2002-AL-P-MATH-1-Q12

12(a)(i)

$A^3+A^2+A+I=0$
$\Rightarrow A(A^2+A+I)+I=0$ and $(A^2+A+I)A+I=0$
$\Rightarrow A(-A^2-A-I)=I$ and $(-A^2-A-I)A=I$
$\Rightarrow$ There exist $X=-A^2-A-I$ such that $AX=XA=I$
$\Rightarrow A^{-1}(equals\ X)$ exists

12(a)(ii)

$A^3+A^2+A+I=0$
$\Rightarrow A(A^3+A^2+A+I)=0$
$\Rightarrow A^4+A^3+A^2+A=0$
$\Rightarrow A^4=0-A^3-A^2-A$
$\Rightarrow A^4=(A^3+A^2+A+I)-A^3-A^2-A$
$\Rightarrow A^4=I$

12(a)(iii)

$A^3+A^2+A+I=0$
$\Rightarrow (A^{-1})^3(A^3+A^2+A+I)=0$
$\Rightarrow (A^{-1})^3A^3+(A^{-1})^3A^2+(A^{-1})^3A+(A^{-1})^3I=0$
$\Rightarrow (A^{-1})^3A^3+A^{-1}(A^{-1})^2A^2+(A^{-1})^2A^{-1}A+(A^{-1})^3=0$
$\Rightarrow (A^{-1}A)^3+A^{-1}(A^{-1}A)^2+(A^{-1})^2(A^{-1}A)+(A^{-1})^3=0$
$(\because A,\ A^{-1}$ are commutative i.e.$AA^{-1}=A^{-1}A)$
$\Rightarrow I+A^{-1}+(A^{-1})^2+(A^{-1})^3=0$
$\Rightarrow (A^{-1})^3+(A^{-1})^2+A^{-1}+I=0$

12(a)(iv)

Let $B=I$, then
$B^3+B^2+B^3+I$
$=I^3+I^2+I^3+I$
$=4I\neq 0$

12(b)(i)

$$X^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$X^3=X^2X=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Therefore,

$$X^3+X^2+X+I=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow X^{-1}=-X^2-X-I$ (by (a)(i))

$$\Rightarrow X^{-1}=X^3=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

12(b)(ii)

- For $n=4k$ where k is an positive integer
  $X^n=X^{4k}=(X^4)^k=I$
- For $n=4k-1$ where k is an positive integer
  $X^n=X^{4k-1}=X^{4k}X^{-1}=IX^3=X^3=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$
- For $n=4k-2$ where k is an positive integer
  $X^n=X^{4k-2}=X^{4k-1}X^{-1}=X^3X^{-1}=X^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$
- For $n=4k-3$ where k is an positive integer
  $X^n=X^{4k-3}=X^{4k-2}X^{-1}=X^2X^{-1}=X=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

12(b)(iii)

Let $Y=X^3$, then
Y^3+Y^2+Y+I
$=(X^3)^3+(X^3)^2+X^3+I$
$=X^9+X^6+X^3+I$
$=X^{12-3}+X^{8-2}+X^3+I$
$=X+X^2+X^3+I$
$=X^3+X^2+X+I$
$=0$

Also, let $Z=-I$, then
Z^3+Z^2+Z+I
$=(-I)^3+(-I)^2-I+I$
$=-I+I-I+I$
$=0$