Capítulo 1

Caso Anosov

Teorema 1.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\Omega(f) = M$

ii) $\overline{Per(f)} = M$

iii) *f é $s-$minimal;*

iv) *f é $u-$minimal;*

v) *f é topologicamente mixing.*

vi) *f é topologicamente transitiva;*

Para demonstrarmos esse teorema, antes vamos precisar de alguns lemas.

Definição 1.2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Considerando $W^s(x) \subseteq M$ a variedade estável de x, chamamos de **disco estável de** x **de tamanho** K, a bola fechada $D^s_K(x) \subseteq W^s(x)$ de raio K, pela métrica em $W^s(x)$, e centrada em x. De modo análogo podemos definir o **disco instável de** x **de tamanho** K.*

Lema 1.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov, se f for $s-$minimal ou $u-$minimal, então dado $\delta > 0$, existe um $K > 0$ suficientemente grande tal que $D^{s(u)}_K(x)$ é $\delta-$denso em M para todo $x \in M$.*

Demonstração. Vamos demonstrar para o caso de f ser $s-$minimal, para $u-$minimal a demonstração é análoga.

Seja $\delta > 0$, $x \in M$ um ponto qualquer e $D^s_k(x)$ o disco estável de x de tamanho k. Como $\overline{W^s(x)} = M$, pois f é $s-$minimal, então existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que $D^s_k(x)$ é $\delta-$denso em M.

Pelo teorema **??** existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que para todo $y \in U_x$, existe $k_y \in \mathbb{N}$ tal que $D^s_k(x)$ também é $\delta-$denso em M. Como f é Anosov e x é um ponto qualquer de M, então $\cup_{x \in M} U_x$ é uma cobertura aberta de M, e pela compacidade de M existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M \subseteq \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Seja $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $D^s_{k_{x_i}}(x_i)$ seja $\delta-$denso em M, tomemos $K = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \cdots, k_{x_n}\}$ e então para qualquer $x \in M$ temos que $x \in U_{x_i}$ para algum $i \in \mathbb{N}$, logo $D^s_K(x)$ é $\delta-$denso em M. □

Definição 1.4. *Dizemos que uma sequência de pontos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq M$ é uma $\varepsilon-$**pseudo-órbita** para f se $d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \varepsilon$. Seja $x \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_{n_0}), x) \leq \varepsilon$, dizemos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma $\varepsilon-$**pseudo-órbita periódica contendo** x. Um ponto $y \in M$ $\delta-$**sombreia** a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se $d(f^n(y), x_{n+1}) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Lema 1.5. ***(Lema do Sombreamento)*** *Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que toda $\delta-$pseudo órbita periódica $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n_0}\} \subseteq M$ é $\varepsilon-$sombreada por uma orbita periódica.*

Demonstração. [?] □

Lema 1.6. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov e $p \in Per(f)$. Se $\overline{Per(f)} = M$, então para todo $x \in M$, podemos ligar x a p por finitos W^s e W^u, ou seja, para todo $x \in M$ existem $x_1, x_2, \cdots, x_k \in M$ tal que podemos ligar o ponto x a p pelas variáveis instáveis ou estáveis desses pontos x_i.*

Demonstração. Seja $p \in Per(f)$, construamos o conjunto $A_p \subseteq M$, da seguinte forma: $A_p = \{x \in M;\ x \text{ pode ser ligado a } p \text{ por finitos } W^s \text{ e } W^u\}$.

Afirmação 1. A_p é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in A_p$. Suponhamos que $W^s(x)$ intercepta transversalmente $W^u(p_1)$ (para o caso de $W^u(x)$ interceptar transversalmente $W^s(p_1)$, o raciocínio é análogo), então pela continuidade das variedades instáveis, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(x, \delta)$, implica em $W^s(y)$ também intercepta transversalmente $W^u(p_1)$, ou seja, $B(x, \delta) \subseteq A_p$ e portanto A_p é aberto.

Afirmação 2. A_p é um conjunto fechado. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subseteq A_p$ uma sequencia convergente, e x o seu limite. Pela continuidade das variedades instáveis, $W^u(x_n)$ converge pra $W^u(x)$. Tomemos $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(x, \delta)$ implica em $W^s(y)$ intercepta transversalmente $W^u(x)$, e como $\overline{Per(f)} = M$, então existe $p' \in Per(f) \cap B(x, \delta)$, logo

$W^s(p')$ intercepta $W^u(x)$, e assim existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, implica que $W^u(x_n)$ também intercepta $W^s(p')$. Fixando um $N > n_0$, então $W^u(x_N)$ intercepta $W^s(p')$ e $W^s(p')$ intercepta $W^s(x)$, logo x pode ser ligado a p por finitos W^s e W^u, ou seja, $x \in A_p$ e portanto A_p é fechado.

Como M é conexo, a Afirmação 1 e 2 implica que $A_p = M$. $\square$

Lema 1.7. *(λ−**Lemma**) Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo, $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico e D_k^u o disco instável compacto de x de tamanho k. Se D é um disco qualquer de mesma dimensão que $W^u(p)$ e intercepta transversalmente $W^s(p)$, então dado $\varepsilon > 0$, podemos fixar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, existe um disco $D_n \subseteq D$ tal que $f^n\big(D_n\big)$ está $\varepsilon - C^1$ próximo de D_k^u.*

Agora podemos demonstrar o teorema inicialmente proposto.

Demonstração. (Do Teorema 1.1) $i \Rightarrow ii)$

$ii) \Rightarrow iii)$ Vamos dividir a demonstração em dois casos, primeiro vamos provar que a variedade estável de um ponto periódico é densa, e depois provaremos pra qualquer ponto.

Caso particular Seja $p \in Per(f)$ e $V \subseteq M$ um aberto qualquer. Como $\overline{Per(f)} = M$ então existe $q \in Per(f) \cap V$, pelo Lema 1.6, existem $x_1, x_2, \cdots, x_k \in M$, pontos que ligam q a p pelas suas respectivas variáveis instáveis ou estáveis. Fixando um $\varepsilon > 0$ satisfazendo a condição de hiperbolicidade que se $d(z,w) < \varepsilon$ então $W_\gamma^{s(u)}(z) \cap W_\gamma^{u(s)}(w) \neq \emptyset$ e de forma que $B(q,\varepsilon) \subseteq V$, pela densidade dos pontos periódicos, existem $p_1, p_2, \cdots, p_k \in M$, periódicos, tais que $p_i \in B(x_i, \varepsilon)$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$; e então p está ligado a q pela variedades estáveis ou instáveis desses pontos periódicos. Definamos $g : M \to M$ tal que $g = f^{-\tau(p)\tau(p_1)\tau(p_2)\cdots\tau(p_k)\tau(q)}$, note que g também é um difeomorfismo nas condições do teorema, os pontos p, p_i e q são pontos fixos de g, e iterar g positivamente é equivalente a iterar f negativamente.

Considere o disco estável $D_{r_1}^s(p_1)$ de tal forma que $B(q,\varepsilon) \cap W^s(p) \subseteq D_{r_1}^s(p_1)$, esse disco existe porque $p_1 \in W^s(q)$, pelo λ−Lemma 1.7 aplicado a g, podemos fixar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ existe um disco $D_n \subseteq D_{r_2}^s(p_2)$ tal que $g^n\big(D_n\big)$ está $\varepsilon - C^1$ próximo de $D_{r_1}^s(p_1)$, logo intercepta V. Passando ao ponto p_3, e tomando $D_{r_2}^s(p_2) \subseteq$

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Seja $U \subset M$ um aberto qualquer e $x \in M$ um ponto qualquer. Dado $y \in U$ tal que $W^s_\gamma(y) \subseteq U$ e , tomemos $\varepsilon > 0$ satisfazendo a condição de hiperbolicidade que se $d(z,w) < \varepsilon$ então $W^{s(u)}_\gamma(z) \cap W^{u(s)}_\gamma(w) \neq \emptyset$, pelo Lema 1.3 existe $K > 0$ uniforme tal que $D^s_K(x)$ é $\varepsilon-$denso em M para todo $x \in M$, e por hiperbolicidade, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ contém $D^s_K\big(f^{-n}(y)\big)$, logo $f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ também é $\varepsilon-$denso em M.

Por escolha de ε temos que $W^u_\gamma\big(f^{-n}(x)\big) \cap f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big) \neq \emptyset$, pois $f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ passa ε próximo de $f^{-n}(x)$, e então existe pontos $w \in f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ onde $d\big(w, f^{-n}(x)\big) < \varepsilon$, o que implica que existe $q \in W^u\big(f^{-n}(x)\big) \cap f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$. Como $q \in W^u\big(f^{-n}(x)\big)$ então $f^n(q) \in f^n\Big(W^u\big(f^{-n}(x)\big)\Big) = W^u(x)$ e como $q \in f^{-n}\big(W^s_\gamma(y)\big)$ então $f^n(q) \in f^n\Big(f^{-n}\big(W^s_\gamma(x)\big)\Big) = W^s_\gamma(x) \subseteq U$.

Portanto, $f^n(q) \in W^u(x) \cap U$, ou seja, a intersecção $W^u(x) \cap U \neq \emptyset$. Como $U \subseteq M$ foi tomado um aberto qualquer e $x \in M$ um ponto qualquer, isso prova que f é $u-$minimal.

iv) $\Rightarrow$ *v)* Sejam $U, V \subseteq M$ dois abertos quaisquer. Tomemos $x \in U$ um ponto qualquer e $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq U$. Pelo Lema 1.3 existe um $K > 0$ uniforme tal que $D^u_K(x)$ é $\delta-$denso em M.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $W^u_\varepsilon(x) \subseteq U$. Pela hiperbolicidade existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, temos que $f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big)$ contém $D^u_K\big(f^n(x)\big)$, ou seja, $D^u_k\big(f^n(x)\big) \subseteq f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big) \subseteq W^u\big(f^n(x)\big)$; e como para cada $n > n_0$ temos que $f^n(x) \in U_{x_i}$ para algum $i \in \mathbb{N}$, então $D^u_K\big(f^n(x)\big)$ é $\delta-$denso em M e como $D^u_K\big(f^n(x)\big) \subseteq f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big)$ então $f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big)$ também é $\delta-$denso em M.

Portanto $W^u_\varepsilon(x) \subseteq U$ e $f^n\big(W^u_\varepsilon(x)\big) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > n_0$, ou seja, f é topologicamente *mixing*.

v) $\Rightarrow$ *vi)* Seja $U, V \subseteq M$ dois abertos quaisquer, como f é topologicamente *mixing* então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Em particular existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, ou seja, f é transitiva.

vi) $\Rightarrow$ *i)* $\square$