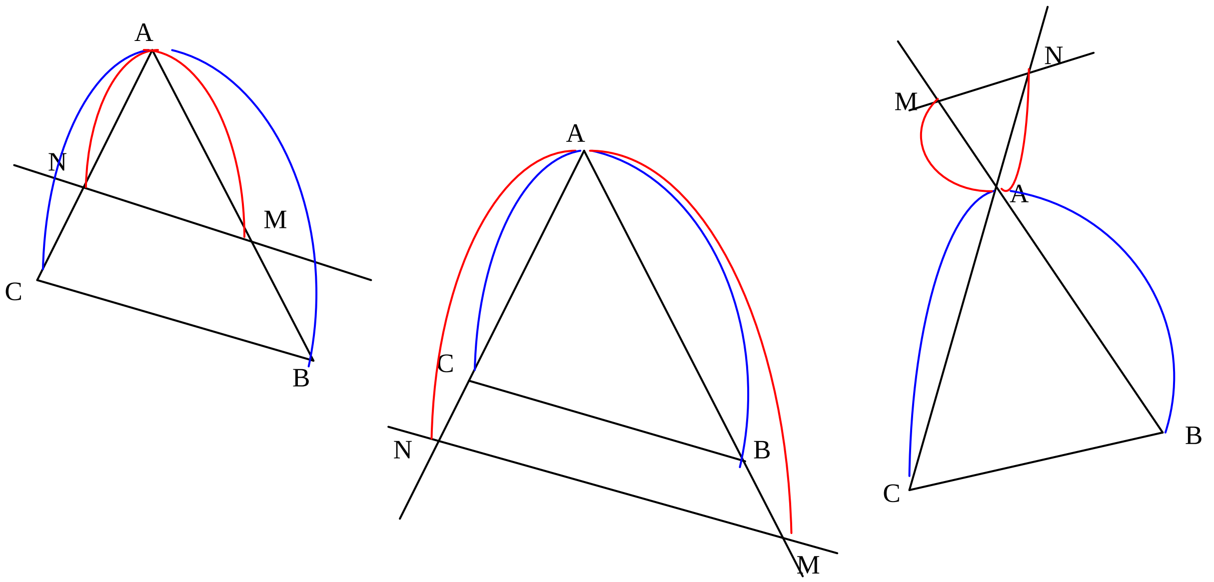
CONFIGURATIONS DE THALES

1) Théorème de Thalès

a) Situation de Thalès :

ABC est un triangle quelconque. **M est un point de la droite (AB) et N est un point de la droite (AC)** tels que **A, B et M d'une part, A, C et N d'autre part, sont dans le même ordre**.
On a alors les 3 cas de figures suivants :



b) Théorème de Thalès :

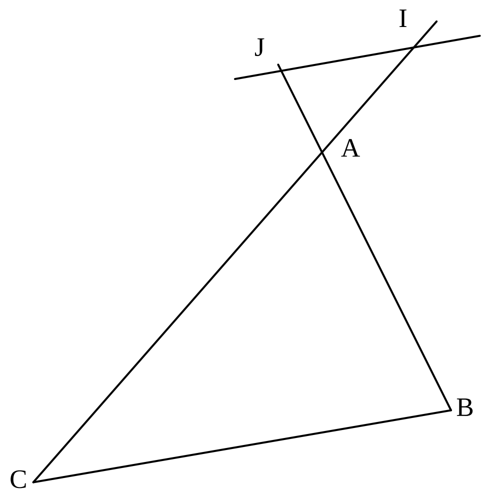
Si les droites **(BC) et (MN) sont parallèles** et si les conditions de l'un des 3 cas précédents sont remplies, alors $\frac{80}{20}\,\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

Autrement dit, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

AB	AC	BC
AM	AN	MN

c) Exemple 1 :

Dans la figure ci-contre, (IJ) // (BC).
AI = 5 *cm*, IC = 20 *cm* IJ = 3 *cm* et BJ = 16 *cm*.
Calculer BC, AB et AJ.



On est dans les conditions d'utilisation du théorème de Thalès, et (IJ) // (BC).

D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{IJ}{BC}$.

Soit $\dfrac{5}{20-5} = \dfrac{3}{BC}$. D'où 5 × BC = 3 × 15.

$\boxed{\textbf{Donc BC} = \dfrac{3\times15}{5} = \mathbf{9}\ cm}$.

De plus, toujours d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AJ}{AB}$. Soit $\dfrac{5}{20-5} = \dfrac{AJ}{16-AJ}$.

Si AJ = x, on obtient : 5 × (16 – x) = 15 × x.

D'où 80 – 5x = 15x. Donc 80 = 15x + 5x. Donc x = $\dfrac{80}{20}$ = 4.

Donc AJ = 4 *cm* et AB = 16 – 4 = 12 *cm*.

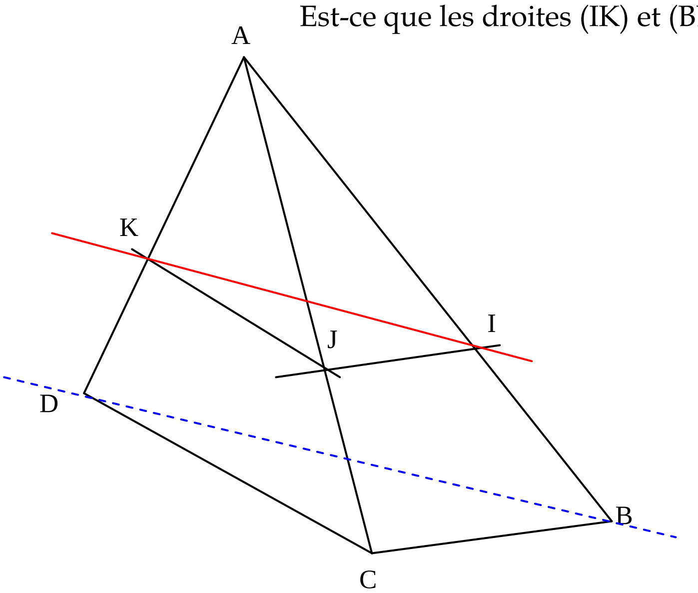
2) Réciproque du théorème de Thalès

a) Théorème réciproque :

Si l'on est dans l'un des 3 cas précédents et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}\ \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$,

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

b) Exemple 2 : Dans la figure ci-dessous, (IJ)//(BC) et (JK)//(CD).
Est-ce que les droites (IK) et (BD) sont parallèles ?



On est dans les conditions d'utilisation du Théorème de Thalès, dans les triangles ABC et ACD.

D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC}$ d'une part, et d'autre part $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AJ}{AC}$.

Donc $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AI}{AB}$.

K est un point de (AD) et I est un point de (AB), et A, I et B sont dans le même ordre que A, K et D.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (IK)//(BD).

3) Applications

a) Agrandissements et réductions :

Dans les conditions d'utilisation du théorème de Thalès, les angles des figures sont conservés et les longueurs des figures sont proportionnelles :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ montre que les dimensions du triangle AMN sont proportionnelles à celles du triangle ABC.

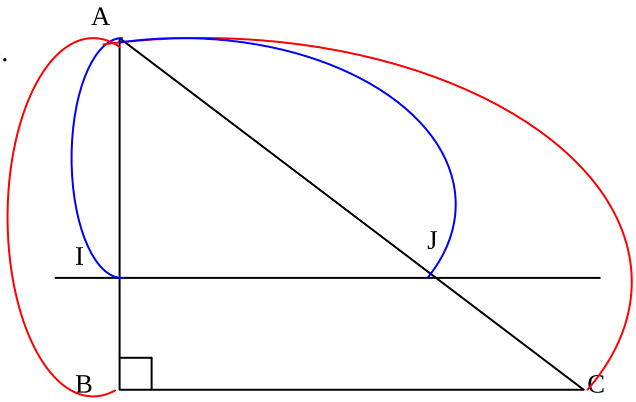
Si k est le coefficient de proportionnalité du triangle ABC vers le triangle AMN,
alors $\frac{\text{AM}}{\text{AB}} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}} = \frac{\text{MN}}{\text{BC}} = k$.
Donc AM = $k \times$ AB, AN = $k \times$ AC et MN = $k \times$ BC.

Si $k < 1$, on dit que la figure obtenue AMN, est une réduction de la figure initiale ABC.
Si $k > 1$, on dit que la figure obtenue AMN, est un agrandissement de la figure initiale ABC.

b) Propriété :

Si k est le coefficient d'agrandissement ou de réduction d'une figure, alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par k^3.

Exemple : ABC est un triangle rectangle en B.
AI = 4,5 *cm*, AB = 6 *cm*,
AJ = 7,5 *cm* et AC = 10 *cm*.
Montrer que (IJ) // (BC).
Montrer que AIJ est une réduction de ABC, et calculer le coefficient de réduction.
Par quel nombre faut-il multiplier l'aire $\mathcal{A}$ de ABC pour obtenir l'aire $\mathcal{A}'$ de AIJ ?



Remarque : *il n'y a donc pas besoin de calculer les aires des triangles AIJ et ABC.*
Il n'y a donc pas besoin de calculer BC ni IJ.

On est dans les bonnes conditions. $\frac{\text{AI}}{\text{AB}} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{3}{4}$ et $\frac{\text{AJ}}{\text{AC}} = \frac{7{,}5}{10} = \frac{3}{4}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (IJ) // (BC).

Donc d'après le théorème de Thalès, $\frac{\text{IJ}}{\text{BC}} = \frac{\text{AI}}{\text{AB}} = \frac{\text{AJ}}{\text{AC}} = \frac{3}{4}$.

Donc AIJ est une réduction de ABC de coefficient $k = \frac{3}{4}$.

Alors $\mathcal{A}' = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \text{A} = \frac{9}{16} \times \mathcal{A}$.

c) <u>Placer un point sur une droite ou un segment</u> :

Sur une droite quelconque (AB), placer les points M et N tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ et $\frac{NA}{NB} = \frac{5}{2}$.

Sur le quadrillage horizontal, $\frac{M'A}{M'B} = \frac{2}{3}$. La parallèle à (BB') passant par M' coupe (AB) en M. D'après le théorème de Thalès, $\frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$.

De même, sur le quadrillage vertical, $\frac{N'A}{N'B} = \frac{5}{2}$. La parallèle à (BB') passant par N' coupe (AB) en N. D'après le théorème de Thalès, $\frac{N'A}{N'B''} = \frac{NA}{NB} = \frac{5}{2}$.