Capítulo 1

Densidade das Variedades Estáveis e Instáveis dos Difeomorfismos de Anosov

Neste capítulo estudaremos o comportamento das variedades estáveis e instáveis para difeomorfismos de Anosov. Para tal precisaremos de algumas definições adicionais. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Considerando $W^s(x) \subseteq M$ a variedade estável do ponto $x \in M$, chamamos de **disco estável** de x de tamanho k, a bola fechada $D_k^s(x) \subseteq W^s(x)$ de raio k, pela métrica em $W^s(x)$, e centrada em x. Analogamente, definimos o **disco instável** $D_k^u(x) \subseteq W^u(x)$ de x de tamanho k. Caso precisemos deixar claro qual a função estamos nos referindo, denotaremos tais discos $D_k^s(x, f)$ e $D_x^u(x, f)$, respectivamente. Dizemos que um conjunto $A \subseteq M$ é $\delta-$**denso** em M se para qualquer aberto U contendo uma bola de raio δ, tem-se que $U \cap A \neq \emptyset$. É claro que $A \subseteq M$ é denso em M se, e somente se, A é $\delta-$denso em M, para todo $\delta > 0$.

Nosso principal objetivo, nesse capítulo, é estudar a $s-$minimalidade e $u-$minimalidade dos difeomorfismos de Anosov, definidas a seguir.

Definição 1.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Dizemos que f é $s-$**minimal** se para todo ponto $x \in M$, a variedade estável $W^s(x)$ é densa em M. Analogamente, dizemos que f é $u-$**minimal** se para todo ponto $x \in M$, a variedade instável $W^u(x)$ é densa em M.*

Decorre diretamente da definição acima, a seguinte proposição.

Proposição 1.2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Se f for $s-$minimal ou $u-$minimal, então dado $\delta > 0$, existe um $K > 0$ suficientemente grande tal que $D_K^{s(u)}(x)$ é $\delta-$denso em M para todo $x \in M$.*

Demonstração. Vamos demonstrar para o caso de f ser $s-$minimal. Para $u-$minimal a demonstração é a mesma trocando os papéis de f por f^{-1}.

Sejam $\delta > 0$ e $x \in M$ um ponto qualquer. Como $\overline{W^s(x)} = M$, pois f é $s-$minimal, então existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $D^s_{k_x}(x)$ é $\delta-$denso em M. De fato, pois $W^s(x) = \bigcup_{k_x \in \mathbb{N}} D^s_{k_x}(x)$.

Pela continuidade das variedades estáveis e instáveis existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que para todo $y \in V_x$, temos que $D^s_{k_x}(y)$ também é $\delta-$denso em M. Como x é um ponto qualquer de M, então $\bigcup_{x \in M} V_x$ é uma cobertura aberta de M. Pela compacidade de M existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Seja $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $D^s_{k_{x_i}}(x_i)$ seja $\delta-$denso em M, e tomemos $K = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \cdots, k_{x_n}\}$. Então, para qualquer $x \in M$ temos que $x \in V_{x_i}$ para algum $i \in \mathbb{N}$, logo $D^s_K(x)$ contém $D^s_{k_{x_i}}(x)$, e portanto é $\delta-$denso em M. □

Os próximos resultados são fundamentais para demonstrarmos o teorema principal dessa seção. Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ tem **acessibilidade**, ou é **acessível**, se para todo $x, y \in M$, podemos ligar x a y por finitos W^s e W^u, ou seja, para todo $x, y \in M$ existem $x_1, x_2, \cdots, x_k \in M$ tais que podemos ligar o ponto x a y pelas variedades estáveis e instáveis desses pontos x_i, para $i = 1, 2, \cdots, k$.

Proposição 1.3. *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov, então f tem acessibilidade.*

Demonstração. Dado $x \in M$, definamos o seguinte conjunto:

$$A_x = \{y \in M;\ y \text{ pode ser ligado a } x \text{ por finitos } W^s \text{ e } W^u\}.$$

Afirmação 1. $A_x \neq \emptyset$.

De fato, pela continuidade das variedades estáveis e instáveis, existe uma vizinhança de x, tal que todo ponto dessa vizinhança está em A_x.

Afirmação 2. A_x é um conjunto aberto.

De fato, seja $y \in A_x$. Consideremos $x_1, x_2, \cdots, x_k \in M$ os pontos que dão a acessibilidade de x a y e assim suponhamos que $W^s(y)$ intercecta transversalmente $W^u(x_1)$ (para o caso de $W^u(y)$ interceptar transversalmente $W^s(x_1)$, o raciocínio é análogo). Logo, pela continuidade das variedades estáveis, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in B(y, \delta)$, então $W^s(z)$ intercecta transversalmente $W^u(x_1)$, ou seja, z é acessível também a x, logo $B(y, \delta) \subseteq A_x$ e portanto A_x é aberto.

Afirmação 3. A_x é um conjunto fechado.

De fato, seja $(y_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq A_x$ uma sequência convergente, e y o seu limite. Pela continuidade das variedades instáveis, $W^u(y_n)$ converge pra $W^u(y)$. Tomemos $\delta > 0$ de modo que se $z \in B(y, \delta)$, então $W^s(z)$ intercecta transversalmente $W^u(y)$. Logo, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $y_n \in B(y, \delta)$ e portanto $W^u(y_n)$ intercecta $W^s(y)$. Assim, fixando um $N > n_0$, $W^u(y_N)$ intercecta $W^s(y)$, logo y pode ser ligado a x por finitos W^s e W^u, ou seja, $y \in A_x$ e portanto A_x é fechado.

Como M é conexo, as Afirmações 1, 2 e 3 implicam que $A_x = M$. $\square$

Vamos enunciar na sequência um famoso resultado da teoria clássica de sistemas dinâmicos.

Teorema 1.4. *($\lambda-$**Lemma**) Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico e $D^u_k(p)$ o disco instável compacto de p de tamanho k. Se D é um disco qualquer de mesma dimensão que $W^u(p)$ e intercecta transversalmente $W^s(p)$, então dado $\varepsilon > 0$, podemos fixar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, existe um disco $D_n \subseteq D$ tal que $f^n\big(D_n\big)$ está $\varepsilon - C^1$ próximo de $D^u_k(p)$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [?], na Seção 2.7, Teorema 7.1. $\square$

Corolário 1.5. *Sejam $p, q \in Per(f)$ pontos periódicos hiperbólicos de f. Se $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$, então $W^u(p) \subseteq \overline{W^u(q)}$ e $W^s(q) \subseteq \overline{W^s(p)}$.*

Demonstração. Definamos $g : M \to M$ tal que $g = f^{\tau(p)\tau(q)}$, note que g também é um difeomorfismo e $p, q \in Fix(g)$ são pontos fixos hiperbólicos de g, ou seja, $g^n\big(W^u(q,g)\big) = W^u(q,g)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Seja $x \in W^u(p,g)$, então existe $D^u_k(p,g) \subseteq W^u(p,g)$ um disco instável compacto que contém x. Tomemos um disco $D \subseteq W^u(q,g)$, em que $W^s(p,g) \cap D \neq \emptyset$, ou seja, D intersecta transversalmente $W^s(p,g)$. Então, pelo $\lambda-$Lemma (Teorema 1.4), dado $\varepsilon > 0$ podemos fixar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, existe $D_n \subseteq D$ tal que $g^n(D_n) \subseteq g^n\big(W^u(q,g)\big) = W^u(q,g)$ está $\varepsilon - C^1$ próximo de $D^u_k(p,g) \subseteq W^u(p,g)$.

Logo, como $\varepsilon > 0$ é dado arbitrariamente, $x \in \overline{W^u(q,g)}$. E como x é um qualquer, então $W^u(p,f) = W^u(p,g) \subseteq \overline{W^u(q,g)} = \overline{W^u(q,f)}$, como queríamos demonstrar.

Para $W^s(q) \subseteq \overline{W^s(p)}$ a demonstração é análoga, basta notar que nesse caso a aproximação acontece no passado. $\square$

Lembremos que uma $\delta-$pseudo-órbita para f é uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq M$, em que $d\big(f(x_n), x_{n+1}\big) \leq \delta$. Dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma $\delta-$pseudo-órbita periódica, se existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} = x_1$. E um ponto $y \in M$ $\varepsilon-$sombreia uma pseudo-órbita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se $d\big(f^n(y), x_n\big) \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Quando f é um difeomorfismo de Anosov, as pseudo-órbitas periódicas são sombreadas por um ponto periódico, mais precisamente:

Lema 1.6. *(**Lema do Sombreamento**) Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subseteq M$ um conjunto hiperbólico compacto. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que toda $\delta-$pseudo-órbita periódica $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n_0}\} \subseteq \Lambda$ é $\varepsilon-$sombreada por um ponto periódico.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [?], na Seção 10.3, Teorema 3.1. $\square$

Agora vamos enunciar e demonstrar o resultado principal desse capítulo.

Teorema 1.7. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\Omega(f) = M$;

ii) $\overline{Per(f)} = M$;

iii) f *é* $s-$*minimal;*

iv) f *é* $u-$*minimal;*

v) f *é topologicamente mixing;*

vi) f *é topologicamente transitiva.*

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$ Seja $U \subseteq M$ um aberto qualquer. Tomemos $B \subseteq U$ e $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, para todo $x \in B$. Pelo Lema do Sombreamento 1.6 existe um $\delta > 0$ tal que toda $\delta-$pseudo órbita periódica é $\varepsilon-$sombreada por um ponto periódico. Fixemos um $x \in B$, e como todo ponto $x \subseteq M$ é não errante, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in B(x, \delta)$. Logo, a sequência $\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\} \subseteq M$ é uma $\delta-$pseudo-órbita periódica contendo x. Assim, pela Lema do Sombreamento 1.6, existe $p \in Per(f)$ que $\varepsilon-$sombreia esta $\delta-$pseudo-órbita periódica.

Portanto, existe um ponto periódico $p \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Como $U \subseteq M$ é um aberto qualquer, temos $\overline{Per(f)} = M$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Vamos dividir a demonstração em dois casos, primeiro vamos provar que a variedade estável de um ponto periódico qualquer é densa, e depois provaremos para um ponto qualquer.

Caso Particular: Sejam $p \in Per(f)$ e $V \subseteq M$ um aberto qualquer. Como $\overline{Per(f)} = M$, então existe $p_0 \in Per(f) \cap V$. Pela Proposição 1.3, existem $x_1, x_2, \cdots, x_k \in M$, pontos que ligam p_0 a p pelas suas respectivas variáveis instáveis ou estáveis. Pela continuidade das variedades estáveis e instáveis podemos tomar um $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente de forma que $B(p_0, \varepsilon) \subseteq V$, e se $d(z, w) < \varepsilon$ então $W^{s(u)}_\gamma(z) \cap W^{u(s)}_\gamma(w) \neq \emptyset$, em que $W^{s(u)}_\gamma(z)$ e $W^{u(s)}_\gamma(w)$ são as variedades estáveis (e instáveis) locais de z e w, respectivamente, e $\gamma > 0$. Pela densidade dos pontos periódicos, existem $p_1, p_2, \cdots, p_k \in Per(f)$, tais que $p_i \in B(x_i, \varepsilon)$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$. Assim, por escolha de $\varepsilon > 0$, p_0 pode ser ligado a p pela variedades estáveis ou instáveis desses pontos periódicos.

Como $W^s(p)\cap W^u(p_k)\neq\emptyset$, então $W^s(p_k)\subseteq\overline{W^s(p)}$, pelo Corolário 1.5. E como $W^s(p_k)\cap W^u(p_{k-1})\neq\emptyset$, então $W^s(p_{k-1})\subseteq\overline{W^s(p_k)}$, pelo mesmo Corolário 1.5. O que implica $W^s(p_{k-1})\subseteq\overline{W^s(p_k)}\subseteq\overline{W^s(p)}$. Aplicando esse raciocínio recursivamente, temos

$$W^s(p_0)\subseteq\overline{W^s(p_1)}\subseteq\cdots\subseteq\overline{W^s(p_{k-1})}\subseteq\overline{W^s(p_k)}\subseteq\overline{W^s(p)}.$$

Então, $p_0\in\overline{W^s(p)}$ e portanto $W^s(p)\cap V\neq\emptyset$. De modo análogo concluímos que $W^u(p)$ também é densa em M, aplicando o Corolário 1.5 nas variedades instáveis dos pontos p_i, para $i=1,2,\cdots,k$.

Caso Geral: Seja $x\in M$ um ponto qualquer. Dado $\varepsilon>0$, existe $k\in\mathbb{N}$ e um conjunto $P=\big\{p_i\in Per(f);\ 1\leq i\leq k\big\}$ $\varepsilon-$denso em M. De fato, $\bigcup_{p\in Per(f)}B(p,\varepsilon)$ é uma cobertura aberta de M, e de sua compacidade, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $M\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}B(p_i,\varepsilon)$, em que $p_i\in Per(f)$.

Fixando um ponto $z\in M$, como $\overline{W^u(p_i)}=M$, então existe $z_i\in W^s(z)\cap W^u(p_i)$, para todo $i=1,2,\cdots,k$. Logo, existe $n_i\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_i$ temos $f^{-n}(z_i)\in W^u_\varepsilon(p_i)$. Tomemos $N_z=\max\big\{n_1,n_2,\cdots,n_k\big\}$, logo para todo $n>N_z$ temos $f^{-n}(z_i)\in W^u_\varepsilon(p_i)$, ou seja, o conjunto $\big\{f^{-n}(z_1),f^{-n}(z_2),\cdots,f^{-n}(z_k)\big\}$ é também $\varepsilon-$denso em M para todo $n>N_z$; o que implica que $f^{-n}\big(W^s(z)\big)$ é $\varepsilon-$denso em M para todo $n>N_z$.

Pela continuidade das variedades estáveis e instáveis, existe δ_z tal que o argumento acima é verdadeiro para todo $y\in B(z,\delta_z)$, isto é, $f^{-n}(W^s(y))$ também é $\varepsilon-$denso para todo $n>N_z$. Como $\bigcup_{z\in M}B(z,\delta_z)$ é uma cobertura aberta de M, de sua compacidade, existe $t\in\mathbb{N}$ tal que $M\subseteq\bigcup_{i=1}^{t}B(z_i,\delta_{z_i})$. Tomemos $N=\max\big\{N_{z_1},N_{z_2},\cdots,N_{z_t}\big\}$, logo para todo $y\in M$ temos que $f^{-n}\big(W^s(y)\big)$ é $\varepsilon-$denso em M, para todo $n>N$. Em particular, $W^s(x)=f^{-n}\Big(W^s\big(f^n(x)\big)\Big)$ é $\varepsilon-$denso em M.

Portanto, como ε é tomado arbitrário, $\overline{W^s(x)}=M$.

$iii)\Rightarrow iv)$ Sejam $U\subseteq M$ um aberto qualquer e $x\in M$ um ponto qualquer. Sejam $y\in U$ e $\gamma>0$ tais que $W^s_\gamma(y)\subseteq U$. Tomemos um $\varepsilon>0$, suficientemente pequeno, de forma que se $d(z,w)<\varepsilon$ então $W^{s(u)}_\gamma(z)\cap W^{u(s)}_\gamma(w)\neq\emptyset$, o que é possível pois as variedades estáveis e instáveis variam continuamente. Pela Proposição 1.2, como f é $s-$minimal, existe $K>0$ uniforme tal que $D^s_K(z)\subseteq W^s(z)$ é $\varepsilon-$denso em M para todo $z\in M$. Por hiperbolicidade, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ contém $D^s_K\big(f^{-n}(y)\big)$, logo $f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ é $\varepsilon-$denso em M.

Por escolha de ε temos que $W^u_\gamma\big(f^{-n}(x)\big)\cap f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)\neq\emptyset$, pois $f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ passa ε próximo de $f^{-n}(x)$, ou seja, existe $w\in f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ tal que $d\big(w,f^{-n}(x)\big)<\varepsilon$, o que implica que existe $q \in W^u\big(f^{-n}(x)\big) \cap f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$. Como $q \in W^u\big(f^{-n}(x)\big)$ então $f^n(q) \in f^n\Big(W^u\big(f^{-n}(x)\big)\Big) = W^u(x)$ e como $q \in f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ então $f^n(q) \in f^n\Big(f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)\Big) = W^s_\gamma(y) \subseteq U$.

Portanto, $f^n(q) \in W^u(x) \cap U$, ou seja, $W^u(x) \cap U \neq \emptyset$. Como $U \subseteq M$ é um aberto qualquer e $x \in M$ um ponto qualquer, isso prova que f é $u-$minimal.

$iv) \Rightarrow v)$ Sejam $U, V \subseteq M$ dois abertos quaisquer. Tomemos $x \in U$ um ponto qualquer e $\delta > 0$ tal que V contenha uma bola de raio δ. Como f é $u-$minimal, pela Proposição 1.2 existe um $K > 0$ uniforme tal que $D^u_K(z) \subseteq W^u(z)$ é $\delta-$denso em M, para todo $z \in M$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $W^u_\varepsilon(x) \subseteq U$. Por hiperbolicidade existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, temos que $f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big)$ contém $D^u_K\big(f^n(x)\big)$, ou seja, $D^u_k\big(f^n(x)\big) \subseteq f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big) \subseteq W^u\big(f^n(x)\big)$. Como $D^u_K\big(f^n(x)\big)$ é $\delta-$denso em M e como $D^u_K\big(f^n(x)\big) \subseteq f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big)$, então $f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big)$ também é $\delta-$denso em M, para todo $n > n_0$.

Portanto $W^u_\varepsilon(x) \subseteq U$ e $f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > n_0$, ou seja, f é topologicamente *mixing*.

$v) \Rightarrow vi)$ Demonstrado na Proposição **??**.

$vi) \Rightarrow i)$ Sejam $x \in M$ um ponto qualquer e V_x uma vizinhança qualquer de x. Como f é transitiva, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$. Logo, $x \in \Omega(f)$ e portanto $\Omega(f) = M$.

$\square$