EQUATIONS ET INEQUATIONS – SYSTEMES DE 2 EQUATIONS

1) Equations du premier degré à une inconnue

a) Définitions :

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, désigné par une lettre, par exemple x, qui peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$, ou $ax + b = cx + d$, avec $a \neq c$.

Résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres x qui vérifient l'égalité.

b) Méthode : En utilisant les propriétés des opérations, on regroupe les termes avec l'inconnue d'un côté de l'égalité, et les termes sans inconnue de l'autre côté de l'égalité.

A chaque fois que l'on change de côté un terme, on fait l'opération inverse.

L'équation $ax + b = cx + d$ devient $ax - cx = d - b$.

D'où, si a et c sont 2 nombres différents, alors $ax + b = cx + d \Leftrightarrow x = \dfrac{d-b}{a-c}$

c) *Exemples* : Résoudre les équations suivantes

$$3(5x-8)-2(x-5)=x+2 \qquad \frac{2(3x-7)}{5}-\frac{x+2}{3}=\frac{x+8}{15}$$

2) Inéquations du premier degré à une inconnue

a) Définitions :

Une inéquation du premier degré à une inconnue est une inégalité dans laquelle figure un nombre inconnu, désigné par une lettre, par exemple x, qui peut s'écrire sous la forme
$ax + b < 0$, avec $a \neq 0$, ou $ax + b \leq cx + d$, avec $a \neq c$ ou bien
$ax + b > 0$, avec $a \neq 0$, ou $ax + b \geq cx + d$, avec $a \neq c$.

Résoudre une inéquation, c'est trouver tous les nombres x qui vérifient l'inégalité.

b) Règles :

Inégalités et additions- soustractions :

a, b et c sont 3 nombres quelconques. Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

Exemple : Si $2x + 5 < 3$, alors $2x < 3 - 5$. Donc $2x < -2$.

Inégalités et multiplications- divisions :

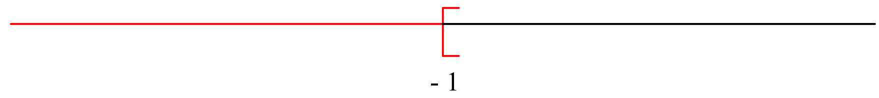
a, b et c sont 3 nombres quelconques.

Si $c > 0$, si $a < b$, alors $ac < bc$ et $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

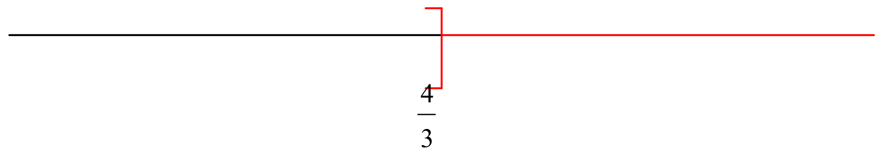
Si $c < 0$, si $a < b$, alors $ac > bc$ et $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

c) *Exemples*

Exemple 1 : Si $2x < -2$ *alors* $x < \frac{-2}{2}$. Donc $x < -1$. Il y a une infinité de solutions.



Exemple 2 : Si $-3x < -4$, alors $x > \frac{-4}{-3}$. Donc $x > \frac{4}{3}$. Il y a une infinité de solutions.

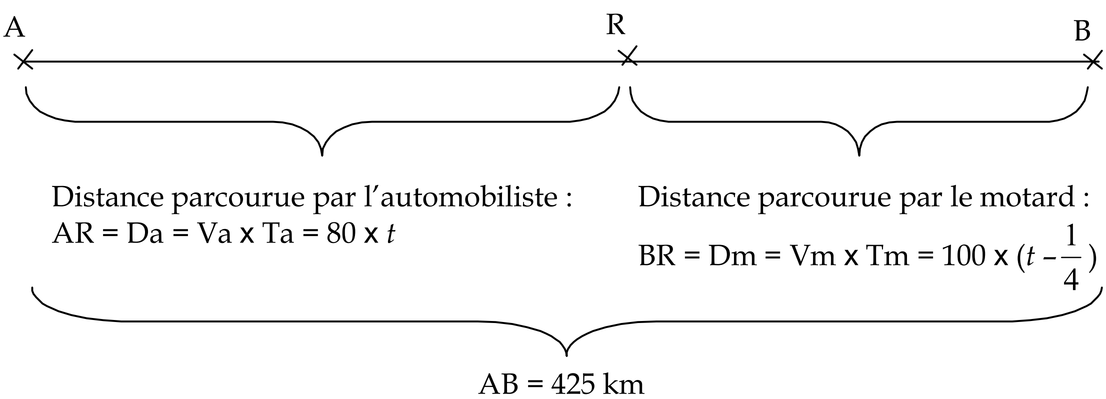


3) Problèmes :

a) Problème de mise en équation :

Un automobiliste part à $8h00$ d'une ville A et se dirige vers la ville B en roulant à la vitesse moyenne constante de 80 km/h. Un quart d'heure plus tard, un motard part de la ville B et se dirige vers la ville A, sur la même route, en roulant à la vitesse moyenne constante de 100 km/h. Les deux villes sont distantes de 425 *kms*.
Au bout de combien de temps l'automobiliste rencontrera le motard ?
A quelle heure se fera la rencontre ?

Soit t le temps de parcourt de l'automobiliste.



D'où, en faisant AB = AR + BR, on obtient l'équation $80\,t + 100\,(t - \frac{1}{4}) = 425$.

On résout cette équation : $80\,t + 100\,t - \frac{100}{4} = 425$.

Donc $180t = 425 + 25$. D'où $t = \frac{450}{180} = \frac{45}{18} = \frac{9 \times 5}{9 \times 2}$. $\boxed{\textbf{Donc } t = \frac{5}{2} = 2{,}5\ h = 2h\ 30min}$.

La rencontre se fera à 8h00 + 2h30 = 10h30.

b) Problème de mise en inéquation :

Un vidéoclub propose à ses adhérents les deux formules suivantes :
Formule A : chaque cassette est louée 5 €.
Formule B : en prenant une carte d'abonnement à 15 €, on bénéficie d'une réduction de 30 % sur le prix de la location d'une cassette.
A partir de combien de cassettes louées, la formule B est-elle plus avantageuse que la formule A ?

Soit x le nombre de cassettes louées.

Avec la formule A, le coût pour x cassettes louées est $A(x) = x \times 5 = 5x$.
Avec la formule B, le coût pour x cassettes louées est
$B(x) = x \times (5 - 30\% \times 5) + 15 = x \times 5 \times (100\% - 30\%) + 15$
$= x \times 5 \times 70\% + 15 = x \times 5 \times 0{,}70 + 15$
$B(x) = x \times 3{,}5 + 15 = 3{,}5x + 15$.

La formule B sera plus avantageuse que la formule A si $B(x) < A(x)$.
On obtient l'inéquation $3{,}5x + 15 < 5x$.

Donc $15 < 5x - 3{,}5x$. D'où $15 < 1{,}5x$. Donc $\frac{15}{1{,}5} < x$. $\boxed{\textbf{D'où } 10 < x}$.

La formule B sera plus avantageuse que la formule A à partir de 11 cassettes louées.

4) Systèmes

a) Définitions :

- Un système de 2 équations à 2 inconnues est un ensemble de 2 équations d'inconnues x et y de la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

- Résoudre un tel système, c'est chercher les couples de nombres (x ; y), vérifiant les 2 équations en même temps.

- Un couple (x ; y) vérifiant les 2 équations en même temps, est une solution du système.

b) Méthode par substitution :

La méthode par substitution consiste à :

- ***Calculer l'une des inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des 2 équations ;***
- ***On remplace cette inconnue par sa valeur dans l'autre équation ;***
- ***On obtient une équation à une inconnue, que l'on résout ;***
- ***On remplace cette inconnue par la valeur que l'on vient de trouver dans la formule que l'on a trouvée à la première étape.***

Exemple : Résoudre le système suivant $(S)\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x+y=1 \end{cases}$

(S) est équivalent à :

$\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ y=1-3x \end{cases}$ ← ***On calcule y en fonction de x dans la 2ème équation***

$\begin{cases} 2x+3(1-3x)=-4 \\ y=1-3x \end{cases}$ ← ***On remplace y par sa valeur dans la 1ère équation***

$\begin{cases} 2x+3-9x=-4 \\ y=1-3x \end{cases}$ ← ***On résout une équation à 1 inconnue***

$\begin{cases} -7x=-7 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{-7}=1 \\ y=1-3\times 1=-2 \end{cases}$ ← ***On remplace x par sa valeur dans la formule trouvée au début***

D'où finalement $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ **Le système a une et une seule solution : (1 ; – 2).**

c) <u>Méthode par combinaison</u> :

La méthode par combinaison consiste à :

- On effectue des combinaisons de multiplications par un nombre (positif ou négatif) et d'additions des 2 équations ;
- On élimine l'une des 2 inconnues, et on résout une équation à une inconnue ;
- On remplace alors cette inconnue par sa valeur dans l'une des 2 équations.

<u>Exemple</u> : Résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

On appelle E_1 la 1ère équation et E_2 la seconde équation.

(S) est équivalent à

$$\begin{cases} 6x - 8y = 4 & : 2E_1 \\ -6x - 9y = -21 & : -3E_2 \end{cases}$$

On effectue une combinaison de 2 multiplications par un nombre

$$\begin{cases} -8y - 9y = 4 - 21 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

On effectue une addition des 2 équations obtenues

$$\begin{cases} -17y = -17 \Leftrightarrow y = \dfrac{-17}{-17} = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

On résout une équation à 1 inconnue

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x + 3 \times 1 = 7 \end{cases}$$

On remplace y par sa valeur dans l'une des 2 équations du système

Finalement on obtient $\begin{cases} y = 1 \\ x = \dfrac{7-3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$ **Le système a une et une seule solution (2 ; 1).**