Complexité algorithmique

Jérémie Cabessa

Laboratoire DAVID, UVSQ

Introduction

- On désire mesurer la complexité d'exécution d'un algorithme.
- On s'intéresse à la complexité en temps: le temps ou nombre d'opérations $f(n)$ qu'effectue un algorithme sur un input de taille n.
- On laisse de côté la complexité en espace.
- Pour quantifier la *borne supérieure asymptotique* d'un algorithme, on utilise la notation "grand O" (big O).

Introduction

- On désire mesurer la complexité d'exécution d'un algorithme.
- On s'intéresse à la complexité en temps: le temps ou nombre d'opérations $f(n)$ qu'effectue un algorithme sur un input de taille n.
- On laisse de côté la complexité en espace.
- Pour quantifier la *borne supérieure asymptotique* d'un algorithme, on utilise la notation "grand O" (big O).

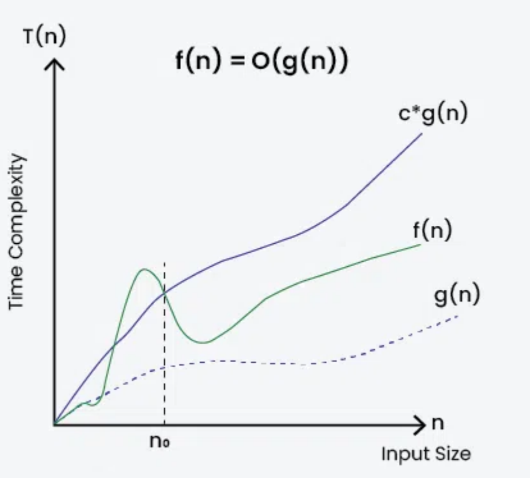
Introduction

- On désire mesurer la complexité d'exécution d'un algorithme.
- On s'intéresse à la complexité en temps: le temps ou nombre d'opérations $f(n)$ qu'effectue un algorithme sur un input de taille n.
- On laisse de côté la complexité en espace.
- Pour quantifier la *borne supérieure asymptotique* d'un algorithme, on utilise la notation "grand O" (big O).

Introduction

- On désire mesurer la complexité d'exécution d'un algorithme.
- On s'intéresse à la complexité en temps: le temps ou nombre d'opérations $f(n)$ qu'effectue un algorithme sur un input de taille n.
- On laisse de côté la complexité en espace.
- Pour quantifier la *borne supérieure asymptotique* d'un algorithme, on utilise la notation "grand O" (big O).

Grand O



Grand O

Definition (Big O notation)

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux fonctions. On dit que

- f est dominée par g
- g domine par f
- $f \in O(g)$

ssi il existe $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(n) \leq C \cdot g(n), \text{ pour tout } n \geq N_0$$

Grand O

Definition (Big O notation)

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux fonctions. On dit que

- f est dominée par g
- g domine par f
- $f \in O(g)$

ssi il existe $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(n) \leq C \cdot g(n), \text{ pour tout } n \geq N_0$$

Grand O

Definition (Big O notation)

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux fonctions. On dit que

- f est dominée par g
- g domine par f
- $f \in O(g)$

ssi il existe $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(n) \leq C \cdot g(n), \text{ pour tout } n \geq N_0$$

Grand O

Definition (Big O notation)

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux fonctions. On dit que

- f est dominée par g
- g domine par f
- $f \in O(g)$

ssi il existe $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(n) \leq C \cdot g(n), \text{ pour tout } n \geq N_0$$

Grand O

Definition (Big O notation)

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux fonctions. On dit que

- f est dominée par g
- g domine par f
- $f \in O(g)$

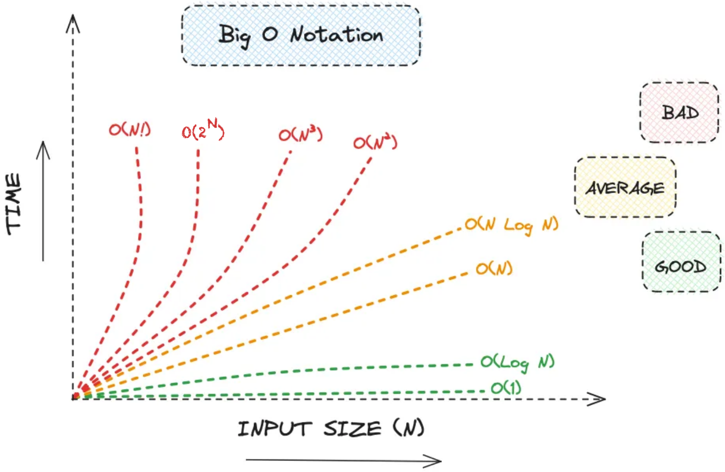
ssi il existe $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(n) \leq C \cdot g(n), \text{ pour tout } n \geq N_0$$

Grand O

Complexité	Terminologie
$O(1)$	constant
$O(\log(n))$	logarithmique
$O(\sqrt{n})$	...
$O(n)$	linéaire
$O(n\log(n))$	linéaire-logarithmique
$O(n^k)$	polynomial
$O(c^n)$	exponentiel
$O(n!)$	factoriel
$O(n^n)$	...

Exemple


Big O Notation
TIME
O(N!)
O(2^N)
O(N³)
O(N²)
O(N Log N)
O(N)
O(Log N)
O(1)
INPUT SIZE (N)
BAD
AVERAGE
GOOD

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 6n - 100 \\ &\leq 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ &= 9n^2 - 100 \\ &\leq 9n^2 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on obtient que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & 3n^2 + 6n - 100 \\ & \leq & 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ & = & 9n^2 - 100 \\ & \leq & 9n^2 \end{array}$$

  Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 6n - 100 \\ &\leq 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ &= 9n^2 - 100 \\ &\leq 9n^2 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & 3n^2 + 6n - 100 \\ & \leq & 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ & = & 9n^2 - 100 \\ & \leq & 9n^2 \end{array}$$

Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & 3n^2 + 6n - 100 \\ & \leq & 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ & = & 9n^2 - 100 \\ & \leq & 9n^2 \end{array}$$

  Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 6n - 100 \\ &\leq 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ &= 9n^2 - 100 \\ &\leq 9n^2 \end{aligned}$$

  Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & 3n^2 + 6n - 100 \\ & \leq & 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ & = & 9n^2 - 100 \\ & \leq & 9n^2 \end{array}$$

  Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 6n - 100 \\ &\leq 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ &= 9n^2 - 100 \\ &\leq 9n^2 \end{aligned}$$

  Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 3n^2 + 6n - 100$.
- On montre que $f(n) = O(n^2)$.

  On a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(n) &= 3n^2 + 6n - 100 \\ &\leq 3n^2 + 6n^2 - 100 \\ &= 9n^2 - 100 \\ &\leq 9n^2 \end{aligned}$$

  Ainsi, en prenant $C = 9$ et $N_0 = 0$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot n^2 \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(n^2)$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$\begin{aligned} f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\ &\leq \log(n^7 + 123n^7) \\ &= \log(124n^7) \\ &= \log(124) + 7\log(n) \\ &\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124 \end{aligned}$$

  Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

On a :

$$\begin{aligned} f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\ &\leq \log(n^7 + 123n^7) \\ &= \log(124n^7) \\ &= \log(124) + 7\log(n) \\ &\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\
&\leq \log(n^7 + 123n^7) \\
&= \log(124n^7) \\
&= \log(124) + 7\log(n) \\
&\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124
\end{aligned}
$$

  Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$
\begin{array}{rcl}
f(n) & = & \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\
 & \leq & \log(n^7 + 123n^7) \\
 & = & \log(124n^7) \\
 & = & \log(124) + 7\log(n) \\
 & \leq & 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124
\end{array}
$$

  Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$\begin{aligned} f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\ &\leq \log(n^7 + 123n^7) \\ &= \log(124n^7) \\ &= \log(124) + 7\log(n) \\ &\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124 \end{aligned}$$

  Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$\begin{aligned}
f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\
&\leq \log(n^7 + 123n^7) \\
&= \log(124n^7) \\
&= \log(124) + 7\log(n) \\
&\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\ & \leq & \log(n^7 + 123n^7) \\ & = & \log(124n^7) \\ & = & \log(124) + 7\log(n) \\ & \leq & 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124 \end{array}$$

Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$\begin{aligned} f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\ &\leq \log(n^7 + 123n^7) \\ &= \log(124n^7) \\ &= \log(124) + 7\log(n) \\ &\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124 \end{aligned}$$

  Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(\log(n))$.

Exemple

- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \log(n^7 - 36n^3 + 123n)$.
- On montre que $f(n) = O(\log(n))$.

  On a :

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \log(n^7 - 36n^3 + 123n) \\
&\leq \log(n^7 + 123n^7) \\
&= \log(124n^7) \\
&= \log(124) + 7\log(n) \\
&\leq 8\log(n) \quad \text{pour tout} \quad n \geq 124
\end{aligned}
$$

  Ainsi, en prenant $C = 8$ et $N_0 = 124$, on a bien que

$$f(n) \leq C \cdot \log(n) \text{ pour tout } n \geq N_0.$$

  Donc $f(n) = O(\log(n))$.