Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Cências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

A Reputação como Mecanismo de Evolução da Cooperação

Jeremias Dourado

Licenciatura Plena em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Moiseis Cecconello**

Coorientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor**

Cuiabá - MT

Abril - 2018

A Reputação como Mecanismo de Evolução da Cooperação

Trabalho de Conclusão de Curso do discente **Jeremias Dourado**, do curso de Licenciatura Plena em Matemática, orientado pelo professor Dr. **Moiseis Cecconello** e coorientado pelo professor Dr. **Aldi Nestor** do Departamento de Matemática vinculado ao Instituto de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal de Mato Grosso.

Cuiabá, 4 de fevereiro de 2018.

Jeremias Dourado

Agradecimentos

- À minha família:
  - Aos meus pais, cuja nobreza de caráter me ensinou e motivou mais que qualquer escola possa ensinar ou motivar.
  - Aos meus irmãos que me apoiam e me chamam de louco.
- Aos meus amigos:
  - Aos meus amigos que não lerão esse trabalho.
  - Aos meus amigos que lerão só pra dizer que não entenderam nada.
- Aos meus professores:
  - Ao professor Moiseis, que como um orientador é um amigo e como amigo, um orientador.
  - Ao professor Aldi, cujas aulas são uma obra de arte, e cujas conversas me levou a questionar tudo, inclusive ele mesmo.
  - Ao professor André, que tentou me ensinar teoria dos anéis quando eu ainda era calouro, e diante a minha reação de incompreensão ele disse: "Isso é uma questão de maturidade, bicho, não se preocupe, você tá começando agora, que daqui uns tempos isso vai ficar absurdamente claro pra você". Desde então me ajudou de maneira imensurável e impagável. Sempre acreditando em um potencial que nem eu acredito que tenho.
  - A todos os demais professores que, com raras exceções, tem me ajudado muito.

"Nenhuma educação parece ser motivo de alegria no momento, mas sim de tristeza. Mais tarde, porém, produz fruto de justiça e paz para aqueles que por ela foram exercitados"

Autor Desconhecido - Bíblia Sagrada (Hb 12:11)

Resumo

A teoria dos jogos é uma área da matemática que estuda interações entre indivíduos, modela problemas e apresentam possíveis soluções. A solução proposta para o dilema do prisioneiro é boa para o indivíduo mas não para o grupo. E a reputação é uma ferramenta que pode evoluir uma população de indivíduos e transformar o resultado do dilema do prisioneiro em uma solução boa para o indivíduo e para o grupo.

Palavras Chaves: Teoria dos Jogos, Dilema do Prisioneiro, Reputação, Evolução.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O que leva as pessoas a honrarem seus compromissos? Não ser responsável com os acordos é quase sempre a opção mais tentadora, no entanto nos sentimos na obrigação de cumprir o que combinamos, em parte pode ser pelo medo de consequências futuras e em parte porque velamos pelo nosso "nome na praça"ou nosso *score*, em ambos os casos no pano de fundo tem a mesma coisa, a reputação. No primeiro caso se é só o medo que nos motiva, se tivéssemos certeza de que ninguém saberia dos nossos acordos não cumpridos, não teríamos mais medo. O mesmo se aplica a segunda opção. Então porque criamos, se não criamos, como surgiu naturalmente algo tão inconveniente como a reputação?

A **teoria dos jogos** se propõe a responder essa e muitas outras questões sobre nossas interações com o mundo a nossa volta. Nela, métodos matemáticos são usados para modelar desde situações corriqueiras do dia-a-dia até a maneira como se comportam as grandes multinacionais, desde uma rede social até um site de compra e venda.

Este trabalho usa algumas ferramentas da teoria dos jogos para explicar o surgimento, a evolução e por incrível que pareça os benefícios da reputação. A mesma coisa que aparentemente e pensando apenas unilateralmente, nos causa desconforto, vista sob outra ótica ela é uma das bases que solidificam nossas relações.

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Teoria Dos Jogos

Desde criança todos nós jogamos jogos, que vão desde uma brincadeira como pega-pega, esconde-esconde, vídeo games e etc; até jogos mais elaborados como alguns esportes, jogos de tabuleiro e RPG. O que esses jogos têm em comum são as tomadas de decisões baseadas no conhecimento de que elas afetam diretamente todos os jogadores e vence quem tomar a melhor decisão. Esse conjunto de decisões é chamado de estratégia.

O universo dos jogos é muito vasto, por exemplo, existem jogos que são de equipes onde cada decisão de um jogador visa derrotar a equipe adversária e ajudar a sua equipe, ou seja, a estratégia é executada em grupo. Existem também jogos de azar em que alem das decisões dos jogadores há também uma variável aleatória que depende da "sorte"de cada jogador, não podendo assim ser previstas precisamente nas estratégias.

Esses jogos podem ser divididos em duas classes, a classe dos jogos em que para um jogador ou equipe ganhar, o jogador ou equipe adversária precisa necessariamente perder, esses jogos são chamados de jogos de soma zero; e a classe dos jogos que têm mais de duas possibilidade, nesses jogos os jogadores podem ou ambos perderem ou ambos ganharem. Essa ultima classe é a mais estudada na Teoria dos Jogos.

1.1 Contexto Histórico

Os registros mais antigos sobre teoria dos jogos são do século XVIII, em uma correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, James Waldegrave analisa um jogo de cartas chamado "*le Her*"e fornece uma solução que é um equilíbrio de estratégia mista (conceito definido posteriormente), mas Waldegrave não estendeu sua abordagem para uma teoria geral. No início do século XIX, temos o famoso trabalho de Augustin Cournot sobre duopólio [4]. Em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos [5], o teorema afirma que o jogo de xadrez é estritamente determinado, ou seja, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em que lhe permitirá a vitória ou conduzirá o jogo ao empate.

Outro grande matemático que se interessou em jogos foi Emile Borel, que reinventou as soluções *minimax* e publicou quatro artigos sobre jogos estratégicos. Ele achava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de uma maneira semelhante.

Em seu início, a teoria dos jogos não chamou muita atenção dos matemáticos. Foi John von Neumann que mudou esta situação, no ano 1928, ele demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas [3]. A demonstração original usava topologia e análise funcional e era muito complicada de se entender. Em 1937, ele forneceu uma nova demonstração baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer. Neumann, que trabalhava em muitas áreas da ciência, mostrou interesse em economia e, junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o clássico "*The Theory of Games and Economic Behaviour*"[6] em 1944 e, fazendo com isto, a teoria dos jogos ganhar importância na economia e na matemática aplicada.

Em 1950, o matemático John Forbes Nash Júnior publicou quatro artigos importantes para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria de barganha. Em "*Equilibrium Points in n-Person Games*"[8] e "*Non-cooperative Games*"[9], Nash provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, denominado equilíbrio de Nash, e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos a partir de sua redução para a forma não-cooperativa. Nos artigos "*The Bargaining Problem*"[10] e "*Two-Person Cooperative Games*"[7], ele criou a teoria de barganha e provou a existência de solução para o problema da barganha de Nash.

Em 1994, John Forbes Nash Jr. (Universidade de Princeton), John Harsanyi (Universidade de Berkeley, California) e Reinhard Selten (Universidade de Bonn, Alemanha) receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

1.2 Formalização Matemática

A **Teoria dos jogos** é um conjunto de ferramentas matemáticas para estudo e modelagem de problemas, denominados **jogos**, que envolvem condições de conflito de interesses por parte dos jogadores que tomam as decisões ou escolhem as jogadas.

Um jogo tem os seguintes elementos básicos:

- Um conjunto finito de jogadores representados por $J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$.
- Cada jogador $j_i \in J$ possui um conjunto finito $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{im_i}\}$ de opções, chamadas de **estratégias puras** do jogador j_i.
- O conjunto de todas as estratégias puras, ou seja, o produto cartesiano das estratégias puras de cada jogador

  $$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$

  chamado de **espaço de estratégia pura** do jogo.
- Um vetor $e = (e_{1k_1}, e_{2k_2}, \cdots, e_{nk_n}) \in E$, onde $e_{ik_i} \in E_i$ é a estratégia pura do jogador $j_i \in J$, chamado de **perfil de estratégia pura**.
- Para cada jogador $j_i \in J$, existe uma função utilidade

  $$\begin{array}{rcl} u_i : E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ e & \mapsto & u_i(e) \end{array}$$

  que associa o ganho chamada de **recompensa** $u_i(e)$ do jogador j_i a cada perfil de estratégia pura $e \in E$.

Exemplo 1.2.1. Um casal x e y desejam sair para passear, o indivíduo x prefere assistir a um jogo de futebol f enquanto que o indivíduo y prefere ir ao cinema c. Se eles forem juntos para o futebol, então x tem satisfação maior do que y, por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, então y tem satisfação maior do que x e finalmente, se eles saírem sozinhos, então ambos ficam igualmente insatisfeitos. Esta situação pode ser modelada como um jogo estratégico. Então temos o conjunto de jogadores $J = \{x, y\}$, os conjuntos de estratégias puras possíveis para o jogador x e y, $E_x = \{f, c\}$ e $E_y = \{f, c\}$, o espaço de estratégia pura $E = \{(f, f), (f, c), (c, f), (c, c)\}$.

As duas funções utilidade $u_x : E \to \mathbb{R}$ e $u_y : E \to \mathbb{R}$ são:

$$u_x(e) = \begin{cases} u_x(f,f) & = & 10 \\ u_x(f,c) & = & 0 \\ u_x(c,f) & = & 0 \\ u_x(c,c) & = & 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad u_y(e) = \begin{cases} u_y(f,f) & = & 5 \\ u_y(f,c) & = & 0 \\ u_y(c,f) & = & 0 \\ u_y(c,c) & = & 10 \end{cases}$$

que são melhor descritas pela seguinte **matriz de recompensas**:

y

	×	f	c
x	f	$(10, 5)$	$(0, 0)$
	c	$(0, 0)$	$(5, 10)$

Nesta matriz, os números de cada célula representam, respectivamente, as recompensas de A e B para as escolhas de A e B correspondentes a célula.

■

Exemplo 1.2.2. (**Pedra, Papel e Tesoura**). Nesse jogo, dois participantes dizem as palavras *pedra, papel, tesoura* em uníssono. Quando chegam à palavra **tesoura**, cada um faz simultaneamente com a mão um gesto que indica a escolha de pedra Pe (um punho fechado), papel Pa (uma mão aberta) ou tesoura Te (dedos médios e indicador estendidos). O vencedor do jogo depende dos sinais escolhidos pelos dois jogadores. Pedra *esmigalha* tesoura, tesoura *corta* papel e papel *cobre* pedra. Portanto, o jogador que escolher o sinal para pedra ganhará daquele que escolher o sinal tesoura, mas perderá para o que escolher o sinal para papel e assim por diante. Neste contexto temos: $J = \{j_1, j_2\}$, $E_{j_1} = \{Pe, Pa, Te\}$, $E_{j_2} = \{Pe, Pa, Te\}$, $E = \{(Pe, Pe), (Pe, Pa), (Pe, Te), (Pa, Pe), (Pa, Pa),$ $(Pa, Te), (Te, Pe), (Te, Pa), (Te, Te)\}$ e a matriz de recompensas:

j_2

	×	Pe	Pa	Te
	Pe	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
j_1	Pa	$(1, -1)$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$
	Te	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

■

Possivelmente o exemplo mais conhecido na teoria dos jogos é o dilema do prisioneiro. Ele foi formulado por Albert W. Tucker em 1950, em um seminário de psicologia na Universidade de Stanford, para ilustrar a dificuldade de se analisar qual é a melhor decisão em situações de conflito de interesses.

Exemplo 1.2.3. (**Dilema do Prisioneiro**) Dois suspeitos, A e B, são presos pela polícia. A polícia tem provas insuficientes para os condenar, mas, separando os prisioneiros, oferece a ambos o mesmo acordo: se um dos prisioneiros, confessando, testemunhar contra o outro e esse outro negar, o que confessou sai livre enquanto o cúmplice silencioso cumpre 5 anos de sentença. Se ambos negarem, a polícia só pode condená-los a 1 ano de cadeia cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva 3 anos de cadeia. Cada prisioneiro faz a sua decisão, negar C ou confessar N, sem saber que decisão o outro vai tomar. Neste contexto temos, $J = \{A, B\}$, $E_A = \{C, N\}$, $E_B = \{C, N\}$, $E = \{(C, N), (C, C), (N, C), (N, N)\}$ e a matriz de recompensas:

		B	
	$\times$	C	N
A	C	$(-3, -3)$	$(0, -5)$
	N	$(-5, 0)$	$(-1, -1)$

■

1.3 Solução de um Jogo

Uma solução de um jogo é uma previsão do resultado do jogo, existem muitos conceitos diferentes de solução dentre os quais os mais comuns são dominância e equilíbrio de Nash.

Considere o dilema do prisioneiro. Como encontrar uma solução para o dilema de A e B, isto é, quais estratégias são melhores se os dois prisioneiros querem minimizar[1] o

[1]No exemplo 1.2.3, as recompensas foram definidas como números negativos, ou seja, o tempo que os prisioneiros perderiam na cadeia. Desta maneire, minimizar o tempo na cadeia é o mesmo que maximizar a recompensa.

tempo de cadeia? Analisando o jogo do ponto de vista do jogador A, ele pode raciocinar da seguinte maneira:

"Duas coisas podem acontecer: B pode confessar ou pode negar.

- *Se B confessar, então é melhor para mim confessar também, pois só pego 3 anos de cadeia ao invés de pegar 5 anos se eu negasse.*
- *Se B negar, então eu fico livre se eu confessar, o que é melhor do que pegar 1 ano se eu negasse.*

Em qualquer um dos casos, é melhor para mim confessar, então eu confessarei!"

Analisando agora o jogo do ponto de vista de B, ele pode ter a mesma linha de raciocínio e concluir que B também irá confessar. Assim, ambos confessarão e ficarão presos por 5 anos.

Em termos da teoria dos jogos, dizemos que os dois jogadores possuem uma **estratégia dominante**, isto é, todas menos uma estratégia são **estritamente dominadas**, que o jogo é resolúvel por **dominância estrita iterada** e que o jogo termina em uma **solução que é um equilíbrio de estratégia dominante**, conceitos que definiremos a seguir.

1.3.1 Dominância

Considere um perfil de estratégia na qual apenas a estratégia de um único jogador $j_i \in j$ irá variar, enquanto que as estratégias de seus oponentes permanecerão fixas. Denote por $e_{-i} \in E_{-i}$, onde:

$$\begin{aligned} E_{-i} &= E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n \\ e_{-i} &= \left(e_{1j_1}, \cdots, e_{(i-1)j_{i-1}}, e_{(i+1)j_{i+1}}, \cdots, e_{nk_n}\right) \end{aligned}$$

uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador j_i. Desta maneira, um perfil de estratégia pode ser convenientemente denotado por

$$e = (e_{ij_i}, e_{-i}) = \left(e_{1j_1}, \cdots, e_{(i-1)j_{i-1}}, e_{ij_i}, e_{(i+1)j_{i+1}}, \cdots, e_{nj_n}\right)$$

Uma estratégia pura $e_{ik} \in E_i$ do jogador $j_i \in J$ é **estritamente dominada** pela estratégia $e_{ik'} \in E_i$ se

$$u_i\left(e_{ik'}, e_{-i}\right) > u_i\left(e_{ik}, e_{-i}\right)$$

para todo $e_{-i} \in E_{-i}$. A estratégia $e_{ik} \in E_i$ é **fracamente dominada** pela estratégia $e_{ik'} \in E_i$ se $u_i\left(e_{ik'}, e_{-i}\right) \geq u_i\left(e_{ik}, e_{-i}\right)$, para todo $e_{-i} \in E_{-i}$.

Dominância estrita iterada é um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas.

Exemplo 1.3.1. Considere o jogo determinado pela matriz de recompensas abaixo.

		j_2			
	$\times$	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}
	e_{11}	$(5,2)$	$(2,6)$	$(1,4)$	$(0,4)$
j_1	e_{12}	$(0,0)$	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,1)$
	e_{13}	$(7,0)$	$(2,2)$	$(1,1)$	$(5,1)$
	e_{14}	$(9,5)$	$(1,3)$	$(0,2)$	$(4,8)$

Neste jogo, para o jogador j_2, a estratégia e_{21} é estritamente dominada pela estratégia e_{24}, assim, a primeira coluna da matriz pode ser eliminada.

		j_2		
	$\times$	e_{22}	e_{23}	e_{24}
	e_{11}	$(2,6)$	$(1,4)$	$(0,4)$
j_1	e_{12}	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,1)$
	e_{13}	$(2,2)$	$(1,1)$	$(5,1)$
	e_{14}	$(1,3)$	$(0,2)$	$(4,8)$

Agora, nesta matriz reduzida, para o jogador j_1, as estratégias e_{11} e e_{14} são estritamente dominadas pelas estratégias e_{12} e e_{13}, respectivamente, portanto, as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas. Além disso, a estratégia e_{23} do jogador j_2 é estritamente dominada pelas estratégia e_{22}. Assim, a coluna 2 também pode ser eliminada. Obtemos então uma matriz reduzida 2×2.

$$
\begin{array}{cc}
 & j_2 \\
j_1 &
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\times & e_{22} & e_{24} \\
\hline
e_{12} & (3,2) & (1,1) \\
\hline
e_{13} & (2,2) & (5,1) \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

Finalmente, a estratégia e_{24} do jogador j_2 é estritamente dominada pela estratégia e_{22} e, na matriz 2×1 resultante, a estratégia e_{13} do jogador j_1 é estritamente dominada pela estratégia e_{12}. Vemos então que o resultado do jogo é $(3, 2)$, ou seja, o jogador j_1 escolhe a estratégia e_{12} e o jogador j_2 escolhe a estratégia e_{22}.

■

No exemplo acima, a técnica de dominância estrita iterada forneceu um único perfil de estratégia como solução do jogo, no caso, o perfil (e_{12}, e_{22}) contudo, pode acontecer da técnica fornecer vários perfis ou, até mesmo, fornecer todo o espaço de estratégia, como é o caso da batalha dos sexos, onde não existem estratégias estritamente dominadas.

1.3.2 Equilíbrio de Nash

Dizemos que um perfil de estratégia $e^* = \left(e_1^*, \cdots, e_{(i-1)}^*, e_i^*, e_{(i+1)}^*, \cdots, e_n^*\right) \in E$ é um **equilíbrio de Nash** se

$$u_i\left(e_i^*, e_{-i}^*\right) \geq u_i\left(e_{ij_i}, e_{-i}^*\right)$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ e para todo $j_i = 1, 2, \cdots, k_i$; com $k_i \geq 2$. Ou seja, um equilíbrio de Nash de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem.

Exemplo 1.3.2. Equilíbrios de Nash.

a) No exemplo 1.2.1, os perfis de estratégia (f, f) e (c, c) são os únicos equilíbrios de Nash do jogo.

b) No exemplo 1.2.3, o perfil de estratégia (D, D) é um equilíbrio de Nash. De fato, se um prisioneiro confessar e o outro negar, aquele que negou fica preso na cadeia 5 anos, ao invés de 3 anos, se tivesse confessado. Além desse perfil, não tem outros equilíbrios de Nash nesse jogo.

c) No exemplo 1.3.1, o único equilíbrio de Nash do jogo é o perfil de estratégia (e_{12}, e_{22}).

d) Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias. Este é o caso do jogo exemplo 1.2.2.

■

1.4 Estratégias Mistas

Como vimos no jogo Pedra Papel e Tesoura do exemplo 1.2.2 acima, existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Uma alternativa para estes casos é a de considerar o jogo do ponto de vista probabilístico, isto é, ao invés de escolher um perfil de estratégia pura, o jogador deve escolher uma **distribuição de probabilidade** sobre suas estratégias puras.

Uma **estratégia mista** $\mathbf{p}_i$ para o jogador $j_i \in J$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto E_i de estratégias puras do jogador, isto é, $\mathbf{p}_i$ é um elemento do conjunto

$$\Delta_{k_i} = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_{k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i} \,\middle|\, x_1, x_2, \cdots, x_{k_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{r=1}^{k_i} x_r = 1 \right\}$$

Assim, se $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{ik_i}) \in \Delta_{k_i}$, então $p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{ik_i} \geq 0$ e $\displaystyle\sum_{r=1}^{k_i} p_{ir} = 1$.

Note que cada Δ_{k_i} é um conjunto compacto e convexo. Os pontos extremos, ou vértices, de Δ_{k_i}, isto é, os pontos da forma $s_1 = (1, 0, \cdots, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, \cdots, 0, 0)$, $\cdots$, $s_{k_i} = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ dão, respectivamente, probabilidade 1 às estratégias puras $e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{ik_i}$. Desta maneira, podemos considerar a distribuição de probabilidade s_r como a estratégia mista que representa a estratégia pura e_{ir} do jogador j_i.

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano

$$\Delta = \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2} \times \cdots \times \Delta_{k_n}$$

denominado **espaço de estratégia mista**. Um vetor $\mathbf{p} \in \Delta$ é denominado um **perfil de estratégia mista**. Como no caso de estratégias puras, usaremos a notação $\mathbf{p}_{-i}$ para representar as estratégias de todos os jogadores, com exceção do jogador j_i.

Como o produto cartesiano de conjuntos compactos e convexos é compacto e convexo, vemos que Δ é compacto e convexo.

Cada perfil de estratégia mista $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n) \in \Delta$ determina uma recompensa esperada, uma média das recompensas ponderada pelas distribuições de probabilidades $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n$. Mais precisamente, se

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n)\\ &= \left(\underbrace{p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1k_1}}_{\mathbf{p}_1}; \underbrace{p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2k_2}}_{\mathbf{p}_2}; \cdots; \underbrace{p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nk_n}}_{\mathbf{p}_n}\right)\end{aligned}$$

então

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{r_1=1}^{k_1} \sum_{r_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{r_n=1}^{k_n} \left(\prod_{s=1}^{n} p_{sr_s} u_i\left(e_{1r_1}, e_{2r_2}, \cdots, e_{nr_n}\right) \right)$$

Exemplo 1.4.1. Par ou Impar Nesse jogo, cada um de dois jogadores escolhem uma das opções, impar I ou par P, e exibem, ao mesmo tempo, uma quantidade de dedos com a sua mão. Se a soma dos dedos apresentados pelos dois jogadores for um número par, o que escolheu par vence, e se a soma for impar o que escolheu essa opção vence. Esse jogo é representado pela matriz de recompensa abaixo onde o jogador j_1 escolheu par, e o jogador j_2 escolheu impar.

		j_2	
	$\times$	I	P
j_1	I	$(+1, -1)$	$(-1, +1)$
	P	$(-1, +1)$	$(+1, -1)$

Suponhamos que o jogador j_1 escolheu a distribuição de probabilidades $\mathbf{p}_1 = (p_{11}, p_{12}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e o j_2 escolheu $\mathbf{p}_2 = (p_{21}, p_{22}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, então as recompensas associadas ao perfil de estratégia mista $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
u_1(\mathbf{p}) &= \sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{2}\left(\prod_{s=1}^{2} p_{sr_s} u_1(e_{1r_1}, e_{2r_2})\right) \\
&= p_{11}\Big(p_{21}u_1(e_{11}, e_{21}) + p_{22}u_1(e_{11}, e_{22})\Big) + \\
&\quad p_{12}\Big(p_{21}u_1(e_{12}, e_{21}) + p_{22}u_1(e_{12}, e_{22})\Big) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(+1) + \frac{2}{3}(-1)\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(+1)\right) \\
&= +\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

e analogamente

$$
\begin{aligned}
u_2(\mathbf{p}) &= \sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{2}\left(\prod_{s=1}^{2} p_{sr_s} u_2(e_{1r_1}, e_{2r_2})\right) \\
&= p_{11}\Big(p_{21}u_2(e_{11}, e_{21}) + p_{22}u_2(e_{11}, e_{22})\Big) + \\
&\quad p_{12}\Big(p_{21}u_2(e_{12}, e_{21}) + p_{22}u_2(e_{12}, e_{22})\Big) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(+1)\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(+1) + \frac{2}{3}(-1)\right) \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

■

1.4.1 Soluções em Estratégias Mistas

Todos os critérios básicos para soluções de jogos em estratégias puras podem ser estendidos para estratégias mistas, denominado **dominância estrita iterada**. Sejam $E_i^{(0)} = E_i$ e $\Delta_{k_i}^{(0)} = \Delta_{k_i}$. Definamos, recursivamente,

$$
\begin{aligned}
E_i^{(n)} &= \left\{ e \in E_i^{(n-1)} \middle| \nexists \mathbf{p} \in \Delta_{k_i}^{(n-1)} \text{ onde } \forall e_{-i} \in E_{-i}^{(n-1)} \Rightarrow u_i(\mathbf{p}, e_{-i}) > u_i(e, e_{-i}) \right\} \\
& \text{e} \\
\Delta_{k_i}^{(n)} &= \left\{ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_{k_i}) \in \Delta_{k_i} \middle| \mathbf{p}_r > 0 \text{ somente se } e_{ir} \in E_i^{(n)} \right\}
\end{aligned}
$$

onde, $u_i(\mathbf{p}, e_{-i})$ representa a recompensa esperada quando o jogador j_i escolhe a estratégia mista $\mathbf{p}$ e os demais jogadores escolhem as estratégias mistas correspondentes as estratégias puras dadas por s_{-i}. A interseção

$$
E_i^{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_i^{(n)}
$$

é conjunto de estratégias puras e

$$
\Delta_{k_i}^{(\infty)} = \left\{ \mathbf{p} \in \Delta_{m_i} \middle| \nexists \mathbf{p'} \in \Delta_{k_i}^{(n-1)} \text{ onde } \forall e_{-i} \in E_{-i}^{\infty} \Rightarrow u_i(\mathbf{p'}, e_{-i}) > u_i(\mathbf{p}, e_{-i}) \right\}
$$

é o conjunto de todas as estratégias mistas do jogador j_i que sobreviveram a técnica de dominância estrita iterada.

1.4.2 Equilíbrio de Nash

Dizemos que um perfil de estratégia mista

$$
\mathbf{p*} = (\mathbf{p*}_1, \mathbf{p*}_2, \cdots, \mathbf{p*}_n) \in \Delta = \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2} \times \cdots \times \Delta_{k_n}
$$

é um equilíbrio de Nash se

$$
u_i(\mathbf{p*}, \mathbf{p*}_{-i}) \geq u_i(\mathbf{p}, \mathbf{p*}_{-i})
$$

para todo $\mathbf{p} \in \Delta_{p_i}$, isto é, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem.

Exemplo 1.4.2. a) No dilema do prisioneiro, exemplo 1.2.3, o perfil de estratégia mista

$$\mathbf{p*} = (\mathbf{p*}_1, \mathbf{p*}_2) = (1, 0; 1, 0)$$

é um equilíbrio de Nash, de fato

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p*}_2) &= u_1(p, 1-p; 1, 0) \\ &= 5p - 10 \\ &\leq -5 \\ &= u_1(1, 0; 1, 0) \\ &= u_1(\mathbf{p*}_1, \mathbf{p*}_2) \end{aligned}$$

Portanto $u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p*}_2) \leq u_1(\mathbf{p*}_1, \mathbf{p*}_2)$ para todo $\mathbf{p} = (p, 1-p) \in \Delta_2$ e

$$\begin{aligned} u_2(\mathbf{p*}_1, \mathbf{q}) &= u_2(1, 0; q, 1-q) \\ &= 5q - 10 \\ &\leq -5 \\ &= u_2(1, 0; 1, 0) \\ &= u_2(\mathbf{p*}_1, \mathbf{p*}_2) \end{aligned}$$

Portanto $u_2(\mathbf{p*}_1, \mathbf{q}) \leq u_2(\mathbf{p*}_1, \mathbf{p*}_2)$ para todo $\mathbf{q} = (q, 1-q) \in \Delta_2$. Observe que este equilíbrio corresponde ao equilíbrio em estratégias puras $\mathbf{e*} = (N, N)$.

Capítulo 2

Evolução e Cooperação

As interações humanas em sua maioria são comparável com algum tipo de jogo, mais especificamente com o jogo dilema do prisioneiro. Neste capítulo estudaremos apenas este jogo.

Afim de melhorarmos nossa compreensão do jogo, usaremos uma matriz R que mostra apenas o ganho individual do jogador j_i, a notação C para coopera e N para não coopera

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & N \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

Então, se os indivíduos estão interagindo usando a estratégia (C, C) = (coopera, coopera), então ambos obtém como recompensa o valor a. Se estão interagindo usando a estratégia (N, N) = (não coopera, não coopera), então ambos obtém como recompensa o valor d. Se um usa a estratégia C = (coopera) e o outro N = (não coopera) na interação, então o primeiro obtém b como recompensa e segundo, c. E para simplificar a notação, representaremos R apenas por

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Os valores das recompensas devem seguir as seguinte regras $b < d < a < c$ para que o jogo continue sendo um dilema do prisioneiro, ou seja, o jogador j_i que cooperar com quem não coopera tem a pior recompensa, seguido pela recompensa por não cooperar com quem não coopera, que por sua vez é menor que a recompensa de quem coopera com quem coopera e a melhor recompensa é pra quem não coopera com quem coopera.

Usaremos os seguintes valores de recompensa, que chamaremos convenientemente de pontos.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vimos no capítulo anterior que o equilíbrio de Nash para esse jogo é a estratégia pura $\mathbf{e} = (N, N) =$ (não coopera, não coopera), ambos acusam o outro e recebem 1 pondo por isso.

2.1 Jogos Consecutivos

Suponhamos que os jogadores repitam o mesmo jogo e somem os pontos obtidos. Vejamos alguns exemplos onde um jogador j_i que nunca coopera joga 10 jogos com um jogador j_n com jogadas aleatórias.

j_i	Jogadas	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Total
	Pontos	5	1	1	1	1	5	5	1	5	1	26
j_n	Jogadas	C	N	N	N	N	C	C	N	C	N	Total
	Pontos	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	6

Tabela 2.1: Saldo de pontos do jogador j_i jogando com um jogador j_n com jogadas aleatórias.

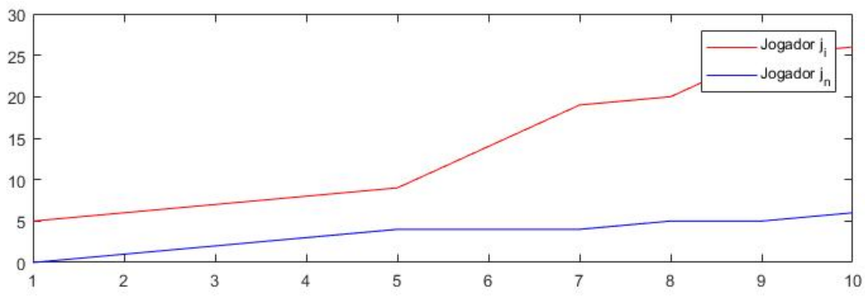

Figura 2.1: Soma de pontos dos jogadores j_i e j_n.

j_i	Jogadas	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Total
	Pontos	5	1	1	1	1	1	5	1	1	1	18
j_n	Jogadas	C	N	N	N	N	N	C	N	N	N	Total
	Pontos	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8

Tabela 2.2: Saldo de pontos do jogador j_i jogando com um jogador j_n com jogadas aleatórias.

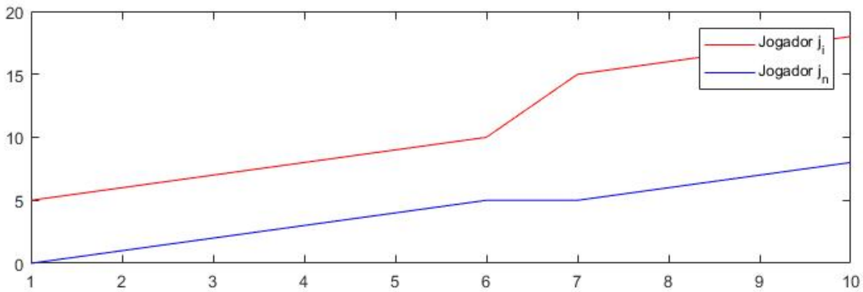

Figura 2.2: Soma de pontos dos jogadores j_i e j_n.

Notemos que, apesar de o jogador j_i sempre vencer, o jogador j_n fica com saldo de pontos mais próximo de j_i quando coopera menos vezes, vejamos agora o mesmo jogador j_i jogando com outro jogador j_n que também não coopera.

j_i	Jogadas	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Total
	Pontos	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
j_n	Jogadas	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Total
	Pontos	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10

Tabela 2.3: Saldo de pontos do jogador j_i jogando com um jogador j_n que nunca coopera.

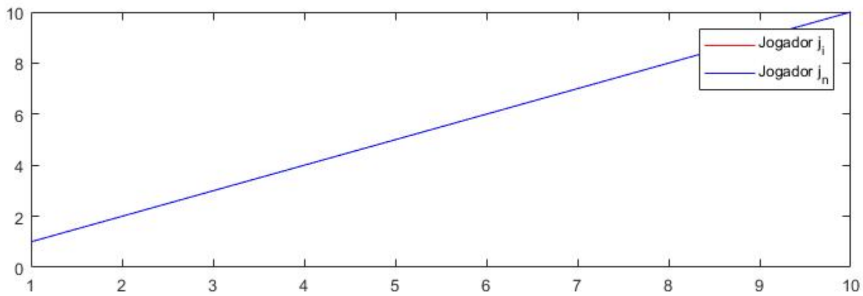

Figura 2.3: Soma de pontos dos jogadores j_i e j_n.

Isso já era esperado porque não cooperar é um equilíbrio de Nash no jogo único. Mas vejamos um jogo curioso, onde dois jogadores cooperam entre si.

j_i	Jogadas	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	Total
	Pontos	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	30
j_n	Jogadas	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	Total
	Pontos	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	30

Tabela 2.4: Saldo de pontos de dois jogadores que sempre cooperam.

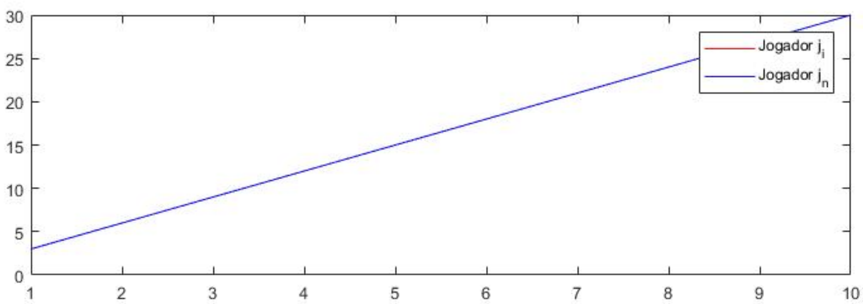

Figura 2.4: Soma de pontos dos jogadores j_i e j_n.

Apesar de os ganhos serem garantidamente maiores quando ambos coopera, assim que um descobre que o outro está cooperando ele é tentado a não cooperar e maximizar sua recompensa, e por mais que um deles insista em continuar cooperando, as perdas o força a não cooperar também.

Uma estratégia que evita essa perda, é a *olho por olho*, onde o jogador começa cooperando e depois repete a jogada do outro jogador no jogo anterior. Essa estratégia deixa o jogador o mais próximo possível do vencedor, mas não o supera, alcança no máximo um empate. Veja alguns exemplos:

j_i	Jogadas	N	C	C	N	N	N	C	N	C	N	Total
	Pontos	5	0	3	5	1	1	0	5	0	5	25
Olho por olho	Jogadas	C	N	C	C	N	N	N	C	N	C	Total
	Pontos	0	5	3	0	1	1	5	0	5	0	20

Tabela 2.5: Saldo de pontos do jogador j_i, com jogadas aleatórias, jogando com um jogador *olho por olho*.

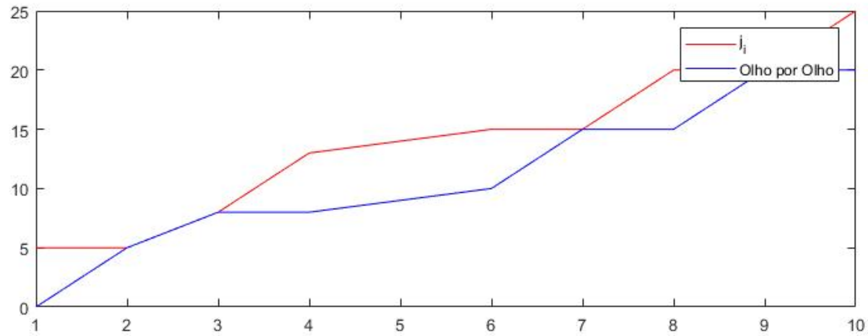

Figura 2.5: Soma de pontos dos jogadores j_i e *olho por olho*.

j_i	Jogadas	N	C	N	C	N	C	N	C	C	C	Total
	Pontos	5	0	5	0	5	0	5	0	3	3	26
Olho por olho	Jogadas	C	N	C	N	C	N	C	N	C	C	Total
	Pontos	0	5	0	5	0	5	0	5	3	3	26

Tabela 2.6: Saldo de pontos do jogador j_i, com jogadas aleatórias, jogando com um jogador *olho por olho*.

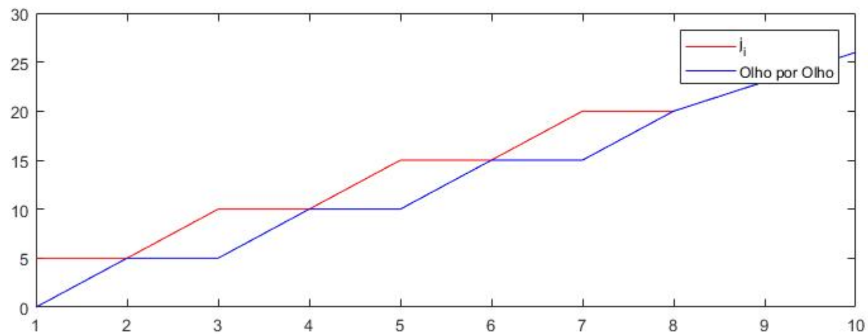

Figura 2.6: Soma de pontos dos jogadores j_i e *olho por olho*.

j_i	Jogadas	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Total
	Pontos	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14
Olho por olho	Jogadas	C	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Total
	Pontos	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

Tabela 2.7: Saldo de pontos do jogador j_i, com que nunca coopera, jogando com um jogador *olho por olho*.

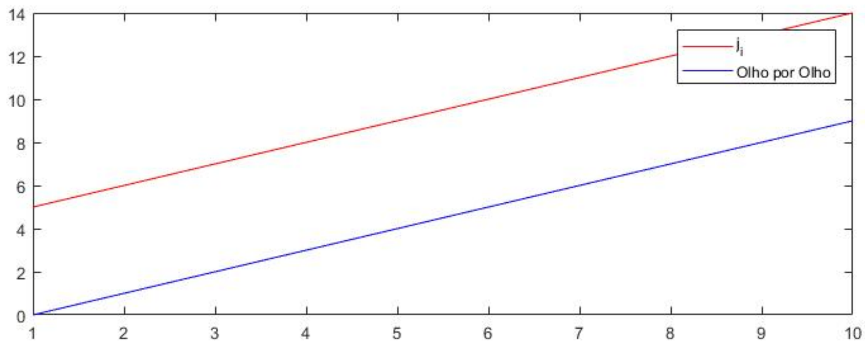

Figura 2.7: Soma de pontos dos jogadores j_i e *olho por olho*.

Olho por olho	Jogadas	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	Total
	Pontos	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	30
Olho por olho	Jogadas	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	Total
	Pontos	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	30

Tabela 2.8: Saldo de pontos de dois jogadores *olho por olho* jogando entre si.

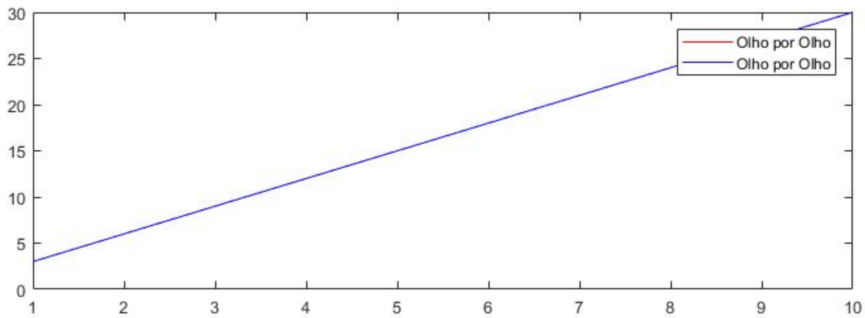

Figura 2.8: Soma de pontos dos jogadores *olho por olho*.

A estratégia *olho por olho* tem uma vantagem sobre a não coopera nunca, que é a de maximizar os ganho quando joga com outro jogador com a mesma estratégia, enquanto o não que coopera nunca, em 10 jogadas ganhou apenas 10 pontos contra um opositor com a mesma estratégia, o olho por olho ganhou 30 pontos.

A limitação da estratégia olho por olho, como veremos a seguir, é que o jogador só pode retalhar o outro jogador na jogada seguinte, se os jogos forem sempre com o mesmo jogador. Numa população de indivíduos onde eles jogam entre si, essa estratégia não é viável.

2.1.1 Coeficiente de Reputação

Em um grupo ou população de jogadores, podemos fazer jogos onde pegamos aleatoriamente dois jogadores e fazemos o jogo entre eles, isso faz com que o próximo jogo de cada jogador, raramente seja com o mesmo jogador anterior, então para guardar um histórico de cada jogador, associaremos a cada um deles um coeficiente $p \in [0, 1]$, que chamaremos de coeficiente de reputação, ou apenas a reputação do jogador j_i. Esse coeficiente será a probabilidade desse indivíduo cooperar no jogo, ou seja, quem tem uma reputação maior, tem maior chance de cooperar.

Os jogadores na hora da partida vão escolher sua estratégia baseada na sua reputação e na do seu oponente. A probabilidade do jogador j_i cooperar vai ser a média aritmética da sua reputação e a reputação do outro jogador. O gráfico 2.9 a seguir, mostra a quantidade de pontos que cada jogador ganha em função da sua reputação, numa simulação[1] onde dois jogadores são selecionados aleatoriamente para jogar 10^5 vezes, de uma população de 100 indivíduos com reputação linearmente distribuída de 0 a 1, e seus pontos são acumulados.

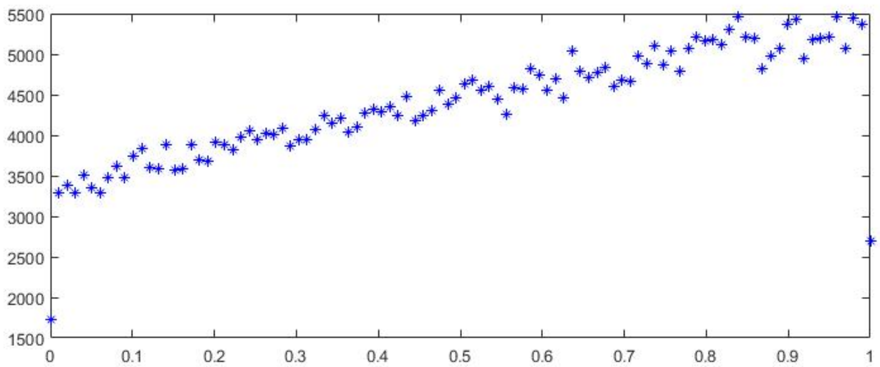

Figura 2.9: Quantidade de pontos em função da reputação dos jogadores.

O jogador com maior reputação acumula mais pontos, e essa diferença fica mais visível quando usamos uma média aritmética ponderada, onde cada jogador dá mais peso para a reputação do seu adversário. Veja os gráficos a seguir onde o jogador dá peso 2 para reputação do adversário e peso 1 pra sua (gráfico 2.10), e peso 3 para seu adversário e 1 para a sua (gráfico 2.11).

[1] A simulação foi feita no MATLAB e o algorítimo está anexado ao trabalho, no Apêndice 1

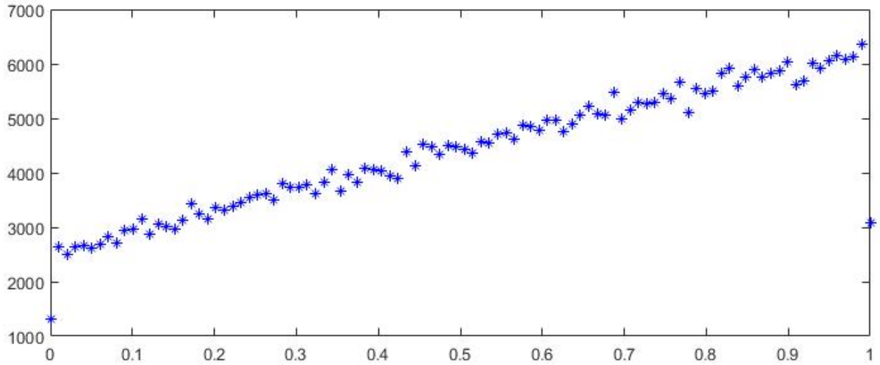

Figura 2.10: Quantidade de pontos em função da reputação dos jogadores.

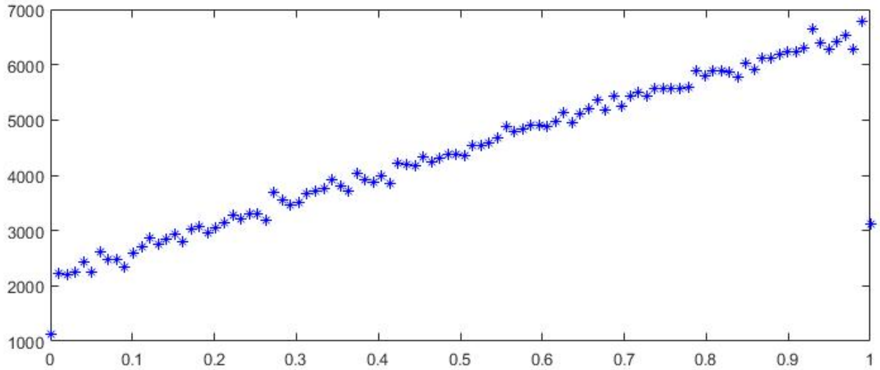

Figura 2.11: Quantidade de pontos em função da reputação dos jogadores.

É possível ver que o indivíduo que tem reputação 0 tem pouco pontos, isso se dá porque os outros jogadores quando feito a média ficam com uma probabilidade baixa de cooperar com ele. O jogador com reputação 1 também fica com pouco pontos, e isso é resultado de ele cooperar sempre.

2.2 Jogos Evolutivos

Suponhamos que os jogadores possa aprender com suas jogadas de jogos anteriores e as jogadas dos outros jogadores, ou seja, que eles possam evoluir suas estratégias. Definiremos uma nova forma de pontuação, a matriz de recompensas continuará a mesma, mas os pontos passarão a ser número de indivíduos gerados na população. Inicialmente vamos dividir a população em dois grupos, o grupo dos que cooperam sempre A e o dos que nunca cooperam B, eles vão jogar entre si, e o resultado de cada jogo, será o numero de indivíduo que aquele grupo ganhará ou gerará, ou seja, se ambos os indivíduos selecionados forem do grupo A, então o jogo será (C, C) onde cada um ganha 3 pontos que significa mais 6 jogadores para o seu grupo A, se ambos forem do grupo B o jogo será (N, N) e por consequência cada um ganhará 1 ponto que resulta em 2 indivíduos para o grupo B, e por fim se os dois selecionados forem um de cada grupo, o que coopera não ganha ponto portanto seu grupo A não ganha indivíduo e o que não coopera ganha 5 indivíduos para seu grupo B; e então mediremos qual grupo cresce mais.

O gráfico 2.12 mostra uma simulação[2] de uma população de 1000 indivíduos em que 50% deles cooperam sempre, grupo A e os outros 50% nunca cooperam, grupo B; dois indivíduos serão selecionados aleatoriamente para jogar um com o outro, e os indivíduos gerados a cada jogo será somado ao seu respectivo grupo, ao repetirmos esse processo calcularemos o percentual de cada grupo e aplicaremos esse percentual sobre a população inicial, corrigido o percentual de indivíduos de cada grupo pelo resultado do jogo. Chamaremos essas novas população de novas gerações gerações.

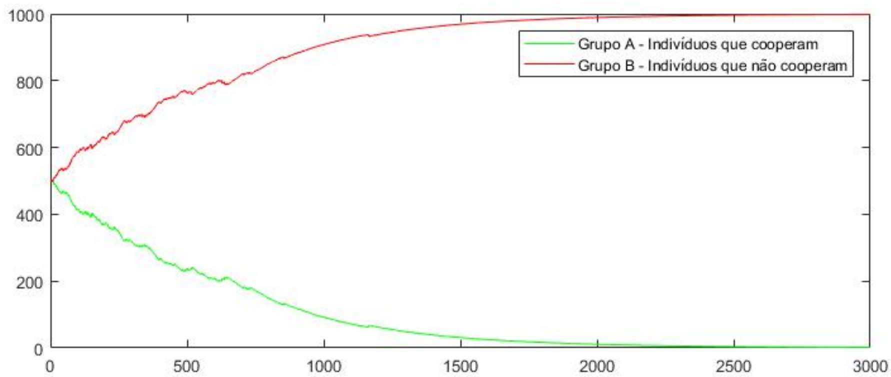

Figura 2.12: Evolução da não cooperação em 3000 gerações.

Não cooperar é a melhor estratégia sempre, esse resultado é obtido independente do percentual inicial da população, como mostra o gráfico 2.13, de uma simulação com uma população inicial com percentual de 90% de indivíduos que cooperam e apenas 10% de não cooperam, e ainda assim a não cooperação prevalece.

[2]A simulação foi feita no MATLAB e o algorítimo está anexado ao trabalho, no Apêndice 2

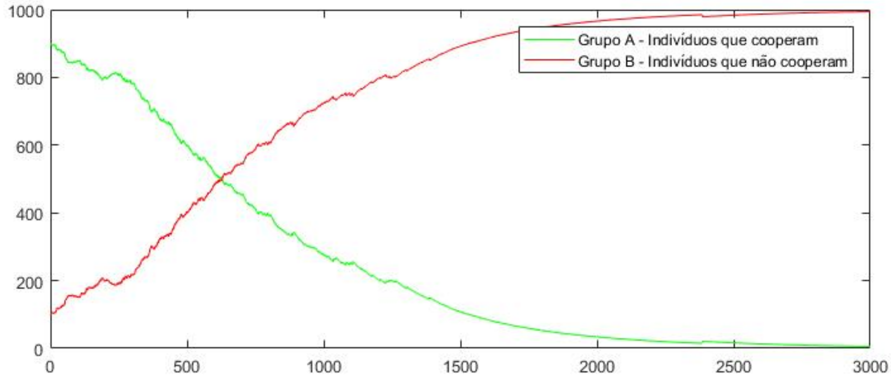

Figura 2.13: Evolução da não cooperação em 3000 gerações.

2.2.1 Evolução da Cooperação

Vamos criar uma população com 100 indivíduos e terá dois coeficientes p e q associados a cada um dele, o coeficiente p será sua reputação, que inicialmente será um número aleatório no intervalo $[0, 1]$ e o coeficiente q, que chamaremos perfil do jogador, será o peso que esse jogador dará a reputação do seu oponente, também no intervalo $[0, 1]$.

Na primeira etapa da simulação[3], será ser escolhido aleatoriamente dois jogadores e eles jogarão usando uma probabilidade de cooperar baseada na média aritmética ponderada entre a reputação dele e a do adversário, usando o seu perfil como peso, seja p_i e p_n a reputação do jogador j_i e j_n, e q_i o perfil do jogador j_i, então a probabilidade do jogador j_i cooperar nessa jogada contra o jogador j_n será $(1 - q_i)p_i + q_i p_n$. Vai ser executado 5000 jogos e depois somados seus pontos, através da matriz R e as reputações serão ajustadas obedecendo a seguinte matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Onde se o jogador cooperou com outro que cooperou, cada um ganha 0.5 ponto de reputação, se ambos não cooperam um com o outro então ambos não ganham reputação e se um coopera e o outro não, o que cooperou ganha 1 ponto de reputação e o que não cooperou perde 1 ponto.

Na segunda etapa, os perfis da população inicial serão atualizados, os perfis não

[3] A simulação foi feita no MATLAB e o algorítimo está anexado ao trabalho, no Apêndice 3

serão distribuídos aleatoriamente com distribuição normal entre 0 e 1, e sim obedecendo que mais se aproxima ao gráfico que relaciona pontos com perfil, ou seja, os perfis que geraram mais pontos para seus jogadores, serão mais replicados; como se os jogadores estivessem aprendendo com os que têm melhores resultados. E isso vai se repetir 1000 etapas.

O que podemos observar foi que reputação quando maior a reputação do indivíduo, maior a sua quantidade de pontos, veja o gráfico 2.14 que relaciona a reputação de cada jogador com seus pontos acumulados, e traça uma reta que mais se ajusta aos pontos.

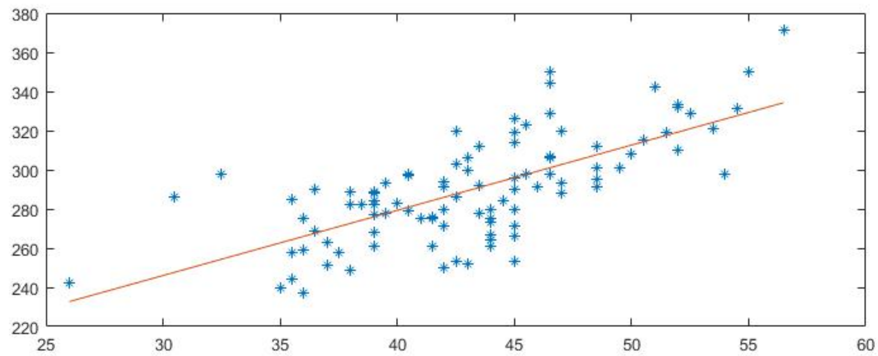

Figura 2.14: Pontos acumulados em relação a reputação e o ajuste dos pontos por uma reta

E a média das somas dos pontos ganhos, pelos dois jogadores, por partida foi se aproximando de 6, que é ganho máximo, ou seja, 3 pontos para cada um, que só é possível quando ambos cooperam. Veja o gráfico 2.15.

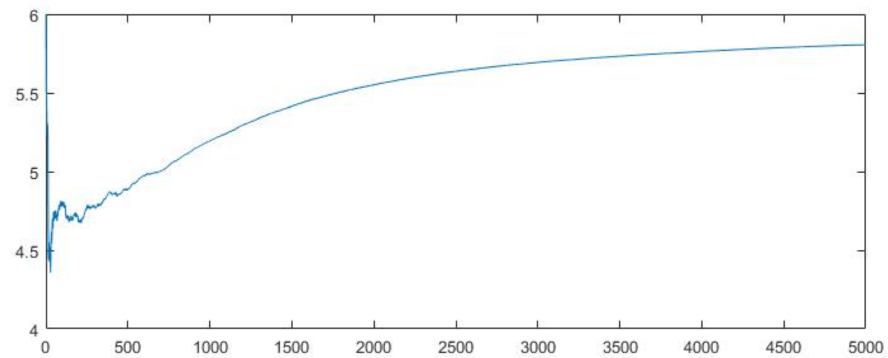

Figura 2.15: Pontos acumulados em relação a reputação e o ajuste dos pontos por uma reta

O gráfico 2.16 mostra que a maioria da população migrou para um perfil próximo de 1, que é significa dar peso máximo a reputação do oponente na hora de escolher a jogada.

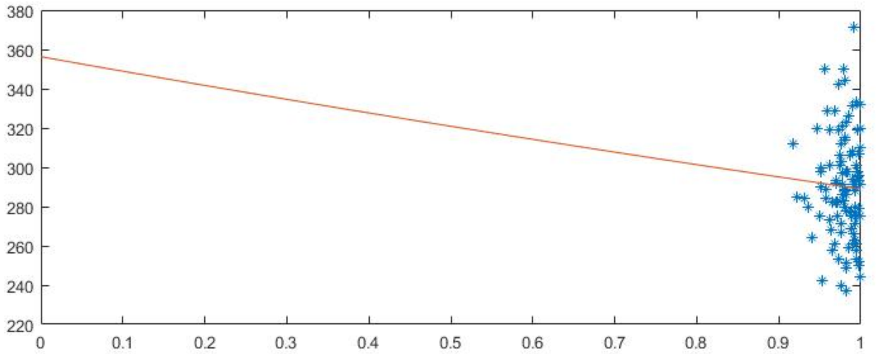

Figura 2.16: Pontos acumulados em relação ao perfil e o ajuste dos pontos por uma reta

Esses resultados foram dá ultima população, a mais aperfeiçoada. Agora veremos abaixo dois gráficos que mostram a evolução da cooperação e do perfil ao longo de todas as populações. No gráfico 2.17 temos o ganho médio por jogo em cada simulação, nas primeiras populações era próximo de 5, e o 5 só pode ser obtido pela matriz de pontos somando 5+0, ou seja, um cooperando e outro não, mas nas etapas seguintes esse numero foi subindo e tendendo a 6, que é obtido por 3+3, ou seja, quando ambos cooperam. No gráfico 2.18 o perfil médio da população tendendo a um, ou seja, cada jogador dando prioridade máxima a reputação do seu oponente.

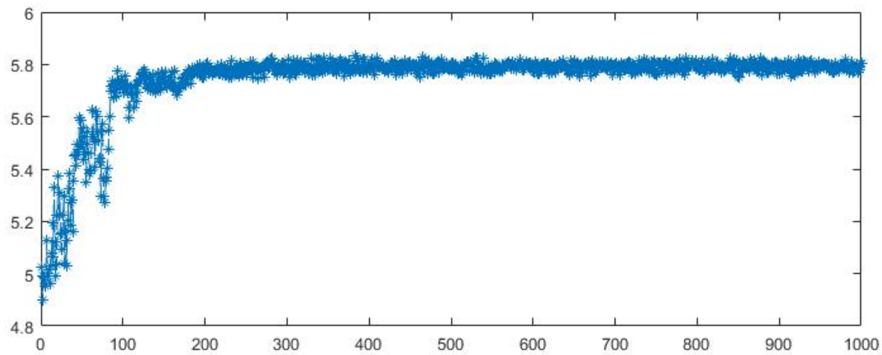

Figura 2.17: Ganho médio por jogada em cada simulação.

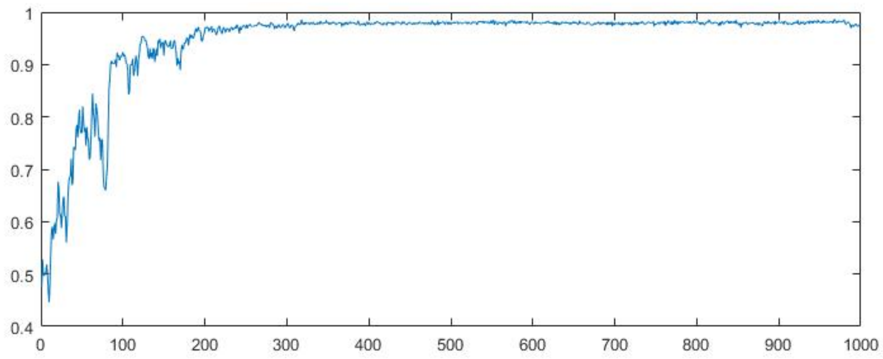

Figura 2.18: Perfil médio por simulação.

2.3 Aplicabilidade

Esse modelo mostra como é possível forçar a cooperação através da reputação. Essa estratégia já é usada desde os primórdios da civilização, sempre que alguém vai negociar com alguma pessoa, primeiro ela se informa pra saber se a pessoa é confiável ou não, isso nada mais é que dar prioridade a reputação da outra pessoa.

Com a globalização e o comércio pela internet, surgiu a necessidade de pensar em métodos de fazer as pessoas cooperarem mesmo sem conhecer seu consumidor ou fornecedor, e a solução foi criar mecanismo que expõe a reputação do indivíduo para consulta. Isso viabilizou e alavancou o comercio digital. Empresas como Uber, Mercado Livre, Submarino e outras empresas de vendas virtuais, controlam seus negócios e mantem um nível de cooperação reduzindo os golpes através da reputação.

Apêndice 1

```
p=input('População Inicial P = ');
coe=input('Percentual de Indivíduos que Cooperam K = ');
n=input('Número de Gerações N = ');
pc=coe.*p; % criação do grupo que coopera
pd=p-pc; % criação do grupo que não coopera
rc=zeros(1,n); % vetor para armazenar quantos cooperava a cada geração
rd=zeros(1,n); % vetor para armazenar quantos não cooperava a cada geração
a=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador a
b=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador b
T=[3 0; 5 1];
for i=1:n % jogo sendo executado n vezes
    if a<=coe % escolha da jogada do jogador a
        ja=1;
    else
        ja=0;
    end
    if b<=coe % escolha da jogada do jogador b
        jb=1;
    else
        jb=0;
    end
    if ja==1 && jb==1
        pc=pc+2.*T(1,1);
        pd=pd+T(1,2);
    elseif ja==1 && jb==0
        pc=pc+T(1,2);
        pd=pd+T(2,1);
    elseif ja==0 && jb==1
        pc=pc+T(1,2);
        pd=pd+T(2,1);
    elseif ja==0 && jb==0
        pc=pc+T(1,2);
        pd=pd+2.*T(2,2);
    end
    pn=pc+pd; % soma da população nessa geração
    coe=pc./pn; % atualizando o percentual do grupo que coopera
    pc=coe.*p; % atualizando o grupo que coopera
    pd=p-pc; % atualizando o grupo que não coopera
    rc(i)=pc; % armazenando quantos cooperou nessa geração
    rd(i)=pd; % armazenando quantos cooperou nessa geração
    a=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador a
    b=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador a
end
aux=figure(1); % gerando o gráfico
set(aux,'Name','Evolução da Proporção')
plot(1:n,rc,'g',1:n,rd,'r')
legend('Grupo A - Indivíduos que cooperam','Grupo B - Indivíduos que não cooperam')
```

Apêndice 2

```
p=input('População Inicial P = ');
n=input('Número de interações N = ');
J=[transp(1:p), transp(0:1/(p-1):1), zeros(p,1)]; % criação dos jogadores
T=[3 0; 5 1]; % matriz do jogo
for i=1:n % jogo sendo executado n vezes
    a=1+round((p-1).*rand); % escolha do jogador a
    b=1+round((p-1).*rand); % escolha do jogador b
    ea=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador a
    eb=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador b
    if a==b
        a=1+round((p-1).*rand); % escolha do jogador a
        b=1+round((p-1).*rand); % escolha do jogador b
        ea=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador a
        eb=rand; % gerador aleatorio da estrategia do jogador b
    else
        if ea<=(J(a,2)+3*J(b,2))/4 % escolha da jogada do jogador a
            ja=1;
        else
            ja=0;
        end
        if eb<=(J(b,2)+3*J(a,2))/4 % escolha da jogada do jogador b
            jb=1;
        else
            jb=0;
        end
        if ja==1 && jb==1
            J(a,3)=J(a,3)+T(1,1);
            J(b,3)=J(b,3)+T(1,1);
        elseif ja==1 && jb==0
            J(a,3)=J(a,3)+T(1,2);
            J(b,3)=J(b,3)+T(2,1);
        elseif ja==0 && jb==1
            J(a,3)=J(a,3)+T(2,1);
            J(b,3)=J(b,3)+T(1,2);
        elseif ja==0 && jb==0
            J(a,3)=J(a,3)+T(2,2);
            J(b,3)=J(b,3)+T(2,2);
        end
    end
end
aux=figure(1); % gerando o gráfico
set(aux,'Name','Ganhos Individuais Baseados na Reputação')
plot(J(:,2),J(:,3),'b*')
```

Apêndice 3

```
nsim = 1000; % numero de repetições
nint = 5000; % numero de jogadas
p = 100; % tamanho da população
tx = 1; % taxa de substituição

M = [3 0;5 1]; % matriz do jogo
Mr = [0.5 1;-1 0]; % matriz das reputações

R = zeros(p,1); % matriz de reputação.
Per = rand(p,1); % probabilidades de cooperar ou não cooperar de cada indivíduo.
P = zeros(p,1); % vetor de pontos por jogador
%SP = zeros(nint,1); % vetor de pontos por rodada
pes = rand(p,1); % pesos da media ponderada  entre as probabilidades de escolher e a probabilidade de cooperar dada por pela

c=[];
vint = (1:nint)';
vestab = zeros(nsim,1);
meanper = zeros(nsim,1);

co = [1,1]; % chute inicial para o ajuste exponencial
coe = [1,1]; % chute inicial para o ajuste exponencial
opts = optimset('Display','off');

for n = 1:nsim

    SP = zeros(nint,1); % vetor de pontos por rodada
    SR = zeros(nint,1);

    tr = randperm(p,tx*p); % substituição da população
    R(tr) = zeros(tx*p,1);
    Per(tr) = rand(tx*p,1);
    P(tr) = zeros(tx*p,1); % vetor de pontos por jogador

    pesa = rand(tx*p,1);

    if (n>1&&c(2)~=0)
        pesa = (1/c(2))*log(c(2).*pesa/c(1)+1); % Distribuição da nova geração
    end

    pes(tr) = pesa;

    for i = 1:nint

        js = randperm(p,2); % escolha dos jogadores 1 e 2

        ea = rand(1,1);
        eb = rand(1,1);
```

```
    ta = 1/(1+exp(-0.5*R(js(2)))); %% probabilidade de 1 cooperar pela reputação de 2
    tb = 1/(1+exp(-0.5*R(js(1))));%% probabilidade de 2 cooperar pela reputação de 1

    ma = (1-pes(js(1)))*Per(js(1))+(pes(js(1)))*ta; % media ponderada para a probabilidade de 1 cooperar
    mb = (1-pes(js(2)))*Per(js(2))+(pes(js(2)))*tb; % media ponderada para a probabilidade de 2 cooperar

    ta = ma; % troca de variavel
    tb = mb; % troca de variavel

    if ((ea<ta)&&(eb<tb))

        P(js) = P(js)+M(1,1);
        R(js) = R(js)+Mr(1,1);

        SR(i+1) = SR(i)+2*Mr(1,1);
        SP(i+1) = SP(i)+2*M(1,1);

    elseif((ea>=ta)&&(eb>=tb))

        P(js) = P(js)+M(2,2);
        R(js) = R(js)+Mr(2,2);

        SR(i+1) = SR(i)+2*Mr(2,2);
        SP(i+1) = SP(i)+2*M(2,2);

    elseif((ea<ta)&&(eb>=tb))

        P(js(1)) = P(js(1))+M(1,2);
        R(js(1)) = R(js(1))+Mr(1,2);
        P(js(2)) = P(js(2))+M(2,1);
        R(js(2)) = R(js(2))+Mr(2,1);

        SR(i+1) = SR(i)+Mr(1,2)+Mr(2,1);
        SP(i+1) = SP(i)+M(1,2)+M(2,1);

    elseif((ea>=ta)&&(eb<tb))

        P(js(1)) = P(js(1))+M(2,1);
        R(js(1)) = R(js(1))+Mr(2,1);
        P(js(2)) = P(js(2))+M(1,2);
        R(js(2)) = R(js(2))+Mr(1,2);

        SR(i+1) = SR(i)+Mr(1,2)+Mr(2,1);
        SP(i+1) = SP(i)+M(1,2)+M(2,1);

    end

end
```

```
    SR = SR(2:end); SP = SP(2:end);

    A = [ones(size(R)) R]; b = A'*P; A = A'*A; coe = A\b;

    fun = @(x)(P-x(1).*exp(x(2).*pes)); % ajuste exponencial
    coe = lsqnonlin(fun,coe,[],[],opts); % ajuste exponencial

    [nind,xind] = hist(pes,10); % ajuste exponencial
    yind = nind.*(coe(1)*exp(coe(2)*xind)); % para o ajuste exponencial
    fun = @(x)(yind-x(1).*exp(x(2).*xind)); % ajuste exponencial
    co = lsqnonlin(fun,co,[],[],opts); % ajuste exponencial
    alf = co(2)/(co(1)*(exp(co(2))-1)); % ajuste exponencial
    c = [co(1)*alf co(2)]; % ajuste exponencial
    vestab(n) = SP(end)/(nint+1); % ajuste exponencial

    meanper(n,1) = mean(pes);

end

disp(['Retorno medio por jogada => ' num2str(SP(end)/(nint+1))])
disp(['Reputacao media por jogada => ' num2str(SR(end)/(nint+1))])
disp(' ')

f1 = figure(1);
subplot(2,3,1);
plot(vint,SR./vint)
title('Reputação média por jogada')

subplot(2,3,2);
plot(R,P,'*')
title('Reputação vs Pontos')
hold on
plot([min(R) max(R)],coe(1)+coe(2)*[min(R) max(R)])
hold off

subplot(2,3,3);
plot(vint,SP./vint)
title('Ganho Médio')

subplot(2,3,4);
plot(pes,P,'*')
title('Perfil vs Pontos')

subplot(2,3,5);
plot(xind,yind,'*',linspace(0,max(xind),100),co(1)*exp(co(2).*linspace(0,max(xind),100)))
hold on
plot(linspace(0,max(pes),100),coe(1)*exp(coe(2).*linspace(0,max(pes),100)))
hold off
```

```
f2 = figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(1:nsim,vestab,'--*')
title('Ganho Médio por Simulação')

subplot(2,1,2);
plot(1:nsim,meanper)
title('Perfil Médio por Simulação')
```

Referências Bibliográficas

[1] BIERMAN, H. Scott; FERNANDEZ, Luis; **Teoria Dos Jogos**, 2ª edição, Pearson, São Paulo - SP. 2012.

[2] SARTINI, Brígida Alexandre; GARBUGIO, Gilmar; BORTOLOSSI, Humberto José; SANTOS, Polyane Alves; BARRETO, Larissa Santana; **Uma Introdução a Teoria dos Jogos**, II Bienal da SBM, Universidade Federal da Bahia, 25 a 29 de outubro de 2004.

[3] NEUMANN, John von; **Zur Theorie der Gesellschaftsspiele**. Mathematische Annalen, vol. 100. Traduzido por S. Bargmann: **On the Theory of Games of Stategy em Contributions to the Theory of Games**, vol. 4, A. W. Tucker e R. D. Luce (editores), Princeton University Press, 1959.

[4] COURNOT, Augustin A.; **Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses**, 1838. Traduzido por N. T. Bacon em **Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth**, McMillan, New York, 1927.

[5] ZERMELO, Ernst; **Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels.** Atas do Décimo Quinto Congresso Internacional de Matemáticos, vol. 2, 1913.

[6] NEUMANN, John von e MORGENSTERN, Oscar; **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press, 1944.

[7] NASH Jr, John F.; **Two-person Cooperative Games**. Econometrica, 1953.

[8] NASH Jr, John F.; **Non-Cooperative Games**. PhD. Thesis. Princeton University Press, 1950.

[9] NASH Jr, John F.; **Non-Cooperative Games**. Annals of Mathematics, 1951.

[10] NASH Jr, John F.; **The Bargaining Problem**. Econometrica, 1950.