Capítulo 1

Densidade das Variedades Estáveis e Instáveis dos Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos

Neste capítulo enfraqueceremos as hipóteses usadas na construção do conjunto hiperbólico, não teremos os mesmos resultados do caso Anosov, mas ainda assim podemos extrair resultados interessantes. Começaremos por supor que o subespaço central não é o subespaço trivial, isto é, $E^c_x \neq \{0\}$, para todo $x \in M$. E para isso, introduziremos um novo conceito de decomposição do espaço tangente, em que um subespaço domina o outro, mais precisamente:

Definição 1.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^k definido em uma variedade diferenciável M. Dizemos que um conjunto $\Lambda \subseteq M$ admite uma **decomposição dominada** no espaço tangente se Λ é $f-$invariante e existem $0 < \lambda < 1$ e $C \in \mathbb{R}$, tais que para cada $x \in M$:*

i) Existe uma decomposição $T_xM = E_x \oplus F_x$;

ii) Essa decomposição é $Df-$invariante, ou seja, $Df(E_x) = E^s_{f(x)}$ e $Df(F_x) = F_{f(x)}$;

iii) E_x e F_x variam continuamente com x;

iv) $\dfrac{\|Df^n|_{E_x}(v)\|}{\|Df^n|_{F_x}(v)\|} \leq C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in T_xM$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Essa decomposição estabelece uma relação entre os subespaços E_x e F_x, embora eles possam não contrair nem expandir sempre, sabemos que quando E_x contrai, ele o faz exponencialmente mais rápido que o F_x, e quando E_x expande, F_x também expande exponencialmente mais rápido. Note que um conjunto hiperbólico possui uma decomposição dominada, basta tomar $E_x = E^s_x$ e $F_x = E^u_x$. Podemos então definir uma decomposição parcialmente hiperbólica.

Definição 1.2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^k definido em uma variedade diferenciável M. Dizemos que $\Lambda \subseteq M$ é um conjunto* ***parcialmente hiperbólico****, se Λ é $f-$invariante e existem $0 < \lambda < 1$ e $C \in \mathbb{R}$, tais que para cada $x \in \Lambda$:*

i) *Existe a decomposição $T_xM = E_x^s \oplus E_x^c \oplus E_x^u$;*

ii) *Essa decomposição é Df_x-invariante, ou seja, $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$, $Df(E_x^c) = E_{f(x)}^c$ e $Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$;*

iii) *E_x^s, E_x^c e E_x^u variam continuamente com x;*

iv) *$\|Df^n|_{E_x^s}(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in E_x^s$ e todo $n \in \mathbb{N}$;*

v) *$\|Df^{-n}|_{E_x^u}(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in E_x^u$ e todo $n \in \mathbb{N}$;*

vi) *$\dfrac{\|Df^n|_{E_x^s}(v)\|}{\|Df^n|_{E_x^c}(v)\|} \leq C\lambda^n\|v\|$ e $\dfrac{\|Df^n|_{E_x^c}(v)\|}{\|Df^n|_{E_x^u}(v)\|} \leq C\lambda^n\|v\|$, para todo $v \in T_xM$ e todo $n \in \mathbb{N}$.*

Quando M é um conjunto parcialmente hiperbólico, chamamos $f : M \to M$ de **difeomorfismo Parcialmente Hiperbólico**. Note que o subespaço E_x^c forma uma decomposição dominada com E_x^s e E_x^u, isto é, nos pontos em que E_x^c contrai, E_x^s contrai exponencialmente mais rápido, e nos pontos em que E_x^c expande, E_x^u expande exponencialmente mais rápido. Isso significa que os subespaços centrais são dominados em ambos os extremos pelos subespaços estáveis e instáveis. Analogamente ao caso Anosov, podemos garantir a existência de variedades estáveis e instáveis forte locais, embora elas possuam um comportamento diferente, como veremos no próximo resultado.

Teorema 1.3. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r definido em uma variedade diferenciável M, $\Lambda \subseteq M$ um conjunto parcialmente hiperbólico e $x \in \Lambda$ um ponto qualquer, então existem variedades locais únicas $W_{loc}^{ss}(x)$ e $W_{loc}^{uu}(x)$ que integram E_x^s e E_x^u, respectivamente, em que $f\big(W_{loc}^{ss}(x)\big) \subseteq W_{loc}^{ss}\big(f(x)\big)$ e $f^{-1}\big(W_{loc}^{uu}f(x)\big) \subseteq W_{loc}^{uu}(x)$. Além disso,*

$$W^{ss}(x) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}\Big(W_{loc}^{ss}\big(f^n(x)\big)\Big) \quad e \quad W^{uu}(x) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{n}\Big(W_{loc}^{uu}\big(f^{-n}(x)\big)\Big)$$

também são subvariedades de M de mesma dimensão que E_x^s e E_x^u, respectivamente, e variam continuamente com o x. E $W^{ss}(x)$ é chamada de ***variedade estável forte*** *de x e $W^{uu}(x)$ de* ***variedade instável forte*** *de x.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [?], no Capítulo 5, Teorema 5.5 e Corolário 5.6. □

É claro que $W^{ss}(x)$ e $W^{uu}(x)$ estão contidas, respectivamente, nos conjuntos estáveis e instáveis, que em geral não são subvariedades. Nosso objetivo principal desse capítulo é estudar as propriedades provenientes da densidade das variedades fortes.

Definição 1.4. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Dizemos que f é $ss-$**minimal** se para todo ponto $x \in M$, a variedade estável forte $W^{ss}(x)$ é densa em M. Analogamente, dizemos que f é $uu-$**minimal** se para todo ponto $x \in M$, a variedade instável forte $W^{uu}(x)$ é densa em M.*

Chamamos de **disco estável forte** de x de tamanho k, a bola fechada $D_k^{ss}(x) \subseteq W^{ss}(x)$ de raio k pela métrica em $W^{ss}(x)$ e centrada em x. Analogamente, definimos o **disco instável forte** $D_k^{uu}(x) \subseteq W^{uu}(x)$ de x de tamanho k. Caso precisemos deixar claro qual a função estamos nos referindo, denotaremos tais discos por $D_k^{ss}(x, f)$ e $D_k^{uu}(x, f)$, respectivamente.

Vejamos que $ss(uu)-$minimalidade também tem implicações topológicas na dinâmica assim como o Teorema **??**.

Teorema 1.5. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Se f for $ss-$minimal ou $uu-$minimal, então f é topologicamente mixing.*

A demonstração desse teorema é inteiramente análoga a apresentada no passo $iii) \Rightarrow iv)$ do Teorema **??**.

Esse teorema não é uma equivalência, como no caso Anosov, porque a demonstração de topologicamente mixing implicar $s(u)-$minimal depende fortemente da existência de um $\delta > 0$ tal que se $d(z, w) < \delta$ então $W_\varepsilon^{s(u)}(z) \cap W_\varepsilon^{u(s)}(w) \neq \emptyset$, o que nesse caso não acontece, pois a dimensão de E_x^c é diferente de 0, daí não podemos garantir que as variedades estáveis e instáveis fortes locais desses pontos se intersectam, por transversalidade.

A seguir estudaremos o caso em que a $ss-$minimalidade e $uu-$minimalidade existe a menos de conjuntos de medida nula.

1.1 $m-$minimalidade

Existem difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em que o conjunto dos pontos cuja variedade estável e instável forte são densas em M é um conjunto grande em termos de medida. Para estudarmos esse caso, precisaremos de algumas definições adicionais.

Definição 1.6. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e m uma medida de Lebesgue $f-$invariante tal que $m(M) = 1$. Definimos os conjuntos $\mathcal{X}^s(f) = \{x \in$*

*M; $\overline{W^{ss}(x)} = M\big\}$ e $\mathcal{X}^u(f) = \big\{x \in M;\ \overline{W^{uu}(x)} = M\big\}$, o conjunto dos pontos que possuem variedade estável forte densa em M e o conjunto dos pontos que possuem variedade instável forte densa em M, respectivamente; e $\mathcal{X}(f) = \mathcal{X}^s(f) \cap \mathcal{X}^u(f)$. Dizemos que f é $ms-$**minimal** se $m\big(\mathcal{X}^s(f)\big) = 1$. Analogamente, dizemos que f é $mu-$**minimal** $m\big(\mathcal{X}^u(f)\big) = 1$. Finalmente, dizemos que f é $m-$**minimal** se for ambos, $ms-$minimal e $mu-$minimal, isto é, $m\big(\mathcal{X}(f)\big) = 1$.*

Em (Arbieto/Catalan/Nobili [?]), eles mostram que difeomorfismos $m-$minimais são abundantes no conjunto dos difeomorfismos. Mais precisamente:

Teorema 1.7. *Seja $\mathrm{Diff}^1_m(M)$ o conjunto dos difeomorfismos de M em M de classe C^1 que preservam a medida m. Então, existe um conjunto aberto $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Diff}^1_m(M)$ tal que todo difeomorfismo de classe C^2 parcialmente hiperbólico $f \in \mathcal{G}$ é $m-$minimal.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [?], Teorema 1.4. □

Na sequência enunciaremos o resultado principal desse capítulo.

Teorema 1.8. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico preservando a medida de Lebesgue m. Se f for $ms-$minimal ou $mu-$minimal, então f é topologicamente mixing.*

Para provar esse teorema, demonstraremos alguns resultados preliminares, como o Lema a seguir.

Lema 1.9. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta contando com uma $\sigma-$álgebra de Borel, e m uma medida de Lebesgue em M tal que $m(M) = 1$. Se $A \subseteq M$ é um conjunto aberto e $A \subseteq \bigcup_{x\in A} B(x, \delta_x)$, em que $B(x, \delta_x)$ é uma bola aberta contida em A para todo $x \in A$, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um conjunto finito $\big\{x_1, x_2, \cdots, x_k\big\} \subseteq A$ tal que*

$$m\left(A - \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta_{x_i})\right) < \varepsilon$$

Demonstração. Para uniformizar a demonstração, faremos uma substituição de notação, façamos $\delta^1_x = \delta_x$.

Tomemos $\gamma_1 = \sup\big\{\delta^1_x;\ x \in A\big\}$. Pela compacidade de M temos que $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ e pela definição de supremo existe $x_1 \in A$ tal que $\delta^1_{x_1} > \frac{\gamma_1}{2}$.

Se $A \subseteq \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})}$, como $m\Big(\overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})} - B(x_1, \delta^1_{x_1})\Big) = 0$, então $m\big(A - B(x_1, \delta^1_{x_1})\big) = 0 < \varepsilon$ finalizando a demonstração.

Se $A \nsubseteq \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})}$, então $A - \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})} \neq \emptyset$ é um conjunto aberto e podemos tomar $\delta^2_x < \delta^1_x$ de forma que

$$A - \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})} \subseteq \bigcup_{x \in A - \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})}} B(x, \delta^2_x).$$

Assim, tomemos $\gamma_2 = \sup\left\{\delta^2_x;\ x \in A - \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})}\right\}$. Pela definição de supremo existe $x_2 \in A - \overline{B(x_1, \delta^1_{x_1})}$ tal que $\delta^2_{x_2} > \frac{\gamma_2}{2}$. Note que por construção temos $B(x_1, \delta^1_{x_1}) \cap B(x_2, \delta^2_{x_2}) = \emptyset$.

Seguindo recursivamente esse processo de construção, podemos chegar a um dos dois casos:

Caso 1: Existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B(x_i, \delta^i_{x_i})}.$$

Caso 2: Existe uma sequência infinita de pontos $x_i \in A$ tal que $\delta^i_{x_i} > 0$ e $B_i = B(x_i, \delta^i_{x_i}) \subseteq A$ é uma sequência de abertos dois a dois disjuntos.

Se vale o Caso 1, então a demonstração está concluída. Por outro lado vejamos o cenário do Caso 2. Observemos que como os B_i são dois a dois disjuntos e $m(A) \leq m(M) = 1$, temos que $\lim\limits_{i \to +\infty} \delta^i_{x_i} = 0$. Usando isso mostraremos a seguinte afirmação.

Afirmação: $m\left(A - \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = 0.$

De fato, seja $D_i = B(x_i, 5\delta^i_{x_i})$. Como $\lim\limits_{i \to +\infty} \delta^i_{x_i} = 0$, temos que $\lim\limits_{i \to +\infty} m(D_i) = 0$ e portanto $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} m(D_i)\right) = 0$. Vamos mostrar agora que $A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i$. Dado $x \in A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, por definição de γ_i existe $n_0 > n$ tal que $d(x, x_{n_0}) < 4\delta^{n_0}_{x_{n_0}}$. Daí, $x \in B(x_{n_0}, 5\delta^i_{x_i}) = D_{n_0}$, logo $x \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i$. Como $x \in A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ é um qualquer, temos que $A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{i=n+1}^{\infty} D_i$.

Logo,

$$\begin{aligned}
m\left(A - \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) &= \lim_{n \to +\infty} m\left(A - \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&\leq \lim_{n \to +\infty} m\left(\bigcup_{i=n+1}^{n} D_i\right) \\
&\leq \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{+\infty} m(D_i)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mostrando a Afirmação.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m\big(A - \bigcup_{i=1}^{k} B_i\big) < \varepsilon$. Como $\delta^i_{x_i} \leq \delta_{x_i}$ temos

$$m\left(A - \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta_{x_i})\right) \leq m\left(A - \bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) < \varepsilon.$$

E assim, concluímos a demonstração. $\square$

Definamos os conjuntos $\mathcal{X}^s_\delta(f) = \{x \in M;\ W^{ss}(x) \text{ é } \delta-\text{denso em } M\}$ e $\mathcal{X}^u_\delta(f) = \{x \in M;\ W^{uu}(x) \text{ é } \delta-\text{denso em } M\}$. Note que tais conjuntos são abertos, pois $W^{ss}(x)$ e $W^{uu}(x)$ variam continuamente com x, e temos as seguintes inclusões: $\mathcal{X}^s(f) \subseteq \mathcal{X}^s_\delta(f)$ e $\mathcal{X}^u(f) \subseteq \mathcal{X}^u_\delta(f)$. A seguinte proposição é uma consequência da definição de $ms-$minimal e do Lema 1.9.

Proposição 1.10. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e $\varepsilon \in (0,1]$ dado, se f for $ms-$minimal ou $mu-$minimal, então para todo $\delta > 0$, existe um conjunto $W \subseteq \mathcal{X}^{s(u)}(f)$ e $K > 0$ suficientemente grande tal que $D^{ss(uu)}_K(x)$ é $\delta-$denso em M para todo $x \in W$ e $m(W) > 1 - \varepsilon$.*

Demonstração. Vamos provar para o caso $ms-$minimal. Para o caso $mu-$minimal a demonstração é análoga.

Seja $\delta > 0$ e $x \in \mathcal{X}^s(f)$ um ponto qualquer. Então, existe $k_x > 0$ tal que $D^{ss}_{k_x}(x)$ é $\delta-$denso em M. Pela continuidade das variedades estáveis fortes, existe uma vizinhança $V_x \subseteq \mathcal{X}^s_\delta(f)$ tal que $D^{ss}_{k_x}(y)$ é $\delta-$denso em M para todo $y \in V_x$. Como x é um ponto qualquer de $\mathcal{X}^s_\delta(f)$, então $\bigcup_{x\in\mathcal{X}^s_\delta(f)} V_x$ é uma cobertura aberta, e portanto mensurável, de $\mathcal{X}^s_\delta(f)$. Temos que $m\big(\mathcal{X}^s_\delta(f)\big) = 1$, pois $\mathcal{X}^s(f) \subseteq \mathcal{X}^s_\delta(f)$ e, por $ms-$minimalidade, $m\big(\mathcal{X}^s(f)\big) = 1$. Logo, pelo Lema 1.9, dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m\left(\bigcup_{x_i=1}^n V_{x_i}\right) > 1 - \varepsilon$.

Seja $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $D^{ss}_{k_{x_i}}(x_i)$ seja $\delta-$denso em M, tomemos $K = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \cdots, k_{x_n}\}$ e $W = \mathcal{X}^s(f) \cap \left(\bigcup_{x_i=1}^n V_{x_i}\right)$. Note que $m(W) = m\left(\bigcup_{x_i=1}^n V_{x_i}\right) > 1 - \varepsilon$, pois $m\big(\mathcal{X}^s(f)\big) = 1$. Então, para todo $x \in W$ temos que $x \in V_{x_i}$, para algum $i \in \mathbb{N}$, logo $D^{ss}_K(x)$ contém $D^{ss}_{k_{x_i}}(x)$, e portanto é $\delta-$denso em M, concluindo a demonstração. $\square$

Agora podemos demonstrar o Teorema 1.8.

Demonstração do Teorema 1.8. Vamos provar para o caso $mu-$minimal. Para o caso $ms-$minimal a demonstração é análoga.

Sejam $U, V \subseteq M$ dois abertos quaisquer. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que U contenha uma bola aberta B de raio ε, e $D^{uu}_\varepsilon(x) \subseteq U$ para todo $x \in B$. Como B é aberto, então $b = m(B) > 0$.

Seja $\delta > 0$ tal que V contenha uma bola de raio δ. Como f é $mu-$minimal, pela Proposição 1.10 existem $W \subseteq M$ e $K > 0$ suficientemente grande, tal que $D^{uu}_K(x)$ é $\delta-$denso para todo $x \in W$ e $m(W) > 1 - b$. Por hiperbolicidade, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n\big(D^{uu}_\varepsilon(x)\big) \supseteq D^{uu}_K\big(f^n(x)\big)$ para todo $n > n_0$ e para todo $x \in M$. Observemos que $m\big(f^{-n}(W)\big) = m(W)$ pois f preserva a medida. Fixemos $n > n_0$.

Afirmação: $f^{-n}(W) \cap B \neq \emptyset$.

De fato, suponhamos que $f^{-n}(W) \cap B = \emptyset$. Daí, por aditividade da medida, temos que se $f^{-n}(W) \cap B = \emptyset$ então $m\big(f^{-n}(W) \cup B\big) = m\big(f^{-n}(W)\big) + m(B) > b + 1 - b = 1$. Absurdo pois $f^{-n}(W) \cup B \subseteq M$ e $m(M) = 1$. Logo $f^{-n}(W) \cap B \neq \emptyset$.

Tomemos, agora, $z \in f^{-n}(W) \cap B$. Como $z \in f^{-n}(W)$ temos também que $f^n(z) \in W$, logo $f^n\big(D^{uu}_{\varepsilon}(z)\big) \supseteq D^{uu}_{K}\big(f^n(z)\big)$ é $\delta-$denso em M. Por escolha de B, temos $D^{uu}_{\varepsilon}(z) \subseteq U$ e por escolha de δ, temos $f^n\big(D^{uu}_{\varepsilon}(z)\big)$ é $\delta-$denso, logo intersecta V, ou seja, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Como $n > n_0$ foi fixado arbitrariamente, então $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > n_0$ e portanto temos que f é topologicamente mixing. $\square$

1.1.1 Propriedades Ergódicas

Além das propriedades topológicas, a $m-$minimalidade também desfruta de propriedades ergódicas interessantes. Lembrando que uma dinâmica é ergódica para uma probabilidade μ, se as médias temporais coincidirem $\mu-$quase todo ponto $x \in M$ com as respectivas médias espaciais, isto é, $\tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi}$ para $\mu-$quase todo ponto $x \in M$ e para toda função integrável $\varphi : M \to \mathbb{R}$, em que

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi\big(f^j(x)\big) \quad \text{e} \quad \overline{\varphi} = \int_M \varphi \, d\mu.$$

Definiremos a seguir, uma propriedade ergódica satisfeita pelos difeomorfismos $m-$minimais.

Definição 1.11. *Um difeomorfismo $f : M \to M$ é* ***fracamente ergódico*** *em relação a medida $f-$invariante μ, se a órbita de $\mu-$quase todo ponto $x \in M$, é densa em M.*

A ergodicidade fraca, como já diz no nome, é uma definição mais geral do que a de ergodicidade propriamente dita, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.12. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo ergódico em relação a uma probabilidade μ absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue m. Então, f é fracamente ergódico.*

Demonstração. Por compacidade, M admite uma base enumerável de abertos $\big\{B_n\big\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, definamos o seguinte conjunto:

$$A_k = \big\{x \in M;\ \mathcal{O}(x) \cap B_k \neq \emptyset\big\}.$$

Afirmação 1: A_k é um conjunto aberto $f-$invariante e $\mu(A_k)$=1.

De fato, claramente A_k é $f-$invariante porque $x \in A_k$ se, e somente se, $\mathcal{O}(x) \subseteq A_k$. Dado $x \in A_k$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(x) \in B_k$. Daí, como B_k é aberto e f é um difeomorfismo, existe um aberto U contendo x, tal que $f^j(U) \subseteq B_k$ e portando $U \subseteq A_k$, ou seja, A_k é aberto. Como μ é absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue m e todo conjunto aberto é mensurável na $\sigma-$álgebra de Borel e possui medida de Lebesgue positiva, então $\mu(A_k) > 0$. Pelo item $ii)$ do Teorema **??**, temos que $\mu(A_k) = 1$.

Portanto $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ é o conjunto dos pontos que possuem órbitas densas em M. Como $\mu(A_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\mu(A) = \mu\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(M - A_k)\big) = 1$, pois $\mu(M - A_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, f é fracamente ergódico. $\square$

No âmbito dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, para demonstrarmos a propriedade de ergodicidade fraca, usaremos um resultado demonstrado por (Zhang[**?**]) que garante que as variedades estáveis fortes e as instáveis fortes estão contidas em um conjunto mensurável.

Teorema 1.13. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, em que $r > 1$, μ uma probabilidade $f-$invariante absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue m e $\Lambda \subseteq M$ um conjunto mensurável parcialmente hiperbólico. Então, para cada ponto $x \in \Lambda$, tem-se $W^{ss}(x) \subseteq \Lambda$ e $W^{uu}(x) \subseteq \Lambda$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [**?**], Corolário 1 do Teorema 3.3. $\square$

Esse teorema nos leva a concluir, no lema seguinte, que se $f : M \to M$ é um difeomorfismo $ms(mu)-$minimal, então não existe subconjunto $f-$invariante próprio de M, com medida positiva, que seja compacto.

Lema 1.14. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólico $ms-$minimal ou $mu-$minimal. Se $\Lambda \subseteq M$ é um conjunto compacto $f-$invariante com $m(\Lambda) > 0$, então $\Lambda = M$.*

Demonstração. Seja $\Lambda \subseteq M$ um conjunto compacto $f-$invariante com $m(\Lambda) > 0$, pelo Teorema 1.13, $W^{ss}(x) \subseteq \Lambda$ e $W^{uu}(x) \subseteq \Lambda$. Como $m\big(\mathcal{X}^s(f)\big) = 1$, pois f é $ms-$minimal, temos $m\big(\Lambda \cap \mathcal{X}^s(f)\big) = m(\Lambda) > 0$ e daí $\mathcal{X}^s(f) \neq \emptyset$. Então, para todo $x \in \Lambda \cap \mathcal{X}^s(f)$ temos $W^{ss}(x) \subseteq \Lambda$ e $\overline{W^{ss}(x)} = M$, e como Λ é fechado, temos $\Lambda = M$. $\square$

A seguinte proposição, que é uma consequência direta do lema anterior, relaciona a $ms(mu)-$minimalidade com $ss(uu)-$minimalidade.

Proposição 1.15. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólico. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

i) Se f é $ms-$minimal e existe um conjunto compacto $f-$invariante $\Lambda \subseteq \mathcal{X}^s$ com $m(\Lambda) > 0$, então f é $ss-$minimal.

ii) Se f é $mu-$minimal e existe um conjunto compacto $f-$invariante $\Lambda \subseteq \mathcal{X}^u$ com $m(\Lambda) > 0$, então f é $uu-$minimal.

Demonstração. Vamos provar o primeiro item. Para o segundo item a demonstração é análoga.

Pelo Lema 1.14, temos que $\Lambda = M$. Portanto, como $\Lambda \subseteq \mathcal{X}^s(f)$, temos $\mathcal{X}^s(f) = M$, ou seja, f é $ss-$minimal. $\square$

Agora podemos enunciar e demonstrar o teorema que garante a ergodicidade fraca dos difeomorfismos $ms(mu)-$minimal.

Teorema 1.16. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólico. Se f é $ms-$minimal ou $mu-$minimal, então f é fracamente ergódico.*

Demonstração. Por compacidade, M admite uma base enumerável de abertos $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $k \in \mathbb{N}$, definamos o seguinte conjunto:

$$A_k = \{x \in M;\ \mathcal{O}(x) \cap B_k = \emptyset\}.$$

Afirmação 1: A_k é um conjunto compacto $f-$invariante.

De fato, claramente A_k é $f-$invariante porque $x \in A_k$ se, e somente se, $\mathcal{O}(x) \subseteq A_k$. E seja $(M - A_k) = \{x \in M;\ \mathcal{O}(x) \cap B_k \neq \emptyset\}$. Então, dado $x \in (M - A_k)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(x) \in B_k$. Daí, como B_k é aberto e f é um difeomorfismo, existe um aberto U contendo x, tal que $f^j(U) \subseteq B_k$ e portando $U \subseteq (M - A_k)$, ou seja, $(M - A_k)$ é aberto e por isso A_k é fechado. Logo, $A_k \subseteq M$ é compacto, pois é um fechado contido em um compacto.

Como $A_k \cap B_k = \emptyset$ e $m(B_k) > 0$ pois é um aberto, temos que $m(A_k) < m(A_k \cup B_k) \leq 1$.

Afirmação 2: $m(A_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, suponhamos que $m(A_k) > 0$. Logo, A_k é um conjunto compacto $f-$invariante com $m(A_k) > 0$, e pelo Lema 1.14, $A_k = M$. Absurdo, pois $A_k \cap B_k = \emptyset$.

Portando, por construção de A_k, para cada $k \in \mathbb{N}$ o conjunto $(M - A_k)$ é o conjunto dos pontos cujas órbitas passam por B_k. Logo, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(M - A_k)$ é o conjunto dos pontos cujas órbitas passam por todos os abertos da base. Daí, para concluir a demonstração, basta mostrarmos que $m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(M - A_k)\right) = 1$. De fato, $m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 0$ o que implica $m\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(M - A_k)\right) = m\left(M - \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 1$. $\square$