2020-DSE-MATH-EP(M2)-Q08

8(a)

PM=MQ and |M|=1

$$\begin{split} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } -ab+c = 1 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2b-5 & -5a-2c \\ 6b+15 & 15a+6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ and } -ab+c = 1 \\ &\Rightarrow a = -\frac{22}{25} \text{ , } b = -3 \text{ and } c = \frac{11}{5} \end{split}$$

8(b)(i)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{22}{25} \\ -3 & \frac{11}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & -22 \\ -75 & 55 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = -rac{1}{11} egin{pmatrix} 55 & 22 \ 75 & 25 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}RM$$

$$= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 55 & 22 \\ 75 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -15 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & -22 \\ -75 & 55 \end{pmatrix}$$

$$=-rac{1}{275}inom{55}{75}inom{22}{75}inom{6}{25}-rac{25}{-75}inom{25}{-75}$$

$$= -\frac{1}{275} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 75 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & -22 \\ -75 & 55 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{275}\begin{pmatrix}0&0\\0&-275\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8(b)(ii)

Now
$$PM=MQ$$
 and $M^{-1}RM=egin{pmatrix} 0 & 0 \ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P = MQM^{-1}$$
 and $R = M egin{pmatrix} 0 & 0 \ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$

$$\Rightarrow P = M egin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 & 0 \end{pmatrix} \! M^{-1} ext{ and } R = M egin{pmatrix} 0 & 0 \ 0 & 1 \end{pmatrix} \! M^{-1}$$

$$\Rightarrow lpha P = M egin{pmatrix} lpha & 0 \ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} ext{ and } eta R = M egin{pmatrix} 0 & 0 \ 0 & eta \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha P + \beta R = M \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\Rightarrow (\alpha P + \beta R)^{99} = M \begin{pmatrix} \alpha^{99} & 0 \\ 0 & \beta^{99} \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\Rightarrow (\alpha P + \beta R)^{99} = M \begin{pmatrix} \alpha^{99} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta^{99} \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\Rightarrow (\alpha P + \beta R)^{99} = \alpha^{99} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} + \beta^{99} M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}$$

$$\Rightarrow (\alpha P + \beta R)^{99} = \alpha^{99} P + \beta^{99} R$$