PROBABILITÉS

1) Vocabulaire des probabilités

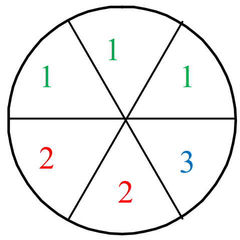
a) Expérience aléatoire

Définition : Une **expérience** est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** possibles et que l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel résultat se produira.

Représentation des différents résultats possibles d'une expérience aléatoire par un ***arbre***.

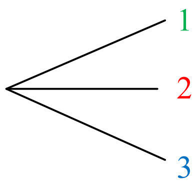
Exemple :

On tourne la roue bien équilibrée et on relève
le numéro du secteur qui s'arrête en face du secteur.

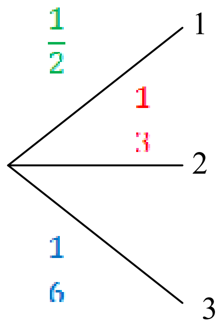


On a donc les 3 cas possibles, c'est-à-dire les 3 issues possibles suivantes.

Arbre des possibilités



Arbre avec probabilités



La ***probabilité d'une issue*** est un ***nombre compris entre 0 et 1***.
La ***somme des probabilités des issues*** d'une expérience aléatoire est ***égale à* 1**.

Dans l'exemple précédent, $p(1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $p(3)=\frac{1}{6}$.

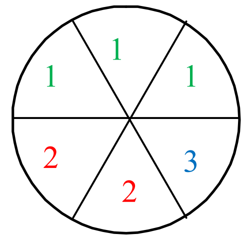
Donc $p(1)+p(2)+p(3)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$.

b) Evènement

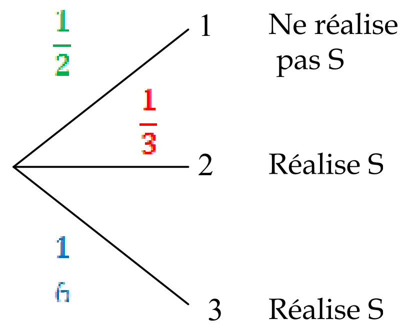
Définition : Un **évènement** est constitué par des **issues qui réalisent cet évènement**.

Propriété : Avec un arbre, la probabilité d'un évènement est égale à la **somme des probabilités des issues** qui réalisent cet évènement.

Exemple **:**



Dans l'exemple précédent,
on appelle S l'évènement
« le numéro sorti est supérieur ou égal à 2 ».



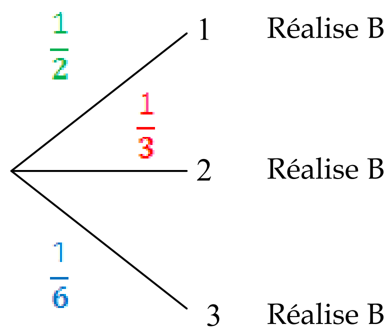
S est réalisé si 2 ou 3 sortent.
D'après les calculs précédents,
$p(2)+p(3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{Donc } p(S)=\frac{1}{2}}$.

Conséquences :

- Tout évènement A a une probabilité comprise entre 0 et 1. **0 ≤ *p*(A) ≤ 1**.
- Un évènement A est dit impossible, s'il ne peut pas être réalisé. ***p*(A) = 0**.
- Un évènement A est dit certain s'il est obligatoirement réalisé. ***p*(A) = 1**.

Dans l'exemple précédent, si
A = « le numéro 4 est sorti » et si
B = « le numéro sorti est compris entre 1 et 3 »,
alors ***p*(A) = 0 et *p*(B) = 1**.
Donc A est impossible et B est certain.



c) Fréquence et probabilité

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement devient proche de sa probabilité.

Exemple **:** au jeu de pile ou face, la probabilité de l'évènement A = « pile est sorti » est $p(A)=\frac{1}{2}$. Si on joue 1000 fois de suite, pile ne va pas sortir forcément 500 fois, mais la fréquence d'apparition de « pile » sera très proche de $p(A)=\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}$.

2) Evènements incompatibles, évènements contraires

a) Evènements incompatibles

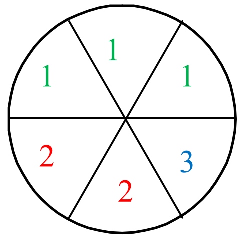
Définition : 2 **évènements A et B sont incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

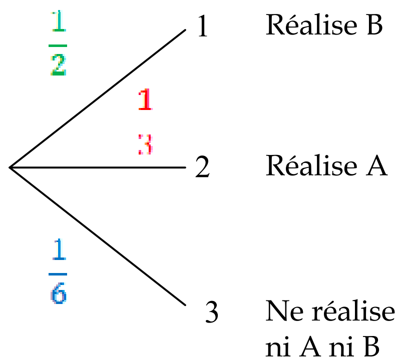
Propriété : Si 2 évènements A et B sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités.

On écrit : $\boxed{p(A \text{ ou } B) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$.

Exemple :

Dans l'exemple de la roue,





l'évènement A « le numéro sorti est pair »,
et l'évènement B = « le numéro 1 est sorti »,
sont incompatibles.

$p(A \text{ ou } B) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

b) Evènement contraire

Définition : **l'évènement contraire** d'un évènement A est celui qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. On écrit $\overline{A}$.

Donc un évènement A et son contraire $\overline{A}$ sont 2 évènements incompatibles.

Propriété : la somme des probabilités d'un évènement A et de son contraire $\overline{A}$ est égale à 1. On écrit $\boxed{p(A) + p\left(\overline{A}\right) = 1}$. Donc $\boxed{p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)}$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, A = « le numéro 2 est sorti ».

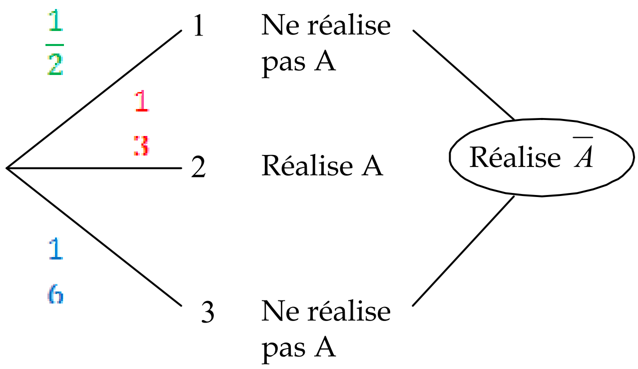
Donc $\overline{A}$ = « le numéro 1 ou le numéro 3 est sorti ».

A et $\overline{A}$ sont incompatibles, comme A et B.

Mais $\overline{A} \neq B$.

$p\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Et $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.



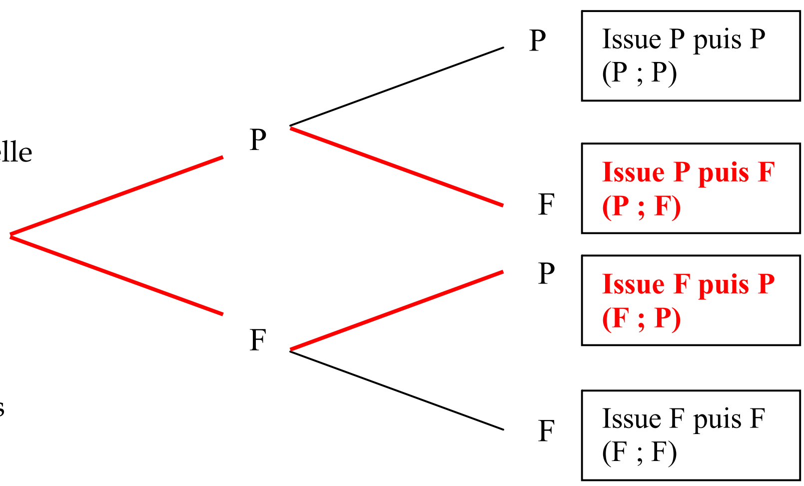
3) Expérience aléatoire à deux épreuves

a) Définition :

Sur un arbre à 2 épreuves,
une succession de 2 branches s'appelle
un **chemin**.

Exemple : on joue 2 fois de suite
à pile (P) ou face (F) avec une pièce
bien équilibrée.

En rouge, les 2 chemins à 2 branches
qui réalisent l'issue F et P.



Si la pièce est bien équilibrée, la probabilité d'obtenir pile est la même que la probabilité d'obtenir face, à chaque partie. $p(P) = p(F) = \frac{1}{2}$.

b) <u>Propriété</u> : dans un arbre de probabilités, la probabilité de l'issue d'un chemin est égale au produit des probabilités de chaque branche du chemin.

c) *<u>Exemples</u>* :

<u>Exemple 1</u>

Dans l'exemple précédent, le 1er chemin est noté (P ; F) et le 2ème chemin est noté (F ; P).

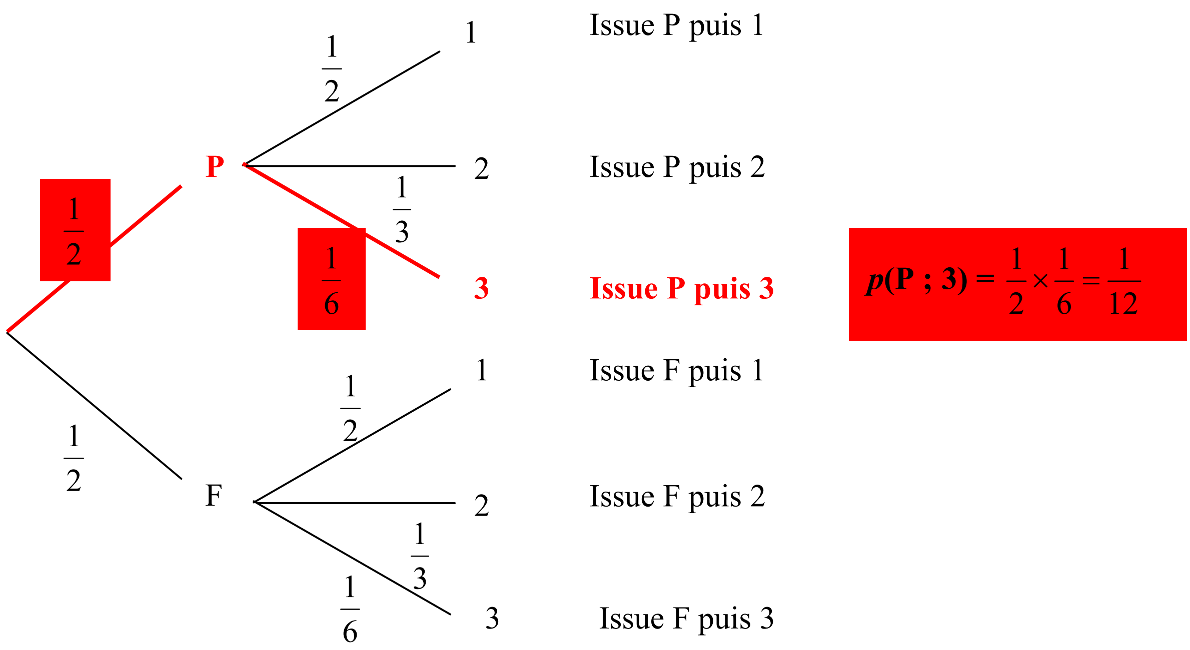
$p(P;F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $p(F;P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Donc la probabilité d'une issue est la somme des probabilités qui réalisent cette issue.

$p\left(\left(P;F\right) \cup \left(F;P\right)\right) = p\left(\left(P;F\right)\right) + p\left(\left(F;P\right)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

<u>Exemple 2</u>

On joue d'abord à pile (P) ou face (F) avec une pièce bien équilibrée, puis à la roue précédente.
On a donc l'arbre de probabilités suivant :



On écrit $p(P\ puis\ 3) = p(P;3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.