Capítulo 1

Exercícios

Definição 1.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Considerando $W^{ss(uu)}(x) \subseteq M$ a variedade estável (respectivamente instável) forte de x, chamamos de* ***disco estável*** *(respectivamente* ***instável) forte de*** *x* ***de tamanho*** *k, a bola fechada $D_k^{ss(uu)}(x) \subseteq W^{ss(uu)}(x)$ de raio $k/2$, pela métrica em $W^{ss(uu)}(x)$, e centrada em x.*

Lema 1.2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e $\varepsilon \in [0,1]$ dado, se f for $ms-$minimal ou $mu-$minimal, então para todo $\delta > 0$, existe um conjunto $W \subseteq \mathcal{X}(f)$ e $K > 0$ suficientemente grande tal que $D_K^{ss(uu)}(x)$ é $\delta-$denso em M para todo $x \in W$ e $m(W) > 1 - \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, $x \in M$ um ponto qualquer e $D_k^{ss(uu)}(x)$ o disco estável (instável) forte de x de tamanho k. Como $\overline{W^{ss(uu)}(x)} = M$, pois f é $ss(uu)-$minimal, então existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $D_k^{ss(uu)}(x)$ é $\delta-$denso em M.

Pela continuidade das variedades estáveis (instáveis) forte, existe uma vizinhança U_x de x tal que para todo $y \in U_x$, existe $k_y \in \mathbb{N}$ tal que $D_k^{ss(uu)}(x)$ também é $\delta-$denso em M. Como f é parcialmente hiperbólico e x é um ponto qualquer de M, então $\cup_{x\in M} U_x$ é uma cobertura aberta de M, e pela compacidade de M existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M \subseteq \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Seja $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $D_{k_{x_i}}^{ss(uu)}(x_i)$ seja $\delta-$denso em M, tomemos $K = \max\left\{k_{x_1}, k_{x_2}, \cdots, k_{x_n}\right\}$ e então para qualquer $x \in M$ temos que $x \in U_{x_i}$ para algum $i \in \mathbb{N}$, logo $D_K^{ss(uu)}(x)$ é $\delta-$denso em M. □

Teorema 1.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando a medida de Lebesgue m. Se f for $ms-$minimal ou $mu-$minimal, então f é topologicamente mixing.*

Demonstração. Vamos provar para o caso $mu-$minimal, e para o caso $ms-$minimal a demonstração é análoga.

Sejam $U, V \subseteq M$ dois abertos quaisquer. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que U contenha uma bola aberta B de raio ε, e $D_{\varepsilon}^{uu}(x) \subseteq U$ para todo ponto $x \in B$. Como B é aberto, então $b = m(B) > 0$.

Seja $\delta > 0$ tal que V contenha uma bola de raio δ. Como f é $mu-$minimal, pelo Lema 1.2 existem $W \in M$ e $K > 0$ suficientemente grande, tal que $D_K^{uu}(x)$ é $\delta-$denso para todo $x \in W$ e $m(W) > 1 - b$. Por hiperbolicidade, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n\big(D_{\varepsilon}^{uu}(x)\big) \supseteq D_K^{uu}(x)$ para todo $n > n_0$ e para todo $x \in M$. Temos também que $m\big(f^{-n}(W)\big) = m(W)$ pois f preserva a medida. Fixemos um $n \in \mathbb{N}$ onde $n > n_0$.

Afirmação: $f^{-n}(W) \cap B \neq \emptyset$. De fato, suponhamos que $f^{-n}(W) \cap B = \emptyset$. Daí, por aditividade da medida, temos que se $f^{-n}(W) \cap B = \emptyset$ então $m\big(f^{-n}(W) \cup B\big) = m\big(f^{-n}(W)\big) + m(B) > b + 1 - b = 1$. Absurdo pois $f^{-n}(W) \cup B \subseteq M$ e $m(M) = 1$. Logo $f^{-n}(W) \cap B \neq \emptyset$.

Tomemos $z \in f^{-n}(W) \cap B$. Como $z \in f^{-n}(W)$ temos também que $f^n(z) \in W$, logo $f^n\big(D_{\varepsilon}^{uu}(z)\big) \supseteq D_K^{uu}\big(f^n(z)\big)$ é $\delta-$denso. Por escolha de B, temos $D_{\varepsilon}^{uu}(z) \subseteq U$ e por escolha de δ, temos $f^n\big(D_{\varepsilon}^{uu}(z)\big) \cap V$ e como $n > n_0$ é um qualquer, então $f^n(U) \cup V \neq \emptyset$ para todo $n > n_0$. Como U e V foram tomados abertos quaisquer então f é topologicamente **mixing**. $\square$