

Contexte cosmologique

Sommaire

1.1	Éléments de cosmologie	2
1.1.1	Relativité générale	2
1.1.2	Symétries de l'Univers : le principe cosmologique	3
1.1.3	Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	4
1.1.4	Redshift et expansion de l'Univers	5
1.1.5	Équations de Friedmann-Lemaître	7
1.1.6	Mesures de distances	9
1.2	Sondes cosmologiques et modèle de concordance Λ CDM	12
1.2.1	Le fond diffus cosmologique	12
1.2.2	Les oscillations acoustiques des baryons	13
1.2.3	Les chandelles standard	14
1.2.4	Le modèle Λ CDM	14

Ce premier chapitre a pour objectif d'introduire les notions cosmologiques définissant le cadre scientifique dans lequel s'inscrit cette thèse.

1.1 Éléments de cosmologie

1.1.1 Relativité générale

Le modèle standard de la cosmologie est basé sur la théorie de la Relativité Générale d'Einstein ([EINSTEIN, 1915a,b,c](#)), permettant de relier la géométrie de l'espace-temps de l'Univers avec son contenu énergétique. Cette nouvelle équation de champ s'exprime à travers la relation suivante :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

avec :

- ◊ $R_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci (caractérisant la déformation de l'espace-temps) ;
- ◊ R le scalaire de Ricci (correspondant à la courbure scalaire) ;
- ◊ $g_{\mu\nu}$ la métrique de l'espace-temps ;
- ◊ $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion ;
- ◊ G la constante gravitationnelle ;
- ◊ c la célérité de la lumière,
- ◊ Λ la constante cosmologique.

En définissant le tenseur de courbure de l'espace-temps d'Einstein par :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

et la constante d'Einstein :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.3)$$

alors en l'absence de constante cosmologique ($\Lambda = 0$) l'équation [1.1](#) devient :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

mettant ainsi en évidence le lien étroit entre la géométrie de l'espace-temps et son contenu énergétique. La constante cosmologique Λ fut introduite par Einstein dans le but d'expliquer un Univers statique, conviction qu'il nourrissait. Il est alors possible d'insérer ce terme d'un côté ou de l'autre de l'équation :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \iff G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Bien que la position de Λ ne change rien mathématiquement, cela peut mener à une interprétation physique bien différente. À gauche la modification agit directement sur la structure fondamentale de la courbure de l'espace-temps ; à droite, nous pouvons l'interpréter comme une nouvelle source énergétique. Ce terme fut rapidement abandonné après la découverte de l'expansion de l'Univers, réfutant l'hypothèse d'un Univers statique ayant justifiée son introduction initiale.

La découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers ([RIESS et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1999](#)) a conduit à sa réintroduction, en tant que source énergétique pouvant expliquer ce phénomène observé et mesuré, pouvant potentiellement correspondre à une énergie du vide, appelée énergie sombre (*dark energy*).

1.1.2 Symétries de l’Univers : le principe cosmologique

Le principe cosmologique repose sur des hypothèses simplifiant fortement la résolution des équations d’Einstein. En supposant certaines symétries de l’Univers pouvant sembler intuitives, il est possible de contraindre la forme de la métrique de l’espace-temps $g_{\mu\nu}$. Le principe cosmologique stipule ainsi un Univers homogène et isotrope à grandes échelles. Bien entendu ces hypothèses ne sont pas valables aux petites échelles, comme nous le prouvent par exemple les fluctuations de densité au sein du système solaire ou dans une même galaxie. Mais de la même manière que nous ne nous intéressons pas aux fluctuations quantiques pour décrire le mouvement d’une voiture, ce sont seulement les grandes échelles qui nous intéressent pour décrire la dynamique générale de notre Univers.

Ces deux hypothèses ont été initialement érigées par George Lemaître en 1927 ([LEMAÎTRE, 1927](#)).

1.1.2.1 Homogénéité de l’Univers

L’homogénéité aux grandes échelles signifie que l’apparence générale de l’Univers ne dépend pas de la position de l’observateur : on parle alors d’invariance par translation.

Cette hypothèse a été vérifiée grâce à de grands relevés de galaxies du ciel profond, sur des échelles au delà du milliard d’années-lumière comme par exemple avec le *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS¹). En sondant l’espace à trois dimensions, ces relevés ont montré une répartition aléatoire des galaxies au delà du milliard d’années-lumière (voir Figure 1.1), témoignant de cette homogénéité spatiale.

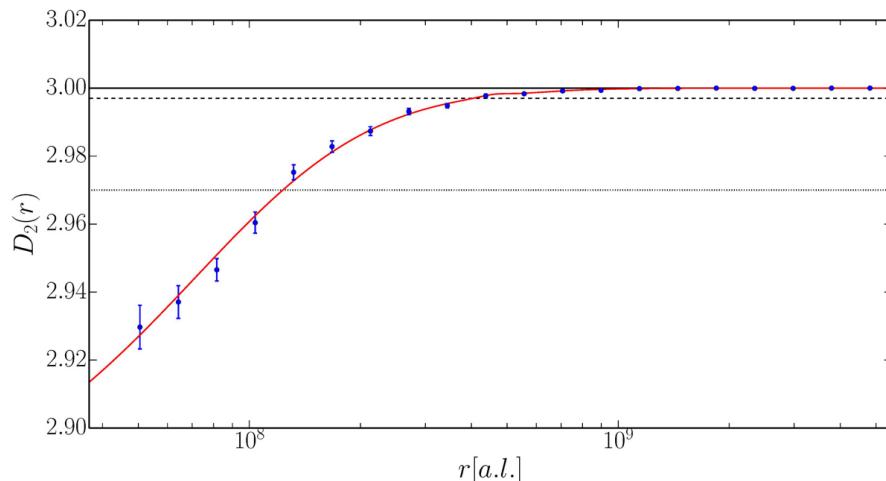


FIGURE 1.1 – Dimension de corrélation fractale de l’Univers sur une échelle de plusieurs milliards d’années-lumière. Cette quantité vaut 3 si l’Univers est homogène. On voit que c’est le cas à partir d’une échelle d’environ 10^9 années-lumière. Figure de [LAURENT et al. \(2016\)](#). Ces résultats sont obtenus à partir de spectres de quasars mesurés par la collaboration *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* (BOSS) au sein de SDSS.

1. <https://www.sdss.org>

1.1.2.2 Isotropie de l’Univers

L’autre hypothèse du principe cosmologique, l’isotropie de l’Univers, stipule que sa structure est identique quelque soit la direction d’observation : on parle alors d’invariance par rotation.

L’expérience scientifique la plus connue vérifiant cette caractéristique est la mesure du fond diffus cosmologique (*Cosmic Wave Background* ; CMB, aussi appelé rayonnement fossile). Ce signal correspond au plus ancien rayonnement électromagnétique observable, estimé à $\sim 380,000$ ans après le Big Bang. Avant cela l’Univers était si chaud et dense que les particules de lumière, les photons, étaient continuellement absorbés, émis et diffusés par les électrons environnant : le libre parcours moyen des photons est alors infime, et l’Univers est qualifié « d’opaque » pour la lumière. Après un refroidissement suffisant de l’Univers ($\sim 380,000$ ans après le Big Bang), les électrons et les noyaux atomiques se combinent pour former les premiers atomes, c’est la recombinaison. Les photons circulent alors librement dans l’Univers qui est devenu « transparent » : c’est ce qu’on appelle le découplage et c’est ce premier rayonnement qui constitue le fond diffus cosmologique.

L’observation de ce fond diffus cosmologique soutient ainsi fortement l’hypothèse d’isotropie de l’Univers, témoignant d’une intensité similaire dans toutes les directions, avec une fluctuation de l’ordre de 10^{-5} Kelvin. La Figure 1.2 présente une carte des anisotropies du fond diffus cosmologique, basée sur les résultats les plus récents de la collaboration Planck ([PLANCK COLLABORATION et al., 2020b](#)).

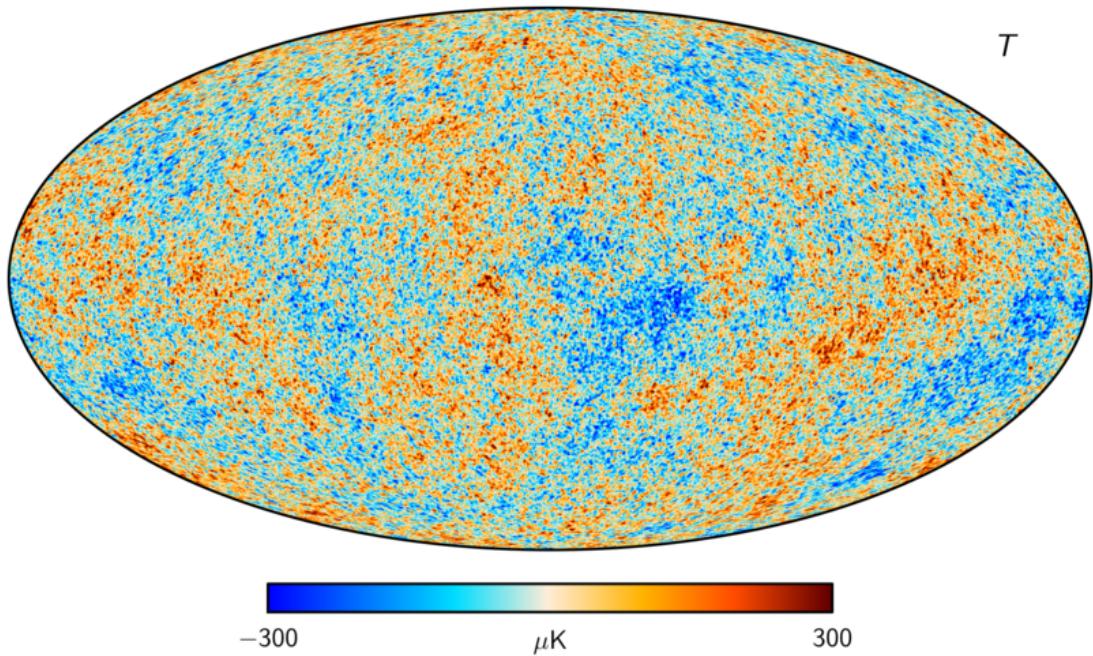


FIGURE 1.2 – Carte des anisotropies de température du fond diffus cosmologique (CMB). Figure basée sur [PLANCK COLLABORATION et al. \(2020b\)](#).

1.1.3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Les symétries induites par le principe cosmologique imposent à la partie spatiale de notre Univers d’avoir la forme d’un espace 3D avec une courbure constante : un

espace Euclidien, une 3-Sphère ou une 3-Hyperboloïde. En prenant en compte l'évolution temporelle de la géométrie de l'univers (les symétries restent conservées), nous avons de manière générale la métrique d'espace-temps de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) ([FRIEDMANN, 1922](#); [LEMAÎTRE, 1933](#); [ROBERTSON, 1936](#); [WALKER, 1937](#)), qui s'écrit en coordonnées polaires :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1.6)$$

où ds^2 est un élément infinitésimement d'espace-temps, (r, θ, ϕ, t) les coordonnées d'espace-temps, $a(t)$ le facteur d'échelle et k un facteur géométrique pouvant prendre les valeurs $(-1, 0, 1)$ pour un Univers ouvert, plat ou fermé respectivement.

Pour (r, θ, ϕ) constants, les objets suivent l'expansion de l'Univers : ce sont des coordonnées comobiles. Le facteur d'échelle $a(t)$ est défini comme le rapport entre la distance séparant deux points immobiles à l'instant t et celle à un instant de référence t_0 (normalisé tel que $a(t_0) = 1$). Il trace ainsi l'influence de l'expansion de l'Univers sur la distance entre deux points au cours du temps, reliant la distance comobile à la distance physique.

Il est assez commun de rencontrer la métrique FLRW sous la forme suivante :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) (d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (1.7)$$

Avec

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & \text{si } k = 1 \\ \chi & \text{si } k = 0 \\ \sinh(\chi) & \text{si } k = -1 \end{cases} \quad (1.8)$$

et le changement de variable : $d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} \forall k$.

Les symétries induites par le principe cosmologique vont également restreindre le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ dà celui d'un fluide parfait (sans transport de chaleur ou de viscosité), s'écrivant alors sous la forme :

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

où ρ et p sont respectivement la densité et la pression du fluide considéré, et u_μ, u_ν les quadri-vitesses du fluide avec la convention du tenseur métrique $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. On a immédiatement que $u_0 = u^0 = c$ et $u_i = 0$, ce qui nous donne la forme de $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

1.1.4 Redshift et expansion de l'Univers

Avant d'appliquer notre nouvelle métrique aux équations de relativité générale d'Einstein, nous allons définir quelques quantités cosmologiques nécessaires à la compréhension de certains phénomènes physiques.

1.1.4.1 Redshift

Le décalage vers le rouge, *redshift* par la suite, est une observable essentielle en cosmologie. Ce phénomène, analogue à l'effet Doppler sur la lumière, est une conséquence directe de l'expansion de l'Univers. Lorsqu'un observateur détecte la lumière émise par un objet lointain, il verra un redshift z en longueur d'onde définie tel que :

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} \quad (1.11)$$

avec λ_e la longueur d'onde d'émission (connue *a priori*), et λ_o la longueur d'onde observée. Ce phénomène est néanmoins le produit de plusieurs contributions : l'expansion de l'Univers, mais également la vitesse relative dans l'espace entre l'observateur et la source d'émission. Cette contribution est néanmoins rapidement négligeable face à l'expansion pour $z > 0.1$. Pour un télescope au sol, nous pouvons également comptabiliser la vitesse de rotation de la Terre, la vitesse de la Terre autour du Soleil, et la vitesse du système solaire au sein même de la Voie Lactée. Ces composantes sont néanmoins très bien connues et sont facilement corrigées en fonction des coordonnées d'observation, afin d'obtenir le redshift dans le référentiel du CMB.

La composante principale du redshift étant la contribution de l'expansion de l'Univers, nous pouvons facilement l'exprimer en fonction du facteur d'échelle $a(t)$.

Supposons un photon émis au temps t_e à $r = r_e$, et ensuite réceptionné au temps t_0 au niveau de l'observateur à $r = r_0 = 0$. En utilisant le fait que pour un photon nous avons une géodésique nulle ($ds^2 = 0$), nous avons que :

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.12)$$

Or, en prenant un deuxième photon succésif émis par la source considérée à un temps $t_e + \lambda_e/c = t_e + \delta t_e$, et reçu à $t_0 + \delta t_0$, nous avons également que :

$$\int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = c \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (1.13)$$

En supposant sans risque que le facteur d'échelle a n'a pas varié pour une un temps de l'ordre de la période d'une onde électromagnétique dans le visible ($\sim 10^{-15}s$), nous obtenons pour le deuxième photon que :

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \frac{\delta t_0}{a_0} - \frac{\delta t_e}{a_e} \quad (1.14)$$

En combinant les termes de droite des équations 1.12 et 1.13, avec le développement de 1.14, nous obtenons ainsi :

$$\Rightarrow \frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a_e} \Leftrightarrow \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a_0}{a_e}$$

Le redshift cosmologique est alors défini par :

$$\bar{z} + 1 = \frac{a_0}{a_e} \quad (1.15)$$

En faisant abstraction du mouvement de la Terre au sein de la Voie Lactée, le redshift observé par décalage spectral s'écrit ainsi comme :

$$(1 + z) = (1 + \bar{z})(1 + z_p) \quad (1.16)$$

avec z le redshift observé, \bar{z} le redshift cosmologique et z_p le redshift causé par la vitesse particulière de l'objet par rapport à l'observateur. Typiquement, deux objets s'éloignant à des vitesses de $v \sim 300 \text{ km.s}^{-1}$ induiront un redshift $z_p \sim 10^{-3}$.

1.1.4.2 Taux d'expansion

En posant la distance comobile l entre deux objets à l'instant t , et leur distance actuelle l_0 à l'instant t_0 , nous avons par définition du facteur d'échelle que :

$$\begin{aligned} l(t) &= a(t)l_0 \\ \dot{l}(t) = \dot{a}(t)l_0 &\Leftrightarrow \dot{l}(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}l(t) \end{aligned}$$

Le facteur d'échelle contient ainsi toute la dynamique de l'Univers, nous permettant d'introduire le taux d'expansion, évoluant au cours du temps, tel que :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.17)$$

Ce paramètre, ayant la dimension de l'inverse d'un temps, est généralement exprimé en $\text{km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$. Sa valeur actuelle correspond à la constante de Hubble et est simplement définie par :

$$H_0 \triangleq H(t_0) = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} \quad (1.18)$$

Cette constante ne porte pas ce nom par hasard. En effet, en déterminant le redshift de galaxies en fonction de leur distance¹, Edwin Hubble découvre que ces galaxies semblent toutes s'éloigner de nous, de façon isotrope, et avec une vitesse proportionnelle à leur distance (Figure 1.3). Cette relation est énoncée en 1929 sous le nom de *loi de Hubble* ([HUBBLE, 1929](#)). Aujourd'hui, la communauté scientifique s'accorde à la renommer *loi de Hubble-Lemaître*, ayant été prédite (mais non mesurée) par George Lemaître deux ans auparavant ([LEMAÎTRE, 1927](#)).

1.1.5 Équations de Friedmann-Lemaître

En joignant la métrique FLRW (eq 1.6) et le tenseur $T_{\mu\nu}$ (eq 1.10) aux équations d'Einstein, nous obtenons les équations de Friedmann-Lemaître ([FRIEDMANN, 1922](#)) :

$$H^2 \triangleq \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.19)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \frac{3p}{c^2}) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.20)$$

¹. Distances mesurées à partir de céphéides, étoiles variables dont la période de pulsation dépend de leur luminosité intrinsèque, permettant d'en déduire la distance avec leur luminosité apparente.

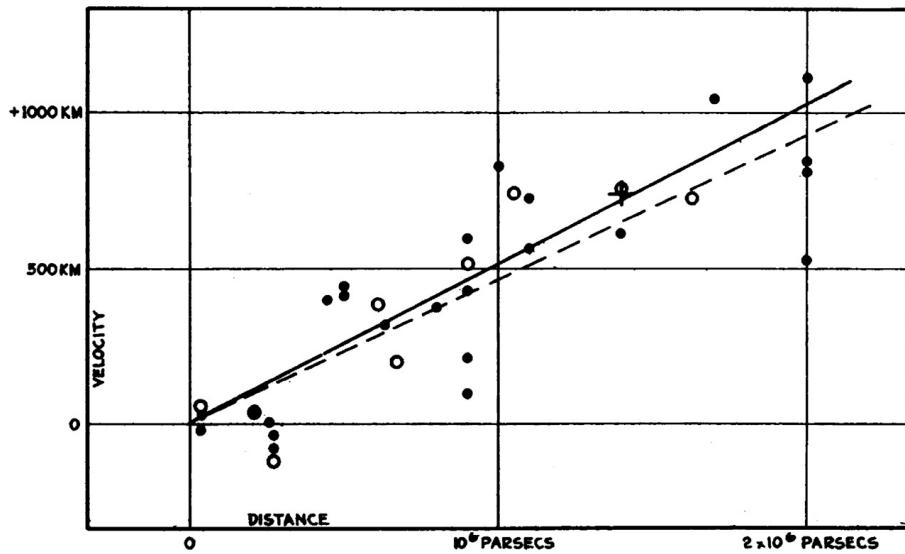


FIGURE 1.3 – Figure originale d’Edwin Hubble ([HUBBLE, 1929](#)) de la vitesse d’éloignement en km.s^{-1} de galaxies en fonction de leur distance en parsecs.

Comme nous pouvons le voir avec le taux d’expansion, ces équations décrivent l’évolution temporelle du facteur d’échelle en fonction du contenu de l’Univers.

En combinant les deux équations de Friedmann, nous pouvons déterminer l’évolution de la densité du fluide, décrite par son équation de conservation :

$$\rho \dot{a} = -\frac{p}{c^2} \frac{da^3}{dt} \Rightarrow \dot{\rho} = -3H(\rho + \frac{p}{c^2}) \quad (1.21)$$

En supposant l’équation d’état d’un fluide parfait tel que $p = w(a)\rho c^2$, on obtient que :

$$\rho = \rho_0 f(a) \quad (1.22)$$

avec

$$f(a) = \exp \left\{ -3 \int_{a_0}^a \frac{1+w(a)}{a} da \right\} \quad (1.23)$$

où a correspond au facteur d’échelle à un temps t . Si on suppose que le paramètre w est constant, alors la densité d’un fluide évolue avec le facteur d’échelle comme :

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \quad (1.24)$$

Nous pouvons considérer trois types de fluides cosmologiques modélisant le contenus dans notre Univers, pour lesquels la valeur de w va différer :

- Les fluides composés de particules non-relativistes, comme la matière baryonique et la matière sombre. Pour cette composante, on considère que sa densité est entièrement décrite par son énergie de masse, la pression exercée est donc nulle et sa densité se dilue avec le volume uniquement : $\rho_M \propto a^{-3}$. L’équation d’état pour la matière vaut $w_M = 0$;

- Les fluides composés de particules relativistes, comme les photons ou les neutrinos. Ce fluide va se diluer d'une part comme de la matière non-relativiste avec le volume ($\propto a^{-3}$), mais également en subissant un étirement de longueur d'onde avec le facteur d'échelle ($\propto a^{-1}$). La dilution de densité est donc $\rho_R \propto a^{-4}$ pour ce type de fluide, et son équation d'état est de $w_R = \frac{1}{3}$;
- Enfin pour une constante cosmologique Λ , sa densité est par définition constante avec le temps, et $\rho_\Lambda \propto a^0$. Ce fluide a donc une pression négative et ne se dilue pas avec le facteur d'échelle, et son équation d'état vaut $w_\Lambda = -1$.

Nous pouvons introduire pour chaque fluide la densité réduite et adimensionnée, définie comme le rapport entre la densité du fluide et la densité dite critique $\rho_c \triangleq \frac{3H^2}{8\pi G}$ (à laquelle l'Univers est nécessairement plat) tel que :

$$\Omega_X \triangleq \frac{\rho_X}{\rho_c} \quad (1.25)$$

La première équation de Friedmann-Lemaître peut ainsi se réécrire simplement comme :

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{R,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{M,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right] \quad (1.26)$$

et en utilisant la définition du redshift :

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{R,0}(1+z)^4 + \Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right] \quad (1.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_{X,0} &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{X,0} \text{ pour } X \in \{R, M\} \\ \Omega_{k,0} &= -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2} \\ \Omega_{\Lambda,0} &= \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \end{aligned}$$

Par construction, les paramètres de densité réduite sont reliés par $\sum_{i \neq k} \Omega_i = 1 - \Omega_k$. L'équation 1.26 nous montre ainsi que l'évolution de l'expansion de l'Univers est décrit par 4 paramètres indépendants : Ω_R , Ω_M , Ω_Λ et H_0 ; Ω_k étant contraint par les autres Ω_i et nous renseignant directement sur la géométrie de l'Univers. Les paramètres Ω_i sont de ce fait appelés *paramètres cosmologiques*. On notera que, du fait de la dégénérescence entre les densités réduites et la constante de Hubble, il est généralement plus adéquat de mesurer directement la quantité $\Omega_i h^2$, où $h = H/100 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$.

1.1.6 Mesures de distances

Distance comobile

La distance comobile caractérise la distance entre deux objets de telle sorte qu'elle soit indépendante de l'expansion de l'Univers.

Considérons le voyage d'un photon entre le moment d'émission $t = t_e$ à un redshift $z = z_e$, et sa réception aujourd'hui à $t = t_0$ et $z = z_0 = 0$. Ce photon se déplacera le long d'une géodésique nulle ($ds^2 = 0$), et l'équation 1.7 nous donne ainsi (pour θ et ϕ constants) que :

$$d_c(z) \triangleq \chi(z) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{a(t')} dt' = \frac{c}{H_0} \int_{z=0}^{z=z_e} \frac{dz'}{E(z')} \quad (1.28)$$

avec $E(z) = H^2(z)/H_0^2$, définie par la première équation de Friedmann comme (eq 1.27) :

$$E(z)^2 = \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{R,0}(1+z)^4 + \Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \quad (1.29)$$

Distance de diamètre angulaire

La distance de diamètre angulaire d_a est définie comme le rapport entre le diamètre physique D d'un objet et sa taille angulaire apparente $\Delta\theta$ par :

$$d_a = \frac{D}{\Delta\theta} \quad (1.30)$$

Or, d'après la métrique FLRW (eq 1.7), un objet situé à une distance comobile χ à un temps t et avec un angle apparent $\Delta\theta$ à une taille de :

$$D = a(t)S_k(\chi)\Delta\theta \quad (1.31)$$

et donc, la distance angulaire s'exprime comme :

$$d_a = a(t)S_k(\chi) \quad (1.32)$$

Avec le changement de variable $k \rightarrow -\frac{a_0^2 H_0^2 \Omega_{k,0}}{c^2}$, nous obtenons que :

$$S_k(\chi) = \frac{c}{a_0 H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left(\frac{a_0 H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}}{c} \chi(z) \right) \quad (1.33)$$

Et ainsi, avec la définition de χ (eq 1.28), la distance de diamètre angulaire s'écrit :

$$d_a(z) = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \quad (1.34)$$

Dans le cas d'un univers plat ($k = 0$ et $S_k(\chi) = \chi$), nous pouvons déduire immédiatement la relation :

$$d_a(z) = \frac{d_c(z)}{1+z} \quad (1.35)$$

Distance de luminosité

La distance de luminosité d_L est la quantité reliant la luminosité intrinsèque d'une source et le flux reçu par un observateur à cette distance d_L . Cette relation décrit la dilution géométrique du flux avec le carré de la distance, telle que :

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (1.36)$$

En utilisant la forme de $S_k(\chi)$ définie dans l'eq 1.33, nous pouvons directement déterminer la surface S d'une sphère centrée sur la source étudiée à la distance comobile χ :

$$S = 4\pi a_0^2 \frac{c^2}{a_0^2 H_0^2 \Omega_{k,0}} S_k \left(\frac{a_0 H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}}{c} \chi(z) \right) \quad (1.37)$$

Un photon émis à un temps t est reçu par l'observateur à $t = t_0$ avec une énergie diluée d'un facteur $(1+z)$. Par ailleurs, deux photons successifs sont reçus dans un intervalle de temps lui aussi dilaté d'un facteur $(1+z)$. La luminosité propre de la source étudiée dans le référentiel de l'observateur L' est par conséquent diluée d'un facteur $(1+z)^2$. Le flux surfacique reçu, $f = L'/S$, s'exprime ainsi :

$$f = \frac{L}{4\pi a_0^2 \frac{c^2}{a_0^2 H_0^2 \Omega_{k,0}} S_k \left(\frac{a_0 H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}}{c} \chi(z) \right)} \times \frac{1}{(1+z)^2} \quad (1.38)$$

En utilisant la relation de la dilution géométrique du flux (1.36) et l'expression de χ (1.28), on obtient finalement la forme de la distance de luminosité :

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left(\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) \quad (1.39)$$

Nous pouvons noter que, quelque soit la courbure de l'Univers, $d_L(z) = (1+z)^2 d_a(z)$. Dans le cadre d'un Univers plat, la distance de luminosité est reliée à la distance comobile par $d_L(z) = (1+z)\chi(z) = (1+z)d_c(z)$.

Le module de distance

Comme illustré dans l'équation 1.39, la distance de luminosité permet de contraindre les paramètres cosmologiques. Afin de remonter à cette information, il est nécessaire de connaître la luminosité intrinsèque de la source observée.

On définit dans un premier temps la magnitude apparente m d'un objet observé par :

$$m - m_0 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f}{f_0} \right) = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \frac{d_{L,0}^2}{d_L^2} \right) \quad (1.40)$$

avec f le flux lumineux apparent de la source, et m_0 la magnitude apparente (connue) d'un objet de flux f_0 (connu) utilisé comme point zéro.

On introduit la magnitude absolue M de l'objet, défini comme étant sa magnitude si l'objet était situé à une distance de $d_{L,0} = 10$ pc. Cette quantité est ainsi associée à la luminosité intrinsèque de la source observée. Le module de distance est alors défini comme étant :

$$\mu \triangleq m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{pc}} \right) \quad (1.41)$$

1.2 Sondes cosmologiques et modèle de concordance Λ CDM

L'étude de la relativité générale aux échelles cosmologiques, de l'expansion de l'Univers ou encore de sa composition nécessite l'utilisation d'observables, appelées *sondes cosmologiques*. Les différents modèles cosmologiques et leurs prédictions sont ensuite testés par ses observations. L'utilisation de plusieurs sondes indépendantes permet par ailleurs de lever de potentielles dégénérescences entre les paramètres cosmologiques, et ainsi contraindre fortement les différents modèles existants.

Nous présentons ici brièvement les principales sondes cosmologiques utilisées, et comment leur utilisation a permis de converger vers le modèle standard de la cosmologie moderne, le modèle Λ CDM, décrivant un Univers plat ($k = 0$) avec une constante cosmologique Λ .

1.2.1 Le fond diffus cosmologique

Comme nous l'avons abordé avec le principe cosmologique, le rayonnement du fond diffus cosmologique est une source primordiale d'information sur notre Univers. Prédit par Lemaître en 1920 et découvert en 1965 par [PENZIAS et WILSON \(1965\)](#), ce rayonnement est une véritable relique de notre Univers, s'agissant du plus ancien rayonnement électromagnétique observable ($z \sim 1100$). Initialement à une température de l'ordre de $3000K$, l'expansion de l'Univers a considérablement dilué l'énergie des photons du CMB, amenant sa température actuelle à $T_0 = 2.7260 \pm 0.0013K$ ([FIXSEN, 2009](#)). Les premières études des fluctuations de température du CMB, faites avec les missions COBE et WMAP, ont permis de confirmer que son spectre est celui d'un corps noir quasi-parfait. Les mesures les plus récentes du CMB ont été effectuées avec la mission Planck. Le spectre de puissance¹ des anisotropies de ce rayonnement est prédictible par les modèles cosmologiques, et permet d'en contraindre fortement les paramètres. La Figure 1.4 présente l'ajustement du modèle standard Λ CDM avec le spectre de puissance des fluctuations de température du CMB ([PLANCK COLLABORATION et al., 2020a](#)).

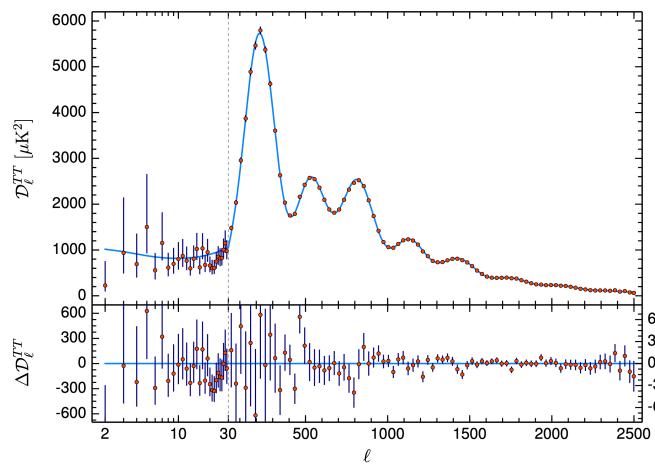


FIGURE 1.4 – Spectre de puissance des anisotropies en température du CMB. L'axe des abscisses représente le multipôle, où les grandes échelles angulaires correspondent à un petit l et inversement. Les points rouges représentent les données, et la courbe bleue le meilleur ajustement du modèle Λ CDM. En bas sont illustrés les résidus entre le modèle et les données. Figure de [PLANCK COLLABORATION et al. \(2020a\)](#).

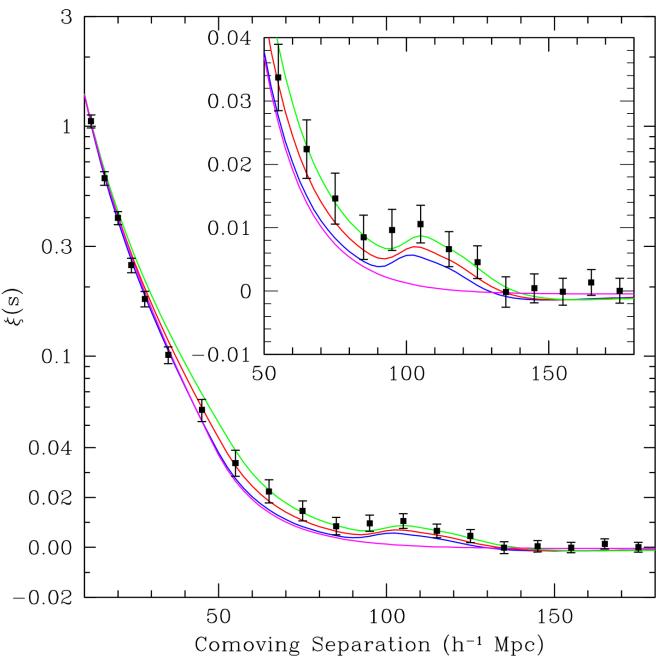
¹. transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points

1.2.2 Les oscillations acoustiques des baryons

Les oscillations acoustiques des baryons, une autre sonde cosmologique, correspondent à un phénomène trouvant sa source bien avant le découplage entre la matière baryonique et les photons. Au moment de l'inflation (phase d'expansion exponentielle de l'Univers $\sim 10^{-35} s$ le Big Bang), des fluctuations de densité se sont propagées dans le plasma composant l'Univers primordial. Alors que les zones de surdensités ainsi créées attirent gravitationnellement la matière vers elles, la pression radiative des photons contre cet effet, créant des oscillations acoustiques sphériques dans l'Univers primordial.

Au moment de la recombinaison, les interactions entre photons et baryons cessent, et les photons sont libres de voyager à la vitesse de la lumière. L'onde acoustique ne se propage plus et laisse ainsi une zone de surdensité à une distance caractéristique. Cette distance est celle parcourue par l'onde entre sa création ($z = \infty$) et la recombinaison ($z \sim 1100$), appelée horizon sonore. Ce pic de densité est ainsi figé depuis le découplage baryon/photon. L'Univers étant en expansion, la taille caractéristique de cette empreinte est exprimée en distance comobile, et vaut $r_d \sim 105 \text{ Mpc.h}^{-1}$. En relevant le redshift de plus d'un million de galaxie entre $0 < z < 0.6$ et en étudiant leur fonction de corrélation à deux points, le relevé SDSS (YORK et al., 2000) a permis de mesurer pour la première fois le pic du BAO en 2005 (Figure 1.5 ; EISENSTEIN et al., 2005). Ce pic traduit ainsi un excès de probabilité d'observer 2 galaxies séparées par une distance r_d , signature caractéristique des ondes acoustiques primordiales.

FIGURE 1.5 – Mise en évidence du pic de BAO avec le relevé SDSS. Cette figure de EISENSTEIN et al. (2005) montre la fonction de corrélation à deux points des galaxies du relevé SDSS. Le pic à environ 105 Mpc.h^{-1} est clairement visible, et caractérise le pic des BAO. Les lignes vertes, rouges et bleues correspondent au modèle de concordance Λ CDM que nous introduirons plus tard, pour différentes valeurs de $\Omega_{M,0}h^2$. La ligne magenta correspond à un modèle sans constante cosmologique.



La distance caractéristique r_d est scindée entre sa composante transverse r_{\parallel} et radiale r_{\perp} , tels que :

$$r_{\parallel} = \frac{c\Delta z}{H(z)} \quad (1.42)$$

$$r_{\perp} = d_c(\bar{z})\theta \quad (1.43)$$

où Δz et θ sont l'intervalle en redshift et l'angle sur lesquelles s'étendent l'échelle caractéristique des BAO. d_c représente la distance comobile, que l'on peut déduire directement de la métrique FLRW et qui dépend des paramètres cosmologiques. La mesure des BAO permettent ainsi d'ajuster une cosmologie aux données, et par conséquent de sonder l'évolution du taux d'expansion avec le redshift et de contraindre les paramètres cosmologiques.

1.2.3 Les chandelles standard

Comme nous l'avons vu avec la dérivation des différentes distances cosmologiques, la distance de luminosité permet de contraindre les paramètres cosmologiques. Obtenir cette information nécessite cependant de connaître *a priori* la luminosité intrinsèque de l'objet étudié.

Si cette luminosité absolue est reproductible, alors la source astronomique est qualifiée de chandelle standard. La mesure de sa luminosité apparente permet alors de remonter à sa distance de luminosité, et apporter des contraintes sur les paramètres cosmologiques.

Les supernovae de type Ia (SNeIa), classification particulière d'explosion d'étoile, sont un exemple de chandelle standard ayant permis la découverte de l'accélération de l'expansion de l'Univers (RIESS et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1999).

La courbe de lumière des SNeIa (évolution de leur luminosité au cours du temps), est fortement caractéristique, permettant par une méthode de standardisation de remonter à leur luminosité intrinsèque. Nous montrons dans la Figure 1.6 l'évolution des distances ainsi dérivées d'un échantillon de SNeIa en fonction de leur redshift. Le modèle ajusté aux données correspond au modèle standard de la cosmologie, le modèle Λ CDM.

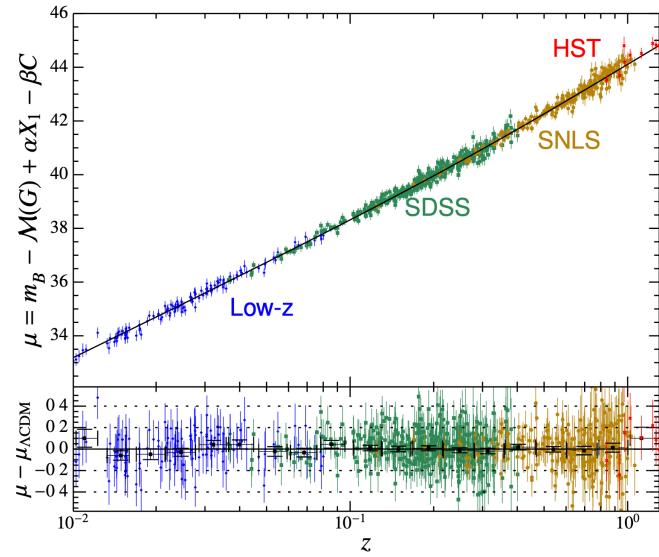


FIGURE 1.6 – Diagramme de Hubble à partir de 740 SNeIa de plusieurs relevés (SDSS, SNLS, HST). La partie haute de cette figure montre l'évolution du module de distance en fonction du redshift des SNeIa de l'échantillon. La courbe noire correspond au modèle cosmologique Λ CDM ajusté aux données. La partie du bas montre les résidus entre les données et le modèle Λ CDM. Figure de BETOULE et al. (2014).

Ces objets étant au cœur de ce travail de recherche, nous leur dédions une partie plus loin dans ce chapitre.

1.2.4 Le modèle Λ CDM

L'étude de ces nombreuses sondes indépendantes combinées (comme le fond diffus cosmologique, les oscillations acoustiques des baryons, les supernovae de type Ia, etc)

permettent de converger vers un modèle unique : le modèle de concordance. Ce modèle cosmologique décrit un Univers plat ($k = 0$), rempli de radiation, de matière baryonique (à hauteur de 6%), de matière sombre froide (26%) et d'énergie sombre sous la forme d'une constante cosmologique (68%).

La radiation, dominante aux premiers âges de l'Univers, est aujourd'hui négligeable, sa densité évoluant en $\propto a^{-4}$. La matière baryonique désigne celle que nous connaissons, composée de baryons comme les protons et les neutrons. La matière sombre est une matière hypothétique, détectée indirectement par ses effets gravitationnelles et pouvant expliquer les propriétés observées des galaxies ou amas de galaxies (masses, vitesses de rotation etc). Elle est qualifiée de *sombre* car elle n'intéragirait que très faiblement avec la matière ordinaire et le champ électromagnétique, et de *froide* pour décrire une vitesse de déplacement faible par rapport à celle de la lumière. La constante cosmologique permet d'expliquer l'accélération de l'expansion de l'Univers découverte à la fin du XX^e siècle.

Ce modèle, appelé Λ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*) en référence aux deux composantes exotiques décrites plus tôt, correspond au modèle standard de la cosmologie moderne. On notera que malgré la prédiction de ces composantes sombre, le modèle Λ CDM ne précise en aucun cas leur nature, encore inconnue à ce jour.

Composé de seulement six paramètres libres, le modèle de concordance rend compte de nombreuses observations cosmologiques comme le fond diffus cosmologique, les structures à grandes échelles de la distribution des galaxies, l'expansion accélérée de l'Univers, l'abondance des éléments légers (hydrogène, hélium, lithium) etc.

Les derniers résultats d'ajustement de ces paramètres libres du modèle Λ CDM sur les observations (sondes cosmologiques) ont été présentés par la collaboration Planck ([PLANCK COLLABORATION et al., 2020a](#)). Il est également possible de tester le modèle Λ CDM en laissant libre certains paramètres contraints ou fixés *a priori* comme l'équation d'état de l'énergie sombre ($w = -1$) ou la composante de courbure ($\Omega_k = 0$). Nous montrons dans la Figure 1.7 les contraintes dans le plan $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ et dans le plan (Ω_k, Ω_M) , en utilisant une combinaison de sondes cosmologiques, permettant de réduire considérablement la dégénérescence entre les paramètres. Cette analyse effectuée en laissant la courbure libre dans l'ajustement des paramètres de Λ CDM (dénommé o- Λ CDM), fait clairement état de la compatibilité des données observationnelles avec un Univers plat. Cette contrainte sur la courbure de l'Univers est principalement apportée par le fond diffus cosmologique.

De la même manière, l'hypothèse de constante cosmologique peut être testée en laissant le paramètre d'équation d'état w_{DE} de l'énergie sombre libre (modèle w - Λ CDM). Pour aller encore plus loin, il est également possible de sonder une potentielle caractéristique dynamique de la densité de l'énergie sombre, en paramétrisant w_{DE} par :

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) \quad (1.44)$$

aussi appelée paramétrisation CPL ([CHEVALLIER et POLARSKI, 2001; LINDER, 2003](#)). Ainsi, si l'énergie sombre est en effet une constante cosmologique dans les équations d'Einstein, alors $w_0 = -1$ et $w_a = 0$. La Figure 1.8 illustre les contraintes récentes, compatibles avec le modèle Λ CDM, sur le paramètre w et sur les composantes de la paramétrisation CPL w_0 et w_a . Les contraintes cosmologiques sur w sont dérivées de mesures de variations relatives de distance de luminosité en fonction du redshift. Les propriétés de chandelle standard des SNeIa en font ainsi une sonde cosmologique parfaitement adaptée à l'étude de l'énergie sombre.

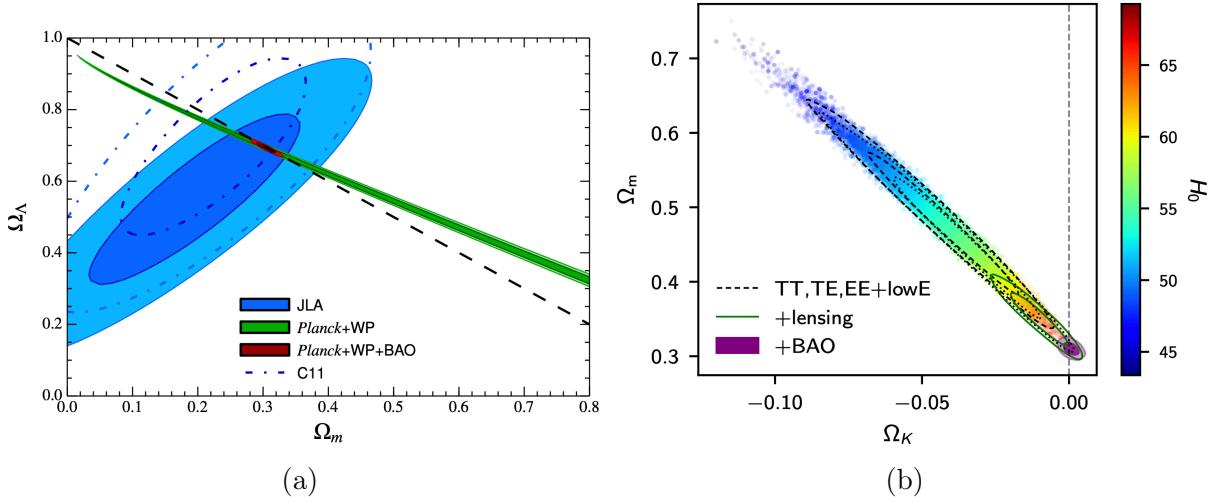


FIGURE 1.7 – (a) Contraintes dans le plan (Ω_M, Ω_Λ) en combinant les sondes cosmologiques de supernovae de type Ia (JLA, [BETOULE et al., 2014](#)), du CMB (Planck+WP 2014) et d'oscillation acoustique des baryons (BAO). Figure de [BETOULE et al. \(2014\)](#). (c) Contraintes dans le plan (Ω_k, Ω_M) en utilisant le CMB et son lentillage gravitationnelle, et les BAO. Figure de [PLANCK COLLABORATION et al. \(2020a\)](#).

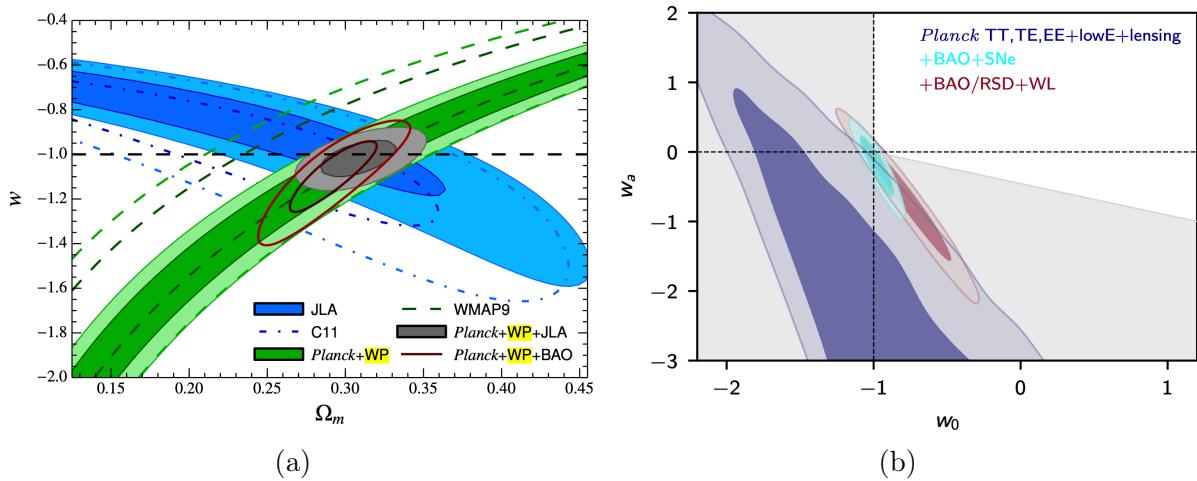


FIGURE 1.8 – (a) Contraintes dans le plan (w, Ω_M) en combinant les sondes cosmologiques de supernovae de type Ia (JLA, [BETOULE et al., 2014](#)), du CMB (Planck+WP 2014) et d'oscillation acoustique des baryons (BAO). Figure de [BETOULE et al. \(2014\)](#). (c) Contraintes dans le plan (w_a, w_0) en utilisant le CMB et son lentillage gravitationnelle, les supernovae de Pantheon ([SCOLNICK et al., 2018](#)) et les BAO. Figure de [PLANCK COLLABORATION et al. \(2020a\)](#).

Bibliographie

- BETOULE M., KESSLER R., GUY J. et al. 2014, « Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples », *Astronomy and Astrophysics*, 568, A22
- CHEVALLIER M. et POLARSKI D. 2001, « Accelerating Universes with Scaling Dark Matter », *International Journal of Modern Physics D*, 10, 213
- EINSTEIN A. 1915a, « Die Feldgleichungen der Gravitation », *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 844
- EINSTEIN A. 1915b, « Zur allgemeinen Relativitätstheorie », *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 778
- EINSTEIN A. 1915c, « Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag) », *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 799
- EISENSTEIN D. J., ZEHAVI I., HOGG D. W. et al. 2005, « Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies », *The Astrophysical Journal*, 633, 560
- FIXSEN D. J. 2009, « The Temperature of the Cosmic Microwave Background », *The Astrophysical Journal*, 707, 916
- FRIEDMANN A. 1922, « Über die Krümmung des Raumes », *Zeitschrift für Physik*, 10, 377
- HUBBLE E. 1929, « A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae », *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- LAURENT P., LE GOFF J.-M., BURTIN E. et al. 2016, « A $14 \text{ h}^{-3} \text{ Gpc}^3$ study of cosmic homogeneity using BOSS DR12 quasar sample », *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, 060
- LEMAÎTRE G. 1927, « Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques », *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47, 49
- LEMAÎTRE G. 1933, « L'Univers en expansion », *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 53, 51
- LINDER E. V. 2003, « Exploring the Expansion History of the Universe », *Physical Review Letters*, 90, 091301
- PENZIAS A. A. et WILSON R. W. 1965, « A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. », *The Astrophysical Journal*, 142, 419

- PERLMUTTER S., ALDERING G., GOLDHABER G. et al. 1999, « Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae », *The Astrophysical Journal*, 517, 565
- PLANCK COLLABORATION, AGHANIM N., AKRAMI Y. et al. 2020a, « Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters », *Astronomy and Astrophysics*, 641, A6
- PLANCK COLLABORATION, AKRAMI Y., ASHDOWN M. et al. 2020b, « Planck 2018 results. VII. Isotropy and statistics of the CMB », *Astronomy and Astrophysics*, 641, A7
- RIESS A. G., FILIPPENKO A. V., CHALLIS P. et al. 1998, « Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant », *The Astronomical Journal*, 116, 1009
- ROBERTSON H. P. 1936, « Kinematics and World-Structure III. », *The Astrophysical Journal*, 83, 257
- SCOLNICK D. M., JONES D. O., REST A. et al. 2018, « The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample », *The Astrophysical Journal*, 859, 101
- WALKER A. G. 1937, « On Milne's Theory of World-Structure », *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42, 90
- YORK D. G., ADELMAN J., ANDERSON, JOHN E. J. et al. 2000, « The Sloan Digital Sky Survey : Technical Summary », *The Astronomical Journal*, 120, 1579