Equation de fragmentation

$u(t,x)$ concentrat° cellules à t, taille x

$$\{y\} \longrightarrow \{x\} + \{y-x\}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\beta(x)u(t,x) + 2\int_x^\infty \beta(y)k(y,x)u(t,y)\,dy$$

Hyp. sur k : * symétrie : $k(y,x) = k(y,y-x)$

* cons° de la masse : $\int_0^y k(y,x)\,x\,dx = 1$

noyau "Auto-similaire" : l'emplacement de la frag. (x) ne dépend que du ratio $\frac{x}{y}$

$$\Rightarrow \quad k(y,x) = \frac{1}{y} k_0\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{avec} \quad \int_0^1 k_0(z)\,dz = 1$$

(k_0 : mesure de proba sur $[0,1]$)

On vérifie alors que $\frac{d}{dt}\int_0^\infty x\,u(t,x)\,dx = 0$

pour nous ce sera $\frac{d}{dt}\int n(t,x)\,dx = 0$, mais ça ne change pas vraiment l'analyse

On cherche à estimer k_0 à partir de mesures de $u(t,x)$

1e méthode : en asymptotique

on a $u(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \delta_0$

Mais si on suppose $\beta(x) = x^\gamma$, $\gamma > 0$

on peut montrer $u(t,x) \approx t^{c(\gamma)} g(x t^{c(\gamma)})$

avec g sol° d'une EDP de type $g' + xg = -\beta(x)g + \int_x^\infty \underbrace{k_0\left(\frac{x}{y}\right) g(y)\frac{dy}{y}}_{\beta(y)}$

Pour estimer k_0 à partir de mesures de g :

$$\mathcal{M}(f)(s) := \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\,dx$$

on montre que $\mathcal{M}\left[\int_x^\infty k_0\left(\frac{x}{y}\right) g(y)\,\frac{dy}{y}\right] = \mathcal{M}(k_0)\,\mathcal{M}(g)$

· Donc on obtient : $\mathcal{M}(g') + \mathcal{M}(xg) = -\mathcal{M}(x^\gamma g) + \mathcal{M}(x^\gamma g)\,\mathcal{M}(k_0)$

$$\Rightarrow \quad k_0 = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\mathcal{M}(g') + \mathcal{M}(xg) + \mathcal{M}(x^\gamma g)}{\mathcal{M}(x^\gamma g)}\right]$$

$\Rightarrow$ ici pas possible : notre cas correspond à $\gamma = 0$ (voir à la fin des notes)

2e méthode : utiliser les temps courts

en partant de $u(t=0, x) = \delta_1$

on peut estimer $k_0(x)$

Eq° auto-similaire avec $\beta(x) = 1$:

$$\partial_t u(t,x) = -u(t,x) + 2\int_x^\infty k_0\left(\frac{x}{y}\right) u(t,y)\,\frac{dy}{y}$$

Eq° avec les mutations :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = -\mu\lambda\, u(t,x) + \lambda \displaystyle\int_x^\infty k_0\left(\frac{x}{y}\right) u(t,y)\,\frac{dy}{y} \\ \qquad \text{avec } \displaystyle\int_0^1 k_0(z)\,dz = 1-\mu \\ u(t,0) = \mu\lambda \displaystyle\int_0^\infty u(t,y)\,dy \end{cases}$$

en négligeant les mutations bénéfiques. Ainsi $\int_0^{+\infty}$

ce qui sera conservé : $\int_{0^+}^\infty u(t,x)\,dx + u(t,0) = \int_0^\infty u(t,x)\,dx$

Changement de notation : S pr la v.a. s, minuscules pour les variables, majuscules pour les v.a.
$U = 1-S$ de loi f_U, S de loi $f_S = f_U(1-\cdot)$

Modèle "intuitif" (que l'on doit pouvoir prouver à partir du modèle probabiliste) : → comme satisfait en espérance par $\mu_t := \delta_{W_t}$

$n(t,x)$ conc° instant t, fitness x

mutent avec un taux λ (on prend d'abord $\mu = 0$) indépdt de x

↳ nouvelle fitness y : avec proba relative (pr le ratio $\frac{x}{y}$) de loi f_U

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n(t,x) = -\lambda n(t,x) + \lambda \int_0^\infty f_U\left(\frac{x}{y}\right) n(t,y) \frac{dy}{y}}$$

ou de façon équivalente : $\int_0^\infty f_U(z)\, n\left(t, \frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z}$

$z = \frac{x}{y}$

$dz = -\frac{x}{y^2} dy = -z\frac{dy}{y}$

si $S \sim f_S$ $U = 1 - S \sim f_U = f_{1-S} = f_S(1-\cdot)$ ← notation

Par conservat° du nb de cellules :

$$\frac{d}{dt}\int n(t,x)\,dx = 0 = -\lambda \int n(t,x)\,dx + \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty f_U\left(\frac{x}{y}\right) n(t,y) \frac{dy}{y}\,dx$$

ch. de V. $z = \frac{x}{y}$ remplace x : $dz = \frac{1}{y}dx$

$$\Rightarrow \quad = -\lambda \int_0^\infty n(t,x)\,dx + \lambda \left(\int_0^\infty f_U(z)\,dz\right) \int_0^\infty n(t,y)\,dy$$

$= 0$

<u>Vérification</u> pour retrouver éq° p.6 (avec $\mu = 0$) :

on pose $\tilde{x} = \log x$ et $\tilde{n}(t,\tilde{x})d\tilde{x} = n(t,x)dx$ $\quad x = e^{\tilde{x}}$ $\quad y = e^{\tilde{y}}$ $\quad \frac{dy}{y} = d\tilde{y}$

⚠ le « dx » ou « $d\tilde{x}$ » est important. $\quad dx = e^{\tilde{x}} d\tilde{x}$

soit $\tilde{n}(t,\tilde{x}) = x\, n(t,x)$

← car ainsi on aura bien $\int \tilde{n}(t,\tilde{x})\,d\tilde{x} = \int n(t,x)\,dx$

$n\left(t, \frac{x}{z}\right)\frac{x}{z} = n(t,y)y$
$= \tilde{n}(t, \log y)$.

$$\partial_t (xn) = -\lambda x n + \lambda \int_0^\infty f_U(z)\, n\left(t, \frac{x}{z}\right)\frac{x}{z}\,dz$$

$z = e^{\tilde{z}}$, $dz = e^{\tilde{z}} d\tilde{z}$

$\tilde{z} = \log z$

$$\partial_t \tilde{n} = -\lambda \tilde{n} + \lambda \int_0^\infty f_U(z)\, \tilde{n}(t, \tilde{x} - \log z)\,dz$$

$$= -\lambda \tilde{n} + \lambda \int_0^\infty f_U(e^{\tilde{z}})\, \tilde{n}(t, \tilde{x} - \tilde{z})\,d\tilde{z}\, e^{\tilde{z}}$$

$$\Rightarrow \quad f_U(e^{\tilde{z}})e^{\tilde{z}} = \mathcal{L}[\log U] \text{ : tout est bien cohérent.}$$

on a $\partial_t(\tilde{\mathcal{F}}(u_t)) = \lambda(\tilde{\mathcal{F}}(f) - 1)\tilde{\mathcal{F}}(u_t)$

$$\Rightarrow \log(\tilde{\mathcal{F}}(u_t)) = \log(\tilde{\mathcal{F}}(u_0)) + \lambda(\tilde{\mathcal{F}}(f) - 1)t$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(f) = 1 + \frac{1}{\lambda t}\Big[\log(\tilde{\mathcal{F}}(u_t)) - \log(\tilde{\mathcal{F}}(u_0))\Big]$$

$\mathbb{E}(e^{-2i\pi\xi_t}) = \int e^{-2i\pi\xi x} f(x)dx = \tilde{\mathcal{F}}(u_t)$ c'est bien la formule de Lydia

Remarque par rapport à l'éq° de fragmentation : on est dans le cas limite $\gamma = 0$ pour lequel on n'a pas le comportement asymptotique décrit au début.

On l'a étudié en détail dans un article (Doumic, Escobedo, 2015)

Ici c'est presque pareil si on suppose $\mathrm{Supp}\, f_0 \subset [0,1]$ i.e. en négligeant les mutations bénéfiques.