Conjuntos Numéricos

Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Intervalos.

Conjunto dos Números Naturais

O conjunto dos números naturais é de grande importância pelo seu uso na contagem. Por exemplo, o número de dedos da mão de um ser humano, o número de animais em uma fazenda etc.

Sua notação é $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

Quando não se considera o elemento zero (0), a notação utilizada é $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1,2,3,...\}$

Exemplos:

a) $5 - 3 = 2$ (é possível: $2 \in \mathbb{N}$)

b) $9 - 8 = 1$ (é possível: $1 \in \mathbb{N}$)

c) $3 - 5 = ?$ (é impossível em $\mathbb{N}$)

Números Naturais não nulos:

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

Conjunto dos Números Inteiros

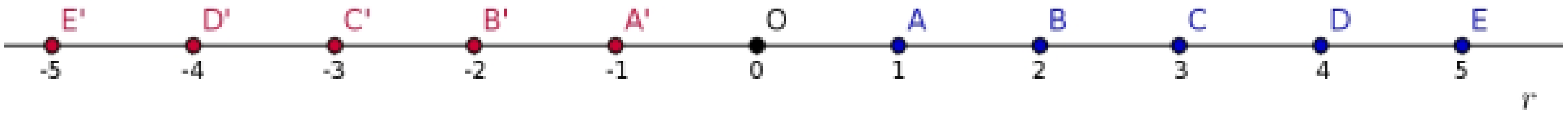
O conjunto dos números inteiros é formado pelos elementos do conjunto dos naturais acrescidos de seus simétricos. Por exemplo, as temperaturas positivas podem ser representadas por números inteiros positivos ou pelo conjunto dos números naturais. As temperaturas negativas são representadas por números negativos.

A notação utilizada para o conjunto de números inteiros é $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Quando o elemento zero (0) não pertence ao conjunto, a notação se torna $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

- Um número $+n$ (lê-se: mais n) chamado **número inteiro positivo.**
  Exemplo:
  $+1, +2, +3, +4, +5, ...$ são números inteiros positivos.
- Um número $-n$ (lê-se: menos n) chamado **número inteiro negativo.**
  Exemplo:
  $-1, -2, -3, -4, -5, ...$ são números inteiros negativos.

Reta Numérica



- Cada ponto é a **imagem geométrica** de um número inteiro.
- O número inteiro chama-se **abscissa** do ponto correspondente.
- O ponto O é chamado de **origem** e sua abscissa é zero.
- A reta r é chamada **reta numérica inteira**.

Operações: Adição e subtração

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+13) + (+10) = +23$	$+13 + 10 = +23 = 23$
$(-3) + (-6) = -9$	$-3 - 6 = -9$

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+23) + (-9) = +14$	$+23 - 9 = +14$
$(+7) + (-25) = -18$	$+7 - 25 = -18$

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+8) + (-8) = 0$	$+8 - 8 = 0$
$(-20) + (+20) = 0$	$-20 + 20 = 0$

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+8) + 0 = +8$	$+8 + 0 = +8$
$(-12) + 0 = -12$	$-12 + 0 = -12$

$$(+8) - (+4) = (+8) + (-4) = 8 - 4 = 4$$

$$(-6) - (+9) = (-6) + (-9) = -6 - 9 = -15$$

$$(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = 5 + 2 = 7$$

Operações: Multiplicação e Divisão

$(+3).(+8) = 24$

$(+3).(-2) = -6$

$(+15) : (+3) = 5$

$(-5).(-4) = 20$

$(-5).(+4) = -20$

$(-36) : (-9) = 4$

$(-5).(+6).(-2) = \underbrace{(-5).(+6)}_{-30}.(-2) = (-30).(-2) = +60 = 60$

$(+18) : (-2) = -9$

$(-3).(-4).(-5).(-6) = \underbrace{(-3).(-4)}_{+12}.\underbrace{(-5).(-6)}_{+30} = 12.30 = 360$

$(-30) : (+6) = -5$

Conjunto dos Números Racionais

Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde:

- a e b são números inteiros;
- $b \neq 0$

Então, são números racionais:

Os números inteiros positivos:	Os números inteiros negativos:	Os números fracionários positivos:	Os números fracionários negativos:
Exemplos: $1 = \frac{1}{1}$ e $2 = \frac{2}{1}$	**Exemplos:** $-1 = -\frac{1}{1}$ e $-2 = -\frac{2}{1}$	**Exemplos:** $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$	**Exemplos:** $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{4}$

Observação: O número 0 também é racional pois $0 = \frac{0}{1}$.

Os números $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{10}{3}, \ldots$ são chamados **números racionais positivos.**

Os números $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{10}{3}, \ldots$ são chamados **números racionais negativos.**

Números Fracionários (Fração)

Definição: Uma FRAÇÃO é um número racional que representa uma ou mais partes de um todo, ou seja, é a forma de dividir alguma coisa por meio da razão de dois números, em que o **dividendo** é chamado de numerador (indica quantas partes do todo foram tomadas) e o **divisor** é conhecido como denominador (indica o total de partes iguais que o inteiro fora dividido).

Ao dividir uma pizza, por exemplo, a pizza é fracionada. Cada fatia representa uma parte da pizza, ou seja, uma FRAÇÃO. Geralmente ela é dividida em 8 pedaços, então cada pedaço de uma pizza representa $\frac{1}{8}$ (um oitavo) dela.

Módulo (ou valor absoluto)

O **módulo ou valor absoluto de um número inteiro ou racional** é a distância do número até a origem, isto é, é a distância do número até o zero (0). Assim, o módulo de um número é sempre positivo.

Um número, com exceção do zero, é formado de dois elementos:

- um sinal ($+$ *ou* $-$).
- um número natural ou um número fracionário ou um número decimal.

O módulo do número inteiro $+4$ é 4.
Indica-se: $|+4| = 4$

O módulo do número inteiro -6 é 6.
Indica-se: $|-6| = 6$

O módulo do número racional $+\frac{3}{7}$ é $\frac{3}{7}$.
Indica-se: $\left|+\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

O módulo do número racional $-\frac{2}{5}$ é $\frac{2}{5}$.
Indica-se: $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

O módulo do número decimal $-0,232$ é $0,232$.
Indica-se: $|-0,232| = 0,232$

Números Opostos (ou Simétricos)

Observe os seguintes números:

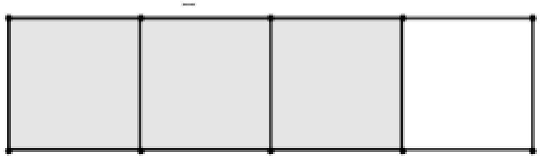
a) 5 e -5 possuem módulos iguais e sinais diferentes.

b) -8 e 8 possuem módulos iguais e sinais diferentes.

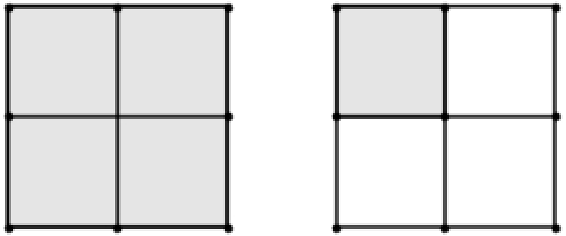
c) $+\dfrac{3}{8}$ e $-\dfrac{3}{8}$ possuem módulos iguais e sinais diferentes.

d) $-\dfrac{1}{2}$ e $+\dfrac{1}{2}$ possuem módulos iguais e sinais diferentes.

Tipos de Frações



$\frac{3}{4}$



$\frac{5}{4}$

- Frações Próprias: $a < b \leftrightarrow \frac{a}{b} < 1$

$$\frac{1}{5} = 0{,}5; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75; \quad \frac{10}{100} = 0{,}10; \quad \frac{5}{23} = 0{,}217$$

- Frações Impróprias: $a > b \leftrightarrow \frac{a}{b} > 1$

$$\frac{5}{2} = 2{,}5; \quad \frac{30}{4} = 7{,}5; \quad \frac{100}{10} = 10{,}0; \quad \frac{50}{23} = 2{,}174$$

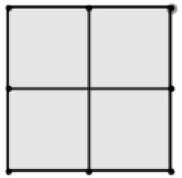
- Frações Mistas (Números Misto):

$$1\frac{2}{5} = 1{,}4; \quad 5\frac{3}{4} = 5{,}75; \quad 6\frac{4}{10} = 6{,}4$$

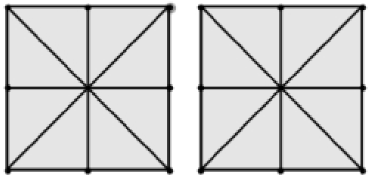
$$1 + \frac{2}{5} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

- Frações Aparentes:

$$\frac{5}{1} = 5; \quad \frac{12}{4} = 3; \quad \frac{100}{10} = 10; \quad \frac{8}{8} = 1$$



$\frac{4}{4} = 1\ inteiro$

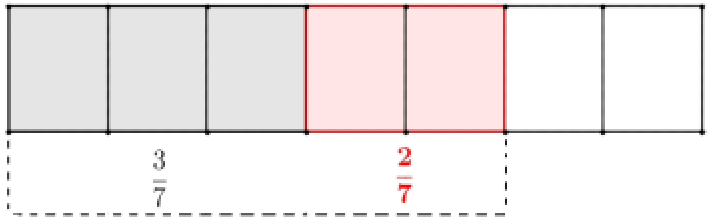


$\frac{16}{8} = 2\ inteiros$

Operações com Frações: Adição e Subtração

- Denominadores Iguais:

$$\frac{6}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6+3}{3}=\frac{10}{3}$$



- Denominadores Diferentes: (usar M.M.C.)

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}$$

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}=\frac{}{60}+\frac{}{60}+\frac{}{60}$$

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}=\frac{150}{60}+\frac{144}{60}+\frac{30}{60}$$

$$\frac{10}{4}+\frac{12}{5}+\frac{3}{6}=\frac{150}{60}+\frac{144}{60}+\frac{30}{60}=\frac{150+144+30}{60}=\frac{324}{60}$$

Operações com Frações: Multiplicação e Divisão

- Multiplicação: $$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$ $$\frac{6}{11} \times \frac{9}{5} = \frac{6 \times 9}{11 \times 5} = \frac{54}{55}$$

- Divisão: Deve-se repetir a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda fração (invertendo o numerador e denominador da segunda fração).

$$\frac{9}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{9 \times 3}{2 \times 7} = \frac{27}{14}$$

$$\frac{8}{3} \div \frac{5}{9} = \frac{8}{3} \times \frac{9}{5} = \frac{8 \times 9}{3 \times 5} = \frac{72}{15}$$

Números Decimais

Um número racional também pode ser representado por um número decimal exato ou periódico.

Exemplos:

a) $\frac{7}{2} = 3,5$ --→ divide-se o numerador pelo denominador da fração e obtém-se o número na forma decimal.

b) $-\frac{4}{5} = -0,8$

c) $\frac{1}{3} = 0,333...$

d) $\frac{4}{9} = 0,444...$

e) $\frac{23}{99} = 0232323...$

Os itens c, d e e são chamados de **dízimas periódicas** e podem ser representados ainda por: $0,\overline{3}$; $0,\overline{4}$ e $0,\overline{23}$ respectivamente.

Operações

Considere a seguinte adição:

$2,27 + 2,5 + 0,018$

Transformando em frações decimais, temos:

$$\frac{227}{100} + \frac{25}{10} + \frac{18}{1000} = \frac{2270}{1000} + \frac{2500}{1000} + \frac{18}{1000} = \frac{4788}{1000} = 4,788$$

a) $2,27 + 2,5 + 0,018$	b) $25,4 + 0,25 + 32$	c) $3,14 + 2,8 + 0,001$
$\begin{array}{r} 2{,}270 \\ +2{,}500 \\ +\underline{0{,}018} \\ 4{,}788 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25{,}40 \\ +\ 0{,}25 \\ +\underline{32{,}00} \\ 57{,}65 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3{,}140 \\ 2{,}800 \\ +\underline{0{,}001} \\ 5{,}941 \end{array}$

Considere a seguinte subtração:

$4,1 - 2,014$

Transformando em fração decimais, temos:

$$\frac{41}{10} - \frac{2014}{1000} = \frac{4100}{1000} - \frac{2014}{1000} = \frac{2086}{1000} = 2,086$$

a) $4,1 - 2,014$	b) $8,372 - 1,2$	c) $5 - 2,2541$
$\begin{array}{r} 4{,}100 \\ -2,014 \\ \hline 2{,}086 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8{,}372 \\ -1,200 \\ \hline 7{,}172 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5{,}0000 \\ -2,2541 \\ \hline 2{,}7459 \end{array}$

Considere a seguinte multiplicação:
$2,25 \cdot 1,2$

Transformando em fração decimais, temos:

$$\frac{225}{100} \cdot \frac{12}{10} = \frac{2700}{1000} = 2,7$$

$$\begin{array}{rl}
\hline
2,25 \times 1,2 & \\
\hline
2{,}25 & \dashrightarrow \text{2 casas decimais} \\
\times\ \ 1,2 & \dashrightarrow \text{1 casa decimal} \\
\hline
450 & \\
+\underline{225*} & \\
2{,}700 & \dashrightarrow \text{3 casas decimais}
\end{array}$$

Para se multiplicar um número decimal por 10, 100, 1.000, ..., basta deslocar a vírgula para a direita uma, duas, três, ..., casas decimais.

Exemplos:

(a) $3,42 \times 10 = 34,2$ --→ a vírgula se deslocou 1 casa decimal para direita

(b) $2,934 \times 100 = 293,4$ --→ a vírgula se deslocou 2 casas decimais para direita

$$\begin{array}{rl}
\hline
2,341 \times 3,24 & \\
\hline
2{,}341 & \dashrightarrow \text{3 casas decimais} \\
\times\ 3,24 & \dashrightarrow \text{2 casas decimais} \\
\hline
9364 & \\
+4682* & \\
+\underline{7023**} & \\
7{,}58484 & \dashrightarrow \text{5 casas decimais}
\end{array}$$

Considere a seguinte divisão:

$1,8 \div 0,05$

Transformando em frações decimais, temos:

$$\frac{18}{10} \div \frac{5}{100} = \frac{18}{10} \times \frac{100}{5} = \frac{1800}{50} = 36$$

1,80 : 0,05	180	5
180 : 5	30	36
	0	

	2544	1200
$2,544 \div 1,200$	1440	2,12
$2544 \div 1200$	2400	
	0	

Prioridade das Operações

Em qualquer operação matemática deve-se começar resolvendo os parênteses. Na verdade os sinais gráficos: 1º parênteses - ( ), 2º colchetes - [ ] e 3º Chaves - { }, depois os expoentes, em seguida as multiplicações e divisões e, por último, a adição e a subtração. Quando as operações são do mesmo nível (mesmo expoente), elas devem ser resolvidas da esquerda para a direita. Por exemplo, se o cálculo tiver mais de um expoente, primeiro você deve solucionar o da esquerda e continuar para a direita. A ordem padrão é a seguinte: parêntesis, expoentes, multiplicação e divisão, e finalmente, adição e subtração.

$$\frac{4}{2} \times 3 + (4 + 6 \times 2) + \frac{18}{9} - 8$$

$$\frac{4}{2} \times 3 + (4 + 12) + \frac{18}{9} - 8$$

$$\frac{4}{2} \times 3 + (16) + \frac{18}{9} - 8$$

$$2 \times 3 + 16 + \frac{18}{9} - 8$$

$$6 + 16 + \frac{18}{9} - 8$$

$$6 + 16 + 2 - 8$$

$$24 - 8$$

$$16$$

Conjunto dos Números Irracionais

DEFINIÇÃO: Conjunto formado pelos números que não podem ser escritos na forma de fração pois possuem em suas formas decimais dízimas não periódicas.

REPRESENTAÇÃO: $\mathbb{I}$, mas não existe uma notação oficial.

$\mathbb{I}$ = {,, …, , …, e, …, π, …}

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ e $\pi = 3{,}14159265\ldots$

- O número 0,21211211121111… não é dízima periódica, pois os algarismos apósa virgula não repetem periodicamente.
- O número 1,203040… também não comporta representação fracionária, pois não é dizima periódica.

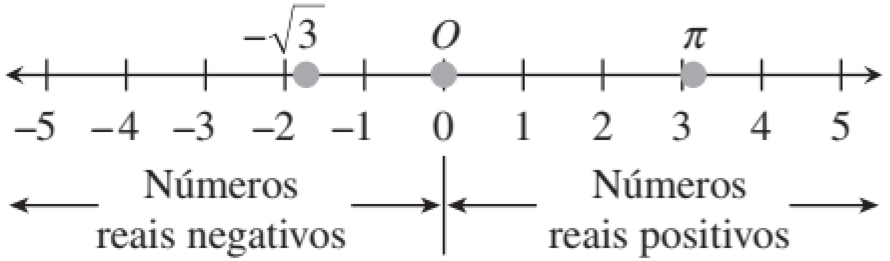
Outros exemplos de números irracionais:

1,234567891011
6,202002000...
34,56789101112...

Conjunto dos Números Reais

DEFINIÇÃO: Da reunião do conjunto dos números racionais com os números irracionais obtemos o conjunto dos números Reais.

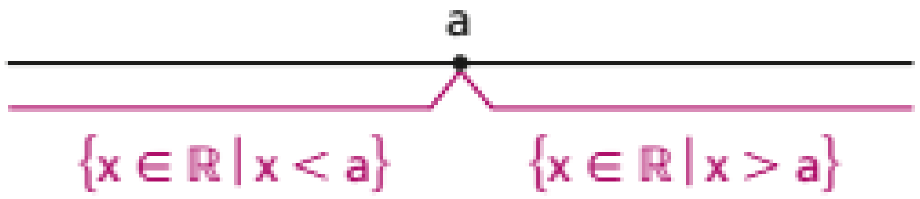
Para representar os números reais, marcamos o número real 0 (zero), que representa a **origem,** em uma reta horizontal. Os **números positivos** estão à direita da origem e os **números negativos**, à esquerda, como se vê na Figura 1.1.



Ordem na reta (ordenação)

O conjunto dos números reais é **ordenado**. Isso significa que podemos comparar quaisquer dois números reais que não são iguais usando desigualdades; dessa forma, podemos dizer que um é "menor do que" ou "maior do que" o outro.

- Se **a** for um número real, então *exatamente* uma das três afirmativas será verdadeira:
  - a = 0;
  - **a** é positivo;
  - (–a) é positivo.

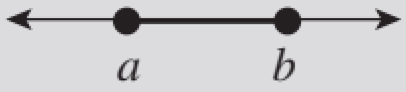
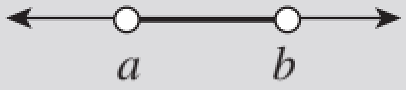
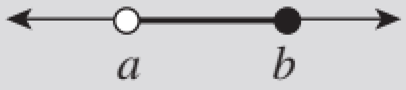


- A soma de dois números positivos é outro número positivo.
- O produto de dois números positivos é outro número positivo.

Intervalos de Números Reais

Intervalos limitados de números reais

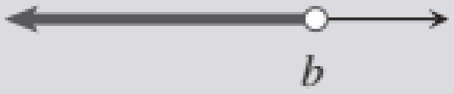
Sejam a e b números reais com $a < b$.

Notação de intervalo	**Tipo de intervalo**	**Notação de desigualdade**	**Representação gráfica**
$[a, b]$	Fechado	$a \leq x \leq b$	
$]a, b[$	Aberto	$a < x < b$	
$[a, b[$	Fechado à esquerda e aberto à direita	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	Aberto à esquerda e fechado à direita	$a < x \leq b$	

Os números a e b são os **extremos** de cada intervalo.

Intervalos não limitados de números reais

Sejam a e b números reais.

Notação de intervalo	Tipo de intervalo	Notação de desigualdade	Representação gráfica
$[a, +\infty[$	Fechado	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	Aberto	$x > a$	
$]-\infty, b]$	Fechado	$x \leq b$	
$]-\infty, b[$	Aberto	$x < b$	

Cada intervalo tem exatamente um extremo, que é a ou b.

Exemplos

1º) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto.

2º) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 4\}$ é intervalo fechado.

3º) $\left[\frac{2}{5}, 7\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leqslant x < 7\right\}$ é intervalo fechado à esquerda.

4º) $\left]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leqslant \sqrt{2}\right\}$ é intervalo fechado à direita.