

## NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

### 1) Rappels : divisibilité par 2, par 3, par 5, par 9, par 10

#### a) Nombres premiers :

Un nombre premier est un nombre entier qui admet exactement 2 diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples : 2, 3, 5, 7 sont des nombres premiers.

1, 0, 9 ne sont pas des nombres premiers.

#### b) Critères de divisibilité :

- Un nombre est divisible par 2, si son chiffre des unités est 0, ou 2, ou 4, ou 6 ou 8.
- Un nombre est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre est divisible par 10, si son chiffre des unités est 0.

### 2) Diviseurs communs à deux entiers naturels

a) **Définition** : Un diviseur commun à deux nombres entiers naturels  $a$  et  $b$ , est un entier  $d$  qui divise à la fois  $a$  et  $b$ .

Exemple : Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 et 24

Les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18

Alors 1, 2, 3 et 6 sont des diviseurs communs à 24 et 18

b) **Définition** : Parmi tous les diviseurs communs à deux entiers  $a$  et  $b$ , il y en a un qui est plus grand que tous les autres. On l'appelle le **PGCD de  $a$  et  $b$** .

Exemple : le PGCD de 24 et 18 est 6.

#### c) Algorithme d'Euclide :

Exemple : Recherche du PGCD de 360 et 504.

On effectue les divisions successives :  $504 = 360 \times 1 + 144$   
 $360 = 144 \times 2 + 72$   
 $144 = 72 \times 2 + 0$

Le dernier reste non nul est le PGCD de 360 et 504.

**Donc le PGCD de 360 et 504 est 72.**

d) Application :

On veut recouvrir une plaque rectangulaire de 108 cm de long sur 84 cm de large, de carreaux de faïence, de forme carrée, tous identiques.

Quelle est la plus grande dimension possible pour un carreau ?

Combien peut-on mettre de carreaux dans la longueur ? Dans la largeur ?

Si  $c$  est la longueur du côté d'un carreau, on doit pouvoir mettre  $x$  carreaux entiers dans la longueur et  $y$  carreaux entiers dans la largeur.

Donc  $x \times c = 108$  et  $y \times c = 84$ . Donc  $c$  est un diviseur commun à 108 et 84. De plus,  $c$  doit être le plus grand possible, donc  $c$  est le PGCD de 108 et 84.

Par l'algorithme d'Euclide, on obtient que 12 est le PGCD de 108 et 84.

*Donc la plus grande dimension possible pour un carreau est de 12 cm.*

*Dans la longueur, il peut y avoir  $108 : 12 = 9$  carreaux.*

*Dans la largeur, il peut y avoir  $84 : 12 = 7$  carreaux.*

*Au total, il y aura  $7 \times 9 = 63$  carreaux sur la plaque.*

3) Nombres premiers entre eux :

- a) Définition : Deux nombres entiers naturels  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, si leur seul diviseur commun est 1. Autrement dit, si leur PGCD est 1.

Exemple : 8 et 9 sont premiers entre eux, car les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4 et 8, et les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9.

- b) Application : Fraction irréductible.

- Définition : Une fraction de 2 entiers naturels  $\frac{a}{b}$  est irréductible, si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
- Propriété : En divisant le numérateur et le dénominateur d'une fraction de 2 entiers naturels  $\frac{a}{b}$  par le PGCD de  $a$  et  $b$ , on obtient une fraction irréductible  $\frac{a'}{b'}$  égale à  $\frac{a}{b}$ .

Exemple : Rendre irréductible la fraction  $x = \frac{175}{225}$

On utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD de 175 et 225.

$$225 = 175 \times 1 + 50$$

$$175 = 50 \times 3 + 25$$

$$50 = 25 \times 2 + 0$$

Donc le PGCD de 225 et 175 est 25.  $175 = 25 \times 7$  et  $225 = 25 \times 9$ . Donc  $x = \frac{175}{225} = \frac{7}{9}$ .

#### 4) Ensembles de nombres :

Les différents types de nombres sont :

- Les nombres entiers naturels : 0, 1, 2, 3 .....  
L'ensemble de tous les entiers naturels se nomme  $\mathbb{N}$ .
- Les nombres entiers relatifs : ce sont les naturels ainsi que leurs opposés.  
L'ensemble de tous les entiers relatifs se nomme  $\mathbb{Z}$ .
- Les nombres décimaux : ils peuvent s'écrire sous la forme  $\frac{a}{10^n}$  où  $a$  et  $n$  sont des entiers relatifs.  
L'ensemble de tous les décimaux se nomme  $\mathbb{D}$ .
- Les nombres rationnels : ils peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction de 2 entiers relatifs.  
L'ensemble de tous les rationnels se nomme  $\mathbb{Q}$ .
- Les nombres irrationnels : ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction de 2 entiers relatifs.
- L'ensemble de tous ces nombres, rationnels et irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels et est nommé  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Exemple : dire si le nombre  $x = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}$  est un entier naturel ou relatif, un décimal, un rationnel ou un réel non rationnel.

$$x = \frac{\frac{5}{3} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{10}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} + \frac{6}{4}}$$

$$x = \frac{\frac{9}{6}}{\frac{9}{4}} = \frac{9}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{6}$$

$$\text{Donc } x = \frac{2}{3} \approx 0,666....$$

**Donc  $x$  est un rationnel, un réel, mais ce n'est pas un nombre décimal, ni un entier.**

**$x \in \mathbb{Q}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ ,  $x \notin \mathbb{Z}$ .**