Capítulo 1

Automorfismo Hiperbólico no Toro

Definição 1.1. *Um sistema dinâmico $f : M \to M$ é chamado **minimal** se $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$, para todo $x \in M$, ou seja, a orbita de todo ponto $x \in M$ é densa em M.*

1.1 Rotação Irracional no Circulo

Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{e^{2\pi i t}; t \in \mathbb{R}\}$ a esfera unitária em $\mathbb{C}$ e o conjunto $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] \in [0,1); x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}\}$, onde $[x]$ é a classe de equivalência pela relação $\sim$. Para facilitar a notação, ao invés de escrevermos $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, escreveremos apenas $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ onde o x estará representando sua classe de equivalência $x \pmod 1$.

Proposição 1.2. *O grupo multiplicativo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Definamos a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & S^1 \\ t & \mapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

i) h é um homomorfismo: De fato, seja $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} h(x+y) &= e^{2\pi i(x+y)} \\ &= e^{2\pi i x + 2\pi i y} \\ &= e^{2\pi i x} e^{2\pi i y} \\ &= h(x)h(y) \end{aligned}$$

ii) h é injetora: De fato, seja $x, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $h(x) = h(y)$, então $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i y}$ $\Rightarrow e^{2\pi i(x-y)} = 1 \Rightarrow 2\pi i(x-y) = \ln(1) \Rightarrow 2\pi i(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

iii) h é sobrejetora: De fato, seja $y \in S^1$, então $y = e^{2\pi i x}$ para algum $x \in \mathbb{R}$, logo existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $h(x) = e^{2\pi i x} = y$.

Portanto, h é um isomorfismo de grupos, ou seja, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é isomorfo a S^1. □

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $R_\alpha : S^1 \to S^1$ uma dinâmica em S^1, tal que $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, como todo elemento $z \in S^1$ é da forma $z = e^{2\pi i t}$ para algum $t \in \mathbb{R}$, então $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z = e^{2\pi i\alpha}e^{2\pi i t} = e^{2\pi i(t+\alpha)}$ rotação pelo angulo $2\pi\alpha$. Chamaremos essa função de **rotação pelo angulo** α. Agora seja $T_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ uma dinâmica em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tal que $T_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$.

Proposição 1.3. *A função $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ tal que $h(t) = e^{2\pi i t}$ é uma conjugação de T_α e R_α*

Demonstração. Vamos mostrar que $h \circ T_\alpha = R_\alpha \circ h$.

$$\begin{aligned}
(h \circ T_\alpha)(x) &= h(T_\alpha(x)) \\
&= h(x+\alpha) \\
&= e^{2\pi i(x+\alpha)} \\
&= e^{2\pi i x}e^{2\pi i\alpha} \\
&= R_\alpha(e^{2\pi i x}) \\
&= R_\alpha(h(x)) \\
&= (R_\alpha \circ h)(x)
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4. *Se α for um número racional, então R_α é periódica para todo*

Demonstração. Vamos mostrar que $h \circ T_\alpha = R_\alpha \circ h$.

$$\begin{aligned}
(h \circ T_\alpha)(x) &= h(T_\alpha(x)) \\
&= h(x+\alpha) \\
&= e^{2\pi i(x+\alpha)} \\
&= e^{2\pi i x}e^{2\pi i\alpha} \\
&= R_\alpha(e^{2\pi i x}) \\
&= R_\alpha(h(x)) \\
&= (R_\alpha \circ h)(x)
\end{aligned}$$

□