1991-AL-P-MATH-1-Q03

3(a)

Consider : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & q^2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot q^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot q^2 - 1 \cdot 1 \cdot 0$
$= q^2 - 1 + 2 - 2q^2$
$= 1 - q^2$
$= (1-q)(1+q)$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ q & -1 & q^2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot q^2 + 2 \cdot 2 \cdot q + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot q^2 - 1 \cdot 1 \cdot q$
$= q^2 + 4q - 2 + 2 - 4q^2 - q$
$= -3q^2 + 3q = -3q(q-1)$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & q & q^2 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 2 \cdot q^2 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot q - 1 \cdot 2 \cdot q - 1 \cdot 1 \cdot q^2 - 1 \cdot 2 \cdot 0$
$= 2q^2 + q - 2q - q^2$
$= q^2 - q = q(q-1)$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & q \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot q + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot q - 1 \cdot 1 \cdot 0$
$= q - 1 + 2 - 2q$
$= -q + 1$

If the system has no solution
$\Rightarrow \Delta = 0$ and [$\Delta_x \neq 0$ or $\Delta_y \neq 0$ or $\Delta_z \neq 0$]
$\Rightarrow (1-q)(1+q) = 0$ and [$-3q(q-1) \neq 0$ or $q(q-1) \neq 0$ or $-q+1 \neq 0$]
$\Rightarrow (q = -1 \; or \; q = 1)$ and [$(q \neq 0 \; and \; q \neq 1)$ or $(q \neq 0 \; and \; q \neq 1)$ or $q \neq 1$]
$\Rightarrow q = -1$

3(b)

If the system has no solution

$\Rightarrow \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$

$\Rightarrow (1-q)(1+q) = 0$ and $-3q(q-1) = 0$ and $q(q-1) = 0$ and $-q+1 = 0$

$\Rightarrow (q = 1 \ or \ q = -1)$ and $(q = 0 \ or \ q = 1)$ and $(q = 0 \ or \ q = 1)$ and $q = 1$

$\Rightarrow q = 1$