

RACINES CARRÉES

1) Définition

La racine carrée du nombre positif a est le nombre *positif* x tel que $x^2 = a$.

On note $x = \sqrt{a}$

Donc, pour tout nombre $a \geq 0$:

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

2) Propriétés

a) Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemple : $\sqrt{27} \times \sqrt{3} = \sqrt{81} = 9$.

b) Pour tous nombres a et b positifs, avec $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple : $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$.

c) Pour tout nombre a , $\sqrt{a^2} = a$ ou $\sqrt{a^2} = -a$.

Plus précisément, $\begin{cases} \text{si } a \geq 0, & \sqrt{a^2} = a \\ \text{si } a \leq 0, & \sqrt{a^2} = -a \end{cases}$ $\sqrt{a^2}$ doit toujours être positif ou nul.

Exemple : $\sqrt{12^2} = 12$ car $12 \geq 0$, et $\sqrt{(-12)^2} = -(-12) = 12$ car $-12 \leq 0$.

3) Applications :

a) Equation $x^2 = a$:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Exemple : $(x - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{5} \text{ ou } x - 3 = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{5} \text{ ou } x = 3 - \sqrt{5}$

b) Simplifications de radicaux :

Exemples : Simplifier l'écriture des nombres $A = \sqrt{18}$ et $B = 5\sqrt{12} + 2\sqrt{75} - 4\sqrt{27}$ et $C = (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$.

$$A = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

$$B = 5\sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} - 4\sqrt{9 \times 3} \quad B = 5\sqrt{4} \times \sqrt{3} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{3} - 4\sqrt{9} \times \sqrt{3}$$

$$B = 5 \times 2 \times \sqrt{3} + 2 \times 5 \times \sqrt{3} - 4 \times 3 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

$$C = (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 1 \times 1 + 1 \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times 1 - \sqrt{5} \times \sqrt{5}$$

$$C = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} - (\sqrt{5})^2 \quad \quad \quad C = 1 - 5 = -4.$$

c) Suppression des radicaux au dénominateur :

Exemple : Supprimer le radical au dénominateur des fractions $A = \frac{2}{\sqrt{6}}$ et $B = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$.

$$A = \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$B = \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5}) \times (1 + \sqrt{5})} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{1^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$B = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{-4} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{2 \times -2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$