FONCTIONS LINEAIRES, FONCTIONS AFFINES

1) Fonctions linéaires

a) Rappels sur les tableaux de proportionnalité :

x	12	5	- 3	7
y	4,8	2	- 1,2	2,8

x 0,4

Le tableau est un tableau de proportionnalité, car les nombres de la suite y, s'obtiennent en multipliant chaque nombre de la suite x par un même nombre k. $\boldsymbol{k} = \frac{y}{x} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

k s'appelle le coefficient de proportionnalité de la suite x à la suite y.

b) Définitions :

On dit que le nombre y *est l'image du nombre* x par **l'application (ou fonction) linéaire *f* de coefficient a**, si $y = a\,x$.
On écrit : $f : x \mapsto y = f(x) = ax$

Exemple : Calculer l'image de $\frac{2}{5}$ par la fonction linéaire f de coefficient $\frac{3}{4}$.

Calculer x pour que $\frac{3}{2}$ soit l'image de x par la fonction f précédente.

c) Représentation graphique :

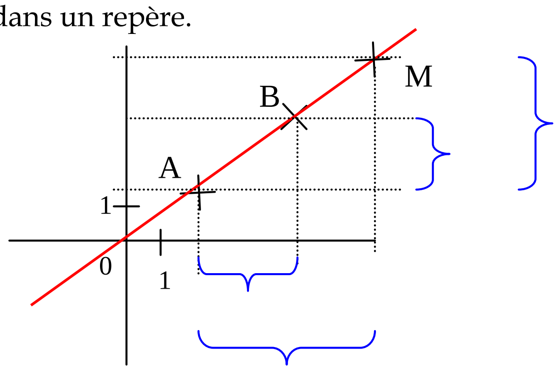
Si f est l'application linéaire de coefficient a, alors on peut construire un tableau de proportionnalité à l'aide de :

a x

x	x_A	x_B
y	y_A	y_B

On peut alors représenter graphiquement ce tableau par les points A : (x_A ; y_A) et B : (x_B ; y_B) alignés avec l'origine, dans un repère.

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble de tous les points M dont les coordonnées sont
M : (x_M ; y_M), avec y_M = f(x_M) = a x_M.



Propriété : La représentation graphique de la fonction linéaire f de coefficient a est la **droite (*d*) passant par l'origine et par le point A : (1 ; *a*)**.
Le nombre ***a*** s'appelle le ***coefficient directeur de la droite* (*d*)**.

d) Application : Tracer, dans le même repère, les représentations graphiques
$f : x \mapsto y = f(x) = 1{,}5x$ et $g : x \mapsto y = g(x) = -2x$

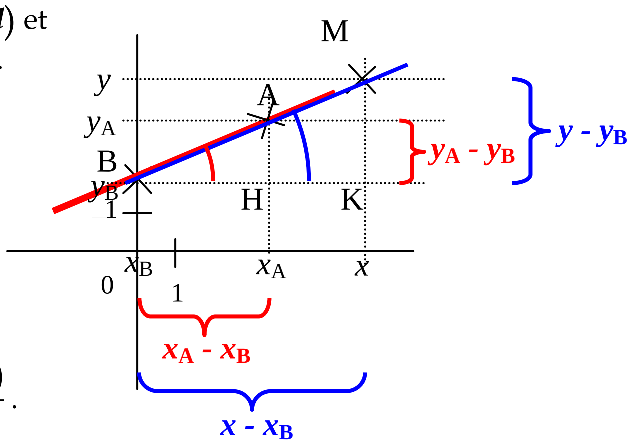
2) Fonctions affines

a) Définition : Le nombre y est l'image du nombre x par la fonction (ou application) affine f définie par les nombres a et b (dans cet ordre), si $y = a\,x + b$.
On écrit : $f : x \mapsto y = f(x) = ax + b$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto y = f(x) = -3x + 4$, la fonction affine définie par – 3 et 4.
Calculer l'image de $\dfrac{4}{3}$. Calculer le nombre x pour que – 5 soit l'image de x.

b) Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto y = f(x) = ax + b$ est **la droite (d) passant par le point A : (x ; $a\,x + b$) et par le point B (0 ; b), où x est un nombre quelconque**.
a s'appelle le ***coefficient directeur de la droite*** (d) et
b s'appelle ***l'ordonnée à l'origine*** de la droite (d).



Démonstration
Dans le triangle HAB rectangle en H,
$\tan \widehat{HBA} = \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.
Mais A (x_A ; y_A) $\in$ C$f \Leftrightarrow y_A = f(x_A) = ax_A + b$
et B (x_B ; y_B) $\in$ C$f \Leftrightarrow y_B = f(x_B) = ax_B + b$

Donc $\tan \widehat{HBA} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{(ax_A + b) - (ax_B + b)}{x_A - x_B}$.

Donc $\tan \widehat{HBA} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{ax_A + b - ax_B - b}{x_A - x_B} = \dfrac{ax_A - ax_B}{x_A - x_B} = \dfrac{a \times (x_A - x_B)}{x_A - x_B}$.

Donc si $x_A - x_B \neq 0$, alors $\tan \widehat{HBA} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = a$.

De même, dans le triangle KBM rectangle en K, $\tan \widehat{KBA} = \dfrac{y - y_B}{x - x_B} = a$.

Les 2 angles $\widehat{HBA}$ et $\widehat{KBA}$ sont égaux.
Donc les 2 droites (BA) et (BM) sont parallèles avec un point commun. Elles sont confondues.
Les points B, A et M sont alignés.
L'ensemble des points M (x ; ax +b), autrement dit, la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto y = f(x) = ax + b$ est donc la droite (d) = (AB).

De plus $\boxed{\textbf{le coefficient directeur est } a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}}$.

Propriété : On dit que l'accroissement de $y = f(x)$, $y_A - y_B = f(x_A) - f(x_B)$, est proportionnel à l'accroissement de x, $x_A - x_B$.
Le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur de la représentation graphique (d) de la fonction f. $a = \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B}$.

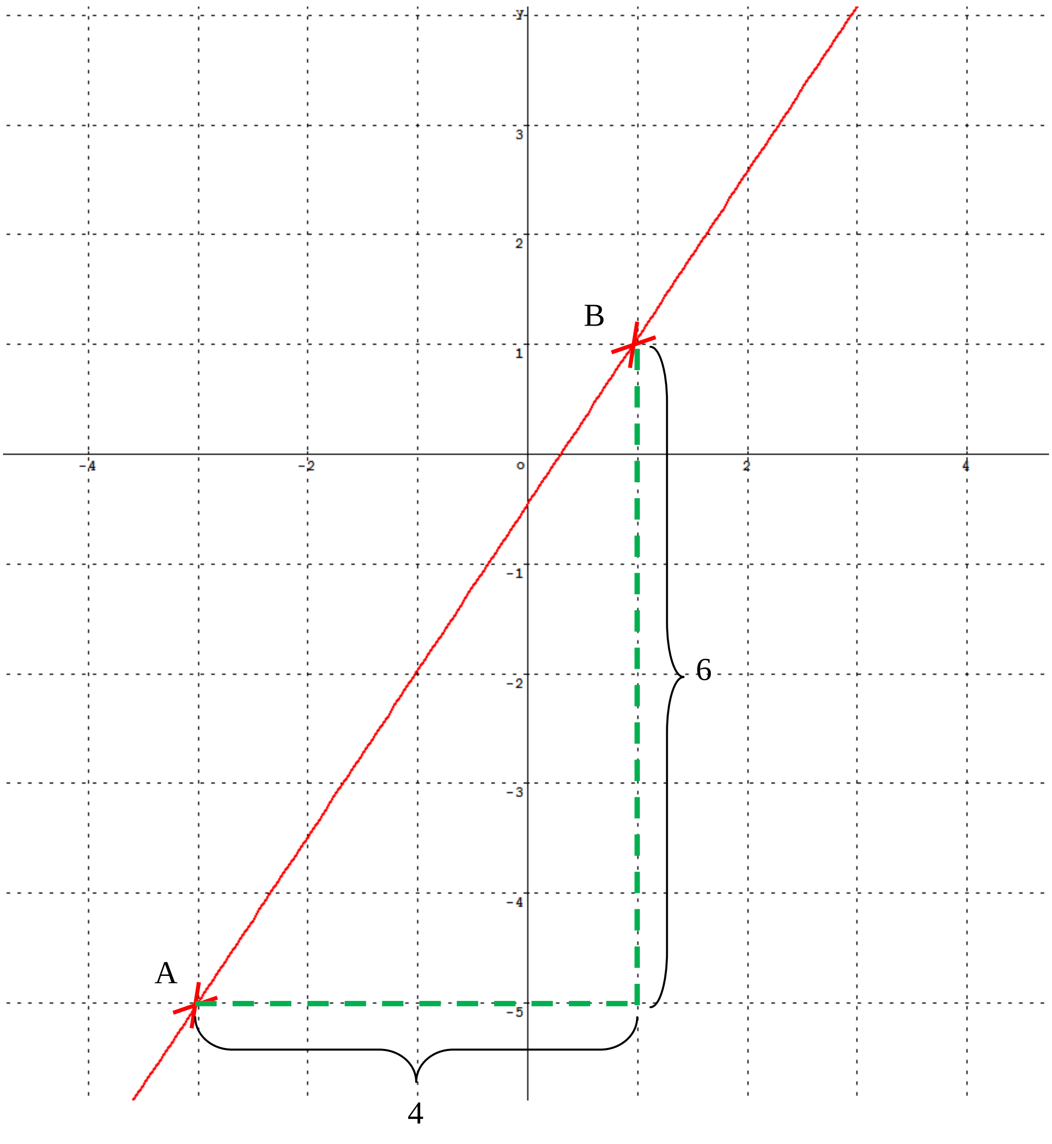
c) <u>Applications</u> :

<u>Exemple 1</u> : Tracer dans le même repère, les représentations graphiques des fonctions

$$f : x \mapsto y = f(x) = -3x + 2 \text{ et } g : x \mapsto g(x) = 2x - 5.$$

La représentation graphique de *f* est la droite d_f passant par le point B (0 ; 2) et par le point A (1 ; – 3 x 1 + 2) soit A (1 ; – 1).
La représentation graphique de *g* est la droite d_g passant par le point B′ (0 ; – 5) et par le point A′ (2 ; 2 x 2 – 5) soit A′ (1 ; – 1).

<u>Exemple 2</u> : Déterminer la fonction affine *f* dont la représentation graphique est la droite (*d*).



f est une fonction affine, donc *f* est définie par *f*(*x*) = *ax* + *b*.
Les points A (– 3 ; – 5) et B (1 ; 1) sont sur la représentation graphique de *f*.

Donc $y_A = f(-3) = -5$ et $y_B = f(1) = 1$. Donc $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-5-1}{-3-1} = \dfrac{-6}{-4}$. Donc $a = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

Donc $f(x) = \dfrac{3}{2}x + b$. Donc $f(1) = \dfrac{3}{2} \times 1 + b = 1$. Donc $b = 1 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Finalement $\boxed{\textbf{la fonction } f \textbf{ est définie par } f(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}}$.