Step-by-Step Summary

LR-Zerlegung

$PA = LR$; $Lc = Pb$; $Rx = c$

(1) Gausse & schreibe Koeffizienten in L-Matrix.
Wenn bei A Zeilen-verschoben → L-auch Zeilen verschieben

(2) Löse $Lc = Pb$ mit Gauss auf → erhalte c-Vektor durch berechnen von $x_1, ..., x_n$
(3) Erhalte x_n von $Rx = c$ durch Rückwärtseinsetzen (evtl. gauss)

Die Cholesky-Zerlegung: $A = LDL^T$ ($= LL^T$) für A ist reell + invertierbar

Dimension

$\dim X - \dim(\ker(F)) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{Rang}(F)$

$\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $n \times m$, ($n \le m$)		$\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $n \times m$, ($n \ge m$)	
$\dim(\ker A)$	$\dim(\mathrm{Im} A)$	$\dim(\ker A)$	$\dim(\mathrm{Im} A)$
$m-n$	n	0	m
$m-n+1$	$n-1$	⋮	$m-1$
⋮	⋮	⋮	⋮
m	0	n	0

Basis erweitern

(1) Berechne Dimension von V
(Indikator für # Vektoren man braucht)

(2) Setze die Vektoren als Zeilen ≡ ein & fülle Rest bis Dimension mit Nullen.

(3) Berechne Zeilenstufenform

(4) Finde Stufen die länger als ein Kästchen sind.

(5) Füge dort eine Zeile weiter unten eine 1 und dem diagonale abwärtsgehend auch eine 1 ein.

(6) Lies die ehemaligen Nullzeilen ab.

(7) Falls bestimmte Bedingungen erfüllt sein müssen, erfülle diese.

Eigenvektor normalisieren

$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ wobei $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Dif.-gleichung 2ter Ordnung

(1) $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 2x(t) = 0$
(2) $y_1(t) := x(t)$; $y_2(t) := \dot{x}(t)$ bis $n-1$ter Ordnung
(3) $\dot{y}_1 = y_2 = \dot{x}(t)$
$\dot{y}_2 = 2y_1 + y_2$
(4) Jetzt ganz normal wie bei Diff.-1. Ordnung.

Basistransformation

1. notiere neue & alte Basis
2. Drücke alte in neuer aus. $b_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. erstelle Transformationsmatrix mit diesen Vektoren
4. Berechne Inverse
5. $v' = T^{-1} \cdot V$
6. Alternative nach 2 berechneten Transformationsmatrizen
   1. $B = T_2^{-1} A T_1 = S^{-1} A T_1$
   2. $B T_1^{-1} V = T_2^{-1} A V$

Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{tikzcd} \xi \in E^n \arrow[r, "A"', "\text{Abb. matrix}"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \eta \in E^n \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] \\ \xi' \in E^n \arrow[u, shift right, "T"'] \arrow[r, "B", "\text{Abb. Matrix}"'] & \eta' \in E^n \arrow[u, shift right, "T"'] \end{tikzcd}$$

Koordinaten bzgl. alter Basis
Koordinaten bzg neuer Basis

$B = T^{-1} A T$ $\quad A = T B T^{-1}$

$A \Leftrightarrow B$ sind ähnlich: selbes char. polynom, Determinante, Eigenwerte & Spur.

Basis:

(1) Anzahl Vektoren stimmt mit Dimension überein
(2) Vektoren sind linear unabhängig
! Polynom deg 3 → 4 Dimensionen

Lineare/(Un)Abhängigkeit

(1) Fasse die Vektoren in 1 Matrix
1. $\det(A) = 0$ → Linear abhängig, sonst unabhängig
2. Fasse alles in 1 Matrix & gaussé. Falls es Nullspalten/Kolonen hat → linear abhängig, Falls eindeutige Lösung $\lambda_1, ... \lambda_n = 0$ → linear unabhängig
Note: Pivot gibt Basisvektoren an.
3. Invertierbarkeit

(2) 2 Vektoren:
1. $\lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$ für $\lambda_1 \& \lambda_2 \neq 0$
2. 3+ Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig

(3) 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$
1. $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ → falls $\lambda_1 \& \lambda_2 \neq 0$ → lin. unabhängig

Gram-Schmidt

· Gegebene Vektoren $a_1, ..., a_n$ (nicht normiert)

· $b_1 = a_1$ → $b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$

· $b_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle b_j, a_k \rangle}{\langle b_j, a_j \rangle} \cdot b_j$ $\quad k = 2, 3 ...$

$b_k := \frac{b_k}{\|b_k\|} = \frac{b_k}{\sqrt{\langle b_k, b_k \rangle}}$ $\quad k = 2, 3$

Das Bild

Ist gleich den linear unabhängigen Spalten.
Berechnung 1:
1. Matrix transponieren
2. Zeilenstufenform
3. Matrix transponieren
4. Lösung ablesen. (alles ausser Nullspalten)

Berechnung 2:
1. Zeilenstufenform
2. 1. Eintrag in einer Zeile ≠ 0 ist ein Kopf. Alle Spalten mit Kopf sind linear unabhängig.

Lösung: $\mathrm{Im} A = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \rangle$

QR-Zerlegung

1) Berechne Q mit Gram Schmidt als Spaltenvektoren.
2) $r_1 = \|a_1\|$ $\quad r_{kk} = \|b_k\|$ $\quad r_{jk} = \langle b_j, a_k \rangle$ ⇒ Spaltenvektoren fertig

Least-Squares ohne QR

· $Ax - c = 0 \Leftrightarrow Ax = c$
· $\|Ax - b\|^2 = \|r\|$
1. Normale without Gram
   1. Make a matrix with given values $(x \& y)$
   2. Matrix A (with x values) ↳ transpose
   3. $A^T A$
   4. $A^T c$ (values with y)
   5. $A^T A = A^T c$ → gauss & get $x_1, ..., x_n$

Least-squares mit QR

1) Bestimme A & c
2) Mache QR-Zerlegung
3) Optional verifiziere, dass Q orthogonal ist mit $QQ^T = I$
4) $d = Q^T b$
5) $Rx = d$ (Nullzeilen von R nicht beachten), Rückwärtseinsetzen.

Lösung: $\ker(A) = \{\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Der Kern

· Quadratische Matrix hat Kern wenn $\det A = 0$
Berechnung:
1. Evtl. in ein Gleichungssystem
2. sonst gauss'n & berechnen von $x_1 - x_n$

$\ker A = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}\}$

Step-by-Step Summary 2

Hauptachsentransformation

Ziel: Gleichungen von Quadriken (Ellipsen, Hyperbeln...) also Hyperflächen 2. ter Ordnung.

1). Drehung (entferne xy)
   1. Gleichung in Matrix darstellung: $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$; $(x\ y)\underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$
   2. Symmetrisch -> Matrix A diagonalisieren; $x^TAx = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   3. Eigenwerte berechnen
   4. Eigenvektoren normalisieren; 2. Teil: $dx+ey+f = (d\ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   5. orthogonal -> Transformationsmatrix aufstellen => normierten Eigenvektoren als Spalten.
   6. Matrixgleichung umformen & ausmultiplizieren. $(x\ y)\,D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ e)\,T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow ax^2 + by^2 + c\sqrt{d}\,x + e\sqrt{f}\,y - g = 0$

2. Verschiebung
   1. Faktor vor quadratischen Term x^2 (bzw. y^2) ausklammern. $a(x^2 + \frac{c\sqrt{d}}{a}x) + b(y^2 + \frac{e\sqrt{f}}{b}y) - g = 0$
   2. Zahl p vor einfachen Variablen (x bzw. y) herausfinden. $p_1 = \frac{c\sqrt{d}}{a}$, $p_2 = \frac{e\sqrt{f}}{b}$
   3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ berechnen
   4. quadratische Ergänzung $a(x^2 + \frac{c\sqrt{d}}{a}x + p_1 - p_1) + b(y^2 + \frac{e\sqrt{f}}{b}y + p_2 - p_2) - g = 0$
   5. Ausmultiplizieren $a(x^2 + \frac{c\sqrt{d}}{a}x + p_1) - ap_1 + b(y^2 + \frac{e\sqrt{f}}{b}y + p_2) - bp_2 - g = 0$ (zusammenfassen)
   6. Binom. Formel anwenden
   7. Binome durch x & y ersetzen. $\to a(x+\sqrt{p_1})^2 + b(y+\sqrt{p_2})^2 - ap_1 - bp_2 - g$ $\to ax^2 + by^2 - ap_1 - bp_2 - g = 0$

Lösungstabelle:

nicht ausgeartete Kegelschnitte:
- Ellipse: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$
- Hyperbel: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$
- Parabel: $\frac{x^2}{\alpha^2} = 2y$

ausgeartete K.S.:
- Punkt $\frac{x^2}{\alpha} + y^2 = 0$
- Doppelgerade $x^2 = 0$
- zwei schneidende Geraden: $\frac{x^2}{\alpha^2} - y^2 = 0$
- zwei parallele Geraden: $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$
- leere Menge: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = -1$, $x^2 = -1$

Quadrik: ist Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung mit mehreren Unbekannten. Im $\mathbb{R}^2$ bildet ein Quadrik eine Kurve in der Ebene (sog. Kegelschnitt)

Kegelschnitt: Kurve die entsteht, wenn man Oberfläche eines (Doppel) Kegels mit Ebene schneidet.

Hyperflächen: geom. Objekte deren Dimension 1 geringer ist als Dimension des Raumes.

Eigenvektoren

(1) Berechne Charakteristisches Polynom $\det|A|$

Tipp: Falls man 1 Nullstelle weiß z.B. 1 $\Rightarrow (\lambda - 1) \Rightarrow$ teile Grundpolynom : $(\lambda-1)$ so erhält man andere einfachere Formen. Geht nur falls $\deg(\text{Polynom}) > \deg(\lambda-1)$

(2) Berechne Nullstellen

(3) Checke algebraische Vfht.

(4) setze einzeln die Nullstellen als λ in ursprungs Matrix ein und berechne Zeilenstufenform. Grund: GLS ist unterbestimmt.

(5) # freie Nullstellen -gibt # geometrische Vfht. -> # Eigenvektoren = Dimension des Eigenraums; geom. Vfht. $\leq$ alg. Vfht; # alg. = # geom. => Jordansche Normalformel => Diagonalisierbar

(6) setze freie Zeilen so, dass $x_n = -1$ oder 1.

Differentialgleichung 1. Ordnung/homogen

(1) Stelle Gleichungen untereinander auf

(2) $y = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$

(3) Eigenwertzerlegung von A

(4) $y(t) = Ve^{t\Lambda}V^{-1}$

Eigenwertzerlegung/Spektralzerlegung

(1) Voraussetzung: A hat Eigenbasis · algbr. Vfht = geom. Vfht.

(2) Rechne Eigenvektoren aus & setze sie in die Spalten von V. Zuerst normiere sie aber noch.

(3) Es gilt $AV = V\Lambda$ wobei Λ als Diagonalelemente die Eigenwerte hat. d.h. $\underbrace{A = V\Lambda V^{-1}}_{\text{Spektral/Eigenwertzerlegung}}$

Singulärwertzerlegung

Ziel: $A = U\Sigma V^T$

(1) A^TA

(2) Berechne Eigenvektoren von A^TA

(3) Eigenwertzerlegung: Diagonalmatrix Λ mit Eigenwerten als Diagonalelementen $\Lambda = \begin{pmatrix} EW1 & & & \\ & EW2 & & \\ & & EW3 & \\ 0 & 0 & \cdots & EWN \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} EV1 & EV2 & \cdots & EVN \end{pmatrix}$ Spaltenvektoren sind Eigenvektoren von A^TA normiert

(4) Berechne Σ:
- Σ hat gleiche Dimension wie A
- Fülle Diagonalelemente mit Wurzel der Eigenwerte. $A^TA \cdot EV_n = EW$

A/B dim A

$$\begin{pmatrix} \sqrt{EW1} & 0 & 0 & 0 & 0\,m \\ 0 & \sqrt{EW2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \sqrt{EWn} & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ n & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dim A $n \times m$

Allg. gilt $U = AV\Sigma^{-1}$ (normal invertieren)

(5) Berechne U: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{EW1}} \cdot A v_1 \in$ Spalten von V; $u_2 = \frac{1}{\sqrt{EW2}} Av_2$ ... setze alles als Spalten von U zusammen

(6) "fast immer" "gegebenenfalls" erweitern der Basis (orthogonalität) von U. 1. Unabhängigen Basisvektor zu U. 2. Gram-Schmidt mit allen Spaltenv. von U.

Quadrik: ist Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung mit mehreren Unbekannten. Im $\mathbb{R}^2$ bildet ein Quadrik eine Kurve in der Ebene (sog. Kegelschnitt)

Kegelschnitt: Kurve die entsteht, wenn man Oberfläche eines (Doppel) Kegels mit Ebene schneidet.

Hyperflächen: geom. Objekte deren Dimension 1 geringer ist als Dimension des Raumes.

Step by Step summary 3

Es gelten als äquivalent:

Voraussetzung: Sei A eine quadratische Matrix über einem Körper. Dann gilt:

- $\Leftrightarrow A$ invertierbar
- $\Leftrightarrow$ Determinante $\neq 0$
- $\Leftrightarrow A$ hat vollen Rang
- $\Leftrightarrow Ax = 0$ hat nur triviale Lsg.
- $\Leftrightarrow$ die Zeilen & Spalten sind linear unabhängig
- $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(A)$ ist trivial
- $\Leftrightarrow Ax = b$ $(b \neq 0)$ ist eindeutig lösbar.

Skalarprodukt Beweis:

Zeige dass $\langle x,y\rangle_M := x^T M y$ Skalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ ist.

Linearität der 2. Komponente: $\langle x, y_1+y_2\rangle_M = x^T M(y_1+y_2) = x^T M y_1 + x^T M y_2 = \langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle$

Symmetrie: $\langle x,y\rangle_M = x^T M y = (x^T M y)^T = y^T M^T x \overset{M\ \text{symmetrisch}}{=} y^T M x = \langle y,x\rangle_M$

Positive Definitheit: $\langle x,x\rangle_M = x^T M x \geq 0$ & $x^T M x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ weil M positiv Definit.

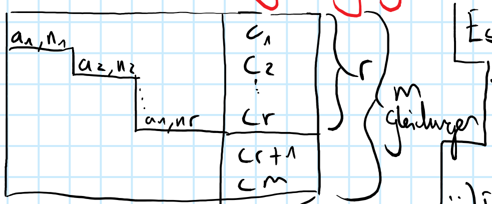
Norm Beweis:

Positive Definitheit: $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \geq b$. Also $\|x\| = \sqrt{x^T M x} \geq 0$
$\Leftrightarrow x^T M x \geq 0$. Auch gilt $\sqrt{x^T M x} = 0$ $x^T M x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Homogenität $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x)^T M(\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 x^T M x} = |\alpha|\sqrt{x^T M x} = |\alpha|\,\|x\|$

Dreiecksungleichung: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle_M + 2\langle x,y\rangle_M + \langle y,y\rangle_M = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle_M + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$
mit Schwarzscher Ungleichung

Lösbarkeit Linearer Gleichungssysteme



n-Variabeln

r = Rang

Es gilt:

i) Verträglichkeitsbedingung $\exists i \in \{r+1, \dots, m\}$ so dass $c_i \neq 0$, so ist Gleichungssys. nicht lösbar

ii) Ist $r = n$, so ist Lsg eindeutig

iii) Ist $r < n$ gibt es ∞ viele Lsg. mit $(n-r)$-freien Parametern

Also: Das LGS hat
1 Lösung $\Leftrightarrow r = n$ & Verträgl. Bedingung erfüllt
0 Lösung $\Leftrightarrow$ Verträgl. Bedingung nicht erfüllt
∞ Lösungen $\Leftrightarrow r < n$ & Verträgl. Bed. erfüllt.

Bem: • $r \leq \min(n,m)$
• $n = m = r \Leftrightarrow$ regulär
$n = m \neq r \Leftrightarrow$ singulär

Matrizen

$A+B = B+A$
$(AB)C = A(BC)$ $\quad AB \neq BA$
$A(C+D) = AC + AD$
$(A+B)+C = A+(B+C)$
$(A+B)C = AC + BC$

Transponieren

$(A^T)^T = A$; $(A+B)^T = A^T + B^T$ $\quad (AB)^T = B^T A^T$

Inverse (quadratische Matrix)

$(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $B = T^{-1}AT \Leftrightarrow TB = AT$; $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$

Orthogonale Matrix

- $A^T A = AA^T = I_n$
- Skalarprod. zweier Spalten $= 0$
- $A^T = A^{-1} =$ orthogonal

$\Rightarrow AB$ orthogonal, wenn A, B orthogonal

- A quadratisch, invertierbar, regulär
- $|\det(A)| - \lambda_i = 1 = 1 =$ Längentreue
- $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle \Rightarrow$ Winkeltreue

Reguläre Matrix

- A invertierbar
- $\mathrm{Rang}(A) = n$
- Spalte/Zeile linear unabhängig
- $Ax = b$ eindeutig für jedes b lösbar
- $Ax = 0$ nur triviale Lösung 0
- $\det(A) \neq 0$
- $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = 0$
Regulär $\Rightarrow$ quadratisch
- A, B regulär $\Rightarrow AB$ regul.

Singuläre Matrix

$\equiv \det(A) = 0 \rightarrow$ nicht invertierbar $\equiv \neg$ regulär

Spur:

Summe der Diagonalelemente $=$ trace $=$ tr
$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B)$; $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
$\mathrm{tr}(a^T b) = \mathrm{tr}(a b^T)$; Achtung: $\mathrm{tr}(AB) \neq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$

Blockmatrix

Bsp: $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1&2&0&0\\ 3&4&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^{1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \Rightarrow A^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^{1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^{1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{c|c} A^1 \cdot A^1 + 0\cdot 0 & A^1 \cdot 0 + 0 \cdot I \\ \hline 0 \cdot A^1 + I \cdot 0 & 00 + I \cdot I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$

Determinante

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ $\quad \det(A^{-1}) \neq 0 \rightarrow$ regulär
$\det(rA) = r^n \det(A)$ $\quad \det(A) \neq 0 \rightarrow$ regulär, $\mathrm{rang}(A) = n$, A invertierbar
$\det(A^T) = \det(A)$ $\quad \det(AB) = \det(BA)$

zwei Matrizen sind ähnlich wenn $\det(A) = \det(B)$

- Zeilentausch $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel
- 1 Zeile $\cdot\, \alpha \rightarrow \det \cdot \alpha$
- unverändert beim addieren eines vielfachen einer Zeile.

Aussagen über Lösung des LGS

$\det(A) \neq 0$: $Ax = 0$ nur triviale Lsg
$\quad Ax = b$ genau 1 Lsg
$\det(A) = 0$ $\quad Ax = 0$ ∞ Lsg.
$\quad Ax = b$ keine oder ∞ Lsg.

Erzeugendensystem:

Kann jeder Vektor b eines Vektorraums V als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ dargestellt werden, so ist $\mathrm{span}\{a^{(1)} \dots a^{(n)}\}$

ein Erzeugendensystem & Vektorraum endlich Dimensional.

Vektorraum V, $\dim(V) = n$:

- mehr als n Vektoren sind lin. abhängig
- weniger als n Vektoren sind nicht erzeugend.
- n Vektoren sind lin. unabhängig, wenn sie erzeugend sind $\rightarrow$ Basis.

Skalarprodukt

Euklidisches Skalarprod.: $\mathbb{R}^n: x^T y = \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$
$\mathbb{C}^n: \overline{x}^T y = \langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k$

• Regeln: Linear im 2. Faktor
- $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \alpha\langle x,y_1\rangle + \beta\langle x,y_2\rangle$
- $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$; $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$; $\langle x,x\rangle \geq 0$
- $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$
- $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Orthogonale Projektion von x auf y:
$\|\overline{x}'\| = \|\overline{x}\| \cdot \|e_y\| \cdot \cos(\alpha) = (\overline{x}, e_y)$, $\quad x' = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \cdot y$

Normen:

Eine Norm ist eine Vorschrift, die jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet.

$\|a\| \geq 0$; $\|\alpha a + \beta b\| = \alpha\|a\| + \beta\|b\|$

Euklid: $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
Maximum: $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$
Betrag: $\|x_1\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$

Einfache & Halb-einfache Matrizen

einfache: Jeder EW hat alg. Vfh. $= 1$ & geom. Vfh. $= 1$
halbeinfach: für jeden EW alg Vfh. $=$ geom. Vfh.
$\rightarrow$ jede Matrix ist halbeinfach
$\rightarrow$ zu jeder einf. oder halbeinf. Matrix gibt es Eigenbasis

Ähnliche Matrizen

Wenn gilt $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$ sind B & A ähnlich $\Leftrightarrow A$ & B haben gleiche Eigenwerte. Es gilt:

- Jede quadratische Matrix hat minimal 1 EW.
- A hat höchstens n Eigenwerte
- $1 \leq$ alg. Vfh. $\leq n$
- $1 \leq$ geom. Vfh. von $\lambda \leq$ alg. Vfh.
- Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte
- λ_1, λ_2 versch. EW $\rightarrow u_1, u_2 \dots$ zugehörige EV $\rightarrow$ EV lin. unabh.

Das EW Problem symmetrischer Matrizen

A sei eine reelle Matrix:
- Alle EW sind reell
- EV zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander
- A ist halbeinfach
- Es gibt orthonormale Basis zu A
- A ist diagonalisierbar $D = T^{-1}AT$

Matlab

gauss

```
func. x = gauss(A,b)
  n= lenght(b)
  B = [A,b]
  x= false
zero column test
  for k = 1:n
    if all(abs(B(k:n,k))=0)
      return;
    end
find pivot elements
  [~,pivot]= max(abs(B(k:n,k)));
  pivotInd = pivotInd + (k-1);
  pivot = B(pivotInd,k);
Pivot rows
  temp = B(k,:);
  B(k,:)= B(PivotInd,:);
  B(PivotInd,:) = temp;
Normalize rows
  B(k,:) = B(k,:)/pivot;
Eliminate rest of column
  for l=k+1:n
    B(l,:)= B(l,:) - B(k,:)*B(l,k);
  end
end
Transform B into [I,x]
  for k=(n-1):-1:1
    for l=k:-1:1
      B(l,:)= B(l,:)-B(k+1).B(l,k+1)
    end
  end
  x= B(:,n+1)
end
```

gram Schmidt

```
B= gramSchmidt(A, scalar-prod)
  [n,m] = size(A)
  B= zeros(n,m)
  for k= 1:m
    r= A(:,k)
    for j= 1:k-1
      r= r- scalarprod(B(:,j),A(:,k))*B(:,j)
    end
    B(:,k) = r/sqrt(scalarprod(r,r))
  end
```

Determinante

```
d= det(A)
  n= size(A,1)
Rekursion endet bei 1x1
  if n== 1
    d= A; return
  end
Spalten & Zeilen mit meisten 0
  [nz_col, best_col]= max(sum(A==0,1));
  [nz_row, best_row]= max(sum(A== 0,2));
  if nz_col >= nz_row      } falls mehr Nullen
    k= best_col;           } in einer Zeile, transponiere
  else k = best_row;
    A= A';
  end
  c= zeros(1,n)            } Entwicklung nach k-ter Spalte
  indices= find(A(:,k))';
Indices der benötigten Kofaktoren
  for i= indices
    A_i = A([1:(i-1) (i+1):end], 1:(k-1) (k+1):end]);
  end
  d= c*A(:,k);
```

ZF
- Skalare Formeln
- Lösungen

LR / LU

```
function [L,U,P] =Lu(A, strat)
  n= size(A,1);
  L= eye(n);
  U=A;
  P= eye(n);
transform A into upper triangular form
  flag=1
  for k= 1:n
    if(strat == 0)
      pivotInd = k
      if(A(pivotInd,pivotInd)==0)
        Warning('zero pivot on diagonale');
        break
      end
    elseif (strat==1)
      tmp = abs(A(k:n,k:n));
      tmp = max(tmp,[],2);
      if any(tmp==0)   a zero in rest of matrix
        flag = 0; break;
      end
      tmp = A(k:n,k)./tmp;
      [~,pivotInd] = max(tmp);
      pivotInd = k-1 + pivotInd;

      if (A(pivotInd,pivotInd)==0)
        flag=0; break;
      end
      if (pivotInd ~= k)   swap rows in upper triangular
        tmp= A(k,k:n)
        A(k,k:n)= A(pivotInd,k:n);
        A(pivotInd,k:n = tmp;
swap rows in permutation matrix
        tmp = P(k,:);
        P(k,:) = P(pivotInd,:);
        P(pivotInd,:) = tmp;
swap rows in lower triangular factor
        tmp = L(k,1:k-1);
        L(k,1,k-1) = L(pivotInd, 1:k-1);
        L(pivotInd,1:k-1)=tmp;
      end
    else flag=0, break;
    end
Set the kth column of L
    L(k+1:n,k) = A(k+1:n,k)/A(k,k);
    A(k+1:n,k:n) = A(k+1:n,k:n) - A(k+1:n,k)*A(k,k:n) /A(k,k);
  end
  if (flag == 0)
    L = false;
    U = false;
    P = false;
    return;
  end
  U= A;
end
```

Rückwärtseinsetzen

```
x= bws(R,b)
  n= lenght(b); x= zeros(n,1);
  x(n) = b(n) / R(n,n)
  for i =n-1:-1:1
    x(i) = (b(i)-R(i,(i+1):n)*(x((i+1):n,1))/R(i,i)
```

QR

```
function [Q,R]= QRFaktorisierung(A, scalarprod)
  [m,n] = size(A)
  Q = zeros(m,n)
  R = zeros(n,n)
  R(1,1) = sqrt(scalarProd(A(:,1),A(:,1)));
  for k=2:n
    for j=1:k-1
      R(j,k) = scalarprod(Q(:,j),A(:,k));
    end
    ak_proj = Q(:,1:k-1) * R(1:k-1,k);
    Q(:,k) = A(:,k) - ak_proj;
    R(k,k) = sqrt(scalarprod(Q(:,k),Q(:,k)));
    Q(:,k) = Q(:,k) / R(k,k);
  end
end
```

Summary 5

Drehmatrix

$\mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$; $\mathbb{R}^3$ (um y) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ $\det(R) = 1$, $R^T = R^{-1}$

$R^T R = R R^T = I$

Drehachse v ist LSh von $(R - I)v = 0$. v ist EV von R mit EW$=1$

Drehwinkel ist $\arccos\left(\frac{\langle w, Rw \rangle}{\|w\| \|Rw\|}\right)$ mit w orthogonal zu v.

Kondition einer Matrix

$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \sqrt{\frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}}$ wobei $\mu =$ EW von AA^T

Falls A symmetrisch: $k(A) = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|$

Die Kondition beschreibt die max. Fehlerverstärkung bei numerischen Berechnungen.

Numerik

$x = 6.666 \times 2^{\pm 66}$

realmax $\rightarrow$ alle 1

$x = 1.111 \times 2^{11} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^3 = \frac{15}{8} \cdot 8 = 15$

realmin $\rightarrow 1.000 \times 2^{-11} = 1.000 \times 2^{-11} = 1 \cdot 2^{-3} = 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

knpt $\rightarrow 0.001 \times 2^{-11}_{00} = \frac{1}{8} \cdot 2^{-3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

eps $\rightarrow 0.001 \times 2^{00}$

eps $\cdot$ realmin $=$ knpt

note: $2^{111_{bin}} = 2^{7_{dez.}}$

Mitternachtsformel

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

generell: $(AB)_{i,i} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{ji}$

$\mathrm{Tr}(\underset{n \times m}{A}\, \underset{m \times n}{B}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{ji} = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii}$

α	$0/0°$	$\pi/6$ / $30°$	$\frac{\pi}{4}$ / $45°$	$\pi/3$ / $60°$	$\pi/2$ / $90°$	$\frac{2\pi}{3}$ / $120°$	π / $180°$	Periode
sin	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\sin(\alpha + k2\pi)$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\cos(\alpha + k2\pi)$
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\tan(\alpha + k\pi)$

Trigon. Funktionen & Additionstheoreme

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$; $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\sin(90° \pm \alpha) = \cos(\alpha)$

$\sin(180° \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$

$\sin(\alpha \pm \beta) = (\sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta))$

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ oder $\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$

$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$

$\cos(90° \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$

$\cos(180° \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$; $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$; $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Matlab Befehle:

- Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$: `A = [1 2; 3 4]`
- Inverse : `B = A^(-1)`
- Transponierte: A^T = `A'`
- LR Zerlegung:
  1. `A = [... ; ...]`
  2. `b = [ ... ]`
  3. `[L, R, P] = lu(A)`
  4. `y = L \ (P*b)`
  5. `x = R \ y`
- Eigenwerte `[T, D] = eig(A)`, wobei T die EV spalten und D die EW Diagonalen.
- Determinante : `det(A)`
- QR: `[Q, R] = qr(A)`
- 1. x Spalte und erste y Zeile: `RO = R[1:y, 1:x]`
- $1/v$ = `V^(-1)`
- $\sqrt{x}$ = `sqrt(x)`

Kern:	`null(A)`	;	Dimension:	`ndims(A)`
Rang:	`rank(A)`	;	Skalarprod. V1:	`a'*b`
Identität:	`eye(3)`	;	Skalarprod. V2:	`dot(a,b)`
Modulus:	`mod(3,2)`		Vektorprod:	`cross(a,b)`
Rest:	`rem(3,2)`	;	Element [0][0]:	`A(1,1)`
Inverse:	`inv(A)`	;	Zeile:	`A(1,:)`
Norm:	`norm(A)`	;	Spalte:	`A(:,1)`
Kondition:	`cond(A)`	;	Symbol var:	`syms x`
Spur:	`trace(A)`			
Exp:	`exp(x)`			
Log.:	`log2(x)`			
Signum:	`sign(x)`			

Konditionszahl:

Sei A regulär & $\|\cdot\|$ eine gegebene Norm, so ist die Konditionszahl gegeben durch: $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

2-Norm: $k_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$

Cholesky-Zerlegung

Ziel: $\underset{G}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{G^T}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$:

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < k \\ \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{kj}^2} & \text{für } i = k \\ \frac{1}{g_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} g_{ij} g_{kj}\right) & \text{für } i > k \end{cases}$$

LSG: a) $A = G \cdot G^T$

b) $G^T c = b$ nach c

c) $Gx = c$ nach x

Sammung 4

induzierte Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Vektornorm: $\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \|A \circ x\| / \|x\|$

Spektralnorm: $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ $\rightarrow$

Orthogonale Projektion:

(x auf gerade von y) $P_y x := \frac{1}{\|y\|^2} y y^H x = u u^H x$

Eigenschaften: $P^H = P_y$; $P_y^2 = P_y$; Idempotent

Projektoren: Eine lineare Abbildung p ist eine Projektion, wenn $p^2 = p$ gilt. Es ist eine orthogonale Projektion wenn $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{im}(P)$ ist. Ist p ein Projektor so auch $(I-P)$:
$\mathrm{Im}(I-P) = \ker(P)$, $\ker(I-P) = \mathrm{Im}(P)$

orthogonale Projektion: Seien $a_1, \dots, a_n$ die Basisvektoren des Unterraums auf den wir orthogonal projizieren. Diese a_i sind als Spalten in A eingetragen $\rightarrow$ wir projizieren also auf $R(A)$
$\Rightarrow P_A = A(A^H A)^{-1} A^H$

Wenn $A = Q$ & Q besteht aus orthonormalen Basisvektoren, so gilt $\Rightarrow P_Q = Q Q^H$

Um nun x auf $R(A)$ zu projizieren rechnen wir $P_A x = A(A^H A)^{-1} A^H x$
wenn auf $R(Q) \Rightarrow P_Q y = \sum_{j=1}^{n} q_j \langle q_j, x\rangle$ gilt.
(Spezialfall, $Q \rightarrow$ orthonormal)

Winkel

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \|y\|} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Orthogonale / unitäre Matrix

$$A^H A = I = A^T A$$

A unitär $\Leftrightarrow A^{-1}$ unitär
A, B unitär $\Leftrightarrow$ AB unitär

Bei A unitär: $\|Ax\| = \|x\|$ (Längentreu)
$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ (Winkeltreu)

Eigenwerte / Eigenvektoren

Kontrollen: – Produkt der EW = Determinante (ohne Zeilentausch)
– Summe der EW = Spur von A.

Spektrum: Menge aller EW: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

EW/EV bei symmetrisch / hermitisch

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch oder $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch $\rightarrow$ alle EW sind reell
- EV zu verschiedenen EW sind paarweise orthogonal in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$
- Es gibt eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren, die eine Matrix $U := (u_1, u_2, \dots, u_n)$ bilden.
$\rightarrow U^H A U = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Rang:

$\mathrm{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$
$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T) = \mathrm{rang}(A^H)$
$\mathrm{rang}(A \pm B) \leq \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B)$
$\mathrm{rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}$
$\mathrm{rang}(A) = n$ (Voller Spaltenrang) $\Leftrightarrow$ A injektiv
$\mathrm{rang}(A) = m$ (Voller Zeilenrang) $\Leftrightarrow$ surjektiv
$\mathrm{rang}(A) = m = n$ (quad. Matrix) $\Leftrightarrow$ A bijektiv
$\mathrm{rang}(A) = n \Leftrightarrow$ A invertierbar

Normalengleichung:

$A^H A x = A^H y \rightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T y$
mit anderem Skalarprod: $A^T W A x = A^T W b$

Spektralnorm

Für $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$ ist $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{w}\,;\, w \in \text{EW von } A^H A\}$.
Ist A hermitesch oder reell symmetrisch, so gilt $A^H A = A^2$
$\Rightarrow \|A\|_2 = \max\{|\lambda|\,;\, \lambda \text{ EW von } A\}$
Für unitäre/orthogonale A gilt $\|A\|_2 = 1$,
$\|A^{-1}\|_2 = \max\{\frac{1}{\sqrt{w}}\,;\, w \text{ ist EW von } A^H A\}$
$= \frac{1}{\min\{\sqrt{w}, w \text{ ist EW von } A^H A\}}$

Für hermitisch / reell symmetrisch: $\|A^{-1}\|_2 = \max\{\frac{1}{|w|}\,;\, w \text{ ist EW}(A)\}$
$= \frac{1}{\min\{|w|\,;\, w \text{ EW von } A\}}$

Fundamentale Unterräume

Kern/Nullraum: $\mathrm{Ker}(A)$, $N(A)$, $k(A)$
- Alle x für welche $Ax = 0$ gilt.
- $N(A) \subseteq \mathbb{E}^n$ (Unterraum von $\mathbb{E}^n$)
- $\dim(N(A))$ = # freie Variablen in A
↳ Gauss/LR $= n - \mathrm{rang}(A)$

Basis: Für $Ax = 0$ auflösen $\rightarrow$ freie Varia. $= 1$ setzen. Achtung $N(A) = 0$ ist einzige Lösung? $\rightarrow$ dann keine Basis.

Spaltenraum / Bild: $S(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathcal{C}(A)$
- Besteht aus allen Linear Kombinationen der Spalten. Also alle b von $Ax = b$ für beliebige x.
- $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{E}^m$; $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rang}(A)$; Basis: Alle Spalten die ein Pivotelement enthalten.

Zeilenraum: $S(A^T)$, $\mathrm{Im}(A^T)$, $\mathcal{C}(A^T)$
$\mathrm{Im}(A^T) \subseteq \mathbb{E}^n$; $\dim(\mathrm{Im}(A^T)) = \mathrm{rang}(A)$; Basis: Pivot Zeilen, also Zeilen von A die in R Pivotelemente enthalten.

Linkskern / Linksnullraum: $\mathrm{kern}(A^T)$, $N(A^T)$, $k(A^T)$
$N(A^T) \subseteq \mathbb{E}^m$; $\dim(N(A^T)) = m - \mathrm{rang}(A)$, Basis: wie bei $N(A)$ aber mit $A^T y = 0$ Lösen.

Dimensionsformel: $\underbrace{\dim(X)}_{=n} - \dim(\ker(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$

Orthogonalität:
- $\mathrm{Im}(A^T) \perp N(A)$
- $\mathrm{Im}(A) \perp N(A^T)$

Abbildungseigenschaften: $F: X \rightarrow Y$ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(F) = \dim(X)$
$F: X \rightarrow Y$ bijektiv $\Leftrightarrow$ F Isomorphismus $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(F) = \dim(X) = \dim(Y)$
$F: X \rightarrow X$ bijektiv $\Leftrightarrow$ Automorphismus $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(F) = \dim(X)$, $\ker(F) = 0$
$F: X \rightarrow Y$, $G: Y \rightarrow Z$ lin. unabhängig:
- $\mathrm{rang}(GF) \leq \min\{\mathrm{rang}(F), \mathrm{rang}(G)\}$
- G injektiv $\Rightarrow \mathrm{rang}(GF) = \mathrm{rang}(F)$
- F surjektiv $\Rightarrow \mathrm{rang}(GF) = \mathrm{rang}(G)$

Definitheit

Definition: Eine symmetrische oder hermitische $n \times n$ Matrix A ist positiv definit (spd) falls
$x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$

EW-Krit.:
$\lambda_i / x^T A x > 0 \rightarrow$ pos. def.
$\lambda_i / x^T A x \geq 0 \rightarrow$ pos. semidef.
$\lambda_i / x^T A x < 0 \rightarrow$ neg. def.
$\lambda_i / x^T A x \leq 0 \rightarrow$ neg. semidef.
Mind. 1 EW > 0 & Mind 1 EW < 0 $\rightarrow$ Indefinit

Kochrezept

Hauptminoren: $|A_1| = a_{11}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ...

(1) Matrix Diagonal?
Ja: Einträge in Diagonalen = Eigenwerte. $\rightarrow$ EW-Kriterium
Nein: next step

(2) Hauptminoren ausrechnen.
(i) Alle HPTM von A, also $|A_i| > 0$, $\forall i \rightarrow$ A pos. definit.
(ii) $|A_i| > 0$, $\forall i$ gerade & $|A_i| < 0$, $\forall i$ ungerade $\Rightarrow$ A neg. definit.
(iii) $|A_i| \geq 0$ $\forall i$ & mind. 1 APTM $\neq 0 \Rightarrow$ A pos. semidef. ODER indefinit.
(iv) $|A_i| \geq 0$, $\forall i$ gerade & $|A_i| \leq 0$, $\forall i$ ungerade & mind. 1 HPTM $\neq 0 \Rightarrow$ neg. semidef ODER indefinit
(v) $|A_i| = 0$, $\forall i \Rightarrow$ A pos. semidef. ODER negativ semidef ODER indef.
(vi) A ist Nullmatrix $\rightarrow$ A gleichzeitig pos. semidef & neg. semidef.
(vii) Kein Punkt wird erfüllt $\rightarrow$ indef.

(3) Trifft Pkt. 3, 4 oder 5 auf Eigenwerte ausrechnen & EW-Kriterium
! Jetzt ist mind. 1 EW = 0 !

Aufgaben 1

Beweise Cauchy-Schwarz

$|\langle v,w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$; $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$; $|\langle x,y\rangle|^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$

(1) Für beliebiges $\alpha \in E$ ist:
$0 \le \langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x,x\rangle + \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \alpha\overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$
Für $x=0$ gilt die Gleichung mit Gleichzeichen.
Für $x \ne 0$ & $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$, womit nach Multiplikation mit $\langle x,x\rangle$ folgt:

$$0 \le |\langle x,y\rangle|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 + \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau, wenn $x=0$ oder $\alpha x+y=0$ ist, was gerade heisst, dass y ein Vielfaches von x ist oder umgekehrt. (Außer wenn $x=0$ oder $y=0$ gilt, ist dann y ein Vielfaches von x und umgekehrt.) q.e.d.

(2) $0 \le \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$
für $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ & $y \ne 0$

$$= \|x\|^2 - \frac{2\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$0 \le \|y\|^2\|x\|^2 - \langle x,y\rangle^2 \quad \text{qed.}$$

Skalarprodukt Rechenregeln

(S1) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$
$\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

(S2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

(S3) $\langle x,x\rangle \ge 0$
$\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

$\Big\}$ $x,y,z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(S2') $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ $\quad\}$ $x,y \in \mathbb{C}^n$

(S4) $\langle w+x,y\rangle = \langle w,y\rangle + \langle x,y\rangle$
$\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ $\quad\}$ $x,y,w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(S4') $\langle w+x,y\rangle = \langle w,y\rangle + \langle x,y\rangle$
$\langle \alpha x,y\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle$ $\quad\}$ $x,y,w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x^H y}$

Die Transponierte

$x^T y = (x^T y)^T = y^T x \xrightarrow{} \mathbb{R}$
$x^H y = (x^H y)^T = y^T(x^H)^T = y^H((\bar{x})^T)^T = \overline{y^H x}$

$A^H := (\bar{A})^T = \overline{A^T}$

Cosinus

$\varphi = \arccos \frac{\mathrm{Re}\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ oder $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$

Satz von Pythagoras

$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ mit $x \perp y$ & $\langle x,y\rangle = 0$ da senkrecht.

Beweis: $\|x\pm y\|^2 = \langle x\pm y, x\pm y\rangle$
$= \langle x,x\rangle \pm \langle x,y\rangle \pm \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$
$= \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dreiecksungleichung

$\|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in E^n$

Beweis: $\|x\pm y\|^2 = \langle x\pm y, x\pm y\rangle = \langle x,x\rangle \underbrace{\pm 2\langle x,y\rangle}_{\text{Schwarzsche Ungl.}} + \langle y,y\rangle$
$= \langle x,x\rangle \pm 2\|x\|\,\|y\| + \langle y,y\rangle = (\|x\| + \|y\|)^2$

Eigenschaften Definitheit / Symmetrie

- Definite Matrix ist nicht-singulär
- Wenn A positiv definit ist, sind alle Hauptdiagonalelemente positiv
- Produkt von sym. nur wieder sym. wenn gilt $AB=BA$.
- Inverse einer sym $(n\times n)$-Matrix ist symmetrisch.
- Die Summe von 2 sym. $(n\times n)$-Matrix ist symmetrisch.
- Jede sym. $n\times n$ Matrix ist diagonalisierbar.

Ähnlichkeitsbeweis:

Es gilt: $A \sim B$ (ähnlich) wenn $A = PBP^{-1}$

i) (symmetrie): $A \sim A$ because $A = PAP^{-1}$ with $P = I$
(ii) (reflexiv): If $A \sim B$ then there is P such that $A = PBP^{-1}$
$\Rightarrow B = QAQ^{-1}$ with $Q = P^{-1}$ so $B \sim A$.
(iii) If $A \sim B$ & $B \sim C$, let P and Q be such that $A = PBP^{-1}$
& $B = QCQ^{-1} \Rightarrow A = RCR^{-1}$ with $R = QP$

Zeigen sie: $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

- $A = PBP^{-1}$ then $\det(A) = \det(PBP^{-1})$
$= \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$
$= \det(P)\det(B)\det(P)^{-1}$
$= \det(B)$

Linearität

(J) $f: \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $f(B) = AB$
(J) $f: \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $f(B) = B^T A$
(J) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$
(N) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_3 - x_2\\1 - x_2\\x_1 + x_2 + x_3\end{pmatrix}$

Vektorräume

(N) $\{B \in \mathbb{R}^{3\times 3} : AB = I\}$ wobei A eine gegebene invertierbare Matrix ist.

(J) $\{B \in \mathbb{R}^{3\times 2} : AB = 0\}$

(J) $\{x \in V : T(x) = x\}$ wobei V ein gegeb. Vektorraum ist und $T: V \to V$ eine lineare Abbild.

Gegeben ist ein Vektorraum V mit Norm & Skalarprod.

(F) Wenn $\|x\| = \|y\|$ dann gilt $x = y$
(R) Wenn $\langle x,y\rangle = 0$ $\forall y \Rightarrow x = 0$
(F) Sei $|\,|$ eine zweite Norm. Dann gilt $|x| \le \|x\|$ $\forall x \in V$ oder $|x| \ge \|x\|$ für $\forall x \in V$.

(F) Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sym. $\to$ $\langle x,y\rangle_A := x^T A y$ ein Skalarprodukt.

Aufgaben 2

Rekursiver Aufruf

a) $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ & $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$
Was sind Anzahl Multiplikationen $\hat{f}_{m,k,n}$ & Additionen $\hat{g}_{m,k,n}$
Pro Eintrag k Mult. & k-1 Add.
$\hat{f}(m,n,k) = mnk \quad \hat{g}(m,n,k) = mn(k-1)$

b) $A^p = \prod_{p \geq 1} A$
```
function B = mpow(A,p)
  if (p==1)
    B=A;
  else B = A . mpow(A,p-1);
  end
end
```

c) Anzahl multiplikationen & additionen
$\boxed{\hat{f}_{n,p} = n^3(p-1) \quad \hat{g}_{n,p} = n^2(n-1)(p-1)}$

d) $A^p \begin{cases} A & ; p=1 \\ (A^{\frac{p}{b}})^b & ; p>1 \text{ \& } b | p \\ A \cdot A^{p-1} & , \text{ansonsten} \end{cases}$

```
function B = mpowb(A,p,b)
  if (p==1)
    B=A
  elseif (mod(p,b)==0)
    B = mpowb(A, p/b, b);
    B = mpow(B,b);
  else B=A * mpowb(A,p-1,b);
  end
end
```

e) Anzahl aufrufe:
$\lceil \log_b p \rceil$
$\hat{f}_{n,p} = n^3(\log_b p - 1) \quad \hat{g}_{n,p} = n^2(n-1)(\log_b p - 1)$

Kleinste Quadrate

a) Welches Funktional minimiert die Fehlersumme?
$\min \|r\|_2 = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^3} \{\|Ax - b\|_2\}$

b) Leite Normalgleichung geom. oder analytisch her.
$S(B) = \|y - XB\|^2 = (y-XB)^T(y-XB) = y^Ty - B^TX^Ty - y^TXB + B^TX^TXB$
Note: $(B^TX^Ty)^T = y^TXB$ has dimension 1×1, so its scalar & equal to its own transpose, hence $B^TX^Ty = y^TXB$
$\Rightarrow S(B) = y^Ty - 2B^TX^Ty + B^TX^TXB$
Differentiating with respect to $B \Rightarrow -X^Ty + (X^TX)B = 0$

c) Überprüfe Lineare Eigenschaften $f(\alpha p + q)$

Lineare Diff gleichungen auf Polynomräumen

a) Die Abbildung D die alle $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ zu ihrer $(s-1)$-ten Ableitung $p^{(s-1)}$ abbildet. Zeige dass es eine Lineare Abb. ist.

Differenzieren ist eine Lineare Abb $\Rightarrow$ Verkettung somit auch.

b) Seien $1 \leq s \leq n$ & $v \in \mathbb{R}^s$. Die Abb. $C[v]$ die alle $p \in \mathcal{P}_{n-s}$ zu ihrem Produkt mit $q = v_0 q_0 + \ldots + v_{s-1} q_{s-1} \in \mathcal{P}_{s-1}$ abbildet:

$C[v]p = (v_0 q_0 + \ldots v_{s-1} q_{s-1})p$

Zeige dass $C[v]$ eine Lin. Abbildung von $\mathcal{P}_{n-s}$ nach $\mathcal{P}_{n-1}$ ist.
$\Rightarrow C[v](\alpha p + r) = q(\alpha p + r) = q\alpha p + qr = \alpha C[v]p \cdot C[v]q$

c) $B[v] = C[v] \circ D \; ; \; A[v] = I + B[v]$ Zeige dass Linear Abb.
$B[v]$ ist als Verkettung Lin. Abbildungen Linear. $A[v]$ ist als Summe Linearer Abb. Linear.

Diskrete Kosinustransformation, Tschebyschow-Polynome

a) Seien λ & μ zwei versch. Eigenwerte der symme. Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
Zeigen sie, dass die dazugehörigen Eigenvektoren x, y orthogonal sind.

Es gilt $\langle x, Ay \rangle = x^T Ay = x^T A^T y = (Ax)^T y = \langle Ax, y \rangle$ da $A = A^T$
Es gilt $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle \mu x, y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle$
Wir haben nun $\lambda \langle x, y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle \Rightarrow \lambda \langle x, y \rangle - \bar{\mu} \langle x, y \rangle = (\lambda - \bar{\mu}) \langle x, y \rangle = 0$
und damit $\lambda \neq \mu \Rightarrow \lambda - \bar{\mu} \neq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$

Linearität

Sind Funktionen Linear?

(J) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(x) = Ax$ wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ & $n < m$
(J) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f(x) = Ax$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $n > m$
(J) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1, f(x) = p$, wobei $p(t) = 2x_2 - x_1 + (x_1 + x_2)t$
(N) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|$
(N) $f\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$

Vektorräume

Sind diese Mengen Vektorräume?

(N) $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0\}$
(J) $\{x \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 0\}$
(N) $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 \ldots x_n = 0\}$
(J) $\{Ax + By : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$ wobei $A \in \mathbb{R}^{s \times n}$ & $B \in \mathbb{R}^{s \times m}$
(N) $\{p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2 : \int_0^1 bt - t + ct^2 dt = 0\}$

Normen

Sind folgende Funktionen Normen?

(N) $f(p) = \int_0^1 p(t)\, dt$ Dreiecksungl.
(J) $f(p) = \sqrt{\int_0^1 p(t)^2 dt}$
(N) $f(x) = (x_1^3 + \ldots + x_n^3)^{1/3}$ nicht pos def.
(N) $f(x) = \|Ax\|$ wobei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ nicht pos. def.

$B = VAV^{-1} \Rightarrow B^4 = V\Lambda^4 V^{-1}$

Questions: – Kann ein Lineares GLS genau 2 Lösungen haben? (N)

Spur:

Eine $n \times m$ Matrix A & eine $m \times n$ Matrix B

a) zeigen sie, dass $Tr\, AB = Tr\, BA$, wobei $Tr(C) = \sum_{i=1}^n C_{ii}$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ & $B \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ & $BA \in \mathbb{R}^{m \times m}$
$(AB)_{i,i} = \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ji} \quad BA_{k,k} = \sum_{l=1}^n B_{k,l} A_{l,k} = \sum_{l=1}^n A_{l,k} B_{k,l}$

für $i = 1, \ldots, n$ & $k = 1, \ldots, m$

$Tr(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n A_{ij} B_{ji}$
$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n A_{l,k} B_{k,l} = \sum_{k=1}^m (BA)_{k,k} = Tr(BA)$

b) $i = 1, 2, \ldots, n$, sei e_i der n-Vektor

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$Be_i = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & & \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,i} \\ \vdots \\ B_{n,i} \end{pmatrix}$

$e_i^T B e_j = e_i^T (Be_j) = (0 \ldots 1 \ldots 0) \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix} = B_{ij}$

Questions

Seien A, B, C $n \times n$ Matrizen. Welche Aussagen sind richtig?

(J) Wenn $AB = C$ & C invertierbar $\Rightarrow A$ & B invertierbar
(N) Wenn A rank 1 $\Rightarrow AB$ rank 1
(J) Nur eine $n \times n$ Matrix mit $R_{ang} = 0$
(J) Wenn es $k \in \mathbb{N}$ gibt sodass $A^k = 0 \Rightarrow A$ nicht invertierbar.
$A = (A^{-1})^{k-1} A^k$

Aufgaben 3

Einheitsmatrix

Sei $n \in \mathbb{N}$, I die $n \times n$ Einheitsmatrix und E die $n \times n$ Einsermatrix.

a) $E^2 = (1\ 1\ 1 \dots 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = n \qquad E^2 = nE$

b) Für reelle a,b,c,d: $A = aI + bE$ & $C = cI + dE$. Bestimme sie reelle u,v so dass $AC = uI + vE$

$$AC = (aI + bE)(cI + dE) = acI + (bc + ad)E + bdE^2 = uI + vE$$

$$u = ac \quad , v = bc + ad + nbd$$

Dimensionen

Seien V & W endlichdimensionale Vektorräume mit dimension n & m, wobei $n > m$.

Sei $f: V \to W$ eine lineare Funktion. Kann f dann

a) injektiv sein

b) surjektiv sein

c) invertierbar sein

Jetzt $n < m$

a) ✓

b) –

c) ✓

Komplementärräume

a) Seien U & U' zwei komplementäre Untervektorräume von V. Zeigen sie $U \cap U' = \{0\}$

$x \in U \cap U' \to v \in U$ & $v' \in U'$ so dass $x = v + 0 = 0 + v'$. X hat laut voraussetzung allerdings eine eindeutige Darstellung $u + u'$ d.h. es muss $v = 0$ und $0 = v'$ gelten, womit $x = 0$ gilt. Also $\{0\}$ ist das einzige Element von $U \cap U'$

b) Seien b_1 & b_2, zwei linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum V.

Zeigen sie das $\text{span}\{b_1\}$ & $\text{span}\{b_2\}$ komplementäre Untervektorräume von $\text{span}\{b_1, b_2\}$ sind d.h. $\text{span}\{b_1\} \oplus \text{span}\{b_2\} = \text{span}\{b_1, b_2\}$

$\text{span}\{b_1\}$ & $\{b_2\}$ sind komplementär, denn eine Darstellung $x = \quad$ ' mit u aus $\text{span}\{b_1\}$ und u' aus $\text{span}\{b_2\}$ ist wegen der linearen Unabhängigkeit von b_1 & b_2 eindeutig.

Sei $x \in \text{span}\{b_1\} \oplus \text{span}\{b_2\}$. Dann gibt es (eindeutige) $a_1, a_2 \in K$ mit $x = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 \in \text{span}\{b_1, b_2\}$

Sei $x \in \text{span}\{b_1, b_2\}$. Dann gibt es $a_1, a_2 \in K$ so dass $x = a_1 * b_1 + a_2 * b_2$.
Das ist eine Darstellung mit $a_1 * b_1 \in \text{span}\{b_1\}$ und $a_2 * b_2 \in \text{span}\{b_2\}$ d.h. $x \in \text{span}\{b_1\} \oplus \text{span}\{b_2\}$

Multiplechoice

Polynome: Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist wie folgt definierte Abbildung $f: P_n \to P_n$: $[f(p)](t) = p(t+2) - p(t)$

✓ a) f ist eine lineare Abbildung

✗ b) $\ker f = \{0\}$

✓ c) $\ker f = P_0$

✗ d) $\text{Im} f = P_n$

✓ e) $\text{Im} f = P_{n-1}$

f) $\forall p \in P_n$ gilt $(\underbrace{f \circ f \dots o f}_{n+1\text{ mal}})(p) = 0$

g) $p \in P_n$. Für polynom $q = f(q)$ gilt $q(0) = 0$ ✓

Norm: Bei welchen Funktionen handelt es sich um die Norm?

✗ a) $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \min(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

✓ b) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{4x_1^2 + 3x_2^2}$

✗ c) $h: P_3 \to \mathbb{R} \quad p \to \int_{-1}^{1} (p(t))^2 dt$

✗ a) Sei T eine allg. Basistransformation. Ihre Inverse ist somit T^{-1}. Ist die entsprechende Basis eine orthogonale kann man die inverse transformation T^T bewegen.

✗ b) Jeder Vektorraum mit Norm ist auch ein Vektorraum mit Skalarprod.

c) Jeder Vektorraum mit Skalarprod ist ein normierter Vektorraum. ✓

d) Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und B eine orthonormalbasis so entspricht das Skalarprodukt zweier Vektoren bezgl. B in V dem Skalarprod. ihrer Koordinatenvektoren in $\mathbb{R}^n$

✓ e) Es ist nicht möglich, jede Menge von linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum endlicher Dim. zu einer orthonormalen Basis zu ergänzen.