PUISSANCES D'EXPOSANTS RELATIFS

1) Définitions

Pour tout nombre a et pour tout entier supérieur ou égal à 2,

$a^n = \underbrace{a \times a \times \quad \times a}_{n \text{ fois}}.$

Pour tout nombre a non nul et pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \underbrace{\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{a} \times \ldots\ldots\ldots \dfrac{1}{a}}_{n \text{ fois}}.$

$a^1 = a$ et si $a \neq 0$, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. Enfin, par convention, si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

2) Propriétés

Pour tous nombres a et b non nuls, et pour tous entiers relatifs n et p, on a :

$a^n \times a^p = a^{n+p}$ $\quad (a^n)^p = a^{n \times p}$ $\quad \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemples :

Ecrire sous la forme d'une seule puissance puis calculer

$5^3 \times 5^{-2} = 5^1$ $\quad 5^3 \times (-2)^3 = (5 \times -2)^3 = (-10)^3 = -1000.$

Ecrire sous la forme d'une seule puissance

$5^3 \times 2^{-3} = 5^3 \times \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{5^3 \times 1}{2^3} = \dfrac{5^3}{2^3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3.$

Ecrire à l'aide de puissances d'exposants positives

$A = \dfrac{5^3}{8^{-2}} \times \dfrac{(-10)^{-2}}{15^{-3}}$

$A = \dfrac{5^3}{(2^3)^{-2}} \times \dfrac{(-5 \times 2)^{-2}}{(5 \times 3)^{-3}}$ On décompose en produit de nombres plus simples.

$A = \dfrac{5^3}{2^{3 \times -2}} \times \dfrac{(-5)^{-2} \times 2^{-2}}{5^{-3} \times 3^{-3}}$ On sépare les puissances des nombres différents.

$A = \dfrac{5^3 \times 5^{-2}}{5^{-3}} \times \dfrac{2^{-2}}{2^{3 \times -2}} \times \dfrac{1}{3^{-3}}.$ On regroupe les puissances d'un même nombre.

$A = 5^{3-2--3} \times 2^{-2--6} \times \dfrac{3^0}{3^{-3}} = 5^{3-2+3} \times 2^{-2+6} \times 3^{0--3}$ On calcule chaque regroupement.

$\boxed{A = 5^4 \times 2^4 \times 3^3}$ On met tout en puissances d'exposants positifs.