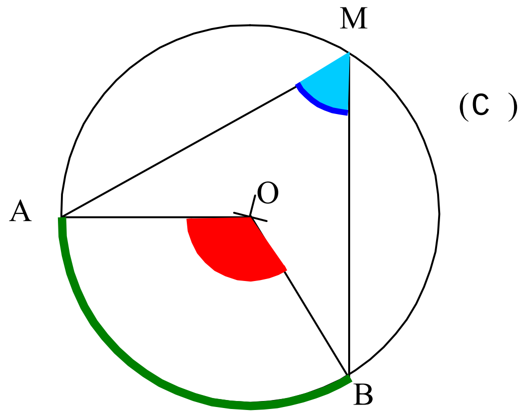
ANGLES INSCRITS – POLYGONES REGULIERS

1) Angles inscrits :

a) Vocabulaire :

(C) est un cercle de centre O. A, B et M sont 3 points du cercle.
Si M et O sont du même côté de (AB), l'angle saillant $\widehat{AOB}$ s'appelle un angle au centre et l'angle saillant $\widehat{AMB}$ s'appelle un angle inscrit, ils interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

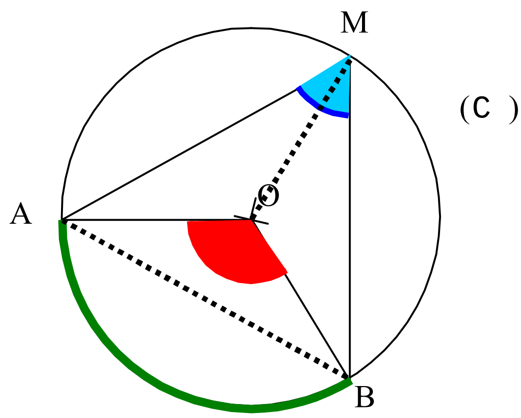
Si M et O ne sont pas du même côté de (AB),
l'angle saillant inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le même grand arc $\overset{\frown}{AB}$ que l'angle au centre rentrant $\underset{\smile}{AOB}$.



$$\widehat{\mathbf{AMB}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{AOB}}$$

b) Théorème de l'angle inscrit :

La mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



Démonstration :
Les triangles AOM et BOM sont isocèle en O.

Donc $\widehat{AMO} = \widehat{MAO} = \dfrac{180° - \widehat{AOM}}{2}$ *et*

$\widehat{BMO} = \widehat{MBO} = \dfrac{180° - \widehat{BOM}}{2}$.

Donc $\widehat{AMB} = \widehat{AMO} + \widehat{BMO} = \dfrac{180° - \widehat{AOM}}{2} + \dfrac{180° - \widehat{BOM}}{2} = \dfrac{360° - \left(\widehat{AOM} + \widehat{BOM}\right)}{2}$.

Or $\widehat{AOB} = 360° - \left(\widehat{AOM} + \widehat{BOM}\right)$. *Donc* $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$.

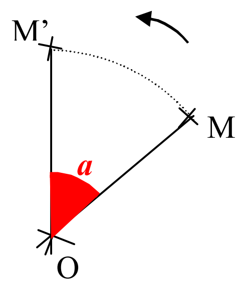
Conséquence : Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

2) Rotation :

a) Définition :

Soit O un point quelconque du plan et a une mesure d'angle comprise entre 0 et 180°.
L'image d'un point M par la rotation de centre O et d'angle a dans le sens direct est le point M' défini par : OM =OM', $\widehat{MOM'} = a$, M' se déduit de M en tournant dans le ***sens direct***, c'est-à-dire dans le ***sens inverse des aiguilles d'une montre***.

Donc l'image de O est O lui-même.



b) **Propriétés** :

L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur.
L'image d'un angle par une rotation est un angle de même mesure.

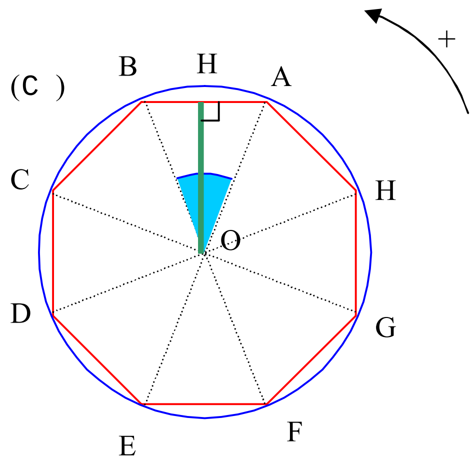
Une rotation conserve les longueurs et les angles.
Une rotation conserve l'alignement.

3) **Polygones réguliers** :

a) **Définition** :

Un polygone régulier est un polygone dont les côtés ont la même longueur et les angles ont la même mesure.

b) **Exemple** :



ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O et tel que la distance de O à (AB) est 2 *cm*, soit $d(\mathrm{O},(\mathrm{AB})) = 2\ cm$.

- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.
- Quelle est l'image de l'octogone par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens direct ?
- Calculer le rayon du cercle (C) circonscrit à l'octogone.

$$\widehat{\mathrm{AOB}} = \mathbf{\frac{360}{8} = \frac{90 \times 4}{4 \times 2} = \frac{90}{2} = 45°}$$

L'image de A est donc C, car $\widehat{\mathrm{AOC}}$ = 45° × 2 = 90°.
De même l'image de B est D, l'image de C est E, les images de D, E, F, G et H sont respectivement F, G, H, A et B.
Finalement, l'image de l'octogone ABCDEFGH est ABCDEFGH lui-même.

On construit la hauteur [OH] du triangle OAB. Comme OAB est isocèle en O, (OH) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$. Donc $\widehat{\mathrm{AOB}} = \frac{45}{2} = 22{,}5°$.

Dans le triangle AOH rectangle en H,

$\cos 22{,}5° = \frac{OH}{OA} = \frac{2}{OA}$, donc $OA = \frac{2}{\cos 22{,}5} \approx 2{,}2$. $\mathbf{OA \approx 2{,}2}$ ***cm***.

c) **Propriété** :

Un polygone régulier est inscrit dans un cercle de centre O.
L'image d'un polygone régulier ABC…. inscrit dans un cercle de centre O, par une rotation de centre O et qui transforme A en B est le polygone lui-même.