

TP 4 : Relaxation non cartésienne

17 mars 2020

PHY-3500 – Physique numérique (H20)

Professeurs : Louis Archambault, Daniel Côté, Antoine Allard

En classe, nous avons vu comment utiliser les différences finies pour exprimer une équation aux dérivées partielles avec conditions aux frontières de façon à pouvoir appliquer la méthode de la relaxation. Le cas de l'équation de Laplace ($\nabla^2 V = 0$) et de l'équation de Poisson ($\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$) ont été fait en exemple pour un espace cartésien en 2 dimensions.

1. Laplace en cylindrique (15 pts)

En utilisant les différences finies, obtenez une expression permettant de calculer la solution de l'équation de Laplace pour le potentiel électrique dans une géométrie cylindrique par relaxation. Assumez que le potentiel ne dépend que la direction radiale, r , et de la hauteur, z , (pas de la direction azimutale, ϕ). Utilisez une discrétisation spatiale de même grandeur en r et en z : $\Delta r = \Delta z = h$

$$\nabla^2 V(r, z) = 0$$

2. Cas simple (55 pts)

- (a) (10 points) Déterminez de façon objective quel devra être votre critère d'arrêt pour le calcul de la relaxation.
- (b) (15 points) Écrivez un algorithme pour faire le calcul par relaxation du potentiel tel que dérivé en 1. Utilisez votre algorithme pour déterminer le potentiel en tout point entre les deux cylindres concentriques illustrés à la figure 1. Présentez vos résultats sous forme de graphique. *Truc : si vous voulez valider votre réponse, le potentiel se calcule facilement de façon analytique lorsque la longueur du cylindre peut être considérée comme grande.*
- (c) **Accélération**
 - i. (10 points) En utilisant ce que vous avez fait en (b) comme point de départ, évaluez si une méthode de Gauss-Seidel peut être utilisée pour accélérer la convergence de votre calcul (considérez l'accélération comme l'atteinte de votre solution avec un nombre réduit d'itération).

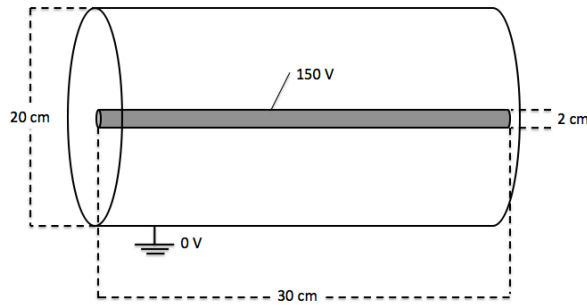


FIGURE 1 – Géométrie du problème 2

- ii. (10 points) Par essai et erreur, évaluez quantitativement si la méthode de sur-relaxation peut permettre d'accélérer la convergence de votre calcul. Si l'accélération est possible, déterminez une valeur utile pour le paramètre ω . (considérez l'accélération comme l'atteinte de votre solution avec un nombre réduit d'itération).
- iii. (10 points) À l'aide de graphiques, présentez une analyse quantitative de la convergence de votre algorithme développé en (b). Présentez la convergence en fonction du nombre d'itération ainsi qu'en fonction du temps de calcul. Si vous avez réussi à obtenir une accélération avec Gauss-Seidel et/ou avec la sur-relaxation, comparez vos résultats avec l'algorithme de base. Précisez le matériel utilisé pour faire le calcul : puissance du processeur et système d'exploitation.

3. Cas complexes (30 pts)

- (a) (10 points) Le problème 2 avait des noeuds fixes au centre du cylindre (c.-à-d. à $r = 0$). La solution pour $V(r, z)$ obtenue en 1 est singulière lorsqu'évaluée à $r = 0$, pourtant le potentiel n'a généralement pas de raison d'être singulier à cet endroit. Obtenez une expression valide et non singulière pouvant être utilisé dans la méthode de la relaxation pour le potentiel $V(r = 0, z)$
- (b) (10 points) Avec la méthode de relaxation, trouvez le potentiel en tout point entre la région de 0 V et la région de 150 V pour la géométrie de de la figure 2. Présentez vos résultats sous forme de plans 2D.
- (c) (10 points) Avec la méthode de relaxation, trouvez le potentiel en tout point entre la région de 0 V et la région de 150 V pour la géométrie de de la figure 3. Présentez vos résultats sous forme de plans 2D.

Instruction pour la remise

1. Le travail devra être effectué individuellement, en binôme ou en triumvirat
2. Les codes associés à chaque question devront être présentés dans un fichier .py distinct. Vous devrez les organiser tel qu'il sera possible de reproduire vos résultats, vos figures, etc. en exécutant votre script (ex. : `python votre_script.py`). Il est possible de placer certaines fonctions ainsi que le code commun à plusieurs numéros dans un module python appelé par vos script de réponse. Utilisez des noms de fichiers clairs et explicites. Notez que vous pouvez

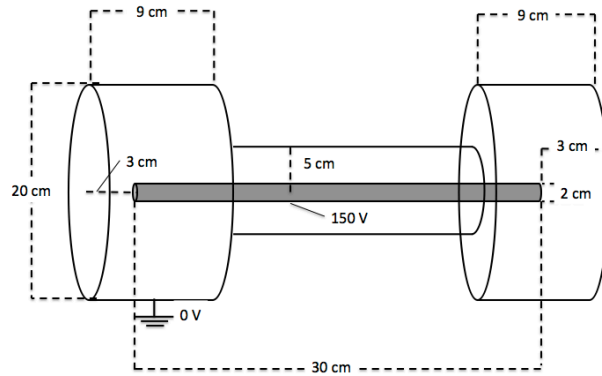


FIGURE 2 – Géométrie du problème 3-b

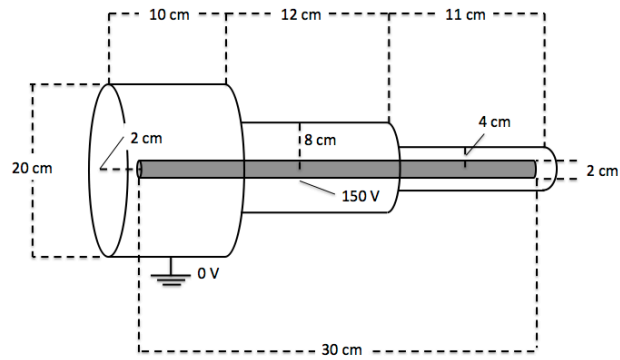


FIGURE 3 – Géométrie du problème 3-c

placer certaines fonctions dans leur propre fichier à part (qui sera importé dans votre script) si vous le jugez nécessaire.

3. Vos réponses devront être colligées dans un document de format pdf. Ce document contiendra toutes informations pertinentes permettant au lecteur d'apprécier vos résultats et conclusions (ex. développements mathématiques, figures, explications, interprétations), fera référence au script Python que vous avez utilisé de même qu'à des références bibliographiques, si nécessaire.
4. La qualité de la présentation est très importante (utilisation de sections, de graphiques appropriés, de mise en contexte, etc.). Vous pouvez vous référer au document **ConsignesTP.ipynb** sur le portail pour plus de détails.
5. Vous devrez rassembler et compresser tous vos fichiers dans un fichier **.zip** et le remettre dans la boîte de dépôt créée à cette fin. Prenez soin de bien indiquer votre (ou vos) nom(s) dans le document pdf et dans chacun de vos scripts. Pour faciliter la tâche de classification, utilisez la nomenclature suivante pour le fichier transmis (un seul par équipe) : **TPn_nom.zip** ou **TPn_nom1_nom2.zip**.