Jérémie Cabessa Laboratoire DAVID, UVSQ



- ▶ But d'un autoencodeur (rappel): projeter les data dans un espace de dimension plus petite – l'espace latent (latent space) – et être capable de les reconstruire ces data.
- On avait vu que l'encodeur pouvait être utilisé comme un data compressor...
- et le décodeur comme un data generator.
- Pour cela, il suffisait de sampler des points dans l'espace latent et de les décoder.

- ▶ But d'un autoencodeur (rappel): projeter les data dans un espace de dimension plus petite – l'espace latent (latent space) – et être capable de les reconstruire ces data.
- On avait vu que l'encodeur pouvait être utilisé comme un data compressor...
- et le décodeur comme un data generator
- Pour cela, il suffisait de sampler des points dans l'espace latent et de les décoder.

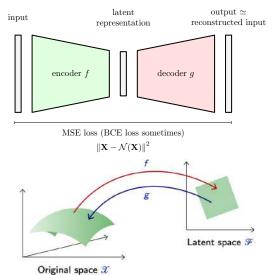
- ▶ But d'un autoencodeur (rappel): projeter les data dans un espace de dimension plus petite – l'espace latent (latent space) – et être capable de les reconstruire ces data.
- On avait vu que l'encodeur pouvait être utilisé comme un data compressor...
- et le décodeur comme un data generator.
- Pour cela, il suffisait de sampler des points dans l'espace latent et de les décoder.

- ▶ But d'un autoencodeur (rappel): projeter les data dans un espace de dimension plus petite – l'espace latent (latent space) – et être capable de les reconstruire ces data.
- On avait vu que l'encodeur pouvait être utilisé comme un data compressor...
- et le décodeur comme un data generator.
- ▶ Pour cela, il suffisait de sampler des points dans l'espace latent et de les décoder.

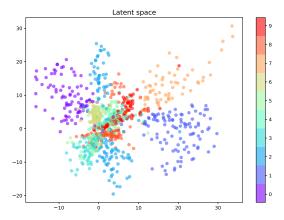
INTRODUCTION

MOTIVATION

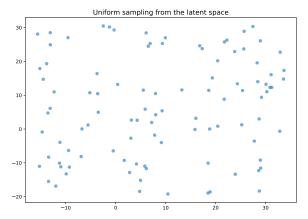
000000



Dans notre cas, on avait un espace latent de dimension 2, et lorsqu'on samplait dans cet espace, les data générées étaient d'assez bonne qualité (à l'oeil).



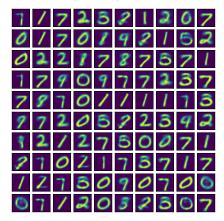
Dans notre cas, on avait un espace latent de dimension 2, et lorsqu'on samplait dans cet espace, les data générées étaient d'assez bonne qualité (à l'oeil).



MOTIVATION

0000000

Dans notre cas, on avait un espace latent de dimension 2, et lorsqu'on samplait dans cet espace, les data générées étaient d'assez bonne qualité (à l'oeil).

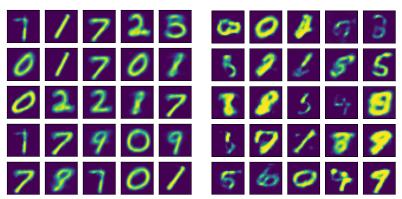


- ► Mais cette situation n'est pas représentative...
- ► En pratique, on considère des espace latent de dimensions plus grandes que 2 (on arrive rarement à compresser un signal en dimension 2).
- Dans ce cas, le sampling dans l'espace latent génère des data beaucoup plus dégradées...

- Mais cette situation n'est pas représentative...
- ► En pratique, on considère des espace latent de dimensions plus grandes que 2 (on arrive rarement à compresser un signal en dimension 2).
- Dans ce cas, le sampling dans l'espace latent génère des data beaucoup plus dégradées...

- Mais cette situation n'est pas représentative...
- ▶ En pratique, on considère des espace latent de dimensions plus grandes que 2 (on arrive rarement à compresser un signal en dimension 2).
- ▶ Dans ce cas, le sampling dans l'espace latent génère des data beaucoup plus dégradées...

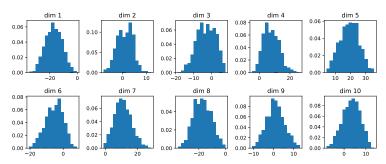
▶ Par exemple, si on répète l'opération avec espace latent de dimension 10, et qu'on sample dans cet espace, les data générées sont bien moins bonnes.



Data generated from latent spaces of dim 2 and 10, respectively.



▶ De plus, la distribution des data dans l'espace latent est très déséquilibrée (non-centered, skewed, etc.).



Distribution of data in the latent space for each dimension.

- ▶ Pour un autoencodeur classique, qu'est-ce qui rend le processus de sampling de l'espace latent difficile?
- * Distribution de l'espace latent non continue: ne se voit pas forcément en 2D, mais en dimension supérieure, il y aura surement des "trous".
- * Distribution de l'espace latent non-équilibrée et non-centrée.
- L'encodeur variationnel (variational autoencoder VAE) vise à pallier ces problèmes.
- Il force l'espace latent à suivre une certaine distribution, normale en général.

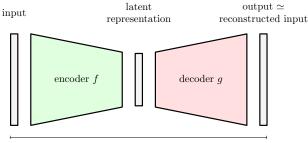
- ► Pour un autoencodeur classique, qu'est-ce qui rend le processus de sampling de l'espace latent difficile?
- * Distribution de l'espace latent non continue: ne se voit pas forcément en 2D, mais en dimension supérieure, il y aura surement des "trous".
- * Distribution de l'espace latent non-équilibrée et non-centrée
- L'encodeur variationnel (variational autoencoder VAE) vise à pallier ces problèmes.
- Il force l'espace latent à suivre une certaine distribution, normale en général.

- ► Pour un autoencodeur classique, qu'est-ce qui rend le processus de sampling de l'espace latent difficile?
- * Distribution de l'espace latent non continue: ne se voit pas forcément en 2D, mais en dimension supérieure, il y aura surement des "trous".
- * Distribution de l'espace latent non-équilibrée et non-centrée.
- L'encodeur variationnel (variational autoencoder VAE) vise à pallier ces problèmes.
- Il force l'espace latent à suivre une certaine distribution, normale en général.

- ▶ Pour un autoencodeur classique, qu'est-ce qui rend le processus de sampling de l'espace latent difficile?
- * Distribution de l'espace latent non continue: ne se voit pas forcément en 2D, mais en dimension supérieure, il y aura surement des "trous".
- * Distribution de l'espace latent non-équilibrée et non-centrée.
- L'encodeur variationnel (variational autoencoder VAE) vise à pallier ces problèmes.
- Il force l'espace latent à suivre une certaine distribution, normale en général.

- Pour un autoencodeur classique, qu'est-ce qui rend le processus de sampling de l'espace latent difficile?
- * Distribution de l'espace latent non continue: ne se voit pas forcément en 2D, mais en dimension supérieure, il y aura surement des "trous".
- * Distribution de l'espace latent non-équilibrée et non-centrée.
- L'encodeur variationnel (variational autoencoder VAE) vise à pallier ces problèmes.
- ► Il force l'espace latent à suivre une certaine distribution, normale en général.

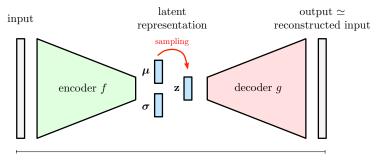
- ► Idée générale: Imposer une distribution sur l'espace latent et entraîner un décodeur de manière à reconstruire les data.
- On passe d'un bottleneck déterministe à un bottleneck stochastique.



MSE loss (BCE loss sometimes)

$$\|\mathbf{X} - \mathcal{N}(\mathbf{X})\|^2$$

- ▶ Idée générale: Imposer une distribution sur l'espace latent et entraîner un décodeur de manière à reconstruire les data.
- On passe d'un bottleneck déterministe à un bottleneck stochastique.



MSE or BCE loss + KL loss

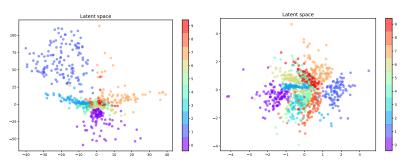
- ▶ Régularisation des data: on impose des contraintes de de continuité et de complétude sur l'espace latent.
- Contrainte de continuité: on aimerait que des points proches de l'espace latent génère des data similaires.
- → On introduit un processus de décodage stochastique lors de l'entraînement: chaque data est samplée dans l'espace latent (voisinage) avant d'être décodée.
- ▶ Contrainte de complétude: on aimerait que tous les points de l'espace latent génèrent des data qui sont valables.
- \rightarrow Pour "ramasser les data" (éviter les trous), on force les data de l'espace latent à suivre une loi normale centrée réduite $(\mathcal{N}(0,\mathbf{I}))$.

- ▶ Régularisation des data: on impose des contraintes de de *continuité* et de *complétude* sur l'espace latent.
- ► Contrainte de continuité: on aimerait que des points proches de l'espace latent génère des data similaires.
- On introduit un processus de décodage stochastique lors de l'entraînement: chaque data est samplée dans l'espace latent (voisinage) avant d'être décodée.
- Contrainte de complétude: on aimerait que tous les points de l'espace latent génèrent des data qui sont valables.
- \rightarrow Pour "ramasser les data" (éviter les trous), on force les data de l'espace latent à suivre une loi normale centrée réduite $(\mathcal{N}(0,\mathbf{I}))$

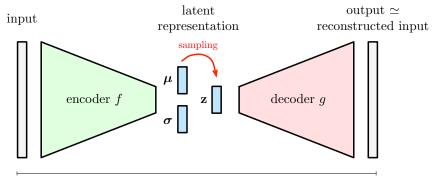
- ▶ Régularisation des data: on impose des contraintes de de *continuité* et de *complétude* sur l'espace latent.
- ► Contrainte de continuité: on aimerait que des points proches de l'espace latent génère des data similaires.
- → On introduit un processus de décodage stochastique lors de l'entraînement: chaque data est samplée dans l'espace latent (voisinage) avant d'être décodée.
- Contrainte de complétude: on aimerait que tous les points de l'espace latent génèrent des data qui sont valables.
- ightarrow Pour "ramasser les data" (éviter les trous), on force les data de l'espace latent à suivre une loi normale centrée réduite $(\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{I}))$.

- ▶ Régularisation des data: on impose des contraintes de de *continuité* et de *complétude* sur l'espace latent.
- ► Contrainte de continuité: on aimerait que des points proches de l'espace latent génère des data similaires.
- → On introduit un processus de décodage stochastique lors de l'entraînement: chaque data est samplée dans l'espace latent (voisinage) avant d'être décodée.
- ► Contrainte de complétude: on aimerait que tous les points de l'espace latent génèrent des data qui sont valables.
- \rightarrow Pour "ramasser les data" (éviter les trous), on force les data de l'espace latent à suivre une loi normale centrée réduite $(\mathcal{N}(0, I))$.

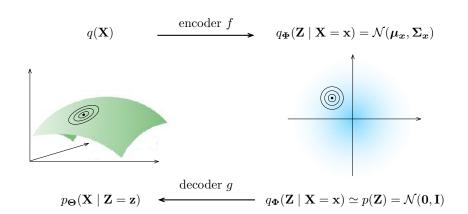
- ▶ Régularisation des data: on impose des contraintes de de *continuité* et de *complétude* sur l'espace latent.
- ► Contrainte de continuité: on aimerait que des points proches de l'espace latent génère des data similaires.
- → On introduit un processus de décodage stochastique lors de l'entraînement: chaque data est samplée dans l'espace latent (voisinage) avant d'être décodée.
- ► Contrainte de complétude: on aimerait que tous les points de l'espace latent génèrent des data qui sont valables.
- \rightarrow Pour "ramasser les data" (éviter les trous), on force les data de l'espace latent à suivre une loi normale centrée réduite $(\mathcal{N}(\mathbf{0},\mathbf{I}))$.



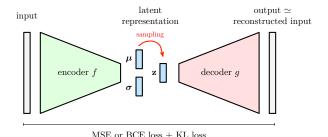
Left: less continuous and complete latent space; **Right:** more continuous and complete latent space.



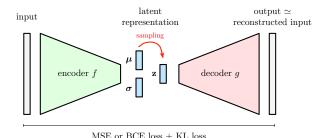
MSE or BCE loss + KL loss



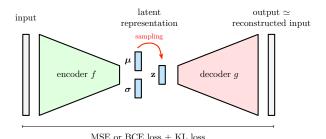
- ▶ L'encodeur est un deep neural network $f(\cdot; \Phi)$.
- Le sampler $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ sample selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$
- Le **décodeur** est un deep neural network $g(\cdot; \Theta)$.
- La composition de $f(\cdot; \Phi)$, $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ et $g(\cdot; \Theta)$ forme un réseau de neurones stochastique $\mathcal{N}(\cdot; \Phi, \Theta)$.



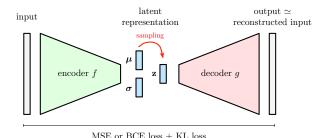
- ▶ L'encodeur est un deep neural network $f(\cdot; \Phi)$.
- ▶ Le sampler $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ sample selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.
- Le **décodeur** est un deep neural network $g(\cdot; \Theta)$.
- La composition de $f(\cdot; \Phi)$, $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ et $g(\cdot; \Theta)$ forme un réseau de neurones stochastique $\mathcal{N}(\cdot; \Phi, \Theta)$.



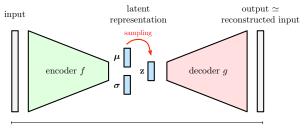
- ▶ L'encodeur est un deep neural network $f(\cdot; \Phi)$.
- ▶ Le sampler $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ sample selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.
- ▶ Le **décodeur** est un deep neural network $g(\cdot; \Theta)$.
- La composition de $f(\cdot; \Phi)$, $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ et $g(\cdot; \Theta)$ forme un réseau de neurones stochastique $\mathcal{N}(\cdot; \Phi, \Theta)$.



- ▶ L'encodeur est un deep neural network $f(\cdot; \Phi)$.
- ▶ Le sampler $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ sample selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.
- Le **décodeur** est un deep neural network $g(\cdot; \Theta)$.
- La composition de $f(\cdot; \Phi)$, $s(\cdot; \mu, \Sigma)$ et $g(\cdot; \Theta)$ forme un réseau de neurones stochastique $\mathcal{N}(\cdot; \Phi, \Theta)$.

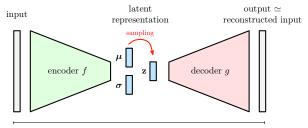


- 1. L'encodeur $f(\cdot; \Phi)$ encode une data \mathbf{x} en deux vecteurs $\mu_{\mathbf{x}}$ et $\Sigma_{\mathbf{x}}$ de plus petite dimension.
- 2. Le sampler $s(\cdot; \mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}})$ sample un point \mathbf{z} dans l'espace latent selon la loi normale $\mathcal{N}(\mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}})$.
- 3. Le **décodeur** $g(\cdot; \Theta)$ reconstruit \mathbf{x} à partir de \mathbf{z} .



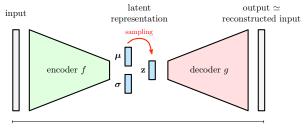
MSE or BCE loss + KL loss

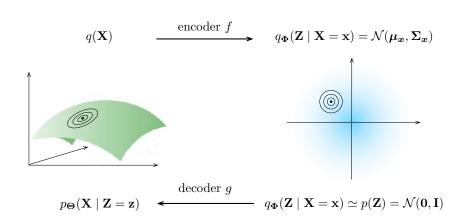
- 1. L'encodeur $f(\cdot; \Phi)$ encode une data \mathbf{x} en deux vecteurs $\mu_{\mathbf{x}}$ et $\Sigma_{\mathbf{x}}$ de plus petite dimension.
- 2. Le sampler $s(\cdot; \mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}})$ sample un point \mathbf{z} dans l'espace latent selon la loi normale $\mathcal{N}(\mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}})$.
- 3. Le **décodeur** $g(\cdot; \Theta)$ reconstruit \mathbf{x} à partir de \mathbf{z} .



MSE or BCE loss + KL loss

- 1. L'encodeur $f(\cdot; \Phi)$ encode une data $\mathbf x$ en deux vecteurs $\mu_{\mathbf x}$ et $\Sigma_{\mathbf x}$ de plus petite dimension.
- 2. Le sampler $s(\cdot; \mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}})$ sample un point \mathbf{z} dans l'espace latent selon la loi normale $\mathcal{N}(\mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}})$.
- 3. Le **décodeur** $g(\cdot; \mathbf{\Theta})$ reconstruit \mathbf{x} à partir de \mathbf{z} .





- $ightharpoonup q(\mathbf{X})$: Distribution des data originales.
- ▶ $q_{\Phi}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$ Distribution des data latentes étant donné que la data originale est \mathbf{x} . Dépend de l'encodeur $f(\cdot; \Phi)$. Par construction du modèle, on a:

$$q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$$

 $p(\mathbf{Z})$: Distribution désirée sur l'espace latent. Par construction, on choisit

$$p(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

VAE: Loss function

- $ightharpoonup q(\mathbf{X})$: Distribution des data originales.
- ▶ $q_{\Phi}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$ Distribution des data latentes étant donné que la data originale est \mathbf{x} . Dépend de l'encodeur $f(\cdot; \Phi)$. Par construction du modèle, on a:

$$q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$$

▶ $p(\mathbf{Z})$: Distribution désirée sur l'espace latent. Par construction, on choisit

$$p(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

- $ightharpoonup q(\mathbf{X})$: Distribution des data originales.
- ▶ $q_{\Phi}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$ Distribution des data latentes étant donné que la data originale est \mathbf{x} . Dépend de l'encodeur $f(\cdot; \Phi)$. Par construction du modèle, on a:

$$q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$$

 $p(\mathbf{Z})$: Distribution désirée sur l'espace latent. Par construction, on choisit

$$p(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

- $ightharpoonup q(\mathbf{X})$: Distribution des data originales.
- ▶ $q_{\Phi}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})$ Distribution des data latentes étant donné que la data originale est \mathbf{x} . Dépend de l'encodeur $f(\cdot; \Phi)$. Par construction du modèle, on a:

$$q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$$

 $p(\mathbf{Z})$: Distribution désirée sur l'espace latent. Par construction, on choisit

$$p(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

- Soit $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des data \mathbf{X} et de leur images latentes par encodage \mathbf{Z} .
- ► Soit $q(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$q(\mathbf{x}) = \int q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int q(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{z}$$

- Soit $p(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des images latentes \mathbf{Z} et de leurs reconstruction par décodage \mathbf{X} .
- ► Soit $p(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

La reconstruction s'effectue correctement si $q(\mathbf{X}) \simeq p(\mathbf{X})$

- Soit $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des data \mathbf{X} et de leur images latentes par encodage \mathbf{Z} .
- ▶ Soit $q(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$q(\mathbf{x}) = \int q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int q(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{z}$$

- Soit $p(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des images latentes \mathbf{Z} et de leurs reconstruction par décodage \mathbf{X} .
- Soit $p(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

lacktriangle La reconstruction s'effectue correctement si $q(\mathbf{X}) \simeq p(\mathbf{X})$

- Soit q(X, Z) la distribution conjointe des data X et de leur images latentes par encodage Z.
- ► Soit $q(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$q(\mathbf{x}) = \int q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int q(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{z}$$

- Soit $p(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des images latentes \mathbf{Z} et de leurs reconstruction par décodage \mathbf{X} .
- ► Soit $p(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

La reconstruction s'effectue correctement si $q(\mathbf{X}) \simeq p(\mathbf{X})$

- Soit q(X, Z) la distribution conjointe des data X et de leur images latentes par encodage Z.
- ▶ Soit $q(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$q(\mathbf{x}) = \int q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int q(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{z}$$

- Soit $p(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des images latentes \mathbf{Z} et de leurs reconstruction par décodage \mathbf{X} .
- ▶ Soit $p(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

La reconstruction s'effectue correctement si $q(\mathbf{X}) \simeq p(\mathbf{X})$

- Soit $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des data \mathbf{X} et de leur images latentes par encodage \mathbf{Z} .
- ► Soit $q(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $q(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$q(\mathbf{x}) = \int q(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int q(\mathbf{z} \mid \mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{z}$$

- ▶ Soit $p(\mathbf{Z}, \mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ la distribution conjointe des images latentes \mathbf{Z} et de leurs reconstruction par décodage \mathbf{X} .
- ▶ Soit $p(\mathbf{X})$ la distribution marginale de $p(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$:

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

▶ La reconstruction s'effectue correctement si $q(\mathbf{X}) \simeq p(\mathbf{X})$.

► Ainsi, il convient de maximiser la log-likelihood basée sur ces deux distributions:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[\log p(\mathbf{X}) \right] = \int q(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- En effet, plus les distributions sont semblables, plus la loglikelihood est élevée.
- ▶ Dans cette expression, le calcul de $p(\mathbf{x})$ s'effectue en marginalisant sur la variable latente, i.e.,

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

ce qui prend trop de temps, car requiert un parcours de tout l'espace latent pour chaque \mathbf{x} .

▶ Ainsi, il convient de maximiser la log-likelihood basée sur ces deux distributions:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[\log p(\mathbf{X}) \right] = \int q(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- En effet, plus les distributions sont semblables, plus la loglikelihood est élevée.
- ▶ Dans cette expression, le calcul de $p(\mathbf{x})$ s'effectue en marginalisant sur la variable latente, i.e.,

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

ce qui prend trop de temps, car requiert un parcours de tout l'espace latent pour chaque x.



▶ Ainsi, il convient de maximiser la log-likelihood basée sur ces deux distributions:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[\log p(\mathbf{X}) \right] = \int q(\mathbf{x}) \log p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- En effet, plus les distributions sont semblables, plus la loglikelihood est élevée.
- ▶ Dans cette expression, le calcul de $p(\mathbf{x})$ s'effectue en marginalisant sur la variable latente, i.e.,

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

ce qui prend trop de temps, car requiert un parcours de tout l'espace latent pour chaque x.



DIVERGENCE DE KULLBACK-LEIBLER (APPARTÉ)

- La Divergence de Kullback-Leibler mesure la distance entre deux distributions de probabilités p et q définies sur un ensemble X.

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

DIVERGENCE DE KULLBACK-LEIBLER (APPARTÉ)

- La *Divergence de Kullback–Leibler* mesure la distance entre deux distributions de probabilités p et q définies sur un ensemble X.
- ▶ Si *p* et *q* sont des distributions de probabilités discrète, on pose:

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

ightharpoonup Si p et q sont des distributions de probabilités continues, on a:

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

DIVERGENCE DE KULLBACK-LEIBLER (APPARTÉ)

- La *Divergence de Kullback–Leibler* mesure la distance entre deux distributions de probabilités p et q définies sur un ensemble X.
- ▶ Si *p* et *q* sont des distributions de probabilités discrète, on pose:

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$$

ightharpoonup Si p et q sont des distributions de probabilités continues, on a:

$$D_{\mathrm{KL}}(p||q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

▶ Par contre, on peut montrer que (cf. notes manuscrites):

$$\log p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \geq \mathbb{E}_{q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}|\mathbf{X} = \mathbf{x})} \left[\log p_{\mathbf{\Theta}} (\mathbf{X} = \mathbf{x} \mid \mathbf{Z}) \right]$$

$$- D_{\mathrm{KL}} \left(\underbrace{q_{\mathbf{\Phi}} (\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})}_{\sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})} || \underbrace{p(\mathbf{Z})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})} \right)$$
(1)

Le terme de droite se nomme evidence lower bound (ELBO).

En prenant l'espérance sur $q(\mathbf{X})$ à gauche et à droite, on a:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[\log p(\mathbf{X}) \right] \geq \mathbb{E}_{q(\mathbf{Z}, \mathbf{X})} \left[\log p_{\Theta} \left(\mathbf{X} \mid \mathbf{Z} \right) \right] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[D_{\mathrm{KL}} \left(q_{\Phi} \left(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} \right) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \right) \right]$$
(2)

▶ Ainsi, maximiser les termes de droite dans (1) et (2) − ou alors minimiser leurs opposés − permet de maximiser les logprobabilité et log-likelihood de gauche, respectivement.

▶ Par contre, on peut montrer que (cf. notes manuscrites):

$$\log p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \geq \mathbb{E}_{q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}|\mathbf{X} = \mathbf{x})} \left[\log p_{\mathbf{\Theta}} (\mathbf{X} = \mathbf{x} \mid \mathbf{Z}) \right]$$

$$- D_{\mathrm{KL}} \left(\underbrace{q_{\mathbf{\Phi}} (\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})}_{\sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})} || \underbrace{p(\mathbf{Z})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})} \right)$$
(1)

Le terme de droite se nomme evidence lower bound (ELBO).

lacktriangle En prenant l'espérance sur $q(\mathbf{X})$ à gauche et à droite, on a:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[\log p(\mathbf{X}) \right] \geq \mathbb{E}_{q(\mathbf{Z}, \mathbf{X})} \left[\log p_{\mathbf{\Theta}} (\mathbf{X} \mid \mathbf{Z}) \right] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[D_{\mathrm{KL}} \left(q_{\mathbf{\Phi}} (\mathbf{Z} \mid \mathbf{X}) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \right) \right]$$
(2)

▶ Ainsi, maximiser les termes de droite dans (1) et (2) – ou alors minimiser leurs opposés – permet de maximiser les logprobabilité et log-likelihood de gauche, respectivement.

VAE: Loss function

▶ Par contre, on peut montrer que (cf. notes manuscrites):

$$\log p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \geq \mathbb{E}_{q_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}|\mathbf{X} = \mathbf{x})} \left[\log p_{\mathbf{\Theta}} (\mathbf{X} = \mathbf{x} \mid \mathbf{Z}) \right]$$

$$- D_{\mathrm{KL}} \left(\underbrace{q_{\mathbf{\Phi}} (\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x})}_{\sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})} || \underbrace{p(\mathbf{Z})}_{\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})} \right)$$
(1)

Le terme de droite se nomme evidence lower bound (ELBO).

lacktriangle En prenant l'espérance sur $q(\mathbf{X})$ à gauche et à droite, on a:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[\log p(\mathbf{X}) \right] \geq \mathbb{E}_{q(\mathbf{Z}, \mathbf{X})} \left[\log p_{\mathbf{\Theta}} (\mathbf{X} \mid \mathbf{Z}) \right] - \mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \left[D_{\mathrm{KL}} \left(q_{\mathbf{\Phi}} (\mathbf{Z} \mid \mathbf{X}) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \right) \right]$$
(2)

▶ Ainsi, maximiser les termes de droite dans (1) et (2) – ou alors minimiser leurs opposés – permet de maximiser les logprobabilité et log-likelihood de gauche, respectivement.

On prend alors comme fonction de loss individuelle (cf. Eq. (1)):

$$\ell_i(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}) \ = \ \underbrace{-\mathbb{E}_{q(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x_i})} \Big[\log p_{\boldsymbol{\Theta}} \big(\mathbf{X} = \mathbf{x_i} \mid \mathbf{Z} \big) \Big]}_{\text{reconstruction term}} + \underbrace{\mathrm{D}_{\mathrm{KL}} \Big(q_{\boldsymbol{\Phi}} \big(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x_i} \big) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \Big)}_{\text{regularization term}}$$

Et comme fonction de loss collective (cf. Eq. (2)):

$$\mathcal{L}(\Phi, \Theta) = \underbrace{-\mathbb{E}_{q(\mathbf{Z}, \mathbf{X})} \Big[\log p_{\Theta} \big(\mathbf{X} \mid \mathbf{Z} \big) \Big]}_{\text{reconstruction term}} + \underbrace{\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \Big[\mathrm{D}_{\mathrm{KL}} \Big(q_{\Phi} \big(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} \big) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \Big) \Big]}_{\text{reconstruction term}}$$

On prend alors comme fonction de loss individuelle (cf. Eq. (1)):

$$\ell_i(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}) \ = \ \underbrace{-\mathbb{E}_{q(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x_i})} \bigg[\log p_{\boldsymbol{\Theta}} \big(\mathbf{X} = \mathbf{x_i} \mid \mathbf{Z} \big) \bigg]}_{\text{reconstruction term}} + \underbrace{\mathrm{D}_{\mathrm{KL}} \bigg(q_{\boldsymbol{\Phi}} \big(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x_i} \big) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \bigg)}_{\text{regularization term}}$$

▶ Et comme fonction de loss collective (cf. Eq. (2)):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}) \ = \ \underbrace{-\mathbb{E}_{q(\mathbf{Z}, \mathbf{X})} \bigg[\log p_{\boldsymbol{\Theta}} \big(\mathbf{X} \mid \mathbf{Z} \big) \bigg]}_{\text{reconstruction term}} + \underbrace{\mathbb{E}_{q(\mathbf{X})} \bigg[\mathrm{D}_{\mathrm{KL}} \Big(q_{\boldsymbol{\Phi}} \big(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} \big) \mid\mid p(\mathbf{Z}) \Big) \bigg]}_{\text{regularization term}}$$

- ► Le processus de sampling n'est pas différentiable, ce qui pose problème pour l'algorithme de backpropagation.
- ▶ Pour pallier cela, on recourt au "reparametrization trick" et au "log-var trick".
- ► Au lieu de sampler de z comme suit:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} \sim q_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

on procède de la manière suivante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} \odot \boldsymbol{\epsilon} \text{ où } \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

- Le processus de sampling n'est pas différentiable, ce qui pose problème pour l'algorithme de backpropagation.
- ▶ Pour pallier cela, on recourt au "reparametrization trick" et au "log-var trick".
- Au lieu de sampler de z comme suit:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} \sim q_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

on procède de la manière suivante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} \odot \boldsymbol{\epsilon} \text{ où } \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \text{ et } \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

- Le processus de sampling n'est pas différentiable, ce qui pose problème pour l'algorithme de backpropagation.
- ▶ Pour pallier cela, on recourt au "reparametrization trick" et au "log-var trick".
- ► Au lieu de sampler de z comme suit:

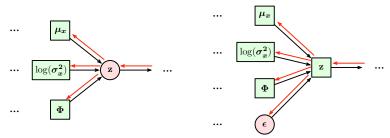
$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} \sim q_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{Z} \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

on procède de la manière suivante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} \odot \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

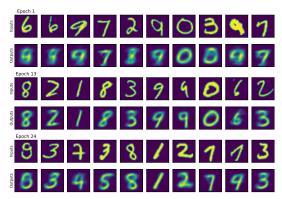
▶ En pratique, pour des raisons de stabilité, on apprend les vecteurs $\mu_{\mathbf{x}}$ et $\log(\sigma_{\mathbf{x}}^2)$ au lieu de $\mu_{\mathbf{x}}$ et $\sigma_{\mathbf{x}}^2$. On a alors

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} := f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Phi}) \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} \odot \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}} + e^{\frac{1}{2} \log(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}^{2})} \odot \boldsymbol{\epsilon} \text{ où } \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \end{cases}$$

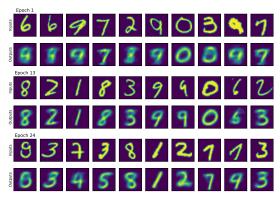


Computational graphs with and without the reparametrization trick. Green and red nodes are deterministic and stochastic nodes, respectively. Red arrows illustrate backpropagation.

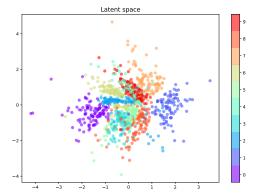
- L'espace latent est réparti de manière bien plus gaussienne et les capacité de génération sont censées être améliorées (poids des MSE et KL losses: 10 et 0.001).
- Pas si clair sur un espace latent de dim 2 (cf. slides suivants)...



- ▶ L'espace latent est réparti de manière bien plus gaussienne et les capacité de génération sont censées être améliorées (poids des MSE et KL losses: 10 et 0.001).
- ▶ Pas si clair sur un espace latent de dim 2 (cf. slides suivants)...

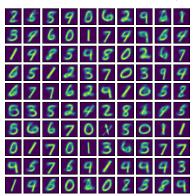


- ▶ L'espace latent est réparti de manière bien plus gaussienne et les capacité de génération sont censées être améliorées (poids des MSE et KL losses: 10 et 0.001).
- Pas si clair sur un espace latent de dim 2 (cf. slides suivants)...

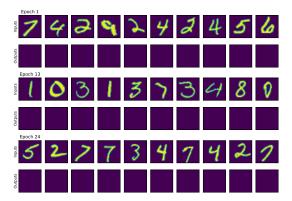


${ m VAE}$ linéaire: espace latent de dimension 2

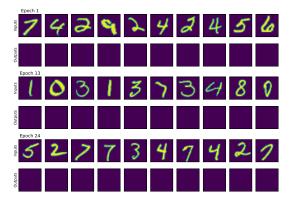
- ▶ L'espace latent est réparti de manière bien plus gaussienne et les capacité de génération sont censées être améliorées (poids des MSE et KL losses: 10 et 0.001).
- ▶ Pas si clair sur un espace latent de dim 2 (cf. slides suivants)...



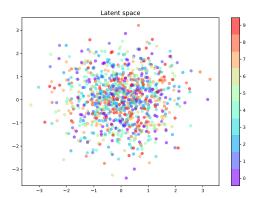
- ➤ Si on annule la MSE loss, les points de l'espace latent sont distribués de manière parfaitement normale...
- mais le réseau n'a rien appris à reconstruire.



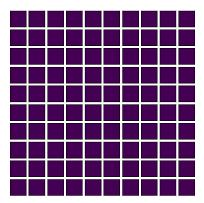
- ➤ Si on annule la MSE loss, les points de l'espace latent sont distribués de manière parfaitement normale...
- mais le réseau n'a rien appris à reconstruire.



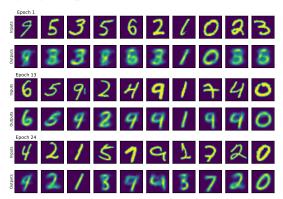
- ➤ Si on annule la MSE loss, les points de l'espace latent sont distribués de manière parfaitement normale...
- mais le réseau n'a rien appris à reconstruire.



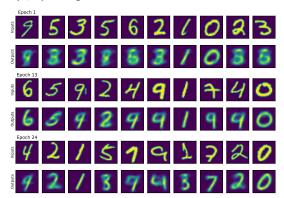
- ➤ Si on annule la MSE loss, les points de l'espace latent sont distribués de manière parfaitement normale...
- mais le réseau n'a rien appris à reconstruire.



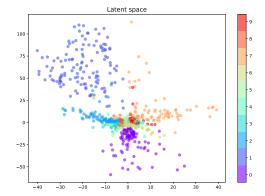
- ▶ Si, au contraire, on annule la KL loss, les points de l'espace latent ne sont plus du tout distribués de manière normale...



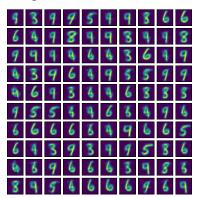
- ▶ Si, au contraire, on annule la KL loss, les points de l'espace latent ne sont plus du tout distribués de manière normale...
- le réseau a appris à reconstruire des data, mais en samplant dans $\mathcal{N}(0,1)$, on génère des data assez similaires.



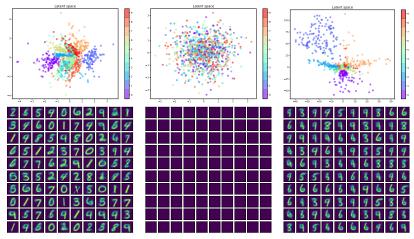
- ► Si, au contraire, on annule la KL loss, les points de l'espace latent ne sont plus du tout distribués de manière normale...
- le réseau a appris à reconstruire des data, mais en samplant dans $\mathcal{N}(0,1)$, on génère des data assez similaires.



- ➤ Si, au contraire, on annule la KL loss, les points de l'espace latent ne sont plus du tout distribués de manière normale...
- le réseau a appris à reconstruire des data, mais en samplant dans $\mathcal{N}(0,1)$, on génère des data assez similaires.

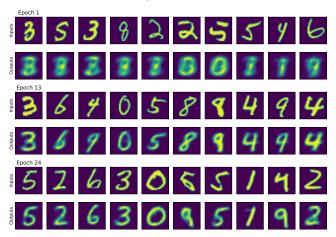


Comparaison entre les trois situations.

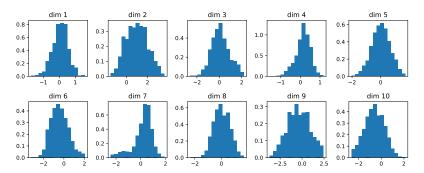


Left: combination of MSE and KL losses; Center: only KL loss; Right: only MSE loss.

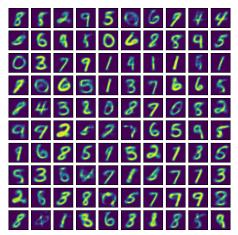
► En augmentant la dimension de l'espace latent, la génération de data est de meilleure qualité.

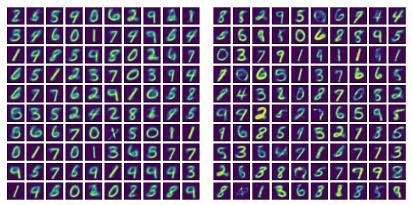


► En augmentant la dimension de l'espace latent, la génération de data est de meilleure qualité.



► En augmentant la dimension de l'espace latent, la génération de data est de meilleure qualité.

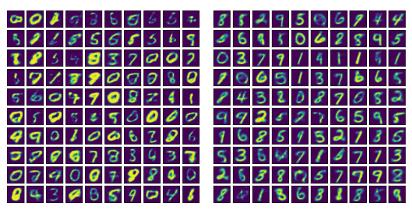




Data generation of two VAEs with latent spaces of dimensions 2 (left) and 10 (right), respectively.

AE VS VAE: ESPACE LATENT DE DIMENSION 10

► Génération de data: AE vs VAE.



Data generation of an AE (left) and a VAE (right) with latent space of dimension 10.

CONCLUSION

- Les autoencodeurs variationnels (VAEs) améliorent les capacité de génération de data par rapports aux autoencodeurs (AEs).
- L'ajout de stochasticité et l'imposition d'une distribution sur l'espace latent répond à des contraintes de continuité et de complétude sur ce espace.
- La continuité de l'espace latent rend les variables latentes interprétables: on comprend bien l'effet induit par la modification d'une variable alors que les autres restent fixes.

CONCLUSION

- Les autoencodeurs variationnels (VAEs) améliorent les capacité de génération de data par rapports aux autoencodeurs (AEs).
- L'ajout de stochasticité et l'imposition d'une distribution sur l'espace latent répond à des contraintes de continuité et de complétude sur ce espace.
- La continuité de l'espace latent rend les variables latentes interprétables: on comprend bien l'effet induit par la modification d'une variable alors que les autres restent fixes.

CONCLUSION

- Les autoencodeurs variationnels (VAEs) améliorent les capacité de génération de data par rapports aux autoencodeurs (AEs).
- L'ajout de stochasticité et l'imposition d'une distribution sur l'espace latent répond à des contraintes de continuité et de complétude sur ce espace.
- ▶ La continuité de l'espace latent rend les variables latentes interprétables: on comprend bien l'effet induit par la modification d'une variable alors que les autres restent fixes.

Bibliographie



Alexander Amini (2022).

Alexander amini: Youtube channel.



CNRS - Formation FIDLE (2022).

Cnrs - formation fidle: Youtube channel.



Fleuret, F. (2022).

Deep Learning Course.



Kingma, D. P. and Welling, M. (2014).

Auto-encoding variational bayes.

In Bengio, Y. and LeCun, Y., editors, 2nd International Conference on Learning Representations, ICLR 2014, Banff, AB, Canada, April 14-16, 2014, Conference Track Proceedings.



Kingma, D. P. and Welling, M. (2019).

An introduction to variational autoencoders.

Found. Trends Mach. Learn., 12(4):307–392.



Sebastian Raschka (2022).

Sebastian raschka: Youtube channel.



Stephen Odaibo (2020).

Stephen odaibo: Meduim post.