité de 50%. Les trois graphes sont à la même échelle.

De plus, le portefeuille de couverture contient la quantité

$$a_t = N(d_+)$$

d'actifs risqués. Ceci prouve que l'égalité (13.1.7) donnant le prix du call sous le modèle de BLACK et SCHOLES donne aussi la décomposition du portefeuille de couverture en actif risqué et en actif sans risque.

Signalons que ce qui précède reste vrai si l'on autorise le taux d'intérêt à court terme, dit aussi "taux court", et la volatilité à dépendre du temps, *mais pas du hasard*. Il suffit de remplacer  $r$  par

$$\bar{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds$$

et  $\sigma$  par  $\bar{\sigma}$  où

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds$$

dans les formules (13.1.4), (13.1.5), (13.1.6), (13.1.7) et (13.1.8).

Le modèle de BLACK et SCHOLES sert de référence à tous ceux qui pratiquent la finance des marchés :

- Il est *simple* : adopter le modèle de BLACK et SCHOLES, c'est simplement supposer les cours  $X$  à trajectoires continues et à accroissements relatifs indépendants et stationnaires.
- Il est *maniable* : il donne lieu à des formules fermées pour le prix des calls et des puts et pour les deltas correspondants, c'est-à-dire pour les quantités d'actifs risqués que doit contenir le portefeuille de couverture.

Cependant :

- Tous les tests statistiques invalident l'hypothèse log-normale pour le cours du sous-jacent. En réalité, il semble que les queues de distribution soient plus épaisses que ne le prévoit le modèle de BLACK et SCHOLES. De plus, les queues de distribution empiriques de  $\ln(X_t)$  sont parfois asymétriques.
- Nous définissons la volatilité implicite  $I$  par l'égalité

$$C_{BS}(t, x; K, T; I) = C^{obs}$$

où  $C^{obs}$  est le prix observé du call de maturité  $T$  et de strike  $K$ . La définition a un sens puisque  $\sigma \mapsto C_{BS}(t, x; K, T; \sigma)$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $] (x - K)_+, x[$ . Ainsi définie,  $I$  est une fonction de  $t, x, K, T$  et  $C^{obs}$ . Si les prix observés étaient exactement les prix prévus par le modèle de BLACK et SCHOLES, la fonction  $K \mapsto I(t, x, K, T, C^{obs})$  serait constante et égale au paramètre  $\sigma$ . Or, les données de marché font apparaître une dépendance en  $K$ . La courbe empirique  $K \mapsto I(t, x, K, T, C^{obs})$  porte souvent le nom de courbe de "smile" en référence à son allure souriante (convexe décroissante puis croissante).

Bien sûr pour expliquer ces phénomènes, il faut raffiner le modèle. Il y a bien des façons de le faire : par exemple autoriser les cours  $X_t$  à avoir des sauts, ou autoriser la volatilité à dépendre de  $t$  et de  $x$ , la seule source de bruit restant le brownien  $W$  (c'est ce que propose B. DUPIRE [3]). Une manière naturelle d'étendre le modèle de BLACK et SCHOLES est d'autoriser la volatilité à être un processus stochastique gouverné par un deuxième bruit modélisé par un deuxième brownien  $\hat{Z}$  éventuellement corrélé à  $W$ , mais non parfaitement corrélé, contrairement au cas du modèle de DUPIRE. Nous conservons donc l'écriture

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t$$

mais  $\sigma$  est désormais un processus aléatoire dépendant du temps et du hasard ( $W, \hat{Z}$ ). Comment choisir ce processus ? Nous souhaitons que la volatilité  $\sigma_t$  soit une quantité  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et strictement positive. Aussi nous nous proposons de l'écrire sous la forme  $\sigma_t = f(Y_t)$ , où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une fonction déterministe et  $Y$  est un processus aléatoire à valeurs réelles ( $\mathcal{F}_t$ -adapté). Nous nous limiterons aux processus  $Y$  qui sont *markoviens*. Par exemple :

- un processus markovien de sauts pur à espace d'états fini ou dénombrable,
- un processus markovien de sauts pur à espace d'états infini non dénombrable,
- une diffusion markovienne du type

$$dY_t = \mu_Y(t, Y_t) dt + \sigma_Y(t, Y_t) d\hat{Z}_t. \quad (13.1.9)$$

Dans toute la suite, nous nous limiterons aux diffusions markoviennes (13.1.9), et parmi elles à celles qui possèdent la propriété de *retour à la moyenne*, i.e. celles pour lesquelles

$$\mu_Y(t, y) = \alpha(m - y).$$

Le paramètre  $\alpha$  s'appelle le *taux de retour à la moyenne* et le paramètre  $m$  la *moyenne à long terme*. On peut voir  $Y_t$  comme la position à la date  $t$  d'une particule soumise à une force de rappel d'intensité  $\alpha$  qui a tendance à la ramener à sa position d'équilibre (déterministe)  $m$  et à une force aléatoire - par exemple des chocs - modélisée par le bruit  $\sigma_Y(t, Y_t) d\hat{Z}_t$ . Le choix  $\sigma_Y(t, Y_t) = \beta$ , où  $\beta$  est une constante, correspond au processus dit d'Ornstein-Uhlenbeck.



### 13.1.3 A quoi s'attendre ?

Il y a une bonne raison *a priori* de considérer la volatilité comme une quantité aléatoire : des études empiriques sur les rendements du cours du sous-jacent permettent d'estimer la volatilité et celle-ci semble présenter un comportement stochastique. Mais modéliser la volatilité par un processus stochastique, c'est en fait reconnaître que quantifier le risque à travers un paramètre de volatilité *constant* est aujourd'hui insuffisant pour expliquer certains phénomènes de marché. En particulier pour expliquer la courbe de smile. Et c'est une modification profonde et puissante qui permet de décrire un marché bien plus complexe que le marché de BLACK et SCHOLES :

- nous pouvons reproduire des lois plus réalistes pour les rendements ; en particulier, les queues de ces distributions sont plus épaisses que celles des lois lognormales,
- nous pouvons rendre ces distributions asymétriques en corrélant les deux bruits  $W$  et  $\hat{Z}$ ,
- nous pouvons faire apparaître du smile.

Evidemment rien n'est gratuit - surtout dans le monde de la finance des marchés - et il faut bien payer quelque part le prix de ces nettes améliorations :

- on ne peut pas observer directement la volatilité ; estimer les paramètres du modèle  $(\alpha, m, \beta)$  et le niveau actuel de la volatilité sont donc des problèmes difficiles,
- le marché ainsi modélisé est *incomplet* : lorsqu'on traite une option, on ne peut pas éliminer le risque en gérant un portefeuille contenant du liquide et du sous-jacent. En effet, la variation infinitésimale de la valeur d'un tel portefeuille contient des termes en  $dW_t$  et en  $dZ_t$  que l'on ne peut annuler simultanément.

## 13.2 Prix d'une option européenne

### 13.2.1 EDP d'évaluation

Dans cette section, on considère la dynamique (13.1.1) et on s'intéresse au prix d'une option européenne d'échéance  $T_1$  et de payoff  $h$  continu ; l'acheteur d'une telle option reçoit  $h(X_{T_1})$  en  $T_1$ . L'absence d'opportunité d'arbitrage et l'hypothèse markovienne sur  $Y$  nous assurent l'existence d'une fonction  $P^{(T_1)} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ , que nous supposons suffisamment régulière, telle que le prix de cette option à la date  $t \in [0, T_1]$  s'écrit  $P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t)$ . Il est impossible d'annuler le risque avec seulement l'actif sous-jacent. Aussi allons nous considérer un portefeuille qui contient  $a_t$  unités d'actif risqué,  $b_t$  unités d'actif sans risque et  $c_t$  options européennes d'échéance  $T_2 > T_1$  et de même payoff  $h$ . Nous cherchons  $a_t, b_t$  et  $c_t$  tels que le portefeuille réplique l'option et soit autofinancé. L'hypothèse de réplication correspond à l'égalité

$$P^{(T_1)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) = a_{T_1} X_{T_1} + b_{T_1} e^{rT_1} + c_{T_1} P^{(T_2)}(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}) \quad \mathbb{P} - ps \quad (13.2.1)$$

et l'hypothèse d'autofinancement à

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t dX_t + b_t d(e^{rt}) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t). \quad (13.2.2)$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, (13.2.1) implique que à toute date  $t \leq T_1$

$$P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t X_t + b_t e^{rt} + c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \quad \mathbb{P} - ps \quad (13.2.3)$$

c'est-à-dire que la valeur du portefeuille est à tout instant égale au prix de l'option. Par la formule d'Itô, on a<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) &= \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial t}(t, X_t, Y_t) dt + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t \\
 &\quad + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t) d\langle X \rangle_t \\
 &\quad + \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t) d\langle X, Y \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t) d\langle Y \rangle_t \\
 &= \mathcal{A}_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) dt \\
 &\quad + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t
 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{A}_1$  est l'opérateur défini par

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Mais, d'après l'hypothèse d'autofinancement, la variation infinitésimale de la valeur du portefeuille est aussi égale à

$$\begin{aligned}
 &dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) \\
 &= a_t dX_t + b_t d(e^{rt}) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \\
 &= a_t dX_t + r b_t e^{rt} dt \\
 &\quad + c_t \left( \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) dt + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t \right) \\
 &= \left( c_t \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) + r b_t e^{rt} \right) dt \\
 &\quad + \left( a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) dX_t \\
 &\quad + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) dY_t.
 \end{aligned}$$

Il n'y a de termes en  $dZ_t$  que dans  $dY_t$ , si bien que l'identification des termes en  $dZ_t$  donne

$$c_t = \frac{\frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}{\frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}.$$

L'identification des termes en  $dW_t$  donne

$$a_t = \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) - c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)$$

d'où on déduit

$$b_t = e^{-rt} \left( P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) - a_t X_t - c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \right)$$

---

<sup>1</sup>les égalités faisant intervenir  $X_t$  et  $Y_t$  sont à prendre au sens ps

Enfin l'identification des termes en  $dt$  donne

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) + \mu X_t \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) + \alpha(m - Y_t) \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \\ = & c_t \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) + r b_t e^{rt} + \mu \left( a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) X_t \\ & + \alpha(m - Y_t) c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t), \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi en remplaçant  $a_t, b_t$  et  $c_t$  par leurs expressions :

$$\left( \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} \mathcal{A}_2 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = \left( \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} \mathcal{A}_2 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t)$$

où

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right).$$

Autrement dit, si on définit l'opérateur  $\mathcal{U}$  par

$$\mathcal{U} = \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \mathcal{A}_2$$

alors

$$\mathcal{U} P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = \mathcal{U} P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t).$$

Comme le membre de gauche dépend de  $T_1$  mais pas de  $T_2$  et que le membre de droite, lui, dépend de  $T_2$  mais pas de  $T_1$ , les deux membres sont en fait indépendants de  $T_1$  et de  $T_2$ . Moralement, l'opérateur  $\mathcal{U}$  annule la dépendance en l'échéance. Il existe donc une fonction  $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que quelle que soit son échéance  $T > 0$ , une option de payoff  $h$  a un prix  $P^{(T)}(t, X_t, Y_t)$  qui vérifie

$$\mathcal{U} P^{(T)}(t, X_t, Y_t) = \psi(t, X_t, Y_t).$$

Désormais on considère l'option de payoff  $h$  et d'échéance  $T$ . Son prix  $P(t, X_t, Y_t)$  vérifie l'équation

$$\mathcal{A}_2 P(t, X_t, Y_t) - \psi(t, X_t, Y_t) \frac{\partial P}{\partial y}(t, X_t, Y_t) = 0. \quad (13.2.4)$$

Pour des raisons qui apparaîtront claires bientôt, on introduit les fonctions  $\Lambda$  et  $\gamma$  définies par

$$\psi(t, x, y) = \beta \Lambda(t, x, y) - \alpha(m - y) \quad (13.2.5)$$

et

$$\Lambda(t, x, y) = \rho \frac{\mu - r}{f(y)} + \sqrt{1 - \rho^2} \gamma(t, x, y). \quad (13.2.6)$$

Avec ces notations, (13.2.4) se réécrit, en omettant la dépendance en  $(t, X_t, Y_t)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} X_t^2 f(Y_t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \beta X_t f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ & + r \left( X_t \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \alpha(m - Y_t) \frac{\partial P}{\partial y} - \beta \Lambda \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie ps, le prix  $P$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{L}_{BS}(f(y)) + \mathcal{L}_{OU} + \mathcal{L}_1) P(t, x, y) = 0 \quad (13.2.7)$$

avec la condition terminale

$$P(T, x, y) = h(x),$$

où

$$\mathcal{L}_{BS}(f(y)) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right)$$

est l'opérateur Black-Scholes de paramètre de volatilité  $f(y)$ ,

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m - y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et

$$\mathcal{L}_1 = \rho\beta x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta\Lambda(t, x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est un opérateur faisant intervenir la corrélation  $\rho$  d'une part, en facteur de la dérivée croisée, et la fonction  $\Lambda$  d'autre part. Cette dernière est appelée "*prime de risque de volatilité*". Plus précisément, la fonction  $\frac{\mu-r}{f}$  est exactement la prime de risque liée à la première source de bruit  $W$  et  $\gamma$  est exactement la prime de risque liée à la deuxième source de bruit  $Z$ . En effet, une variation infinitésimale du prix de l'option s'écrit, en utilisant (13.2.7) et la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dP(t, X_t, Y_t) &= \left\{ rP + \frac{\mu-r}{f(Y_t)} \left( X_t f(Y_t) \frac{\partial P}{\partial x} + \beta\rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \gamma(t, X_t, Y_t) \beta \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dt \\ &\quad + \left\{ X_t f(Y_t) \frac{\partial P}{\partial x} + \beta\rho \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dW_t + \left\{ \beta \sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dZ_t. \end{aligned}$$

La fonction  $\Lambda$  agrège les primes de risque liées aux deux sources indépendantes de hasard, à travers (13.2.6). On comprend maintenant pourquoi il est bienvenu d'écrire la fonction  $\psi$  sous la forme (13.2.5)-(13.2.6).

### 13.2.2 Interprétation probabiliste

On cherche ici à donner une interprétation probabiliste du prix  $P(t, x, y)$ . Posons

$$\begin{cases} \theta_t^W = \frac{\mu-r}{f(Y_t)}, \\ \theta_t^Z = \gamma(t, X_t, Y_t), \end{cases}$$

et

$$M_t = \exp \left( - \int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( (\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right).$$

Sous certaines conditions techniques, par exemple sous la condition de Novikov :

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \left( (\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right) \right] < \infty, \quad (13.2.8)$$

$M$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale. On définit alors bien une mesure de probabilité  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$  en posant

$$d\mathbb{P}^{*(\gamma)}(\omega) = M_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Cette nouvelle probabilité est équivalente à  $\mathbb{P}$  et, d'après le théorème de Girsanov, les processus

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds$$

et

$$Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds$$

sont deux  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ -mouvements browniens indépendants. On a

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \\ &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t \left( dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) \\ &= r X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \left( \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right) \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \rho \left( dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) \\ &\quad + \beta \sqrt{1 - \rho^2} (dZ_t^* - \gamma(t, X_t, Y_t) dt) \\ &= (\alpha(m - Y_t) - \beta \Lambda(t, X_t, Y_t)) dt + \beta \left( \rho dW_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^* \right). \end{aligned}$$

Si on pose

$$\hat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^*$$

on définit un  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ -mouvement brownien et on peut réécrire la dynamique (13.1.1) sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = r X_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \{\alpha(m - Y_t) - \beta \Lambda(t, X_t, Y_t)\} dt + \beta d\hat{Z}_t^* \end{cases} \quad (13.2.9)$$

Sous la probabilité  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ , le processus des prix actualisés  $(\tilde{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par

$$\tilde{X}_t = e^{-rt} X_t$$

est une martingale locale. On se placera sous les hypothèses qui assurent que c'est en fait une vraie  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ -martingale. On pourra par exemple supposer que

$$\mathbb{E}^{*(\gamma)} \left[ \int_0^T f(Y_t)^2 X_t^2 dt \right] < \infty \quad (13.2.10)$$

ou même seulement

$$\mathbb{E}^{*(\gamma)} \left[ \sqrt{\int_0^T f(Y_t)^2 X_t^2 dt} \right] < \infty. \quad (13.2.11)$$

Alors si on évalue l'option européenne de maturité  $T$  et de payoff  $H = h(X_T)$  par

$$V_t = \mathbb{E}^{*(\gamma)} \left[ e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

on supprime toute possibilité d'arbitrage. L'énorme inconvénient de ce modèle à volatilité stochastique, lorsqu'on le compare au modèle de BLACK et SCHOLLES, c'est qu'à chaque fonction  $\gamma(t, x, y)$  correspond une probabilité risque neutre  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ . On peut adopter le point de vue suivant : le marché sélectionne naturellement une prime de risque de volatilité  $\gamma$  qu'il s'agit de mesurer en étudiant l'historique des données et/ou l'ensemble des prix d'options cotées sur le marché. Pour ce faire, il sera sans doute raisonnable de supposer d'abord que  $\gamma$  est une constante, puis de considérer que  $\gamma$  ne dépend que de  $y$ , ou éventuellement de  $t$  et de  $y$ . Dans ces derniers cas en effet, la dynamique de  $Y$  reste autonome, au sens où la dynamique de  $X$  n'interfère pas avec celle de  $Y$ . C'est sans doute un problème difficile, et qui ne sera pas utile pour la suite de cette étude. Retenons qu'il existe *a priori* une infinité de  $\gamma$  possibles, auxquels correspondent une infinité de probabilités risque-neutre équivalentes  $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ . Cette propriété est caractéristique de l'*incomplétude* du marché.

Il semble cependant raisonnable, étant donnée l'interprétation financière de  $\Lambda$ , de ne considérer que des fonctions  $y \mapsto \Lambda(y)$  bornées. Au vu de (13.2.9), la prime de risque  $\Lambda$  n'intervient que dans le terme de drift de  $Y$  où elle s'ajoute au terme  $\alpha(m - Y_t)$  qui lui n'est pas borné. Il est donc légitime de penser que  $\Lambda$  ne joue qu'au "second ordre". Ainsi, lors des simulations numériques, on ne considérera que le cas  $\Lambda \equiv 0$ .

### 13.3 Analyse asymptotique

L'idée principale de Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [1] est de considérer :

- d'une part que la volatilité possède la propriété de retour à la moyenne, qu'on modélise par la force de rappel déterministe  $\alpha(m - Y_t) dt$ ,
- d'autre part que ce retour à la moyenne est *rapide*. On suppose donc que l'intensité  $\alpha$  de la force de rappel est grande. Grande devant quoi ?  $\alpha$  est l'inverse d'un temps. Il s'agit donc de comparer  $\varepsilon = 1/\alpha$  - temps caractéristique de retour à la moyenne - à l'échelle de temps du problème :  $T - t$ . Aussi on considérera que  $\varepsilon \ll T - t$  ou, de manière équivalente, que  $\alpha \gg (T - t)^{-1}$ .

L'idée est ensuite de proposer un développement limité en  $\sqrt{\varepsilon}$  du prix de l'option. Revenons d'abord sur la propriété de retour à la moyenne à travers l'exemple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

#### 13.3.1 Retour à la moyenne

On se propose ici d'étudier plus en détail le processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $Y$  de dynamique

$$dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t, \quad Y_0 = y.$$

On a une expression explicite pour  $Y_t$  :

$$Y_t = m + (y - m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\hat{Z}_s$$

qui prouve que  $Y_t$  suit la loi gaussienne de moyenne  $m + (y - m)e^{-\alpha t}$  et de variance  $\nu^2(1 - e^{-2\alpha t})$ , où  $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$  ;  $Y_t$  converge en loi lorsque  $t \rightarrow +\infty$  vers  $\pi = \mathcal{N}(m, \nu^2)$ , la loi gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\nu^2$ .

On donne ci-dessous des trajectoires du processus  $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$  pour  $m = 0$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $y = 0$ . On teste plusieurs valeurs de  $\alpha$  : 0.1, 1, 10, 100.

## Probabilité stationnaire

Cette loi limite  $\pi$  est aussi la loi stationnaire du processus  $Y$  : si  $Y_0$  suit la loi  $\mathcal{N}(m, \nu^2)$ , alors à toute date  $t \geq 0$  la variable aléatoire  $Y_t$  suit aussi la loi  $\mathcal{N}(m, \nu^2)$ . Sa densité  $\Phi$  est donnée par

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\nu^2}\right)$$

et vérifie l'équation

$$\mathcal{L}_{OU}^* \Phi = 0$$

où

$$\mathcal{L}_{OU}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial y} ((m-y) \cdot) + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

est l'adjoint de l'opérateur

$$\mathcal{L}_{OU} = \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(m-y) \frac{\partial}{\partial y}$$

qui est le générateur infinitésimal de la diffusion  $Y$ , c'est-à-dire par définition l'opérateur qui à une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  à support compact associe la tendance en moyenne de  $g(Y_t)$  connaissant  $Y_t$  :

$$(\mathcal{L}_{OU} g)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^y [g(Y_t)] - g(y)}{t}.$$

Dans cette écriture,  $\mathbb{E}^y$  désigne l'espérance sous la probabilité  $\mathbb{P}^y$  qui est la probabilité conditionnelle sachant que  $Y_0 = y$ . On pose

$$L_\pi^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \pi), \quad (g_1 | g_2) = \int_{\mathbb{R}} g_1 g_2 d\pi, \quad \|g\| = \sqrt{(g | g)}.$$

On définit l'application  $P_t : L_\pi^2 \rightarrow L_\pi^2$  par

$$(P_t g)(y) = \mathbb{E}^y [g(Y_t)]$$

et l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ g \in L_\pi^2 \mid \exists \psi \in L_\pi^2, \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{P_t g - g}{t} - \psi \right\| = 0 \right\}.$$

Le générateur infinitésimal  $\mathcal{L}_{OU}$  est en fait défini sur  $\mathcal{D} \subset L_\pi^2$  à valeurs dans  $L_\pi^2$ . On donnera donc un sens à l'expression  $\mathcal{L}_{OU} g$  si et seulement si  $g \in \mathcal{D}$ .

## Propriété de décorrélation, théorème ergodique

L'inverse  $\varepsilon$  de l'intensité  $\alpha$  de la force de rappel s'interprète aussi comme le temps caractéristique de décorrélation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, puisque, si  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_s, Y_t) &= \text{cov} \left( \beta \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} d\hat{Z}_u, \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-v)} d\hat{Z}_v \right) \\ &= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left[ \int_0^s e^{\alpha u} d\hat{Z}_u \int_0^t e^{\alpha v} d\hat{Z}_v \right] \\ &= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)} \mathbb{E} \left[ \int_0^s e^{\alpha u} d\hat{Z}_u \int_0^s e^{\alpha v} d\hat{Z}_v \right] \\ &= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)} \int_0^s e^{2\alpha u} du \\ &= \nu^2 \left( e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $s$  et  $t$  tendent vers  $+\infty$  de sorte que  $\Delta = |t - s|$  reste constant, la covariance limite de  $Y_s$  et  $Y_t$  vaut  $\nu^2 e^{-\alpha\Delta}$ . Notons que c'est exactement la covariance de  $Y_s$  et  $Y_t$  sous la loi stationnaire. A la limite, lorsque ce temps typique de décorrélacion  $\varepsilon$  est infiniment petit, i.e. lorsque  $\alpha$  est infiniment grand, les valeurs  $Y_s$  et  $Y_t$ , même pour des temps voisins  $s$  et  $t$ , sont indépendantes (leur covariance est nulle et le processus  $Y$  est gaussien). C'est pour cette raison qu'on va disposer de théorèmes ergodiques du type loi forte des grands nombres. Plus précisément, pour toute fonction  $g$  intégrable contre la mesure stationnaire  $\mathcal{N}(m, \nu^2)$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{T-t} \int_t^T g(Y_s) ds = \langle g \rangle \quad (13.3.1)$$

où, par définition,  $\langle g \rangle$  est l'espérance de la fonction  $g$  contre la mesure stationnaire, i.e.

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \Phi(u) du.$$

En pratique, l'approximation

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T g(Y_s) ds \approx \langle g \rangle$$

ne sera valable que si  $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$ . Dans le contexte des marchés financiers, cela signifie que nous ne pourrions faire cette approximation que si nous sommes suffisamment loin de l'échéance  $T$  de l'option traitée.

### Equation homogène

On sera amené à considérer l'ensemble  $\mathcal{H}$  des fonctions  $\varphi \in \mathcal{D}$  (donc  $\varphi \in L^2_\pi$ ) et solutions de l'équation homogène  $\mathcal{L}_{OU}\varphi = 0$ . Cette dernière équation est en fait l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{1}{2}\beta^2\varphi''(y) + \alpha(m-y)\varphi'(y) = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les constantes et par la fonction  $\psi : y \mapsto \int_0^y \exp\left(\frac{(m-z)^2}{2\nu^2}\right) dz$ . Cette dernière fonction n'étant pas de carré intégrable contre la mesure stationnaire  $\pi = \mathcal{N}(m, \nu^2)$ ,  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des fonctions constantes<sup>2</sup>.

### 13.3.2 Le prix Black-Scholes corrigé

#### Notations

On se place ici sous l'hypothèse  $\varepsilon \ll T-t$ . Moralement, sous cette hypothèse,  $Y_t$  atteint sa loi limite  $\mathcal{N}(m, \nu^2)$  en temps fini. On se placera donc dans l'asymptotique

$$\varepsilon \longrightarrow 0, \quad \nu^2 = \text{cte.}$$

Comme  $\nu^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$ , cela signifie que  $\beta = \nu\sqrt{2\alpha} = \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}$  tend vers  $+\infty$ . On peut réécrire la dynamique (13.1.1) en faisant apparaître le paramètre infiniment petit  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = rX_t^\varepsilon dt + \sigma_t X_t^\varepsilon dW_t^*, \\ \sigma_t = f(Y_t^\varepsilon), \\ dY_t^\varepsilon = \left\{ \frac{1}{\varepsilon}(m - Y_t^\varepsilon) - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\Lambda(t, X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) \right\} dt + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} d\hat{Z}_t^*. \end{cases}$$

---

<sup>2</sup> $\psi$  n'est même pas intégrable contre  $\pi$ ; de ce fait, on ne peut pas donner de sens à  $\mathbb{E}^y[\psi(Y_t)]$ , ni *a fortiori* à  $(\mathcal{L}_{OU}\psi)(y) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\mathbb{E}^y[\psi(Y_t)] - \psi(y)}{t}$ .



Le prix  $P^\varepsilon$  de l'option européenne de maturité  $T$  et de payoff  $H = h(X_T^\varepsilon) \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$  vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} (X_t^\varepsilon)^2 f(Y_t^\varepsilon)^2 \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} X_t^\varepsilon f(Y_t^\varepsilon) \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x \partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial y^2} \\ + r \left( X_t^\varepsilon \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x} - P^\varepsilon \right) + \frac{1}{\varepsilon} (m - Y_t^\varepsilon) \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

et est donc solution de l'EDP

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P^\varepsilon(t, x, y) = 0 \quad (13.3.2)$$

avec la condition terminale

$$P^\varepsilon(T, x, y) = h(x),$$

où

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{BS}(f(y)) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right)$$

est l'opérateur Black-Scholes de paramètre de volatilité  $f(y)$ ,

$$\mathcal{L}_0 = \varepsilon \mathcal{L}_{OU} = \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (m - y) \frac{\partial}{\partial y}$$

est le générateur infinitésimal du processus d'Ornstein-Uhlenbeck multiplié par  $\varepsilon$ , et

$$\mathcal{L}_1 = \rho \nu \sqrt{2} x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \nu \sqrt{2} \Lambda \frac{\partial}{\partial y}.$$

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que la prime de risque  $\Lambda$  est une fonction continue **bornée ne dépendant que de  $y$** .

### Le problème à résoudre

On se place dans les conditions où, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'EDP (13.3.2) a une unique solution. On va voir que cette solution  $P^\varepsilon$  a une limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et on va s'intéresser à la correction d'ordre 1. Pour ce faire, on suppose l'existence d'un développement en série de la forme

$$P^\varepsilon = P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1 + \varepsilon P_2 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} P_3 + \varepsilon^2 P_4 + \dots$$

(13.3.2) se réécrit alors formellement

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_0 P_0 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\ &+ (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\ &+ \sqrt{\varepsilon} (\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On cherche des fonctions  $P_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulières qui vérifient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 P_0 = 0, & P_0(T, x, y) = h(x), \\ \mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0, & P_1(T, x, y) = 0, \\ \mathcal{L}_0 P_n + \mathcal{L}_1 P_{n-1} + \mathcal{L}_2 P_{n-2} = 0, & P_n(T, x, y) = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

L'opérateur  $\mathcal{L}_0$  n'agit que sur la variable  $y$ . Plus précisément, notons  $Q_i^{t,x} = P_i(t, x, \cdot)$ . C'est une fonction de  $y$  seulement. On a

$$(\mathcal{L}_0 P_i)(t, x, y) = (\mathcal{L}_0 Q_i^{t,x})(y)$$

(cela n'est pas vrai pour l'opérateur  $\mathcal{L}_1$  par exemple). Afin de donner un sens à l'expression  $\mathcal{L}_0 P_n$ , il suffit donc de donner un sens, pour tous  $t$  et  $x$ , à  $\mathcal{L}_0 Q_n^{t,x}$ . On cherche donc des fonctions  $P_i$  telles que  $P_i(t, x, \cdot) \in \mathcal{D}$ , notamment  $P_i(t, x, \cdot) \in L_\pi^2$ .

Enfin, les opérateurs  $\mathcal{L}_i$  font intervenir des dérivées premières en temps et secondes en  $x$  et en  $y$ . On cherche donc des fonctions  $P_i$  de classe  $C^{1,2,2}$ .

On se propose donc de résoudre le problème suivant : **trouver des fonctions  $P_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{1,2,2}$  qui vérifient :**

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 P_0 = 0, & P_0(T, x, y) = h(x), \\ \mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0, & P_1(T, x, y) = 0, \\ \mathcal{L}_0 P_n + \mathcal{L}_1 P_{n-1} + \mathcal{L}_2 P_{n-2} = 0, & P_n(T, x, y) = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

**et telles que  $P_i(t, x, \cdot) \in \mathcal{D}$  pour tous  $t, x$ .**

Notons, de plus, que pour la probabilité  $\mathbb{P}^*$  sélectionnée par le marché, on a

$$P^\varepsilon(t, X_t, Y_t) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

où  $\mathcal{F}_t$  est l'information contenue dans les trajectoires des deux browniens  $W^*$  et  $\hat{Z}^*$  jusqu'à la date  $t$ . Le payoff  $h(X_T)$  étant supposé de carré intégrable sous  $\mathbb{P}^*$ ,  $P^\varepsilon(t, X_t, Y_t)$  est aussi dans l'espace  $L^2(\mathbb{P}^*)$ .

En fait, on se limitera à la recherche des fonctions  $P_0$  et  $P_1$ . Elles permettent d'obtenir le prix corrigé à l'ordre 1 :  $P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1$ . On va procéder en cinq étapes. Avant cela, trois remarques sur les opérateurs  $\mathcal{L}_i$  :

- $\mathcal{L}_0$  ne fait intervenir que la variable  $y$  ; pour une fonction  $\psi(t, x)$ ,  $\mathcal{L}_0 \psi = 0$ ,
- $\mathcal{L}_1$  est une combinaison des dérivées  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$  ; pour une fonction  $\psi(t, x)$ ,  $\mathcal{L}_1 \psi = 0$ ,
- $\mathcal{L}_2$  ne fait pas intervenir de dérivée par rapport à  $y$  ; cependant, la variable  $y$  est présente à travers  $f(y)$  en facteur de  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  ; pour une fonction  $\psi(t, x)$ ,

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{L}_2 \psi \rangle(t, x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_2 \psi)(t, x, u) \Phi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 f(u)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + r \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) \right) \Phi(u) du \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} x^2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) \Phi(u) du \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + r \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + r \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) \\ &= \langle \mathcal{L}_2 \rangle \psi(t, x) \end{aligned}$$

où on a défini

$$\bar{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) \Phi(u) du = \langle f^2 \rangle$$

(on suppose donc dans toute la suite que  $f \in L_\pi^2$ ) et

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}).$$

Supposons que les fonctions  $P_0, P_1, P_2, \dots$  répondant au problème ci-dessus existent, et cherchons à calculer  $P_0$  et  $P_1$ .

**Etape 1 :  $\mathcal{L}_0 P_0 = 0$** 

Comme  $\mathcal{L}_0 P_0 = 0$ ,  $\mathcal{L}_0 Q_0^{t,x} = 0$  donc  $\mathcal{L}_{OU} Q_0^{t,x} = 0$  :  $P_0(t, x, \cdot)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{H}$  des solutions de l'équation homogène de la diffusion  $Y$ . On a montré que cet ensemble est réduit aux fonctions constantes. Ceci prouve que la fonction  $P_0$  ne dépend pas de  $y$ . Par abus, on notera  $P_0(t, x)$ .

**Etape 2 :  $\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0$** 

Comme  $P_0$  ne dépend pas de  $y$ ,  $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$ ; l'équation  $\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0$  se réduit donc à  $\mathcal{L}_0 P_1 = 0$ . Comme à l'étape 1, on montre que la fonction  $P_1$  ne dépend pas de  $y$ . Par abus, on notera  $P_1(t, x)$ .

Dès à présent, on sait que le prix corrigé à l'ordre 1,  $P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1$  ne dépend pas de  $y$ . C'est une propriété remarquable : à l'ordre 1, il n'est pas besoin de connaître le niveau actuel de la volatilité pour déterminer le prix de l'option ; la date  $t$  de la transaction et le niveau actuel  $x$  du cours du sous-jacent suffisent. Cela tombe bien car la volatilité n'est pas directement observable.

**Etape 3 :  $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$** 

Comme  $P_1$  ne dépend pas de  $y$ ,  $\mathcal{L}_1 P_1 = 0$ ; l'équation  $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$  se réduit donc à  $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$ ;  $\mathcal{L}_0 P_2 \in L_\pi^2$  (donc  $\mathcal{L}_2 P_0 \in L_\pi^2$ ) et par définition de la probabilité invariante  $\pi = \mathcal{N}(m, \nu^2) = \Phi(u) du$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0 P_2 \rangle(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_0 P_2)(t, x, u) \Phi(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t, x, u) (\mathcal{L}_0^* \Phi(u)) du \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0$ , i.e.  $\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = 0$ , ce qui s'écrit aussi  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_0 = 0$ . A l'ordre 0, le prix de l'option est donc le prix donné par le modèle de BLACK et SCHOLES, utilisé avec le paramètre de volatilité constant  $\bar{\sigma}$ , moyenne ergodique de la volatilité stochastique. Reste à déterminer  $P_1$ .

**Etape 4 : équation de Poisson**

On connaît maintenant  $P_0$ , donc aussi  $\mathcal{L}_2 P_0$  : c'est une fonction de  $(t, x, y)$ . Certes  $P_0$  ne dépend pas de  $y$ , mais le coefficient  $f(y)$  en facteur de  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  dans l'expression de  $\mathcal{L}_2$  réintroduit de la dépendance en  $y$ . Soit  $R^{t,x} = (\mathcal{L}_2 P_0)(t, x, \cdot)$  et  $Q_2^{t,x} = P_2(t, x, \cdot)$ . Comme  $(\mathcal{L}_0 P_2)(t, x, y) = (\mathcal{L}_0 Q_2^{t,x})(y)$  (rappelons que c'est une propriété propre à l'opérateur  $\mathcal{L}_0$ ), l'égalité

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$$

entre fonctions de trois variables  $(t, x, y)$  est équivalente aux égalités

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{L}_0 Q_2^{t,x} + R^{t,x} = 0$$

entre fonctions d'une seule variable (la variable  $y$ ). On se donne donc une fonction  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\langle R \rangle = 0$  et on cherche  $Q_2 \in \mathcal{D} \subset L_\pi^2$  telle que

$$\mathcal{L}_0 Q_2 + R = 0. \quad (13.3.3)$$

Cette équation porte le nom d'*équation de Poisson*. En effet, pour une diffusion brownienne dans l'espace, le générateur infinitésimal vaut  $\frac{1}{2}\Delta$ , où  $\Delta$  est le laplacien, et on obtient alors l'équation de Poisson

de l'électrostatique : la solution  $Q_2$  s'interprète, dans les bonnes unités, comme le potentiel électrique correspondant à la densité volumique de charges  $R$ .

L'équation (13.3.3) se réécrit

$$\nu^2 Q_2''(y) + (m - y) Q_2'(y) = -R(y).$$

Soit  $D_2 = Q_2'$ . La droite de solutions de l'équation sans second membre

$$\nu^2 D_2'(y) + (m - y) D_2(y) = 0 \quad (13.3.4)$$

est engendrée par  $y \mapsto \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right)$ , ou de manière équivalente par  $\Phi^{-1}$ . Une solution particulière  $y \mapsto \lambda(y) \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right)$  de

$$\nu^2 D_2'(y) + (m - y) D_2(y) = -R(y)$$

est obtenue par la méthode de variation de la constante : on a  $\lambda'(y) = -\frac{R(y)}{\nu^2} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right)$ . Ainsi,

$$Q_2'(y) = -\frac{1}{\nu^2} \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2\nu^2}\right) \left( \int_{-\infty}^y R(z) \exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\nu^2}\right) dz + \text{cte}_1 \right)$$

ou encore

$$Q_2'(y) = -\frac{1}{\nu^2 \Phi(y)} \left( \int_{-\infty}^y R(z) \Phi(z) dz + \text{cte}_2 \right).$$

Comme  $\int_{-\infty}^y R(z) \Phi(z) dz = \langle R \rangle = 0$ ,  $\text{cte}_2 = 0$ , d'où

$$Q_2'(y) = -\frac{1}{\nu^2 \Phi(y)} \left( \int_{-\infty}^y R(z) \Phi(z) dz \right)$$

qu'il s'agit d'intégrer pour obtenir  $Q_2$ .

Dans le cas que nous étudions, vu que  $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0$ ,

$$\begin{aligned} R(y) &\equiv R^{t,x}(y) \\ &= (\mathcal{L}_2 P_0)(t, x, y) \\ &= (\mathcal{L}_2 P_0)(t, x, y) - \langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle(t, x) \\ &= \frac{1}{2} (f(y)^2 - \langle f^2 \rangle) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $\phi$  est une solution de  $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \langle f^2 \rangle$ , alors

$$P_2^{t,x}(y) = -\frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) (\phi(y) + \text{cte}).$$

A chaque couple  $(t, x)$  fixé correspond une constante, on note donc

$$P_2(t, x, y) = -\frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) (\phi(y) + c(t, x))$$

et on a pour  $\phi$  l'expression

$$\phi'(y) = \frac{1}{\nu^2 \Phi(y)} \left( \int_{-\infty}^y (f(z)^2 - \langle f^2 \rangle) \Phi(z) dz \right).$$

**Etape 5 :**  $\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0$ 

Comme  $\langle \mathcal{L}_0 P_3 \rangle = 0$ , on a  $\langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = 0$ , ce qui s'écrit aussi  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_1 = -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle$ . On voit donc que  $P_1$  est solution d'une équation aux dérivées partielles du type Black-Scholes avec second membre. Le second membre est l'opposé de la moyenne ergodique de  $\mathcal{L}_1 P_2$  et fait donc intervenir, comme le montre l'expression de  $\mathcal{L}_1$ ,

- la corrélation entre volatilité et sous-jacent,
- la prime de risque de volatilité.

Plus précisément,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 P_2(t, x, y) &= \left( \rho \nu \sqrt{2} x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \nu \sqrt{2} \Lambda(y) \frac{\partial}{\partial y} \right) P_2(t, x, y) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \rho \nu \sqrt{2} x f(y) \frac{\partial}{\partial x} - \nu \sqrt{2} \Lambda(y) \right) \left( x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) \phi'(y) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \nu f(y) \phi'(y) \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \nu \Lambda(y) \phi'(y) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned}$$

Cette écriture fait apparaître les quantités  $L_2(t, x) = x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x)$  et  $L_3(t, x) = x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$  et décompose  $\mathcal{L}_1 P_2$  en :

- une partie de *corrélation* pure, en facteur de la combinaison linéaire  $2L_2 + L_3$ ,
- une partie de *prime de risque de volatilité* pure, en facteur de  $L_2$ .

Sur une échelle de temps grande devant  $\varepsilon$ , la volatilité atteint son régime stationnaire :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle(t, x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \nu \langle f \phi' \rangle \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \nu \langle \Lambda \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned}$$

Notons  $\tilde{P}_1 = \sqrt{\varepsilon} P_1$  la correction du prix à l'ordre 1.  $\tilde{P}_1$  est solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \tilde{P}_1 &= \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f \phi' \rangle \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned}$$

qu'on peut également écrire explicitement comme combinaison linéaire de  $L_2$  et de  $L_3$  :

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \tilde{P}_1 = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$$

avec

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} (2\rho \langle f \phi' \rangle - \langle \Lambda \phi' \rangle), \\ V_3 &= \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f \phi' \rangle. \end{aligned}$$

On pose  $H(t, x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$ . Comme  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \left( x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \right) = x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_0 = 0$ , on a

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) H = \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) \left( V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) = 0$$

puis

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})(-(T-t)H) = H - (T-t)\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})H = H,$$

ce qui prouve que

$$\tilde{P}_1(t, x) = -(T-t) \left( V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right). \quad (13.3.5)$$

On s'aperçoit sur cette formule que pour calculer le prix corrigé à l'ordre 1, il suffit de connaître les trois quantités  $\bar{\sigma}$ ,  $V_2$  et  $V_3$ . En pratique, il faudra *et il suffira* de calibrer ces trois paramètres qui agrègent  $\alpha, m, \beta, \rho, f, \gamma, \mu$ . Nous traiterons ce point plus loin dans la section "calibration". On trouvera également dans cette section le graphe de la correction  $x \mapsto \tilde{P}_1(0, x)$  dans le cas de l'option d'achat.

### 13.3.3 Stratégies de couverture

Comme nous sommes en marché incomplet, il n'est pas possible d'éliminer le risque en gérant un portefeuille ne contenant que du liquide et du sous-jacent. Il s'agit de transiger entre les pertes éventuelles dues à une mauvaise couverture et le coût de la couverture. On mesure sous la probabilité subjective  $\mathbb{P}$  les performances statistiques d'une stratégie.

#### La stratégie de couverture dans le modèle de Black et Scholes

Dans le modèle de BLACK et SCHOLES, pour la dynamique suivante du sous-jacent :

$$dX_t = \mu X_t dt + \bar{\sigma} X_t dW_t,$$

une option européenne qui paye  $h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*)$  vaut  $P_0(t, X_t)$  à la date  $t$  et est parfaitement couverte par le portefeuille autofinancé qui contient

$$a_t = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)$$

unités de sous-jacent et

$$b_t = e^{-rt} \left( P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right)$$

unités monétaires. En effet :

- ce portefeuille *réplique* l'option : à toute date  $t$ , la valeur de ce portefeuille est  $P_0(t, X_t)$ ; en particulier, à maturité, sa valeur est  $P_0(T, X_T) = h(X_T)$ ,
- ce portefeuille est *autofinancé* : la formule d'Itô donne

$$dP_0(t, X_t) = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \left( \frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt.$$

Comme  $P_0$  est solution de l'EDP Black-Scholes

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + r \left( x \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_0 \right) = 0, \quad (13.3.6)$$

on a

$$dP_0(t, X_t) = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) dX_t + r \left( P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt,$$

i.e.

$$dP_0(t, X_t) = a_t dX_t + b_t d(e^{rt}).$$

Autrement dit, la variation infinitésimale  $dP_0(t, X_t)$  de la valeur de ce portefeuille est exactement la variation due au marché.

Dans la suite, on se place dans le cas du modèle à volatilité stochastique (13.1.1)

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t, \\ dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t, \end{cases}$$

on propose trois stratégies de couverture et on calcule leur coût.

### Stratégie 1 : delta Black-Scholes

**Coût exact** On décide de suivre la même stratégie de gestion de portefeuille que dans le cas Black-Scholes avec volatilité  $\bar{\sigma} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$ , c'est-à-dire qu'on choisit<sup>3</sup> :

$$\begin{cases} a_t^{(1)} = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t), \\ b_t^{(1)} = e^{-rt} (P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)). \end{cases}$$

A tout instant, la valeur de ce portefeuille est  $a_t^{(1)} X_t + b_t^{(1)} e^{rt} = P_0(t, X_t)$ . Comme  $P_0(T, x) = h(x)$ , la valeur finale est  $h(X_T)$  donc ce portefeuille *réplique* l'option. Le hic, c'est qu'il *n'est pas* autofinancé. En effet,

$$dP_0(t, X_t) = a_t^{(1)} dX_t + \left( \frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt$$

tandis que la variation due au marché vaut

$$a_t^{(1)} dX_t + b_t^{(1)} d(e^{rt}) = a_t^{(1)} dX_t + r \left( P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt,$$

si bien que la différence, qu'on interprète comme le *coût infinitésimal* de la couverture, n'est pas nulle et vaut exactement, en utilisant (13.3.6) :

$$dC_t^{(1)} \tag{13.3.7}$$

$$= dP_0(t, X_t) - \left( a_t^{(1)} dX_t + b_t^{(1)} d(e^{rt}) \right) \tag{13.3.8}$$

$$= \left( \frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) - r \left( P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) dt.$$

Si  $dC_t^{(1)} > 0$ , on doit injecter de l'argent dans le portefeuille ; si  $dC_t^{(1)} < 0$ , on doit en retirer. La formule (13.3.7) est remarquable car *elle est valable trajectoire par trajectoire* ; c'est une formule exacte, en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir d'espérance ; notamment elle ne suppose aucune probabilité sous-jacente. Remarquons tout de suite que le coût de gestion du portefeuille est :

- un processus stochastique à *variation finie*,
- d'autant plus petit que
  - la volatilité moyenne  $\bar{\sigma}$  est proche de la vraie volatilité  $f(Y_t)$ ,
  - la convexité de  $P_0$  est petite, i.e.  $x \mapsto P_0(t, x)$  a un profil plat.

Le vendeur de l'option touche  $P_0(0, X_0) + \tilde{P}_1(0, X_0)$  à la date  $t = 0$  ;  $\tilde{P}_1(0, X_0)$  est de signe quelconque, comme le montre (13.3.5). Le vendeur investit  $P_0(0, X_0)$  dans le portefeuille, répartis en  $a_0$  unités d'actif risqué et  $b_0$  unités monétaires ; après cet investissement initial, la gestion dynamique du portefeuille de réplication  $(a_t^{(1)}, b_t^{(1)})$  a un coût aléatoire

$$C_t^{(1)} = \int_0^t dC_s^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds.$$

---

<sup>3</sup>L'indice 1 se rapporte à la stratégie 1.

De plus, la richesse  $\tilde{P}_1(0, X_0)$  est placée - si elle est positive - ou empruntée - si elle est négative - à la banque.

**Effet de moyenne** Heuristiquement, l'ergodicité du processus  $Y$  traduit un effet de moyenne et permet d'identifier, dans la limite où  $\alpha$  est grand, l'intégrale

$$\int_0^t f(Y_s)^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$$

par

$$\int_0^t \bar{\sigma}^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$$

et par conséquent le coût  $C_t^{(1)}$ , qui est la différence des deux intégrales, est petit. Remarquons qu'il ne s'agit pas d'une application directe du théorème ergodique (13.3.1) puisque  $Y$  gouverne la dynamique de  $X$ . L'outil technique pour démontrer la convergence

$$\int_0^t f(Y_s)^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds \longrightarrow_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^t \bar{\sigma}^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$$

est le calcul stochastique. Nous allons en fait démontrer directement le résultat du second ordre correspondant :

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (B_t + M_t) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad ps$$

où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un processus à variation finie et  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale de moyenne nulle d'ordre 1 vis-à-vis de  $\alpha$ .

La preuve fait intervenir la fonction de classe  $C^2 \phi$ ; rappelons qu'elle vérifie  $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \langle f^2 \rangle$ , i.e.  $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \bar{\sigma}^2$ . Ainsi,  $(f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) ds = (\mathcal{L}_0 \phi)(Y_s) ds$ . Comme, par la formule d'Itô,

$$d\phi(Y_s) = \alpha (\mathcal{L}_0 \phi)(Y_s) ds + \nu \sqrt{2\alpha} \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s,$$

on a

$$(f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) ds = \frac{1}{\alpha} \left( d\phi(Y_s) - \nu \sqrt{2\alpha} \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s \right),$$

de sorte que

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s) - \nu \sqrt{2\alpha} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s \right\}.$$

Soit  $M$  la  $\mathbb{P}$ -martingale locale définie par

$$M_t = -\frac{\nu}{\sqrt{2}} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \phi'(Y_s) d\hat{Z}_s.$$

Ainsi,

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + \frac{1}{2\alpha} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s).$$

Cette écriture peut laisser croire que  $C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ; il n'en est rien car l'élément différentiel  $d\phi(Y_s)$  est un infiniment grand vis-à-vis de  $\alpha$ , d'ordre  $\sqrt{\alpha}$  contre l'intégrand  $X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)$  qui est une



fonction de  $X$  seulement. Précisément,

$$\begin{aligned} d\left(\phi(Y_s)X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) &= X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)d\phi(Y_s) \\ &\quad + \phi(Y_s)d\left(X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) \\ &\quad + d\left\langle\phi(Y), X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(\cdot, X)\right\rangle_s, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &d\left\langle\phi(Y), X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(\cdot, X)\right\rangle_s \\ &= \rho\nu\sqrt{2\alpha}f(Y_s)\phi'(Y_s)\left(2X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right)ds, \end{aligned}$$

vu que

$$d\phi(Y_s) = \dots ds + \nu\sqrt{2\alpha}\phi'(Y_s)d\hat{Z}_s$$

et

$$\begin{aligned} d\left(X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) &= \dots ds + \\ &\quad f(Y_s)\left(2X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right)dW_s. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} C_t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}M_t \\ &\quad - \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\int_0^t f(Y_s)\phi'(Y_s)\left(2X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right)ds \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t d\left(\phi(Y_s)X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \phi(Y_s)d\left(X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right). \end{aligned} \tag{13.3.9}$$

Le troisième terme vaut  $\frac{1}{2\alpha}\left(\phi(Y_t)X_t^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) - \phi(Y_0)X_0^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(0, X_0)\right)$  et est donc d'ordre  $\frac{1}{\alpha}$ ; le quatrième terme aussi car l'élément différentiel  $d\left(X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right)$  est d'ordre 1 vis-à-vis de  $\alpha$ . On pose

$$B_t = -\frac{\rho\nu}{\sqrt{2}}\int_0^t f(Y_s)\phi'(Y_s)\left(2X_s^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right)ds. \tag{13.3.10}$$

$B$  est un processus à variation finie<sup>4</sup>; il est *a priori* d'ordre 1 vis-à-vis de  $\alpha$ , sauf si  $\langle f\phi' \rangle = 0$  (effet de moyenne). Et on a bien

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(B_t + M_t) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad ps$$

Notons que (13.3.10) ne permet pas de décider du signe du biais  $B$ . Une bonne stratégie de couverture devrait, à l'ordre 1 au moins, ne rien coûter *en moyenne*. A cette fin, nous proposons ci-dessous de corriger légèrement le portefeuille Black-Scholes.

---

<sup>4</sup>  $B$  fait intervenir la combinaison  $2L_2 + L_3$ ; c'est donc un terme de corrélation pure.

## Stratégie 2 : une stratégie autofinancée en moyenne

Pour qu'une stratégie ne coûte rien en moyenne au premier ordre, il suffit de "faire apparaître" le terme

$$+ \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \int_0^t \left( 2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \quad (13.3.11)$$

qui viendrait s'ajouter aux quatre termes (13.3.9) composant  $C_t^{(1)}$ . En effet, combiné au terme  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}B_t$ , il génère un terme d'ordre  $\frac{1}{\alpha}$ , à cause de l'effet de moyenne décrit ci-dessus. On aurait alors l'approximation  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  pour le coût de gestion. Une idée naturelle, au vu de ce qui précède, serait de choisir

$$a_t = \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t),$$

à la place de  $\frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)$ . En fait,  $\tilde{P}_1$  est solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\tilde{P}_1 &= \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x). \end{aligned} \quad (13.3.12)$$

Le terme  $\frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right)$  ressemble beaucoup à ce qu'on voudrait voir apparaître, mais le terme  $-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x)$  est de trop : c'est en réalité un terme de prime de risque de volatilité pure, alors que, comme précisé plus haut, le biais  $B$  que l'on cherche à compenser est un terme de corrélation uniquement. Aussi est-il utile de définir la fonction  $\tilde{Q}_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  solution de l'EDP

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\tilde{Q}_1 = \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right) \quad (13.3.13)$$

avec la condition terminale

$$\tilde{Q}_1(T, x) = 0 \quad \forall x > 0$$

et de considérer le portefeuille défini par

$$\begin{cases} a_t^{(2)} = \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x}(t, X_t), \\ b_t^{(2)} = e^{-rt} \left( (P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right). \end{cases}$$

Ce portefeuille vaut  $(P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t)$  à la date  $t$ ; sa variation infinitésimale est

$$\begin{aligned} &d(P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) \\ &= a_t^{(2)} dX_t + \left( \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

tandis que la variation due au marché est

$$\begin{aligned} &a_t^{(2)} dX_t + b_t^{(2)} d(e^{rt}) \\ &= a_t^{(2)} dX_t + r \left( (P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

si bien que le coût infinitésimal vérifie

$$\begin{aligned} \frac{dC_t^{(2)}}{dt} &= \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) \\ &\quad - r \left( (P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right) \\ &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0 + \tilde{Q}_1)(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) \end{aligned}$$

Etant donné (13.3.13), et vu que  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$ , on a

$$\begin{aligned} dC_t^{(2)} &= dC_t^{(1)} \\ &\quad + \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \left( 2X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) + X_t^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, X_t) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}_1}{\partial x^2}(t, X_t) dt, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} C_t^{(2)} &= C_t^{(1)} \\ &\quad + \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \int_0^t \left( 2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) X_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}_1}{\partial x^2}(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme est d'ordre  $\frac{1}{\alpha}$  : ici l'effet de moyenne joue sur  $X_s^2 \frac{\partial^2 \tilde{Q}_1}{\partial x^2}(s, X_s)$  qui est déjà d'ordre  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ , comme  $\tilde{Q}_1$ . Le second terme est précisément le terme voulu (13.3.11). Finalement,

$$C_t^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Notons que si l'on suit cette stratégie de gestion, les valeurs du portefeuille et de l'option diffèrent dès l'ordre  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ , car cette différence est précisément  $\tilde{Q}_1 - \tilde{P}_1$ . Si l'on souhaite que les valeurs du portefeuille et de l'option ne diffèrent qu'à l'ordre  $\frac{1}{\alpha}$ , il suffit d'adopter la stratégie suivante.

### Stratégie 3 : un portefeuille qui colle au prix de l'option

On choisit

$$\begin{cases} a_t^{(3)} = \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t), \\ b_t^{(3)} = e^{-rt} \left( (P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right). \end{cases}$$

Ce portefeuille vaut  $(P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t)$  à la date  $t$  ; sa variation infinitésimale est

$$\begin{aligned} &d(P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t) \\ &= a_t^{(3)} dX_t + \left( \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

tandis que la variation due au marché est

$$\begin{aligned} & a_t^{(3)} dX_t + b_t^{(3)} d(e^{rt}) \\ = & a_t^{(3)} dX_t + r \left( (P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

si bien que le coût infinitésimal vérifie

$$\begin{aligned} \frac{dC_t^{(3)}}{dt} &= \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) \\ &\quad - r \left( (P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t) - X_t \frac{\partial (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x}(t, X_t) \right) \\ &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0 + \tilde{P}_1)(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 (P_0 + \tilde{P}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) \end{aligned}$$

Au vu de (13.3.12), et comme  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$ , on a

$$\begin{aligned} dC_t^{(3)} &= dC_t^{(2)} \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}^2) X_t^2 \frac{\partial^2 (\tilde{P}_1 - \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(t, X_t) dt, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} C_t^{(3)} &= C_t^{(2)} \\ &\quad - \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}^2) X_s^2 \frac{\partial^2 (\tilde{P}_1 - \tilde{Q}_1)}{\partial x^2}(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

Le dernier terme est d'ordre  $\frac{1}{\alpha}$ . Le deuxième terme, d'ordre  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ , est le prix à fournir pour retrouver, à l'ordre  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  du moins, le prix de l'option à partir du coût de la stratégie autofinancée en moyenne. C'est donc le prix que le vendeur de l'option attache à l'incomplétude du marché. Celle-ci est due au caractère stochastique de la volatilité. Le vendeur subit donc un risque de volatilité et le quantifie via  $-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle \Lambda \phi' \rangle \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) ds$  qui est un terme de risque de volatilité uniquement.

## 13.4 L'approche martingale

### 13.4.1 Démarche

On souhaite retrouver le prix corrigé à l'ordre 1 par un raisonnement purement probabiliste. Autrement dit, on va regarder ici le prix corrigé, non plus comme l'approximation d'une solution d'une EDP, mais comme l'approximation d'une martingale sous la probabilité de pricing (à des termes d'ordre  $\varepsilon$  près).

Nous nous plaçons sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni de la filtration  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, Z_s, 0 \leq s \leq t)$ , avec  $\Omega = C^0([0, T], \mathbb{R}^2)$  l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{F}$  sa tribu borélienne et

$\mathbb{P}$  la mesure de Wiener sur cette tribu. On suppose l'existence d'une probabilité  $\mathbb{P}^*$  équivalente à  $\mathbb{P}$  telle que le prix de l'option européenne de payoff  $h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*)$  soit donné par

$$V_t = \mathbb{E}^* \left[ e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (13.4.1)$$

Soit  $D_t = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \mid_{\mathcal{F}_t}$ ;  $D$  est une martingale uniformément intégrable par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ , strictement positive. Comme  $(\mathcal{F}_t)$  est l'augmentation habituelle de la filtration canonique du mouvement brownien  $(W, Z)$ , le théorème de représentation des martingales nous assure l'existence de processus  $\theta^W$  et  $\theta^Z$  adaptés par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$  tels que

$$\forall t \in [0, T[, \quad \int_0^t \left( (\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds < \infty \quad ps$$

et tels que pour tout  $t \in [0, T[$

$$D_t = \exp \left( - \int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left( (\theta_s^W)^2 + (\theta_s^Z)^2 \right) ds \right)$$

(ceci prouve notamment que  $D$  est continue). On définit alors

$$\begin{cases} W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds, \\ Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds. \end{cases}$$

D'après le théorème de Girsanov,  $W^*$  et  $Z^*$  sont deux  $\mathbb{P}^*$ -mouvements browniens indépendants. En termes de  $(W^*, Z^*)$ , la dynamique de  $X$  s'écrit :

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t \\ &= \mu X_t dt + f(Y_t) X_t (dW_t^* - \theta_t^W dt) \\ &= (\mu - f(Y_t) \theta_t^W) X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t^*. \end{aligned}$$

En supposant que  $X_T \in L^2(\mathbb{P}^*)$  et en faisant  $h = id$  dans (13.4.1), on voit que le processus  $(e^{-rt} X_t)$  est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale, ce qui implique que

$$\mu - f(Y_t) \theta_t^W = r,$$

i.e.

$$\theta_t^W = \frac{\mu - r}{f(Y_t)}.$$

Dans l'univers de pricing, la dynamique de  $Y$  s'écrit :

$$\begin{aligned} dY_t &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \left( \rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t \right) \\ &= \alpha(m - Y_t) dt + \beta \rho \left( dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right) + \beta \sqrt{1 - \rho^2} (dZ_t^* - \theta_t^Z dt) \\ &= \left( \alpha(m - Y_t) - \beta \left( \rho \frac{\mu - r}{f(Y_t)} + \sqrt{1 - \rho^2} \theta_t^Z \right) \right) dt \\ &\quad + \beta \left( \rho dW_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^* \right). \end{aligned}$$

Si on pose

$$\hat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^*,$$

on définit un  $\mathbb{P}^*$ -mouvement brownien et on peut réécrire la dynamique du marché sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = \{\alpha(m - Y_t) - \beta\Lambda_t\} dt + \beta d\tilde{Z}_t^* \end{cases} \quad (13.4.2)$$

avec

$$\Lambda_t = \rho \frac{\mu - r}{f(Y_t)} + \sqrt{1 - \rho^2} \theta_t^Z.$$

Dans toute la suite, on suppose que le processus  $(\Lambda_t)$  peut se mettre sous la forme  $\Lambda_t = \Lambda(Y_t)$  où  $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction *continue bornée*, et on se place dans l'univers de pricing.

### 13.4.2 Notations

Soit  $\mathcal{L}_{OU*}$  le générateur infinitésimal du processus  $Y$  dans l'univers de pricing, i.e. l'opérateur qui à toute fonction  $g$  convenable associe la fonction  $\mathcal{L}_{OU*}g$  définie par

$$(\mathcal{L}_{OU*}g)(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{E}^*[g(Y_t) \mid Y_0 = y] - g(y)}{t}$$

On a d'après (13.4.2)

$$\mathcal{L}_{OU*} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{0*}$$

où

$$\mathcal{L}_{0*} = \nu^2 \frac{d^2}{dy^2} + \left( m - y - \nu\sqrt{2\varepsilon}\Lambda(y) \right) \frac{d}{dy}.$$

Si on pose  $s(y) = m - y - \nu\sqrt{2\varepsilon}\Lambda(y)$ , on a donc

$$\mathcal{L}_{0*} = \nu^2 \frac{d^2}{dy^2} + s(y) \frac{d}{dy}.$$

L'hypothèse de bornitude sur la fonction  $\Lambda$  assure l'existence d'une probabilité stationnaire  $\Phi_*(y) dy$  pour  $Y$  sous  $\mathbb{P}^*$  qui est l'unique densité de probabilité solution de l'équation  $\mathcal{L}_{0*}^* \Phi_* = 0$ , où  $\mathcal{L}_{0*}^*$  désigne l'adjoint de  $\mathcal{L}_{0*}$ ; en effet, on introduit une fonction  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\nu^2 \frac{d\xi}{dy} - s(y)\xi = 0$ , par exemple

$$\xi(y) = \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right)$$

où  $\tilde{\Lambda}$  est une primitive quelconque de  $\Lambda$ . Il est alors facile de vérifier que

$$\mathcal{L}_{0*} = \frac{\nu^2}{\xi} \frac{d}{dy} \left( \xi \frac{d}{dy} \right)$$

d'où on tire

$$\mathcal{L}_{0*}^* = \nu^2 \frac{d}{dy} \left( \xi \frac{d}{dy} \left( \frac{\cdot}{\xi} \right) \right)$$

Il est clair que  $\xi$  est une solution de  $\mathcal{L}_{0*}^* \xi = 0$ , intégrable car  $\Lambda$  est bornée, et les seules solutions intégrables de cette équation sont les multiples de  $\xi$ , si bien que

$$\Phi_*(y) = J_* \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right)$$

où

$$J_* = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) dy \right)^{-1}.$$

On voit que  $\Phi_*$  est une correction d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  par rapport à  $\Phi$ . On définit alors :

- la moyenne d'une fonction contre cette probabilité stationnaire :

$$\langle g \rangle_* = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi_*(y) dy$$

- la volatilité de pricing moyenne  $\bar{\sigma}_*$  :

$$\bar{\sigma}_*^2 = \langle f^2 \rangle_*$$

- la solution  $P_0^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  de l'EDP

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) P_0^* = 0, \\ \forall x > 0, P_0^*(T, x) = h(x) \end{cases} \quad (13.4.3)$$

- la fonction  $\phi_*$  solution de  $\mathcal{L}_{0*} \phi_* = f^2 - \langle f^2 \rangle_*$ .
- le terme de corrélation

$$V_3^* = \frac{\rho \nu \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f \phi'_* \rangle_*$$

- le terme de source

$$H^*(t, x) = V_3^* \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(t, x) \right)$$

- la solution  $Q_1^* : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  de l'EDP

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) Q_1^* = H^*, \\ \forall x > 0, Q_1^*(T, x) = 0 \end{cases} \quad (13.4.4)$$

- la fonction  $Q^*(t, x) = P_0^*(t, x) + Q_1^*(t, x)$
- le processus stochastique  $N_t = e^{-rt} Q^*(t, X_t)$ .

### 13.4.3 Le prix corrigé comme martingale approchée

Nous allons montrer qu'à des termes d'ordre  $\varepsilon$  près,  $N$  est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale de valeur terminale  $e^{-rT} h(X_T)$ . Rappelons que la valeur  $V_t$  de l'option, définie par (13.4.1), est complètement caractérisée par le fait que  $(e^{-rt} V_t)$  est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale de valeur terminale  $e^{-rT} h(X_T)$ . On aura ainsi montré que

$$V_t = Q^*(t, X_t) + O(\varepsilon),$$

ce qui permettra d'interpréter  $Q^*(t, X_t)$  comme le prix de l'option au premier ordre.

Il est facile de voir que  $N_T = e^{-rT} h(X_T)$ . Ce qui est moins facile, c'est de montrer que  $N$  est une  $\mathbb{P}^*$ -martingale, à  $O(\varepsilon)$  près. On utilise pour cela la formule d'Itô, en supposant  $Q$  suffisamment régulière,

et les définitions de la section précédente :

$$\begin{aligned}
& e^{rt} dN_t \\
&= dQ^*(t, X_t) - rQ^*(t, X_t) dt \\
&= \left( \frac{\partial Q^*}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) - r \left( Q^*(t, X_t) - X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) \right) \right) dt \\
&\quad + f(Y_t) X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) dW_t^* \\
&= \left( \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) Q^*(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt \\
&\quad + f(Y_t) X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) dW_t^* \\
&= \left( H^*(t, X_t) + \frac{1}{2} (f(Y_t)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt + f(Y_t) X_t \frac{\partial Q^*}{\partial x}(t, X_t) dW_t^*.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de voir que

$$\int_0^t \left( H^*(s, X_s) + \frac{1}{2} (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds = \mathbb{P}^*\text{-martingale} + O(\varepsilon).$$

Comme

$$d\phi_*(Y_s) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{L}_{0*} \phi_*)(Y_s) ds + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^*,$$

on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^t (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t (\mathcal{L}_{0*} \phi_*)(Y_s) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \left( \varepsilon d\phi_*(Y_s) - \nu\sqrt{2\varepsilon} \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^* \right) \\
&= \mathbb{P}^*\text{-martingale} + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s)
\end{aligned}$$

(à supposer que la  $\mathbb{P}^*$ -martingale locale  $-\frac{\nu\sqrt{2\varepsilon}}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^*$  soit effectivement une vraie  $\mathbb{P}^*$ -martingale). Le piège dans lequel il ne faut pas tomber serait de croire que  $\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s) = O(\varepsilon)$ . Certes  $\phi_*(Y_s) = O(1)$ , tout comme  $X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)$ . Mais les variations infinitésimales de  $Y_s$ , et par conséquent celles de  $\phi_*(Y_s)$ , sont infiniment grandes lorsque  $\varepsilon$  devient infiniment petit, d'ordre  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ . A moins que les deux browniens  $W^*$  et  $\hat{Z}^*$  gouvernant respectivement  $X$  et  $Y$  soient indépendants, cela génère un crochet infiniment grand entre l'intégrant et le processus contre lequel on l'intègre :

$$\begin{aligned}
& d \left\langle \phi_*(Y), X^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(\cdot, X) \right\rangle_s \\
&= \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left( 2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds
\end{aligned}$$

(en effet,

$$d\phi_*(Y_s) = \dots ds + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \phi'_*(Y_s) d\hat{Z}_s^*$$



et

$$\begin{aligned} d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s)\right) &= \dots ds \\ &+ f(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right) dW_s^*. \end{aligned}$$

De ce fait, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &\int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s) \\ &= \int_0^t d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) \phi_*(Y_s)\right) \\ &\quad - \int_0^t \phi_*(Y_s) d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)\right) \\ &\quad - \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds \\ &= O(1) - \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds \end{aligned}$$

Pour voir que la première intégrale est un  $O(1)$ , on peut soit l'écrire  $X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t) \phi_*(Y_t) - X_0^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(0, X_0) \phi_*(Y_0)$ , soit remarquer que la présence de  $Y$  dans l'élément différentiel est sans conséquence car l'intégrand - le processus identiquement égal à 1 - est à variation finie et génère donc un crochet nul avec l'élément différentiel. Pour la deuxième intégrale, il suffit de remarquer que  $Y$  est absent de l'élément différentiel et que l'intégrand  $\phi_*(Y_s)$  est un  $O(1)$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(H^*(s, X_s) + \frac{1}{2} (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)\right) ds \\ &= \mathbb{P}^*\text{-martingale} + O(\varepsilon) \\ &\quad - \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds \\ &\quad + \int_0^t H^*(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\int_0^t H^*(s, X_s) ds - \rho\nu\sqrt{2\varepsilon} \int_0^t f(Y_s) \phi'_*(Y_s) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds \\ &= -\frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \int_0^t (f(Y_s) \phi'_*(Y_s) - \langle f \phi'_* \rangle_*) \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds \\ &= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \{O(\sqrt{\varepsilon})\} \quad (\text{effet de moyenne, ou théorème ergodique}) \\ &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\int_0^t \left(H^*(s, X_s) + \frac{1}{2} (f(Y_s)^2 - \bar{\sigma}_*^2) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)\right) ds = \mathbb{P}^*\text{-martingale} + O(\varepsilon),$$

ce qu'il fallait démontrer.

### 13.4.4 Retrouver le prix $P_0 + \tilde{P}_1$

Le prix  $P_0 + \tilde{P}_1$  obtenu par la méthode EDP est la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0 + \tilde{P}_1) = H(t, x), \\ \forall x > 0, (P_0 + \tilde{P}_1)(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (13.4.5)$$

Le prix  $P_0^* + Q_1^*$  obtenu par la méthode martingale est, lui, la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) (P_0^* + Q_1^*) = H^*(t, x), \\ \forall x > 0, (P_0^* + Q_1^*)(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (13.4.6)$$

Les termes de sources ont les expressions

$$H(t, x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x)$$

où  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$  et  $P_0(T, x) = h(x)$ , et

$$H^*(t, x) = V_3^* \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3} \right)(t, x)$$

où  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)P_0^* = 0$  et  $P_0^*(T, x) = h(x)$ . Nous allons montrer qu'au premier ordre, les deux prix coïncident, i.e.

$$P_0^* + Q_1^* = P_0 + \tilde{P}_1 + O(\varepsilon).$$

Pour cela, il suffit de montrer que, à  $O(\varepsilon)$  près,  $P_0^* + Q_1^*$  est solution du problème (13.4.5). Les conditions terminales des deux problèmes (13.4.5) et (13.4.6) étant identiques, il suffit de prouver que

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) (P_0^* + Q_1^*) = H(t, x) + O(\varepsilon).$$

Pour ce faire, nous donnons des développements limités en  $\sqrt{\varepsilon}$  de  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)$  et  $H^*(t, x)$ .

#### Développement limité de $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)$

Comme

$$\begin{aligned} J_*^{-1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) \exp \left( -\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) + O(\varepsilon) \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) dy - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Lambda}(y) \exp \left( -\frac{(m-y)^2}{2\nu^2} \right) dy + O(\varepsilon) \\ &= \sqrt{2\pi}\nu \left( 1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \langle \tilde{\Lambda} \rangle + O(\varepsilon) \right), \end{aligned}$$

on a

$$J_* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu} \left( 1 + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \langle \tilde{\Lambda} \rangle + O(\varepsilon) \right)$$

puis

$$\begin{aligned}
 \frac{\Phi_*}{\Phi}(y) &= J_* \sqrt{2\pi} \nu \exp \left( -\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) \right) \\
 &= \left( 1 + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \langle \tilde{\Lambda} \rangle + O(\varepsilon) \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \tilde{\Lambda}(y) + O(\varepsilon) \right) \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left( \tilde{\Lambda}(y) - \langle \tilde{\Lambda} \rangle \right) + O(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{13.4.7}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \langle g \rangle_* &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi_*(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi(y) \frac{\Phi_*}{\Phi}(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \Phi(y) - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Lambda}(y) - \langle \tilde{\Lambda} \rangle \right) g(y) \Phi(y) + O(\varepsilon) \\
 &= \langle g \rangle - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle g \left( \tilde{\Lambda} - \langle \tilde{\Lambda} \rangle \right) \right\rangle + O(\varepsilon) \\
 &= \langle g \rangle - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle \tilde{\Lambda} (g - \langle g \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{13.4.8}$$

puis

$$\begin{aligned}
 \overline{\sigma}_*^2 &= \langle f^2 \rangle_* \\
 &= \langle f^2 \rangle - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle \tilde{\Lambda} (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon) \\
 &= \overline{\sigma}^2 - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\nu} \left\langle \tilde{\Lambda} (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle + O(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Comme

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\nu^2}{\Phi} \frac{d}{dy} \left( \Phi \frac{d}{dy} \right),$$

on a

$$\begin{aligned}
 \left\langle \tilde{\Lambda} (f^2 - \langle f^2 \rangle) \right\rangle &= \left\langle \tilde{\Lambda} (\mathcal{L}_0 \phi) \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\nu^2 \tilde{\Lambda}}{\Phi} \frac{d}{dy} (\Phi \phi') \right\rangle \\
 &= \nu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Lambda}(y) (\Phi \phi')'(y) dy \\
 &= -\nu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Lambda}(y) (\Phi \phi')(y) dy \\
 &= -\nu^2 \langle \tilde{\Lambda} \phi' \rangle
 \end{aligned}$$

où on a intégré par parties. Par conséquent,

$$\overline{\sigma}_*^2 = \overline{\sigma}^2 - \nu \sqrt{2\varepsilon} \langle \tilde{\Lambda} \phi' \rangle + O(\varepsilon),$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*) &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) + \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_*^2 - \bar{\sigma}^2)x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) - \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + O(\varepsilon).\end{aligned}\quad (13.4.9)$$

### Développement limité de $H^*(t, x)$

D'après (13.4.8), on a

$$\begin{aligned}V_3^* &= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f\phi'_* \rangle_* \\ &= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f\phi' \rangle + O(\sqrt{\varepsilon}).\end{aligned}$$

Mais il est facile de voir en utilisant (13.4.7) et (13.4.8) que

$$\langle f\phi'_* \rangle = \langle f\phi' \rangle + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

d'où

$$V_3^* = \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f\phi' \rangle + O(\varepsilon) = V_3 + O(\varepsilon).$$

Par ailleurs, la quantité  $\Pi_0 = P_0^* - P_0$  vérifie l'EDP

$$\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})\Pi_0 = -\frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

avec une condition terminale nulle, donc  $\Pi_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$ , i.e.  $P_0^* = P_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}H^*(t, x) &= V_3^* \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3} \right) (t, x) \\ &= (V_3 + O(\varepsilon)) \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} (t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} (t, x) + O(\sqrt{\varepsilon}) \right) \\ &= V_3 \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} (t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} (t, x) \right) + O(\varepsilon)\end{aligned}\quad (13.4.10)$$

### Conclusion

En mettant bout à bout (13.4.9) et (13.4.10), on obtient

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})(P_0^* + Q_1^*) \\ &= \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}_*)(P_0^* + Q_1^*) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 (P_0^* + Q_1^*)}{\partial x^2} + O(\varepsilon) \\ &= H^*(t, x) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 (P_0^* + Q_1^*)}{\partial x^2} + O(\varepsilon) \\ &= V_3 \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} (t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} (t, x) \right) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 (P_0^* + Q_1^*)}{\partial x^2} + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Mais  $P_0^* = P_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$  et  $Q_1^* = O(\sqrt{\varepsilon})$  donc

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})(P_0^* + Q_1^*) \\ &= V_3 \left( 2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} (t, x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} (t, x) \right) + \frac{\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle \Lambda\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} (t, x) + O(\varepsilon) \\ &= \left( V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} \right) (t, x) + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

## 13.5 Calibration

Le modèle introduit beaucoup de paramètres  $(\alpha, \beta, m, \rho, \gamma, f)$  mais seuls trois suffisent à déterminer le prix corrigé et les stratégies de couverture étudiées plus haut :  $\bar{\sigma}$ ,  $V_2$  et  $V_3$ . Ils sont bien sûr fonctions de  $(\alpha, \beta, m, \rho, \gamma, f)$ . Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR [1] assurent que tout processus ergodique  $Y$  et toute fonction  $f \in L^2_\pi$  mènent à l'existence des trois paramètres  $\bar{\sigma}$ ,  $V_2$  et  $V_3$ . En pratique, il est essentiel de pouvoir estimer ces trois paramètres. On pourrait chercher les  $\bar{\sigma}$ ,  $V_2$  et  $V_3$  tels que le prix corrigé

$$\left(P_0 + \tilde{P}_1\right)(t, x) = P_0(t, x) - (T - t) \left( V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t, x) \right)$$

soit “le plus proche possible” des prix observés, par exemple pour une option d'achat classique. On préférera travailler avec les volatilités implicites, qui ne sont qu'une manière de représenter les prix à travers le prisme Black-Scholes.

### 13.5.1 Le prix corrigé de l'option d'achat

Dans ce paragraphe, on étudie le cas particulier du call d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  :  $h(x) = (x - K)_+$ . On admet qu'on a le droit d'appliquer les résultats précédents, malgré le fait que  $h$  n'est pas de classe  $C^2$ . On souhaite donner le prix corrigé  $C_0 + \tilde{C}_1$  du call.  $C_0$  est le prix du call Black-Scholes pour la volatilité  $\bar{\sigma}$ . Par conséquent,

$$C_0(t, x) = C_{BS}(t, x; K, T; \bar{\sigma}) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \quad (13.5.1)$$

où

$$\begin{cases} d_+ = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}\sqrt{T-t}, \\ d_- = \frac{\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}\sqrt{T-t}, \end{cases} \quad (13.5.2)$$

et  $N(d) = \int_{-\infty}^d g(u) du$ , avec  $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_\pm}{\partial x}(t, x) &= \frac{1}{x\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} > 0 \\ \frac{\partial C_0}{\partial x}(t, x) &= N(d_+) > 0 \\ \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{x\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} g(d_+) > 0 \\ \frac{\partial^3 C_0}{\partial x^3}(t, x) &= -\frac{1}{x^2\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} g(d_+) + \frac{1}{x^2\bar{\sigma}^2(T-t)} g'(d_+) \\ &= -\frac{g(d_+)}{x^2\bar{\sigma}^2(T-t)} \left( d_+ + \bar{\sigma}\sqrt{T-t} \right). \end{aligned}$$

Le prix corrigé au premier ordre de l'option d'achat est donc

$$\begin{aligned} \left(C_0 + \tilde{C}_1\right)(t, x) &= xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \\ &\quad - \frac{xg(d_+)}{\bar{\sigma}^2} \left( (V_2 - V_3)\bar{\sigma}\sqrt{T-t} - V_3d_+ \right) \end{aligned}$$

### 13.5.2 Surface de volatilité implicite

On cherche à développer la volatilité implicite sous la forme

$$I(t, x) = I_0(t, x) + \sqrt{\varepsilon} I_1(t, x) + \varepsilon I_2(t, x) + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} I_3(t, x) + \dots$$

et on souhaite calculer les deux premiers coefficients  $I_0$  et  $I_1$ . Par définition de la volatilité implicite,

$$C_{BS}(t, x; K, T; I(t, x)) = C^{obs}.$$

Si nous croyons à notre modèle de marché à volatilité stochastique, on a

$$\begin{aligned} C_{BS}(t, x; K, T; I(t, x)) &= C_0(t, x) + \sqrt{\varepsilon} C_1(t, x) \\ &\quad + \varepsilon C_2(t, x) + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} C_3(t, x) + \dots \end{aligned}$$

On développe le terme de gauche :

$$\begin{aligned} C_{BS}(t, x; K, T; I(t, x)) &= C_{BS}(t, x; K, T; I_0(t, x)) \\ &\quad + \sqrt{\varepsilon} I_1(t, x) \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x; K, T; I_0(t, x)) + \dots \end{aligned}$$

L'identification des termes donne

$$I_0(t, x) = \bar{\sigma}$$

et

$$I_1(t, x) = \frac{C_1(t, x)}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x; K, T; \bar{\sigma})}.$$

Il est agréable de travailler avec la quantité  $\tilde{I}_1 = \sqrt{\varepsilon} I_1$ . Comme

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t, x; K, T; \bar{\sigma}) = x\sqrt{T-t}g(d_+),$$

on a

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(t, x) &= \frac{\tilde{C}_1(t, x)}{x\sqrt{T-t}g(d_+)} \\ &= -\frac{\frac{xg(d_+)}{\bar{\sigma}^2}((V_2 - V_3)\bar{\sigma}\sqrt{T-t} - V_3d_+)}{x\sqrt{T-t}g(d_+)} \\ &= -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left( (V_2 - V_3) - V_3 \frac{d_+}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} \right). \end{aligned}$$

Le modèle à volatilité stochastique ergodique génère donc un smile :

$$I(t, x) = \bar{\sigma} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left( (V_2 - V_3) - V_3 \frac{d_+}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}} \right) + O(\varepsilon).$$

En explicitant  $d_+$ , on obtient

$$I(t, x) = \bar{\sigma} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2 - V_3 \left( \frac{r}{\bar{\sigma}^2} + \frac{3}{2} \right) + V_3 \frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)}{\bar{\sigma}^2(T-t)} \right) + O(\varepsilon).$$

Etudier la surface de volatilité implicite, c'est s'intéresser à la dépendance en  $(K, T)$  de cette expression. Elle est du type

$$(K, T) \mapsto a \frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)}{T-t} + b + O(\varepsilon), \quad (13.5.3)$$

avec

$$\begin{cases} a = -\frac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \\ b = \bar{\sigma} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left( V_2 - V_3 \left( \frac{r}{\bar{\sigma}^2} + \frac{3}{2} \right) \right) \end{cases} \quad (13.5.4)$$

$V_2$  et  $V_3$  sont petits, d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ , donc  $a$  est petit et  $b$  est proche de  $\bar{\sigma}$ .

En pratique, on observe la “surface” de volatilité implicite empirique (on ne dispose que de quelques points en réalité), on cherche  $a$  et  $b$  de sorte que (13.5.3) colle au mieux à la surface de volatilité implicite empirique et on inverse le système (13.5.4) :

$$\begin{cases} V_3 = -a\bar{\sigma}^3 \\ V_2 = \bar{\sigma} \left( \bar{\sigma} - b - a \left( r + \frac{3}{2}\bar{\sigma}^2 \right) \right) \end{cases}$$

Il faut avoir auparavant mesuré la volatilité moyenne  $\bar{\sigma}$ , par exemple en étudiant statistiquement la variance des rendements empiriques  $\frac{\Delta X}{X}$ .

On note que si on s'arrête au premier ordre, la volatilité implicite prévue par le modèle à volatilité stochastique est une fonction monotone de  $K$ , proportionnelle à  $\ln(K)$ . L'approximation au premier ordre ne permet pas de générer un sourire, i.e. une courbe convexe décroissante puis croissante. La volatilité implicite (13.5.3) est convexe en  $K$  si et seulement si  $a < 0$ , c'est-à-dire  $V_3 > 0$ . Dans ce cas, l'approximation au premier ordre de la volatilité implicite théorique est une fonction convexe décroissante qui tend vers l'infini quand  $K$  tend vers 0. Pour voir apparaître un sourire, il faut pousser le développement limité au second ordre. Jean-Pierre FOUQUE, George PAPANICOLAOU et K. Ronnie SIRCAR assurent que le terme d'ordre  $\varepsilon$  ne dépend de  $K$  qu'à travers la quantité  $\left( \ln \left( \frac{K}{x} \right) \right)^2$ .

## 13.6 Simulations numériques

L'hypothèse  $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$  permet d'obtenir un développement limité (13.5.3) du smile ; elle permet d'expliquer des smiles de faible amplitude, de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ . Or, on observe souvent des amplitudes empiriques bien plus importantes. On doit alors considérer des valeurs de  $\alpha$  de l'ordre de  $\frac{1}{T-t}$ . On ne peut alors plus utiliser le développement limite (13.5.3) et on ne dispose évidemment pas de formule fermée pour le prix du call. On va donc effectuer des simulations numériques. On cherche à évaluer numériquement des prix d'options et des volatilités implicites, soit par discrétisation de l'EDP d'évaluation, soit par des méthodes de Monte-Carlo.

### 13.6.1 Schémas numériques pour l'EDP d'évaluation

#### Méthode

On rappelle l'EDP vérifiée par le prix  $P(t, x, y)$  de l'option européenne de maturité  $T$  et de payoff  $H = h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} (X_t)^2 f(Y_t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} X_t f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ + r \left( X_t \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \frac{1}{\varepsilon} (m - Y_t) \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

avec la condition terminale  $P(T, x, y) = h(x)$ .

Si on pose  $Q(t, x, y) = P(t, e^x, y)$ , alors la fonction  $Q$  est solution de l'EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f(y)^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left( r - \frac{f(y)^2}{2} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} - rQ + \frac{1}{\varepsilon} (m - y) \frac{\partial Q}{\partial y} \\ + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(y) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \Lambda(t, e^x, y) \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

avec la condition terminale  $Q(T, x, y) = h(e^x)$ .

On suppose dans la suite que  $\Lambda = 0$ . Quitte à remplacer  $f(y)$  par  $f(y + m)$ , on peut choisir  $m = 0$ ;  $y$  est alors centrée autour de 0, et l'EDP s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f(y)^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(r - \frac{f(y)^2}{2}\right) \frac{\partial Q}{\partial x} - rQ \\ - \frac{1}{\varepsilon} y \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \rho \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(y) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

On localise dans les deux directions d'espace : on cherche une approximation de  $Q(t, x, y)$  pour  $x \in ]-l_x, l_x[$  et  $y \in ]-l_y, l_y[$ . Il s'agit de choisir convenablement  $l_x$  et  $l_y$ . On effectue ensuite la discrétisation en espace. On considère  $N_x$  points répartis uniformément sur  $]-l_x, l_x[$  et  $N_y$  points répartis uniformément sur  $]-l_y, l_y[$ . On appelle  $h_x = \frac{2l_x}{N_x+1}$  et  $h_y = \frac{2l_y}{N_y+1}$  les pas de discrétisation spatiale et on pose

$$\begin{cases} x_i = -l_x + ih_x \\ y_j = -l_y + jh_y \end{cases}$$

pour  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, N_x + 1\} \times \{0, 1, \dots, N_y + 1\}$ . Alors  $x_0 = -l_x$ ,  $x_{N_x+1} = l_x$ . Pour  $(i, j) \in \{1, \dots, N_x\} \times \{1, \dots, N_y\}$ , on pose  $[i, j] = (i-1)N_y + j$ . On cherche une famille  $u(t)$  de vecteurs de taille  $N_x \times N_y$  telle que  $u_{[i,j]}(t) \approx Q(t, x_i, y_j)$ . Pour ce faire, on utilise des dérivées discrétisées centrées et des dérivées secondes discrétisées, en utilisant les correspondances :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} & \quad \frac{u_{[i+1,j]} - u_{[i-1,j]}}{2h_x} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} & \quad \frac{u_{[i+1,j]} - 2u_{[i,j]} + u_{[i-1,j]}}{h_x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} & \quad \frac{u_{[i,j+1]} - u_{[i,j-1]}}{2h_y} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} & \quad \frac{u_{[i,j+1]} - 2u_{[i,j]} + u_{[i,j-1]}}{h_y^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} & \quad \frac{u_{[i+1,j+1]} - u_{[i-1,j+1]} - u_{[i+1,j-1]} + u_{[i-1,j-1]}}{4h_x h_y} \end{aligned}$$

L'opérateur spatial discrétisé est alors une matrice  $A$  de taille  $N_x N_y \times N_x N_y$  tridiagonale par blocs, chacun des blocs des trois diagonales étant lui-même tridiagonal. Plus précisément, si on utilise des conditions au bord de Dirichlet nulles, on peut décomposer la matrice<sup>5</sup>  $A = A^D$  en  $N_x^2$  blocs  $(A_{i,k})_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq k \leq N_x}$  de taille  $N_y \times N_y$  :

$$A = A^D = \begin{pmatrix} A_{1,1}^D & A_{1,2}^D & \cdots & A_{1,N_x}^D \\ A_{2,1}^D & A_{2,2}^D & & A_{2,N_x}^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N_x,1}^D & A_{N_x,2}^D & \cdots & A_{N_x,N_x}^D \end{pmatrix}$$

Si  $|i - k| > 1$ ,  $A_{i,k}^D$  est la matrice nulle.  $A_{i,i-1}^D$  est tridiagonale et a pour coefficients

$$\begin{aligned} (A_{i,i-1}^D)_{j,j-1} &= \frac{\rho\nu\sqrt{2}f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon}h_x h_y}, \\ (A_{i,i-1}^D)_{j,j} &= \frac{f(y_j)^2}{2h_x^2} - \frac{1}{2h_x} \left(r - \frac{f(y_j)^2}{2}\right), \\ (A_{i,i-1}^D)_{j,j+1} &= -\frac{\rho\nu\sqrt{2}f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon}h_x h_y}. \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>  $D$  pour Dirichlet



$A_{i,i}^D$  est tridiagonale et a pour coefficients

$$\begin{aligned}(A_{i,i}^D)_{j,j-1} &= \frac{y_j}{2\varepsilon h_y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon h_y^2}, \\ (A_{i,i}^D)_{j,j} &= -\frac{f(y_j)^2}{h_x^2} - r - \frac{2\nu^2}{\varepsilon h_y^2}, \\ (A_{i,i}^D)_{j,j+1} &= -\frac{y_j}{2\varepsilon h_y} + \frac{\nu^2}{\varepsilon h_y^2}.\end{aligned}$$

Enfin,  $A_{i,i+1}^D$  est tridiagonale et a pour coefficients

$$\begin{aligned}(A_{i,i+1}^D)_{j,j-1} &= -\frac{\rho\nu\sqrt{2}f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon}h_xh_y}, \\ (A_{i,i+1}^D)_{j,j} &= \frac{f(y_j)^2}{2h_x^2} + \frac{1}{2h_x}\left(r - \frac{f(y_j)^2}{2}\right), \\ (A_{i,i+1}^D)_{j,j+1} &= \frac{\rho\nu\sqrt{2}f(y_j)}{4\sqrt{\varepsilon}h_xh_y}.\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de discrétiser en temps. On se donne  $\theta \in [0, 1]$ , un entier  $M \geq 1$ , un pas temporel  $k = T/M$  et, en s'inspirant de (13.3.13), on cherche une famille de  $M + 1$  vecteurs  $u^n$ ,  $0 \leq n \leq M$ , de taille  $N_x N_y$ , telle que  $u_{[i,j]}^M = h(e^{x_i})$  et, pour  $0 \leq n \leq M - 1$ ,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + \theta A u^n + (1 - \theta) A u^{n+1} = 0,$$

ce qui s'écrit

$$B u^n = C u^{n+1}$$

avec

$$B = I - k\theta A, \quad C = I + k(1 - \theta)A.$$

Numériquement, on inverse la matrice  $B$  par une méthode itérative. Ceci ne peut se faire<sup>6</sup> que si  $k\theta \|A\| < 1$ . Il faudra donc prendre un pas de discrétisation temporelle suffisamment petit.

Dans le cas de conditions de Neumann nulles, la matrice  $A = A^N$  s'écrit<sup>7</sup>

$$A = A^N = \begin{pmatrix} A_{1,0}^N + A_{1,1}^N & A_{1,2}^N & \cdots & A_{1,N_x}^N \\ A_{2,1}^N & A_{2,2}^N & & A_{2,N_x}^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N_x,1}^N & A_{N_x,2}^N & \cdots & A_{N_x,N_x}^N + A_{N_x,N_x+1}^N \end{pmatrix}$$

où, pour tous  $i, k$ ,

$$A_{i,k}^N = \begin{pmatrix} (A_{i,k})_{0,1}^D + (A_{i,k})_{1,1}^D & (A_{i,k})_{1,2}^D & \cdots & (A_{i,k})_{1,N_y}^D \\ (A_{i,k})_{2,1}^D & (A_{i,k})_{2,2}^D & & (A_{i,k})_{2,N_y}^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A_{i,k})_{N_y,1}^D & (A_{i,k})_{N_y,2}^D & \cdots & (A_{i,k})_{N_y,N_y}^D + (A_{i,k})_{N_y,N_y+1}^D \end{pmatrix}.$$

Sous réserve de convergence du schéma numérique,  $u_{[i,j]}^0$  est une approximation de  $Q(0, x_i, y_j)$ .

<sup>6</sup>On travaille ici avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Pour  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |v_i|$ .

<sup>7</sup> $N$  pour Neumann

## Résultats

On utilise des conditions au bord de Neumann nulles. On teste les fonctions  $f(y) = me^y$ ,  $f(y) = m'(m+y)$  et  $f(y) = m'|m+y|$ . On teste  $\alpha = 0.1, 1, 10$ ,  $\rho = -0.8, 0, 0.8$ . Sauf indication contraire,  $\nu = 0.5$ . On donne la surface des prix et la courbe de smile. Ce travail est malheureusement inachevé, mais le code a été complètement écrit.

### 13.6.2 Méthode de Monte-Carlo<sup>8</sup>

#### Schéma d'Euler

**Définition** Là aussi on suppose  $\Lambda = 0$  et, quitte à changer  $f$ ,  $m = 0$ . L'équation différentielle stochastique s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f(Y_t) \\ dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta d\hat{Z}_t^* \end{cases} \quad (13.6.1)$$

On se donne  $M \geq 1$  pas de temps : on pose  $\Delta t = T/M$  et  $t_n = n\Delta t$ . Autrement dit, on considère la subdivision régulière

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{M-1} < t_M = T$$

de l'intervalle  $[0, T]$ . On peut discrétiser (13.6.1) de plusieurs façons. La plus simple consiste à considérer le schéma d'Euler  $(\bar{X}_{t_n}, \bar{Y}_{t_n})_{0 \leq n \leq M}$  défini par

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_{n+1}} - \bar{X}_{t_n} = r\bar{X}_{t_n}\Delta t + f(\bar{Y}_{t_n})\bar{X}_{t_n}\sqrt{\Delta t}\hat{G}_n \\ \bar{Y}_{t_{n+1}} - \bar{Y}_{t_n} = -\alpha\bar{Y}_{t_n}\Delta t + \beta\sqrt{\Delta t}(\rho\hat{G}_n + \sqrt{1-\rho^2}\check{G}_n) \end{cases} \quad (13.6.2)$$

où  $(\hat{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  et  $(\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  sont deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. Notons que la dynamique de  $\bar{Y}$  est autonome.

**Erreurs statistique et trajectorielle** On lance  $N$  simulations de trajectoires (13.6.2) et on estime la valeur en  $t = 0$  de l'option de payoff  $H = h(X_T)$  par la moyenne empirique  $e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^{(i)})$ . Ce faisant, on commet deux erreurs :

- une erreur de nature statistique, d'ordre  $1/\sqrt{N}$  :

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^{(i)}) - \mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)] \right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

en loi lorsque  $N$  tend vers l'infini, où  $\sigma^2 = \text{Var}[\bar{X}_T]$ . En réalité, on commet aussi une erreur sur  $\sigma^2$  que l'on estime en même temps que  $\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_M)]$  par la quantité

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^i)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\bar{X}_T^i) \right)^2.$$

Cependant, on constate en pratique que  $\sigma_n^2$  converge vite vers une limite qui semble *dépendre peu* de la valeur du pas de temps  $\Delta t$ . Ceci permet de bien contrôler le “rayon”  $\frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$  de l'erreur statistique, uniformément en  $\Delta t$ .

---

<sup>8</sup>Cette section doit beaucoup à Bernard LAPEYRE qui est à l'origine de plusieurs améliorations.

- une erreur de discrétisation temporelle  $|\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)] - \mathbb{E}^* [h(X_T)]|$ , d'ordre  $\Delta t = T/M$ . Comme les coefficients de notre diffusion bidimensionnelle sont lipschitziens, on peut facilement majorer cette erreur de discrétisation par une quantité d'ordre  $\sqrt{\Delta t}$  en utilisant les résultats de convergence  $L^2$  et presque sûre [5][8][6] :

$$\begin{aligned} \exists C &> 0, \forall M \geq 1, \mathbb{E}^* \left[ \sup_{0 \leq i \leq M} |\bar{X}_{t_i} - X_{t_i}|^2 \right] \leq C \Delta t, \\ \forall \alpha &< \frac{1}{2}, M^\alpha \sup_{0 \leq i \leq M} |\bar{X}_{t_i} - X_{t_i}| \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \quad \mathbb{P}^* - ps. \end{aligned}$$

En réalité, on peut faire beaucoup mieux. Sous des hypothèses de régularité sur les coefficients de la diffusion et sur le payoff, Denis TALAY et Luciano TUBARO [5] montrent que

$$\mathbb{E}^* [h(\bar{X}_T)] - \mathbb{E}^* [h(X_T)] = C \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (13.6.3)$$

où  $C$  est une constante dépendant des coefficients de la diffusion, des valeurs initiales  $x$  et  $y$  de  $X$  et  $Y$ , du payoff  $h$ , de  $T$ , mais indépendante de  $\Delta t$ . Denis TALAY et Luciano TUBARO introduisent par exemple les hypothèses :

**(H0)** Les coefficients  $b_x(x, y)$ ,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $b_y(x, y)$  et  $\sigma_y(x, y)$  de la diffusion sont des fonctions  $C^\infty$  dont toutes les dérivées sont bornées.

**(H1)** Le payoff<sup>9</sup>  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^\infty$  et pour tout multiindice  $\gamma$  de dérivation,

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C_T > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\partial_\gamma h(x, y)| \leq C_T (1 + \|(x, y)\|^p).$$

Alors **(H0)**-**(H1)** implique (13.6.3). Mais pour un call ou un put, **(H1)** n'est pas vérifiée. En outre, **(H0)** n'est pas vérifiée pour le cas  $f(y) = me^y$ .

Denis TALAY et Luciano TUBARO introduisent une autre hypothèse **(H2)** qui associée à **(H0)** suffit à obtenir (13.6.3) pour des payoffs seulement mesurables et bornés. Ceci permet de traiter le cas du put.

Il est donc naturel de choisir  $N$  et  $M$  de sorte que  $N \approx M^2$ , i.e. pour que les deux erreurs soient du même ordre<sup>10</sup>.

**Réduction de variance** On améliore la vitesse de calcul en proposant des méthodes de réduction de variance :

- L'utilisation de variables antithétiques divise par quatre les appels à la fonction random : on lance  $N/4$  simulations de quatre jeux de trajectoires obtenues via les deux suites indépendantes de gaussiennes centrées réduites indépendantes  $(\hat{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  et  $(\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  en utilisant respectivement les suites  $(\hat{G}_n, \check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ ,  $(\hat{G}_n, -\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$ ,  $(-\hat{G}_n, \check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  et  $(-\hat{G}_n, -\check{G}_n)_{0 \leq n \leq M-1}$  qui ont toutes même loi.
- Dans le cas où  $\alpha$  est grand devant  $\frac{1}{T-t}$ , on sait que le prix de l'option est proche de la solution  $P_0$  de l'EDP  $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_0 = 0$  avec la condition terminale  $P_0(T, x) = h(x)$ . Si on dispose d'une formule pour  $P_0$ , on peut espérer réduire la variance en introduisant le mouvement brownien géométrique  $\bar{X}$  :

$$dX_t^{bs} = rX_t^{bs} dt + \bar{\sigma}X_t^{bs} dW_t^*, \quad \bar{X}_0 = x$$

<sup>9</sup>Dans le cas des options financières,  $h$  ne dépend que de la variable  $x$ . On considère plus généralement des "payoffs" - qui portent alors mal leur nom - fonctions de  $x$  et  $y$ .

<sup>10</sup>Reste à estimer la constante  $C_{\Delta t}$  en facteur de  $\Delta t$ . Voir ci-dessous le paragraphe sur l'extrapolation de Romberg.

et en notant que

$$\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T)] = \mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - h(X_T^{bs})] + P_0(0, x).$$

On espère que  $\text{Var} [h(\overline{X}_T) - h(X_T^{bs})] < \text{Var} [h(\overline{X}_T)]$ . On peut introduire un paramètre  $q$  qui minimise  $\text{Var} [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})]$  et écrire

$$\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T)] = \mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})] + qP_0(0, x).$$

Le meilleur  $q$  possible est

$$q = \frac{\text{cov}(h(\overline{X}_T), h(X_T^{bs}))}{\text{Var} [h(X_T^{bs})]}, \quad (13.6.4)$$

on peut l'estimer au cours de la simulation. Attention ! Si on estime  $q$  au cours de la simulation, disons par  $\hat{q}_N$ , ce dernier est fonction de tous les tirages de gaussiennes, donc corrélé à  $\overline{X}_T$  et  $X_T^{bs}$ . Par conséquent, les variables aléatoires

$$h(\overline{X}_T^{(i)}) - \hat{q}_N h(X_T^{bs, (i)})$$

ne sont pas forcément indépendantes, l'estimateur

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( h(\overline{X}_T^{(i)}) - \hat{q}_N h(X_T^{bs, (i)}) \right) \quad (13.6.5)$$

de  $\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})]$  peut être biaisé, de même que l'estimateur de la variance. Si l'on dispose d'un théorème central limite pour (13.6.5), l'écart-type limite est certainement plus large que pour le  $q$  déterministe correspondant (13.6.4).

On peut estimer (13.6.4) d'abord en appelant  $p$  fois la fonction **random**, on obtient  $\hat{q}_p$ , puis utiliser  $N$  nouveaux tirages pour estimer  $\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T) - qh(X_T^{bs})]$  via

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( h(\overline{X}_T^{(i)}) - \hat{q}_p h(X_T^{bs, (i)}) \right).$$

Là encore,  $\hat{q}_p$  est une variable aléatoire. Il faut tenir compte de sa variance pour déterminer un intervalle de confiance relatif à l'estimateur ci-dessus.

Enfin, on peut - comme dit au début - choisir a priori un  $q$  déterministe (par exemple  $q = 1$ ). Dans ce cas, l'estimation de l'intervalle de confiance est aisée - mais on peut être "loin" du meilleur  $q$  possible.

Même pour de petites valeurs de  $\alpha$ , on peut se donner une valeur de  $\overline{\sigma}$  et appliquer la méthode. En pratique, pour  $q = 1$  et  $\alpha = 1$ , on observe que la variance est réduite d'un facteur 8 environ, et pour une large gamme de  $\overline{\sigma}$ .

**Extrapolation de Romberg** Sous réserve que l'erreur de discrétisation est d'ordre  $\Delta t$ , c'est-à-dire si l'on a bien le développement (13.6.3), alors on peut mettre en oeuvre la méthode d'extrapolation de Romberg : on estime  $\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T)]$  pour deux valeurs  $\Delta t$  et  $\Delta t/2$  du pas de temps, et on en déduit une estimation de

$$Z_T^{\Delta t} = 2\mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T^{\Delta t/2})] - \mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T^{\Delta t})].$$

$Z_T^{\Delta t}$  est une approximation d'ordre 2 en temps de  $\mathbb{E}^* [h(X_T)]$  car (13.6.3) implique

$$Z_T^{\Delta t} - \mathbb{E}^* [h(\overline{X}_T^{\Delta t})] = O(\Delta t^2).$$

Pour mesurer numériquement cette erreur, il est essentiel de pouvoir estimer dans le code informatique la constante en facteur du  $\Delta t^2$ . Pour ce faire, *supposons* qu'on dispose d'un développement limité

$$\mathbb{E}^* \left[ h \left( \overline{X}_T^{\Delta t} \right) \right] - \mathbb{E}^* [h(X_T)] = C'_1 \Delta t + C'_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Alors il existe  $C_2$  tel que

$$Z_T^{\Delta t} - \mathbb{E}^* [h(X_T)] = C_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^2),$$

et

$$Z_T^{\Delta t} - Z_T^{\Delta t/2} = \frac{3}{4} C_2 \Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Ceci permet d'estimer *a posteriori* l'erreur due à la discrétisation temporelle  $C_2 \Delta t^2$  par

$$C_2^{\Delta t} \Delta t^2 = \frac{4}{3} \left( Z_T^{\Delta t} - Z_T^{\Delta t/2} \right).$$

En pratique, par exemple pour estimer le put européen d'échéance  $T$ ,

- on fixe un grand nombre de tirages  $N$ ,
- on se donne un pas de temps minimal  $\delta > 0$ ,
- on initialise  $\Delta t$  à  $T$ ,
- pour cette valeur de  $\Delta t$ , on estime le put par la moyenne empirique  $Z_N^{\Delta t}$  qui estime  $Z_T^{\Delta t}$  et on estime le rayon

$$\varepsilon_s^{\Delta t} = 2 \sqrt{\frac{\text{Var} [Z_N^{\Delta t}]}{N}}$$

de l'erreur statistique,

- on divise  $\Delta t$  par 2, on recommence les opérations de la ligne précédente, et on calcule

$$C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2 = \frac{4}{3} \left( Z_N^{\Delta t} - Z_N^{\Delta t/2} \right),$$

- on s'arrête dès que<sup>11</sup>  $C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2 \leq \varepsilon_s^{\Delta t}$  ou quand  $\Delta t < \delta$ . En effet, des valeurs de  $C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2$  inférieures à  $\varepsilon_s^{\Delta t}$  n'ont *aucune signification* puisqu'on ne calcule la valeur de  $Z_N^{\Delta t}$  (resp.  $Z_N^{\Delta t/2}$ ) qu'avec une précision  $\pm \varepsilon_s^{\Delta t}$  (resp.  $\pm \varepsilon_s^{\Delta t/2}$ ).

Notons que sauf pour quelques grandes valeurs de  $\Delta t$ , on a  $\varepsilon_s^{\Delta t} \approx \varepsilon_s^{\Delta t/2}$ . On obtient donc une erreur statistique uniforme en  $\Delta t$ .

Au final, on a donc un pas de temps  $\Delta t$  et on a confiance en l'estimation

$$Z_N^{\Delta t} \pm 2\varepsilon_s^{\Delta t}$$

pour le put. Cette estimation de l'erreur est :

- globale,
- non asymptotique.

## Amélioration du schéma

Le schéma d'Euler a deux grands avantages : il est universel - il vaut pour toute diffusion - et facile à implémenter. Mais, dans le cas de la diffusion (13.6.1) vue à travers les deux browniens indépendants  $W^1$  et  $W^2$  :

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + f(Y_t)X_t \left( \rho dW_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^1 \right), & X_0 = x, \\ dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dW_t^2, & Y_0 = y, \end{cases} \quad (13.6.6)$$

on peut espérer être plus précis en exploitant les propriétés suivantes :

---

<sup>11</sup> *A priori*,  $C_{2,N}^{\Delta t} \Delta t^2$  décroît avec  $\Delta t$ . On peut recommencer une ou deux fois les opérations pour s'en assurer.

- la dynamique de  $Y$  est autonome - elle ne dépend pas de la dynamique de  $X$  ; on peut donc simuler d'abord  $Y$ , puis  $X$  sachant  $Y$ ,
- on sait simuler exactement la loi de  $Y$ , car  $Y$  est un processus gaussien ; en vue de simuler  $X$ , il est en fait nécessaire<sup>12</sup> de simuler la loi du couple  $(Y, W^2)$  ; ça n'est pas plus difficile car  $(Y, W^2)$  est également un processus gaussien,
- pour simuler efficacement la loi de  $(Y, W^2)$ , on peut exploiter le caractère markovien de ce processus,
- on peut implémenter un schéma d'Euler pour simuler  $X$  sachant  $Y$  et  $W^2$ . Mais on dispose d'une expression exacte de  $X_T$  en fonction des trajectoires de  $Y$ ,  $W^2$  et  $W^1$  :

$$X_T = xe^{rT} \exp \left( \rho \int_0^T f(Y_t) dW_t^2 + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T f(Y_t) dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_0^T f(Y_t)^2 dt \right).$$

On peut espérer être plus précis en simulant directement l'argument sous l'exponentielle. Cela revient à simuler par un schéma d'Euler  $\log(X_T)$  plutôt que  $X_T$ .

Revenons point par point sur ces améliorations.

**Simulation du couple  $(Y, W^2)$**  Nous proposons deux méthodes pour simuler la loi du couple  $(Y, W^2)$ . Elles sont toutes deux basées sur le résultat suivant : si  $M$  est un entier  $\geq 1$  et si  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$ , alors le vecteur

$$V = (Y_{t_1}, W_{t_1}^2, Y_{t_2}, W_{t_2}^2, Y_{t_3}, W_{t_3}^2, \dots, Y_{t_M}, W_{t_M}^2)$$

est un vecteur gaussien. Pour le prouver, considérons  $2M$  réels  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  et montrons que la variable aléatoire réelle

$$G = \sum_{i=1}^M (\lambda_i Y_{t_i} + \mu_i W_{t_i}^2)$$

suit une loi gaussienne. Pour ce faire, posons  $R_t = e^{\alpha t} Y_t$  ; comme  $dR_t = \beta e^{\alpha t} dW_t^2$ ,

$$R_t = y + \beta \int_0^t e^{\alpha s} dW_s^2.$$

Il est alors facile de trouver des réels  $c$ ,  $\lambda'_i$  et  $\mu'_i$  tels que

$$\begin{aligned} G &= c + \sum_{i=1}^M \left( \lambda'_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\alpha s} dW_s^2 + \mu'_i (W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2) \right) \\ &= c + \sum_{i=1}^M \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\lambda'_i e^{\alpha s} + \mu'_i) dW_s^2. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $i$ ,  $I_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\lambda'_i e^{\alpha s} + \mu'_i) dW_s^2$  est une variable gaussienne - car limite dans  $L^2$  d'une suite de variables gaussiennes ; de plus les  $I_i$  sont indépendantes.  $G$  est donc la somme de v.a. gaussiennes indépendantes, c'est donc elle-même une gaussienne.

**Méthode 1** On génère la matrice de variance-covariance  $\Gamma$  du vecteur gaussien  $V$ , son vecteur des moyennes  $m$ , on calcule une racine carrée  $A$  de  $\Gamma$  par la méthode de Cholevsky - i.e. on cherche l'unique  $A$  triangulaire inférieure à diagonale strictement positive telle que  $\Gamma = AA^t$  - et on génère un vecteur  $G$  de  $2M$  variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Alors le vecteur  $AG + m$  a même loi que  $V$ .

---

<sup>12</sup>sauf dans le cas où  $\rho = 0$ .

Pour calculer  $\Gamma$ , il suffit de connaître, pour  $1 \leq i \leq j \leq M$  :

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_{t_i}, Y_{t_j}) &= \nu^2 \left( e^{-\alpha(t_i+t_j)} - e^{-\alpha(t_j-t_i)} \right), \\ \text{cov}(W_{t_i}^2, W_{t_j}^2) &= t_i, \\ \text{cov}(Y_{t_i}, W_{t_j}^2) &= \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_i}), \\ \text{cov}(Y_{t_j}, W_{t_i}^2) &= e^{-\alpha(t_j-t_i)} \text{cov}(Y_{t_i}, W_{t_j}^2). \end{aligned}$$

Pour calculer  $m$ , il suffit de connaître

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[Y_{t_i}] &= ye^{-\alpha t_i}, \\ \mathbb{E}^*[W_{t_i}^2] &= 0. \end{aligned}$$

L'inconvénient de cette méthode est que l'on utilise des matrices de taille  $2M$  - deux fois le nombre de pas de temps - donc éventuellement de grande taille.

**Méthode 2** Ici on exploite le caractère markovien - *en plus* du caractère gaussien - du couple  $(Y_t, W_t^2)_{0 \leq t \leq T}$ . Pour cela, on se donne une subdivision régulière  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$  de  $[0, T]$  de pas  $\Delta t$  et on remarque que pour  $1 \leq n \leq M$ ,

$$\begin{aligned} Y_{t_n} &= e^{-\alpha \Delta t} \left( Y_{t_{n-1}} + \beta e^{-\alpha t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\alpha s} dW_s^2 \right), \\ W_{t_n}^2 &= W_{t_{n-1}}^2 + \left( W_{t_n}^2 - W_{t_{n-1}}^2 \right), \end{aligned}$$

si bien que si l'on pose :

$$\begin{aligned} V_n &= (Y_{t_n}, W_{t_n}^2)^t \\ U_n &= \left( \beta e^{-\alpha t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\alpha s} dW_s^2, W_{t_n}^2 - W_{t_{n-1}}^2 \right)^t \\ g \left( \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} e^{-\alpha \Delta t} (y + u^1) \\ w + u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a pour  $n \geq 1$

$$V_n = g(V_{n-1}, U_n).$$

Or on note que  $(U_n)_{1 \leq n \leq M}$  est une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants de dimension 2 de même loi  $\mathcal{N}_2(0, \Gamma)$ , où

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \nu^2 (e^{2\alpha \Delta t} - 1) & \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha \Delta t} - 1) \\ \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha \Delta t} - 1) & \Delta t \end{pmatrix},$$

et indépendante de  $V_0$ . Par conséquent,  $(V_n)_{0 \leq n \leq M}$  est une chaîne de Markov qu'on peut simuler facilement en générant  $M$  lois  $\mathcal{N}_2(0, \Gamma)$  indépendantes. Pour ce faire, on applique la méthode 1 - mais en dimension 2 seulement ! Cette méthode est plus rapide, car la méthode de Cholevsky en dimension  $d$  nécessite de l'ordre de  $d^3$  opérations.

**Simulation de  $X_T$**  On rappelle que

$$X_T = xe^{rT} \exp \left( \rho \int_0^T f(Y_t) dW_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T f(Y_t) dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_0^T f(Y_t)^2 dt \right)$$

et que l'on a déjà simulé le couple  $(Y, W^2)$  aux dates  $t_n = \frac{nT}{M}$ . On décide d'approximer respectivement  $I_0 = \int_0^T f(Y_t)^2 dt$ ,  $I_1 = \int_0^T f(Y_t) dW_t^1$  et  $I_2 = \int_0^T f(Y_t) dW_t^2$  par

$$\begin{aligned} I_0^{\Delta t} &= \Delta t \sum_{i=0}^{M-1} f(Y_{t_i})^2, \\ I_1^{\Delta t} &= \sum_{i=0}^{M-1} f(Y_{t_i}) (W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1), \\ I_2^{\Delta t} &= \sum_{i=0}^{M-1} f(Y_{t_i}) (W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2). \end{aligned}$$

Les valeurs des  $Y_{t_i}$  et  $W_{t_i}^2$  sont connues, il suffit donc à cette étape de générer une suite  $W_{t_{i+1}}^1 - W_{t_i}^1$  de gaussiennes indépendantes centrées et de variance  $\Delta t$ . On approxime alors  $X_T$  par

$$\overline{X}_T^{\Delta t} = x e^{rT} \exp \left( \rho I_2^{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2} I_1^{\Delta t} - \frac{1}{2} I_0^{\Delta t} \right) \quad (13.6.7)$$

### Mise en oeuvre

Détaillons la méthode mise en oeuvre informatiquement pour l'évaluation du put européen -  $h(x) = (K - x)_+$  - et de la volatilité implicite :

1. on fixe **NB\_TIRAGES**  $\equiv N$  le nombre d'appels à la fonction **random**,
2. on entre les paramètres du modèle :
  - pour le sous-jacent :
    - la valeur **SPOT\_TODAY**  $\equiv x$  du spot aujourd'hui ; par défaut **SPOT\_TODAY** vaut 1, c'est-à-dire qu'on raisonne avec un spot unité,
    - le taux court **TAUX**  $\equiv r$ ,
    - la fonction de volatilité  $f$  ; on considère souvent  $f(y) = m e^y$  ou  $f(y) = m' |m + y|$ ,
  - pour le processus  $Y$  qui gouverne la volatilité :
    - la valeur initiale **Y\_TODAY**  $\equiv y$ ,
    - la valeur **ALPHA**  $\equiv \alpha$  de la force de rappel,
    - la valeur **NU**  $\equiv \nu$  de l'écart-type à long terme de  $Y$ ,
    - la valeur **RHO**  $\equiv \rho$  de la corrélation entre les deux browniens qui gouvernent  $X$  et  $Y$ ,
3. on fixe **ECHEANCE**  $\equiv T$ , la maturité de l'option ; par défaut elle vaut 1, c'est-à-dire qu'on raisonne sur une année,
4. on fixe **M\_min** et **M\_max** les valeurs minimale et maximale autorisées du nombre  $M$  de pas de temps,
5. on fixe **strike\_min**, **strike\_max** et **nb\_strike**, qui sont respectivement le plus petit strike, le plus grand strike et le nombre de strikes considérés ; on en déduit **pas\_strike**,
6. on fixe une volatilité Black-Scholes **sigmabs**,
7. on fixe le coefficient **q** - déterministe - qui intervient dans la réduction de variance
8. l'exécution commence : on lance un chronomètre,
9. on crée deux matrices et huit vecteurs :
  - **prix[j][0]** contient le prix du put pour le strike **strike\_min** +  $j$  **pas\_strike**,
  - **prix[j][1]** contient l'erreur statistique sur ce prix,
  - **prixfin[j][0]** et **prixfin[j][1]** sont les analogues pour un pas de temps moitié,
  - **E** est un échantillon de **NB\_TIRAGES** spots à la date  $T$ ,



- **e** est son analogue pour un pas de temps moitié,
  - **Ebs** est l'échantillon des NB\_TIRAGES spots Black-Scholes construits à partir de **sigmabs**,  $W_T^1$  et  $W_T^2$ ,
  - **erreurstat[j]**  $\equiv$  **prixfin[j][1]** et **erreurtemps[j]** contiennent respectivement le rayon de l'erreur statistique et le rayon de l'erreur due à la discrétisation temporelle correspondants au strike **strike\_min** + *j* **pas\_strike**,
  - **call[j]** contient le prix du call calculé à partir du prix du put par la relation de parité,
  - **vol[j]** contient la volatilité implicite calculée à partir de **call[j]** en inversant la formule de Black-Scholes,
  - **volsup[j]** est, elle, calculée à partir de **call[j]** + **erreurstat[j]**,
10. on initialise à zéro l'entier **arret**; l'exécution cessera quand **arret** vaudra **nb\_strike**, signifiant que pour tout *j*, **erreurtemps[j]** < **erreurstat[j]**,
  11. on initialise *M* à **M\_min**,
  12. tant que **arret** < **nb\_strike** et *M* ≤ **M\_max**,
    - NB\_PAS\_DE\_TEMPS reçoit *M*,
    - on met **arret** à zéro,
    - on exécute **moult\_spots\_v9(e,E,Ebs,sigmabs)** qui remplit **e** pour la valeur  $\Delta t/2 = \frac{1}{2M}$  du pas de temps, **E** pour le pas de temps  $\Delta t$  et **Ebs**. Plus précisément, on répète NB\_TIRAGES/4 fois l'opération suivante :
      - on simule le vecteur  $V^{\Delta t/2} = (Y_{t_1}, W_{t_1}^2, Y_{t_2}, W_{t_2}^2, Y_{t_3}, W_{t_3}^2, \dots, Y_{t_{2M}}, W_{t_{2M}}^2)$ , où  $t_n = n \frac{\Delta t}{2}$ ; ceci nécessite 4*M* tirages de gaussiennes; on en déduit  $I_0^{\Delta t/2}$  et  $I_2^{\Delta t/2}$ ,
      - on simule  $B^{\Delta t/2} = (W_{t_1}^1, W_{t_2}^1, W_{t_3}^1, \dots, W_{t_{2M}}^1)$ ; ceci nécessite 2*M* tirages de gaussiennes; on en déduit  $I_1^{\Delta t/2}$ ,
      - on en déduit  $\overline{X}_T^{\Delta t/2}$  via (13.6.7); on remplit ainsi une nouvelle case de **e**,
      - en utilisant  $V^{\Delta t/2}$  avec  $-B^{\Delta t/2}$ , puis  $-V^{\Delta t/2}$  avec  $B^{\Delta t/2}$  et enfin  $-V^{\Delta t/2}$  avec  $-B^{\Delta t/2}$ , on génère trois autres valeurs  $\overline{X}$ ; au total on a donc rempli quatre cases de **e**,
      - on utilise les mêmes valeurs de  $V^{\Delta t} = (Y_{t_2}, W_{t_2}^2, Y_{t_4}, W_{t_4}^2, \dots, Y_{t_{2M}}, W_{t_{2M}}^2)$  et de  $B^{\Delta t} = (W_{t_2}^1, W_{t_4}^1, \dots, W_{t_{2M}}^1)$  pour calculer  $I_0^{\Delta t}$ ,  $I_1^{\Delta t}$ ,  $I_2^{\Delta t}$  et  $\overline{X}_T^{\Delta t}$ ; ceci se fait sans appel à la fonction **random**; par le même jeu sur les signes de  $V^{\Delta t}$  et de  $B^{\Delta t}$ , on remplit quatre cases de **E**,
      - enfin on utilise  $\pm W_T^1$  et  $\pm W_T^2$  pour remplir quatre cases de **Ebs**,
    - pour chaque *j* ∈ {0, 1, ..., **nb\_strike** – 1},
      - **STRIKE** reçoit **strike\_min** + *j* **pas\_strike**,
      - **prix** reçoit **prixfin**, et on réactualise **prixfin**: **prixfin[j]** reçoit **moyenne\_empirique\_controle\_bs\_romberg** (**Ebs**, **sigmabs**, **q**, **prixfin[j]**), c'est-à-dire qu'on affecte à **prixfin[j][0]** la quantité
 
$$qP_{\text{sigmabs}}^{bs} + \frac{1}{\text{NB\_TIRAGES}} \sum_{i=0}^{\text{NB\_TIRAGES}-1} (2h(\mathbf{e}[i]) - h(\mathbf{E}[i]) - qh(\mathbf{Ebs}[i]))$$
  - si *M* ≠ **M\_min**, on calcule l'erreur temporelle **erreurtemps[j]** par  $\frac{4}{3}(\text{prix}[j][0] - \text{prixfin}[j][0])$  et si **erreurtemps[j]** < **erreurstat[j]**, on incrémente **arret** de 1,
  - on multiplie *M* par 2,
  13. si on est sortis de la boucle précédente sans que **arret**=**nb\_strike**, c'est que **M\_max** n'a pas été choisi suffisamment grand; on affiche un message en ce sens,

14. sinon on écrit dans un fichier la valeur des paramètres entrés, la dernière valeur prise par le pas de temps  $\Delta t$  puis, pour chaque  $j$ , la valeur du strike correspondant, la valeur du put `prixfin[j][0]`, l'erreur statistique `erreurstat[j]`, l'erreur due à la discrétisation temporelle `erreurtemps[j]` (plus petite), la volatilité implicite `vol[j]` et l'erreur `volsup[j]-vol[j]` sur cette dernière,
15. enfin, on affiche le temps total d'exécution.

## Résultats

**Un exemple de tableau des résultats** On commence par donner l'ensemble des résultats pour les paramètres suivants :

$N$	250 000
$x$	1
$r$	0
$f(y)$	$\sigma_f e^y$
$\sigma_f$	0.2
$Y_0$	0
$\alpha$	1
$\nu$	0.5
$\rho$	0
$T$	1

On souhaite représenter graphiquement la volatilité implicite en fonction de la quantité  $\log\left(\frac{K}{x}\right)$ . Pour obtenir des points régulièrement espacés sur ce graphe, on considère en fait les strikes

$$K_j = \exp(l_{\min} + jh_l)$$

pour  $j \in \{0, 1, \dots, 12\}$ ,  $l_{\min} = -0.6$  et  $h_l = 0.1$ .

L'exécution prend fin avec le pas de temps  $\Delta t = 1/8$  et donne les résultats suivants :

$\log \frac{K}{x}$	put	erreurstat	erreurtemps	vol	erreurvol
-0.6	0.000906	0.000046	-0.000022	0.269799	0.003624
-0.5	0.001997	0.000069	-0.000038	0.257973	0.002861
-0.4	0.004440	0.000106	-0.000026	0.24672	0.002408
-0.3	0.009887	0.000161	0.000017	0.236683	0.002098
-0.2	0.021635	0.000234	0.000114	0.228493	0.001907
-0.1	0.045294	0.000292	0.000181	0.223003	0.001711
0	0.088006	0.000309	0.000116	0.221048	0.001559
0.1	0.155243	0.000343	0.000166	0.223039	0.001821
0.2	0.247806	0.000409	0.000075	0.228421	0.002724
0.3	0.363213	0.000473	-0.000073	0.23673	0.004518
0.4	0.498493	0.000523	-0.000186	0.247078	0.007701
0.5	0.652046	0.000558	-0.000108	0.258379	0.013041
0.6	0.82381	0.000580	-0.000109	0.270705	0.021148

On donne ci-dessous la volatilité implicite  $I$  en fonction de  $\log \frac{K}{x}$ .

On constate que :

- le smile est convexe, décroissant puis croissant, avec un minimum autour de la monnaie ( $K = x$  ici car  $r = 0$ ),

- le smile *vu comme fonction de*  $\log \frac{K}{x}$  est remarquablement symétrique
- la valeur minimale  $I_{\min} \approx 0.221$  est supérieure à  $\sigma_f \exp(\mathbb{E}[Y_\bullet]) \equiv \sigma_f = 0.2$  mais inférieure à  $\bar{\sigma} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$ , i.e. si  $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[f(\nu G)^2] = \sigma_f^2 \mathbb{E}[e^{2\nu G}] = \sigma_f^2 e^{2\nu^2}$$

d'où  $\bar{\sigma} \approx 0.2568$ .

A partir de cette courbe prise comme référence, nous allons étudier l'influence de chacun des paramètres sur le smile. On fait successivement varier  $r, \sigma_f, y, \alpha, \nu, \rho$  et  $T$ , toutes choses égales par ailleurs.

### Influence de $r$ .

Augmenter  $r$  revient à traduire de  $rT$  le smile sur la droite. Cela se vérifie exactement numériquement :

$\log \frac{K}{x}$	$r = 0$	$r = 0.1$
-0.6	0.2700	0.2801
-0.5	0.2583	0.2700
-0.4	0.2478	0.2583
-0.3	0.2377	0.2478
-0.2	0.2295	0.2377
-0.1	0.2238	0.2295
0	0.2213	0.2238
0.1	0.2237	0.2213
0.2	0.2292	0.2237
0.3	0.2370	0.2292
0.4	0.2459	0.2370
0.5	0.2555	0.2459
0.6	0.2645	0.2555

En effet,

$$X_T = e^{rT} \times x \exp \left( \rho \int_0^T f(Y_t) dW_t^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^T f(Y_t) dW_t^1 - \frac{1}{2} \int_0^T f(Y_t)^2 dt \right).$$

### Influence de $\sigma_f$ .

On donne ci-dessous les valeurs de  $I$  pour les trois valeurs testées de  $\sigma_f$  :

$\log \frac{K}{x}$	$\sigma_f = 0.1$	$\sigma_f = 0.2$	$\sigma_f = 0.3$
-0.6	0.1710	0.2700	0.3714
-0.5	0.1573	0.2583	0.3609
-0.4	0.1454	0.2478	0.3518
-0.3	0.1345	0.2377	0.3439
-0.2	0.1237	0.2295	0.3378
-0.1	0.1143	0.2238	0.3334
0	0.1104	0.2213	0.3317
0.1	0.1144	0.2237	0.3335
0.2	0.1234	0.2292	0.3375
0.3	0.1335	0.2370	0.3430
0.4	0.1441	0.2459	0.3503
0.5	0.1535	0.2555	0.3587
0.6	0.1618	0.2645	0.3674

Autour de la monnaie,  $\sigma_f$  semble jouer proportionnellement ; loin de la monnaie,  $\sigma_f$  semble jouer plutôt additivement.

**Influence de  $y$**  Pour des grandes valeurs de  $\alpha$ , l'effet de moyenne masque  $y = Y_0$ . Par contre, pour des valeurs de  $\alpha T$  proches de 1, comme c'est le cas ici ( $\alpha = T = 1$ ), on n'oublie pas la condition initiale du processus  $Y$ .

### Influence de $\alpha$

On peut faire les observations suivantes :

- quand  $\alpha$  est proche de 0, le smile s'applatit sur la valeur  $\sigma_f = 0.2$  ; on rappelle qu'ici  $y = 0$  ; dans ce cas en effet, les trajectoires sur  $[0, 1]$  de  $Y$  restent proches de l'axe des abscisses (cf. la figure (??)), donc  $\sigma_t = f(Y_t) = \sigma_f e^{Y_t}$  reste proche de  $\sigma_f$  ; quantitativement, la variance de  $Y_t$  vaut  $\nu^2 (1 - e^{-2\alpha t})$  est petite,
- quand  $\alpha$  augmente, la variance de  $Y_t$  aussi, la volatilité de la volatilité augmente, ce qui tend à augmenter la courbure - ou convexité - du smile,
- quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ , le smile s'applatit sur la valeur  $\bar{\sigma} \approx 0.2568$ , conformément à l'analyse asymptotique développée plus haut ; c'est l'effet de moyenne : moralement, toutes les trajectoires de  $Y$  sur  $[0, 1]$  visitent tous les états possibles selon la probabilité stationnaire ; pour le sous-jacent  $X$ , il y a donc *trajectoire par trajectoire* un effet de moyenne sur les valeurs possibles de  $Y$  ; de ce fait, quelle que soit la trajectoire  $(X_t, Y_t)_{t \in [0, 1]}$ , le variable aléatoire  $X_T$  est proche d'une variable log-normale pour la valeur  $\bar{\sigma}$  qui est à la fois :
  - la moyenne spatiale des volatilités  $f(Y)$  contre la probabilité stationnaire de  $Y$ ,
  - la moyenne temporelle de  $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t)^2 dt}$  sur chaque trajectoire - la même pour chaque trajectoire.

C'est caractéristique de la propriété d'*ergodicité*.

Il existe donc une valeur critique  $\alpha_c$  de  $\alpha$  qui maximise la courbure du smile à la monnaie ; sur notre exemple où  $T = 1$ ,  $\alpha_c \approx 1$ . Rappelons que  $\alpha$  est l'inverse d'un temps, aussi est-il raisonnable de rechercher  $\alpha_c$  de la forme  $\frac{k_\alpha}{T}$ . Cette valeur de  $\alpha$  marque l'équilibre entre deux mécanismes :

- **Mécanisme 1** : quand  $\alpha$  augmente,  $\text{Var}[Y_t] = \nu^2 (1 - e^{-2\alpha t})$  augmente et la courbure du smile aussi : l'incertitude sur la volatilité est plus grande et la distribution de  $X_T$  est d'autant plus loin d'une log-normale.
- **Mécanisme 2** : quand  $\alpha$  augmente, les trajectoires de  $Y$  tendent à visiter *chacune en particulier* tous les états possibles de  $Y$  suivant la probabilité  $\pi = \mathcal{N}(0, \nu^2)$ , si bien que la quantité  $\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t) dt$  tend à être la même pour toutes les trajectoires, de même pour  $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t)^2 dt}$  qui tend à être  $\bar{\sigma}$  sur toutes les trajectoires, et  $X_T$  est proche d'une distribution Black-Scholes pour la valeur  $\bar{\sigma}$ . On peut mesurer la variance de la moyenne temporelle  $M_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(Y_t) dt$  de la volatilité  $f(Y)$  sur  $[0, T]$  dans le cas où  $f(y) = \sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$ ,  $Y_0 = 0$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[M_T] &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}^* [\sigma_- \mathbf{1}_{\{Y_t \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{Y_t > 0\}}] dt \\
&= \frac{1}{2T} \int_0^T (\sigma_- + \sigma_+) dt \\
&= \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} \\
\mathbb{E}^*[M_T^2] &= \frac{1}{T^2} \mathbb{E}^* \left[ \int \int_{[0, T]^2} f(Y_s) f(Y_t) ds dt \right] \\
&= \frac{1}{T^2} \int \int_{[0, T]^2} \mathbb{E}^* [f(Y_s) f(Y_t)] ds dt \\
&= \frac{2}{T^2} \int \int_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}} \mathbb{E}^* [f(Y_s) f(Y_t)] ds dt.
\end{aligned}$$

Si on note  $\Pi_+ = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 y_2 > 0\}$  le nord-est et le sud-ouest de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Pi_- = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 y_2 \leq 0\}$  le nord-ouest et le sud-est de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{E}^*[M_T^2] = \frac{2}{T^2} \int \int_{\{0 \leq s \leq t \leq T\}} \left\{ \frac{\sigma_-^2 + \sigma_+^2}{2} \mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_+) + \sigma_- \sigma_+ \mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_-) \right\} ds dt.$$

Lorsque  $\alpha \rightarrow +\infty$ , pour  $0 \leq s < t \leq T$ ,  $\text{cov}(Y_s, Y_t) \rightarrow 0$ ,  $(Y_s, Y_t)$  tend en loi vers un couple de gaussiennes centrées indépendantes, si bien que  $\mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_+)$  et  $\mathbb{P}((Y_s, Y_t) \in \Pi_-)$  tendent vers  $\frac{1}{2}$ ; par conséquent  $\mathbb{E}^*[M_T^2]$  tend vers  $\frac{(\sigma_- + \sigma_+)^2}{4} = \mathbb{E}^*[M_T]^2$ , ce qui prouve que  $\text{Var}[M_T]$  tend vers 0 quand  $\alpha \rightarrow +\infty$  : dans cette limite, la moyenne temporelle du processus de volatilité  $(f(Y_t))_{0 \leq t \leq T}$  tend vers une quantité déterministe.

Notons aussi que la volatilité implicite  $I^{ATM}(\alpha)$  à la monnaie<sup>13</sup> semble une fonction croissante de  $\alpha$ , telle que  $I^{ATM}(0^+) = \sigma_f$  et  $I^{ATM}(+\infty) = \bar{\sigma}$ . Nous verrons en outre plus loin que  $I^{ATM}$  semble ne dépendre de  $\alpha$  et  $T$  que *via* le produit  $\alpha T$ . Elle est donc aussi d'autant plus grande que  $T$  est petit.

**Influence de  $\nu$**  On remarque que :

- lorsque  $\nu$  tend vers 0, le smile s'applatit sur la valeur  $\sigma_f = 0.2$ ; en effet, à la limite où  $\nu$  tend vers 0, vu que  $Y_0 = 0$ ,  $Y$  vaut identiquement 0,
- lorsque  $\nu$  augmente, la volatilité implicite augmente et la courbure du smile à la monnaie aussi; les smiles semblent avoir des asymptotes quand  $\log \frac{K}{x}$  tend vers  $-\infty$  ou  $+\infty$ , dont les pentes augmentent - en valeur absolue - avec  $\nu$ .

Ceci peut se comprendre de la façon suivante : lorsque  $\nu$  augmente, c'est la volatilité de la volatilité qui augmente, on fait payer un risque de volatilité, les prix d'option - et donc la volatilité implicite -

<sup>13</sup> *ATM* pour "at the money"

sont donc plus élevés; par ailleurs, la distribution de  $X_T$  s'éloigne de plus en plus d'une log-normale car on donne de plus en plus d'importance au bruit dans  $Y$ ,

- numériquement, il semble que la pente asymptotique soit proportionnelle à  $\nu$ . En effet, si pour la fonction  $I(\log \frac{K}{x})$  on note  $\Delta_g = I(-0.6) - I(-0.5)$  et  $\Delta_d = I(0.6) - I(0.5)$ , on a :

$\nu$	$\frac{\Delta_g}{\nu}$	$\frac{\Delta_d}{\nu}$
0.2	0.0192	0.0232
0.3	0.0206	0.0223
0.4	0.0217	0.0242
0.5	0.0235	0.0243
0.6	0.0239	0.0244
0.7	0.0248	0.0248
0.8	0.0250	0.0251
0.9	0.0247	0.0251
1.0	0.0250	0.0251

**Influence de  $\rho$**  On note que :

- les volatilités à la monnaie sont à peu près toutes les mêmes,
- lorsque  $\rho \neq 0$ , la courbe de smile n'est plus symétrique par rapport à la monnaie; ceci signifie que la distribution de  $X_T$  n'est plus symétrique autour de  $x$ . On peut décrire ce phénomène par la caricature suivante. Lorsque  $\rho < 0$ , imaginons un bruit discret  $\Delta W_{t_n}^2 > 0$ . Le bruit  $\rho \Delta W_{t_n}^2 + \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_{t_n}^1$  sur le spot a alors tendance à être négatif, donc le spot (actualisé) a tendance à être plus petit en  $t_{n+1}$  qu'en  $t_n$ . Ainsi, les queues de distribution de  $X_T$  sont dissymétriques : la queue de distribution de gauche est plus large que celle de droite; par conséquent, par rapport à la situation où  $\rho = 0$ , on donne plus de poids aux événements du type  $X_T \in [x_1, x_2]$ , où  $x_1 < x_2 < x$ . Pour les strikes en-dessous de  $x$ , les calls - et la volatilité implicite - sont donc plus bas. C'est l'inverse pour les strikes au-dessus de  $x$ . Financièrement, à une volatilité plus grande correspond des prix de sous-jacents plus bas. On peut bien sûr faire un raisonnement analogue dans le cas où  $\rho > 0$ .

**Influence de  $T$**

On remarque que :

- lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ , le smile tend à s'aplatir sur la valeur  $\bar{\sigma} \approx 0.2568$ ; de ce point de vue, il y a équivalence formelle entre les limites  $\alpha \rightarrow +\infty$  et  $T \rightarrow +\infty$ ; l'interprétation est la même que dans l'asymptotique  $\alpha \rightarrow +\infty$ ,
- lorsque  $T$  tend vers 0, en revanche, le smile semble se courber de plus en plus.

Certes la loi de  $Y_t$  ne dépend de  $t$  que *via*  $\alpha T$ , mais la loi de  $X_T$  dépend de toute la trajectoire de  $Y$  jusqu'à  $T$ , qui elle dépend de  $\alpha$  et  $T$  de manière plus complexe que simplement *via* le produit  $\alpha T$ . En revanche, moralement, aussi bien dans la limite où  $T \rightarrow +\infty$  que dans la limite où  $\alpha \rightarrow +\infty$ , on peut remplacer  $(f(Y_t))_{0 \leq t \leq T}$  par  $\bar{\sigma}$ .

Pour comprendre le fait qu'on accroît la pente du smile quand on diminue  $T$ , on peut considérer la fonction  $f(y) = a\mathbf{1}_{\{y < 0\}} + b\mathbf{1}_{\{y \geq 0\}}$ .

**Influence de  $\alpha$  et  $T$  à  $\alpha T$  constant** Il semble que :

- le prix de l'option à la monnaie - et donc la volatilité implicite  $I^{ATM}$  - ne dépend de  $\alpha$  et  $T$  que *via* le produit  $\alpha T$ ,
- à  $\alpha T$  constant, la courbure est d'autant plus grande que  $T$  est petit, donc que  $\alpha$  est grand.

**Cas où**  $f(y) = \sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$  Nous reprenons en partie l'étude ci-dessus dans le cas où  $f(y) = \sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$ . On prend  $\sigma_- = 0.1$ ,  $\sigma_+ = 0.2$ . La fonction  $f$  est dans ce cas discontinue en 0 ; pour cette raison on distinguera le cas  $Y_0 = 0$  du cas  $Y_0 \neq 0$ .

On commence par traiter ce dernier cas, en choisissant  $Y_0 = 0.1$ . Dans ce cas,  $f(Y)$  commence par valoir  $\sigma_+$ . Si la force de rappel  $\alpha$  est petite devant  $\frac{1}{T}$ , les trajectoires  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  ont de bonnes chances de rester dans les positifs et on s'attend à voir un smile qui s'applatit sur  $\sigma_+$  quand  $\alpha \rightarrow 0^+$ . En revanche, si  $\alpha$  est grand devant  $\frac{1}{T}$ , les trajectoires  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  perdent la mémoire de la condition initiale et, quand  $\alpha \rightarrow +\infty$ , pour tout  $t$ , la loi de  $Y_t$  tend vers la loi normale centrée autour de 0 et de variance  $\nu^2$ . Au vu de la théorie ergodique détaillée plus haut, on s'attend donc à voir dans cette limite un smile qui s'applatit sur

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma_-^2 + \sigma_+^2}{2}} < \sigma_+.$$

On vérifie ces prédictions sur le graphe ci-dessous, construit pour les valeurs suivantes des paramètres :

$N$	250 000
$x$	1
$r$	0
$f(y)$	$\sigma_- \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + \sigma_+ \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$
$\sigma_+$	0.2
$\sigma_-$	0.1
$Y_0$	0.1
$\nu$	0.5
$\rho$	0
$T$	1

De nouveau il existe une valeur critique  $\alpha_c$  pour laquelle la courbure à la monnaie est maximale.

On fait maintenant varier  $\alpha$  et  $T$  de sorte que  $\alpha T$  reste égal à 2 :

La volatilité implicite à la monnaie semble un invariant de  $\alpha T$ .

Dans le cas où  $Y_0 = 0$ , même pour des  $\alpha$  très petits, les trajectoires  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  quittent l'état 0, soit par le haut, soit par le bas, ni  $\sigma_+$  ni  $\sigma_-$  n'est privilégiée ; il n'y a donc aucune raison pour que le smile s'applatisse quand  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Au contraire, plus  $\alpha$  est petit, plus les trajectoires qui commencent par grimper dans les  $y > 0$  vont avoir tendance à y rester, de même pour celles qui commencent par descendre dans les  $y < 0$ . Ce phénomène a tendance à accroître l'écart de la loi de  $X_T$  à une log-normale, même si la variance de  $Y_t$  est de plus en plus petite. On observe bien ceci sur le graphe suivant :

On semble avoir atteint le smile limite quand  $\alpha \rightarrow 0^+$  puisque les deux smiles générés pour les valeurs  $\alpha = 0.1$  et  $\alpha = 0.05$  sont confondus ; ce sont ceux qui ont la plus grande courbure ; on peut dire ici que  $\alpha_c = 0^+$ .

## 13.7 Perspectives

La vraie grande question en suspend est celle de la calibration du modèle. C'est certainement un problème mathématique délicat. Nous avons montré comment calibrer le modèle dans le cas où  $\alpha$  est grand - à travers les trois paramètres  $\bar{\sigma}$ ,  $V_2$  et  $V_3$ . Mais bien souvent les smiles empiriques invalident cette hypothèse sur  $\alpha$ . Il faut donc, après avoir supposé  $\Lambda = 0$  par exemple, trouver les valeurs de  $\alpha, m, \nu, \rho, Y_0$  et la fonction  $f$  qui permettent, une fois entrés dans le code informatique, de retrouver - d'approcher en fait - le smile empirique observé aujourd'hui. On pourra en fait fixer  $\nu$  et  $f$  - donc  $m$  - et chercher les trois paramètres  $\alpha, \rho$  et  $Y_0$  qui permettent d'approcher au mieux - en un sens à définir - le smile lu aujourd'hui.

Par ailleurs, des propriétés du modèle restent mal comprises ; notamment, Joe et moi n'expliquons pas que la volatilité implicite en dehors de la monnaie tende vers plus l'infini quand la maturité tend vers 0 (c'est ce que montrent les simulations). Nous n'avons pas non plus su démontrer que la volatilité implicite à la monnaie ne dépend de  $\alpha$  et  $T$  que *via* le produit  $\alpha T$ .

Il reste aussi à jouer avec les schémas aux différences finies que nous avons implementés, mais pas encore testés.

Enfin, d'un point de vue théorique, on peut s'intéresser au terme d'ordre 2 dans le développement en  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  du prix du call et de la volatilité implicite correspondante, et en particulier à sa dépendance en  $(T, K)$ .



# Bibliographie

- [1] J.-P. FOUQUE, G. PAPANICOLAOU, K.R. SIRCAR, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- [2] F. BLACK, M. SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81 : 635-654, 1973.
- [3] B. DUPIRE, *Arbitrage Pricing with Stochastic Volatility*, preprint, 1993.
- [4] D. REVUZ, M. YOR, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 1994.
- [5] D. TALAY, L. TUBARO, *Probabilistic Numerical Methods for Partial Differential Equations : Elements of Analysis*, publié dans Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics 1627, 1996.
- [6] O. FAURE, *Simulation du mouvement brownien et des diffusions*, Thèse de doctorat, 1992.
- [7] J. NEVEU, N. EL KAROUI, *Introduction aux probabilités*, Cours de l'Ecole polytechnique, 1998.
- [8] H. REGNIER, *Interprétation probabiliste des EDP linéaires paraboliques et applications à la finance*, Cours du DEA de probabilités et finances de l'Université Paris VI, 2001-2002.
- [9] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.
- [10] B. OKSENDAL, *Stochastic Differential Equations*, Springer.
- [11] S. DURRETT, *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, 1984.



# Bibliographie

- [Af.Po] AFTALION.F., PONCET.P (1991) : *Les futures sur taux d'intérêt : le MATIF* PUF
- [As.Fi] ASSOCIÉS EN FINANCE (1985) *Les options sur actions* PUF
- [Bo.Po] BOUCHAUD.J.P., POTTERS.M. (1997), *Théorie des risques financiers*. Alea.Saclay
- [Br.Me] BRIGO.D., MERCURIO.F.(2001), *A Interest Rate Models : Theory and Praticce* Springer Finance.
- [CH.DE] CHABARDES.P.,DELCAUX.F. (1996) *Les produits dérivés* Les Carrés, Gualino éditeur
- [Ch.Lo.] CHESNEY.M.,LOUBERGÉ.H.(1992), *Les options dE change*, PUF Paris
- [Co.Ru.] COX.J.,.RUBINSTEIN.M.(1985), *Options Markets*, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall.
- [Da.JP] DANA.R.A..JEANBLANC-PICQUÉ.M.(1994) *Marchés Financiers en temps continu : valorisation et équilibre* Economica
- [De.Ro] DEMANGE.G..ROCHET.J.C.(1992) *Méthodes mathématiques de la Finance* Econométrica
- [Doth] DOTHAN.M.(1990) *Prices in Fiancial Markets* Oxford University Press N.Y.
- [Duff1] DUFFIE.D.(1988), *Security Markets : Stochastic Models*, Boston : Academic Press.
- [Duff2] DUFFIE.D.(1992), *Dynamic Asset Pricing Theory* Princeton University Press.
- [Duff3] DUFFIE.D.(1994), *Modèles dynamiques d'évaluation* Collection Finance PUF.
- [Fo.Pa.Si] FOUQUE.J.P.,PAPANICOLAOU.G., SIRCAR.R.(2000) *Derivatives in financial markets with stochastic volatility* Cambridge Univ.Press
- [Ja.Ru] JARROW.R.A AND RUDD.A.(1983) *Option pricing* Irving
- [Ka.Sh] KARATZAS.I.AND SHREVE.S.(1988) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer Verlag. New York.
- [Karl] KARLIN.S(1981) *A second course in Stochastic Processes*. Academic Press
- [La.La] LAMBERTON.D..LAPEYRE.B. (1991-97), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Mathématiques et Applications. Ellipses. Paris
- [Ma.Pr.Pr] MARTELLINI.L.,PRIAULET.P., PRIAULET.S.(2003) *Fixed-Income securities* Wiley
- [Mert] MERTON.R.(1991), *Continuous time finance*, Basil Blackwell.
- [Mull] MULLER.S. (1987), *Arbitrage pricing of contingent claims* Lecture Notes in Economics and Mathemetical systems. Springer Verlag n-254
- [Okse] OKSENDAL.B. (1985), *Stochastic differential equations*. Springer- Verlag.
- [Ov.Fe.] OVERHAUS.M., FERRARIS.A.,KNUSDDEN.T, MILWARD.R.,NGUYEN-NGOC.L.,SCHINDLMAYR.G. (2002), *Equity Derivatives : Theory and Applications*Wiley Finance

- [Po.P.H.] PONCET.P, PORTAIT.R.HAYAT.S.(1993), *Mathématiques financières : Evaluation des actifs et analyse du risque*.Gestion+.Précis Dalloz Paris
- [Quit] QUITTARD-PINON.F. (1993), *Marché des capitaux et Théorie Financière*. Gestion.Economica
- [Simo] SIMON.Y. EDT. (1997), *Encyclopédie des marchés financiers, I-II*. Gestion.Economica
- [Wilm] WILMOTT.P. (1998), *DERIVATIVES, The Theory and Practice of Financial Engineering*. John Wiley& Sons

## Articles

- [Bach] BACHELIER.L.(1900) "Théorie de la spéculation" Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.**17**,pp.21-86.
- [Bens] BENSOUSSAN.A.(1984), "On the theory of option pricing", *Acta Applicandae Mathematicae***2**, pp.139-158.
- [Bl.Sc] BLACK F.AND SCHOLES M.(1973),"The pricing of Options and Corporate Liabilities",*Journal of Political Economy* **3**, pp.637-654.
- [Br.Sch] BRENNAN.J., E.SCHWARTZ.E.S.(1979),"A continuous Time Approach to the pricing of bonds" , *Journal of Banking and Finance*, **3**,n-2, Juil 79 pp 133-155
- [C.I.R 1] COX.J., INGERSOLL.J. ET ROSS.S (1985), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*,**53**, pp.363-384.
- [C.I.R 2] COX.J., INGERSOLL.J. ET ROSS.S (1985), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*,**53**, pp.385-407.
- [C.R.R] COX.J., ROSS.S. RUBINSTEIN.M.(1979),"Option pricing. A simplified approach," *J. Fin. Econ.*bf 7, pp.229-263.
- [De.Er.Ka] DERMAN.E., ERGENER.D., &KANI(1994),"Riding on a smile" , *Risk magazine* **7**(2). pp. 32-39.
- [Dudl] DUDLEY.R.M.(1977),"Wiener functionals as Itô integrals",*Ann. Probability* **5**. pp. 140-141.
- [Duff3] DUFFIE.D.(1988), "An extension of the Black-Scholes Model of Security Valuation", *Journal of Economic Theory*, Vol.46, n.1.
- [Du.Ka] DUFFIE.D.KAN.R(1993), "A Yield-Factor Model of Interest Rates " ,*Journal of Finance*, à paraître
- [Dupi] DUPIRE.B.(1993),"Pricing with a smile " ,*Risk magazine***7**. pp. 18-20.
- [Eins] EINSTEIN A.(1905),"On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat." *Ann. Physik*,
- [EK.Ge] EL KAROUI.N., GEMAN.H.(1992) "Probabilistic Approach for the Valuation of floating-rate notes with applications to Swaps" *Advances in Options and Futures 1994*
- [EK.GE] EL KAROUI.N. GEMAN.H. ROCHET J.C.(1992) "Change of Numéraire, Change of Probability and options " *AFFI Congrès de Paris 1992- à paraître*
- [Ek.M.W.] EL KAROUI.N MYNENI.R. AND WISVANATHAN.R.(1992) "Arbitrage Pricing and Hedging of Interest Rate Claim with State Variable : I Theory II Applications *AFFI Congrès de Louvain 1991- AFFI Congrès de Paris 1992 Working paper,Sept 1990-Sept 1992, Laboratoire de Probabilités Paris VI*)
- [Ek.R] EL KAROUI.N..ROCHET.J.C.(1989) A pricing formula for options on coupon bonds, SEEDS working paper 72,1989.
- [Fo.Sc1] FÖLLMER H., SCHWEITZER.M.(1990) "Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information" Working paper 1990

- [Fo.Sc2] FÖLLMER H., SCHWEITZER.M.(1993) "A Microeconomic Approach to Diffusion Models for stock Prices" *Mathematical finance* **3-1** pp 1-23
- [Fo.So] FÖLLMER.H. SONDERMANN.D.(1986), "Hedging of non redundant contingent claims" *Contributions to mathematical economics. In Honor of Gérard Debreu*. Hildenbrand. Mas-Colell editors. North-Holland.
- [Ge.Yo] GEMAN.H.YOR.M.(1992) "Options asiatiques et fonctions confluentes géométriques", *C.R.A.S.***314** Série 1,
- [Ge.Yo] GEMAN.H. .YOR.M.(1992) "Asiatic options and Bessel processes" *Mathematical Finance* 1994
- [Ha.Kr] HARRISON.M.AND KREPS.D.(1979),"Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, **20**, pp. 381-408.
- [Ha.Pl1] HARRISON.J.AND PLISKA.S.P (1981) "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading." *Stochastic Processes and their Applications*, **11**,pp.215-260.
- [Ha.Pl2] HARRISON.J.AND PLISKA.S.P(1981") "A stochastic calculus model of continuous trading : Complete markets". *Stochastic Processes and their Applications*, **15**,pp.313-316.
- [H.J.M.] HEATH.D. JARROW.A..MORTON.A (1987-92) "Bond pricing and the term structure of interest rate : a new methodology" *Econometrica*. 1992.
- [Ho.Le] HO.T. AND LEE.S.(1986) "Term structure Movements and pricing Interest rate Contingents Claims" *Journal of Finance***41**,pp.1011-1029
- [Hu.Wh] HULL.J. WHITE.A.(1990), "Pricing Interest Rate Derivate securities", *The Review of Financial Studies***3**n.4 pp ;573-592
- [Jams] JAMSHIDIAN. F.(1990),"Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest rate Model" *Res.Finance*,**9**, pp.131-170
- [Kara 1] KARATZAS. I.(1988),"On the pricing of American options," *Appl. Math. Optimization*,**17**, pp. 37-60.
- [Mert 2] MERTON.R.(1973), "Theory of Rational Option Pricing",*Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, pp.141-183.
- [Plis] PLISKA.S. (1986), "A stochastic calculus model of continuous trading : optimal portfolios, *Math. of operations research*. **11**, n.2, pp.371-382.
- [Sc.Sc] SCHAEFFER.S.M.,SCHWARTZ.E.S. (1990) : "A two-factor of the term structure : An approximate analytical solution" *JFQA***19** n-1, mars 1990. pp 413-424.
- [Stri] STRICKER.C. (1989),"Arbitrage et lois de martingale". *Annales I.H.P.*, **26**, n-3, pp. 451-460.
- [Vasi] VASICEK.O.(1977) : An equilibrium Caractérisation of the term of structure *Journal of financial Economics***5**, 1977, pp177-188.
- [Wi.Ta] WILLINGER.W.,TAQQU.M.(1991) "Towards a convergence theory for continuous stochastic securities market models" *Mathematical Finance*, **1**, pp 55-99.