

# 三角域上调和与双调和的有理 Bézier 曲面设计

李 帅<sup>1</sup>, 徐霄乾<sup>1</sup>, 王国瑾<sup>1,2\*</sup>

(1. 浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

**摘 要:**在建筑、机械、计算机、应用数学这 4 大学科交叉形成的新兴的计算机辅助几何设计领域,首次提出了三角域上有理 Bézier 调和曲面的造型问题. 主要方法和思路:给定欲求三角有理 Bézier 调和曲面的 2 条边界曲线,将这 2 条有理边界曲线进行 Hybrid 逼近,得到 2 条多项式曲线,以此为边界,应用 Arnal 等最近提出的由边界条件生成三角 Bézier 调和曲面的算法,得到一张三角多项式 Bézier 调和曲面;同时对欲求的三角有理 Bézier 调和曲面,应用张磊等提出的有效算法进行多项式逼近,得到一张带参数的三角多项式 Bézier 曲面,将此曲面与上述已得到的三角多项式 Bézier 调和曲面作比较,使它们之间的目标距离最小,就导出一个多变量的最优化问题,逼近求出未知参数,就可得到一张高精度的三角有理 Bézier 近似调和曲面. 进一步,以上思想和算法被推广到三角有理 Bézier 双调和曲面. 文中给出丰富实例验证了算法的正确和有效.

**关 键 词:**计算机辅助几何设计; 三角域; 有理 Bézier 调和曲面; 有理 Bézier 双调和曲面; 多变量最优化

**中图分类号:**TP 391.72

**文献标志码:**A

**文章编号:**1008-9497(2012)02-152-07

LI Shuai<sup>1</sup>, XU Xiao-qian<sup>1</sup>, WANG Guo-jin<sup>1,2</sup> (1. *Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*; 2. *State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

**Design for triangular rational Bézier harmonic and biharmonic surfaces.** Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2012, 39(2): 152–158

**Abstract:** In the new field of computer aided geometric design which is generated by architecture, machinery, computer science and applied mathematics, first raised a method of design for triangular Bézier harmonic surfaces. The main method and idea in this paper contains the following aspects. Given two boundary curves of triangular rational Bézier harmonic surface to be solved, we use the Hybrid approximate method to get two polynomial curves. With these as boundaries, we use the recent method of generating triangular Bézier harmonic surface from boundary conditions by A. Arnal et. al. to obtain a triangular polynomial Bézier harmonic surface. Meanwhile, we use the effective method raised by Zhang et. al. for the triangular rational Bézier surface to get a triangular polynomial Bézier approximation with parameters. Compared this approximation surface to the triangular polynomial Bézier harmonic surface obtained already, by that the aim distance between the known harmonic surface and the unknown rational surface is minimal, we obtain an optimization problem with more than one parameters. Using approximation, we get the values of these parameters and an approximation triangular rational Bézier surface of high precision. For a further step, we generalize this idea and method to the question of design for triangular rational Bézier biharmonic surfaces. This paper gives abundant instances to check the soundness and effectiveness of this algorithm.

**Key Words:** computer aided geometric design; triangular; rational Bézier harmonic surfaces; triangular rational Bézier biharmonic surfaces; optimization with more than one parameter

收稿日期: 2010-12-06.

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60933007); 国家自然科学基金资助项目(61070065).

作者简介: 李 帅(1988—), 女, 硕士生, 研究方向: 泛函分析.

\* 通信作者, E-mail: wanggj@zju.edu.cn.

极小曲面问题是微分几何领域中的经典问题<sup>[1]</sup>. 尽管此问题自问世至今已历经几个世纪,跨越多个学科,但由于此方程的非线性性,其解的存在性与稳定性等问题仍未得到彻底解决.

极小曲面具有非常完美的表面形状和应力状态,在建筑设计、飞机轮船制造、分子化学、晶体学等许多领域都有着广泛的应用<sup>[1]</sup>. 随着计算机辅助设计(CAD)的广泛展开,利用计算机进行极小曲面的设计与制造出现在越来越多的实际应用场合中. 因此,极小曲面设计问题,特别是极小 Bézier 曲面设计的数学模型问题仍是当今国际上属于建筑、机械、计算机、应用数学这4大学科交叉的热门研究课题<sup>[2-6]</sup>.

由于等温参数下极小曲面的调和性质,以及调和方程被应用与研究的广泛性,利用调和与双调和曲面构造并逼近极小曲面已成了CAD的主要方法之一<sup>[4,7]</sup>.

不过目前对这个问题的研究成果大多集中于构造矩形域上多项式形式的 Bézier 调和曲面,例如 MONTERDE 等在文献<sup>[7]</sup>中研究了矩形域上调和与双调和曲面的一些性质. 至于利用统一表示自由曲面及二次曲面的有理曲面,或者利用应用范围更广泛的三角曲面来构造调和与双调和曲面的有关研究却寥若晨星.

正是为了弥补这种缺陷,本文作者致力于构造三角域上有理近似调和曲面的研究,并给出了具体的例子. 其主要思路是综合运用了三角域上有理曲面的 Hybrid 逼近算法、矩形域上有理曲面边界的 Hybrid 逼近算法以及三角域上调和 Bézier 曲面的生成算法. 具体地讲,即是待求的有理三角调和曲面  $R$  进行  $I+J+K$  次 Hybrid 逼近<sup>[8]</sup>,得到含参多项式三角曲面  $T$ ;另一方面,对曲面  $R$  的给定的边界曲线进行  $r+p$  次 Hybrid 逼近,再以此逼近曲线为边界,利用三角域上多项式调和曲面生成公式写出精确的  $r+p$  次多项式三角调和曲面  $M$ <sup>[9]</sup>,借助升阶公式将  $T$  与  $M$  化为同样次数的曲面  $T'$  与  $M'$ ,通过比对  $T'$  与  $M'$  的系数,最终确定  $T$  中参数的取值,从而决定曲面  $R$ . 最后一步比对系数实际上是求解一个有限维离散形式的目标函数极小化问题,利用 Lingo 等数学软件可以快速进行计算,从而成功地得到问题的一个近似解.

在这个算法中,正整数  $I, J, K$  与  $r, p$  都是可调的,基于 Hybrid 算法的稳定性,理论上讲,三角域上任意次数的有理调和曲面问题都可以进行上述计

算而得到一个足够精确的合理解.

紧接着,作者又对上述算法进行了推广,基于三角域上多项式双调和曲面的生成公式,用类似的逼近与优化算法构造了三角域上的有理双调和曲面.

## 1 三角域上调和与双调和多项式 Bézier 曲面的算法

### 1.1 三角域上多项式调和 Bézier 曲面的算法

定理 1<sup>[9]</sup> 三角域上多项式 Bézier 曲面

$$R(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k} \text{ 为调和曲面的充要条件为控制顶点 } \{P_{i,j,k}\}_{i+j+k=n} \text{ 满足}$$

$$P_{k+2,l,n-k-l-2} + P_{k,l+2,n-k-l-2} + 2P_{k,l,n-k-l} - 2P_{k+1,l,n-k-l-1} - 2P_{k,l+1,n-k-l-1} = 0,$$

$$k \geq 0, l \geq 0. \quad (1)$$

其中,式(1)涉及点的分布如图1所示.

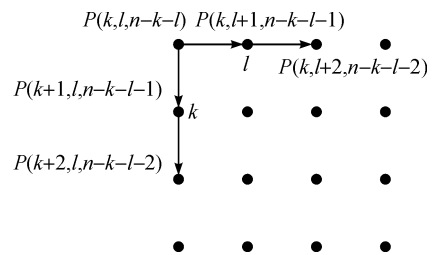


图1 方程(1)涉及点的分布

Fig. 1 Involves the distribution of points about equation (1)

定理 2<sup>[9]</sup> 给定边界条件  $\{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n}$  与  $\{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n}$ , 如果对于  $m=1, 2, \dots, n-1$  始终有

$$D_m = \frac{(-1+i)^{m+1} - (-1-i)^{m+1}}{i} \neq 0, \quad (2)$$

则方程(1)有唯一解  $\{P_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$ .

当式(2)不满足时,只需对初始条件多加一些限制,即可保证调和曲面的唯一存在性. 具体叙述如下:

定理 3<sup>[9]</sup> 对于三角域上的多项式调和曲面

$$R(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k}, \text{ 若给定控制顶点 } \{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n}, \{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n, j \neq 4s, s \in \mathbb{N}}, \text{ 以及 } \{P_{i,j-1,k}\}_{k=1,i+j=n, j=4s, s \in \mathbb{N}}, \text{ 则其余控制顶点 } \{P_{i,j,k}\}_{i,j,k \geq 0, i+j+k=n} \text{ 可根据式(1)得到的线性方程组被唯一确定. 见图2.}$$

特别地,有

推论 1 当  $n < 4$  时,对于三角域上的调和曲面

$$R(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k}, \text{ 若控制顶点 } \{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n} \text{ 与 } \{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n} \text{ 给定,如图3实线上}$$

的点所示,则其余控制顶点可由式(1)通过计算给出.

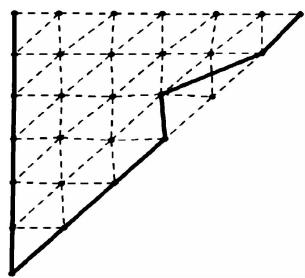


图 2 其余控制顶点被线性方程组唯一确定  
Fig. 2 The remaining control points are uniquely determined by linear equations

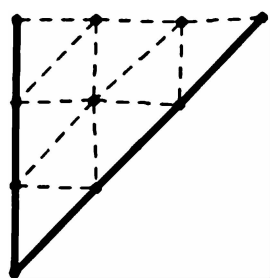


图 3  $n=3$  时的控制网格  
Fig. 3 The control grid when  $n=3$   
实线上的控制顶点为已给边界条件

## 1.2 三角域上双调和 Bézier 曲面的算法

与调和曲面类似,对于双调和曲面,有

定理 4<sup>[9]</sup> 曲面

$$R(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k}$$

是双调和的,当且仅当由等式

$$\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k} = \sum_{k,l=0}^n \frac{a_{k,l}}{k!l!} u^k v^l$$

唯一决定的  $a_{k,l}$  满足线性方程

$$a_{k+4,l} + 2a_{k+2,l+2} + a_{k,l+4} = 0, \quad k+l \leq n-4. \quad (3)$$

由此定理,有

定理 5<sup>[9]</sup> 对于三角域的双调和曲面  $R(u, v, w)$

$$= \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k}, \text{ 若控制顶点 } \{P_{i,j,k}\}_{j=0, i+j+k=n},$$

$\{P_{i,j,k}\}_{j=1, i+j+k=n-1}, \{P_{i,j,k}\}_{i=0, j+k=n}, \{P_{i,j,k}\}_{i=1, j+k=n-1}$  给定,如图 4 实线上的点所示,则该双调和曲面的所有控制顶点被唯一确定.

特别地,对于  $n=4$ ,有

推论 2  $n=4$  时, Bézier 曲面  $R(u, v, w) =$

$$\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) P_{i,j,k} \text{ 是双调和的等价于其控制}$$

顶点  $\{P_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$  满足

$$192P_{0,2,2} - 96P_{3,0,1} - 192P_{1,0,3} + 192P_{1,1,2} - 96P_{1,2,1} + 192P_{2,0,2} - 96P_{2,1,1} + 48P_{2,2,0} + 96P_{0,0,4} + 24P_{4,0,0} - 192P_{0,1,3} - 96P_{0,3,1} +$$

$$24P_{0,4,0} = 0. \quad (4)$$

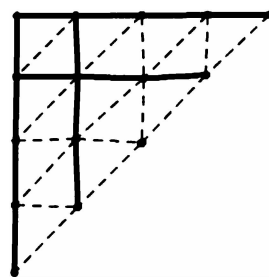


图 4  $n=4$  时的控制网格  
Fig. 4 The control grid when  $n=4$   
实线上的控制顶点为已给边界条件

证明 用双调和算子  $\Delta^2$  作用 4 次 Bézier 曲面

$$R(u, v, w) = \sum_{i+j+k=4} B_{i,j,k}^4(u, v, w) P_{i,j,k}, \text{ 可得}$$

$$\Delta^2 R(u, v, w) = 192P_{0,2,2} - 96P_{3,0,1} - 192P_{1,0,3} + 192P_{1,1,2} - 96P_{1,2,1} + 192P_{2,0,2} - 96P_{2,1,1} + 48P_{2,2,0} + 96P_{0,0,4} + 24P_{4,0,0} - 192P_{0,1,3} - 96P_{0,3,1} + 24P_{0,4,0}, \quad (5)$$

$R(u, v, w)$  双调和等价于式(5)为 0,故推论 2 成立.

## 2 三角域上有理 Bézier 调和曲面的构造

由控制顶点  $\{P_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$  与权因子  $\{\omega_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$  确定的三角有理 Bézier 曲面为

$$R = R(u, v, w) = \frac{\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \omega_{i,j,k} P_{i,j,k}}{\sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \omega_{i,j,k}}. \quad (6)$$

问题叙述为给定边界有理曲线,即给定边界控制顶点  $\{P_{i,j,k}\}_{j=0, i+j+k=n}$  与对应的权因子  $\{\omega_{i,j,k}\}_{j=0, i+j+k=n}$ ,求出由此曲线为边界的一张高精度的三角有理 Bézier 近似调和曲面  $R$ .

### 2.1 用三角域上多项式 Bézier 曲面 $T$ 逼近曲面 $R$

定理 6<sup>[8]</sup> 对于  $n$  次三角有理 Bézier 曲面  $R$ ,存在

$N(=I+J+K)$  次三角 Bézier 多项式曲面  $T^{IJK}$ ,使得

(1) 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $T^{IJK}$  一致趋向于  $R$ ;

(2) 存在(对  $I, J, K$  的)递推算法来计算  $T^{IJK}$ .

### 2.2 对给定的 2 条边界有理曲线( $v=0, w=0$ )分别作 $r+p$ 次 Hybrid 逼近

引理 1 由式(6)所示的  $n$  次三角有理 Bézier 曲面  $R$  的 2 条边界( $v=0, w=0$ )曲线分别是  $n$  次有理 Bézier 曲线.

证明 只需讨论  $w=0$  时的边界曲线.以  $w=0, u+v=1$  代入式(6)的分母与分子,分别得

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u,v,0)\omega_{i,j,k} &= \\ \sum_{\substack{i+j+k=n, \\ k=0}} B_{i,j,k}^n(u,v,0)\omega_{i,j,k} &= \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} u^i v^j \omega_{i,j,0} = \\ \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} u^i (1-u)^j \omega_{i,j,0} &= \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \omega_i, \\ \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^2(u,v,0)\omega_{i,j,k} R_{i,j,k} &= \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \omega_i R_i, \end{aligned}$$

其中,  $\omega_i = \omega_{i,n-i,0}$ ,  $P_i = P_{i,n-i,0}$ . 因此

$$R^n(u,v,w)|_{w=0} = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \omega_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_i^n(u) \omega_i}.$$

证毕.

利用引理 1 以及曲线的 Hybrid 逼近算法,有

**定理 7** 对于  $n$  次有理 Bézier 曲面  $R$  的边界曲线  $R^n(u,v,w)|_{w=0}$ , 存在  $r+p$  次 Hybrid 多项式逼近曲线  $H^{r,p}(u)$ . 记  $\alpha = \lim_{r+p \rightarrow \infty} r/(r+p)$ ,  $\beta = 1-\alpha$ . 当  $r+p \rightarrow \infty$  且  $\omega(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \omega_{i,n-i,0} = 0$  的所有复根  $\theta_i (i=1,2,\dots,d)$  满足  $|\theta_i|^\alpha |1-\theta_i|^\beta > \alpha^\alpha \beta^\beta$  时,  $H^{r,p}(u)$  一致趋向于  $R^n(u,v,w)|_{w=0}$ .

### 2.3 以逼近后的多项式 Bézier 曲线为边界,生成三角域上多项式 Bézier 调和曲面 $M$

由推论 1 可知,当  $r+p < 4$  时,存在唯一的一张三角域上多项式调和曲面  $M$ ,使得其 2 条边界曲线恰为有理曲线  $R^n(u,v,w)|_{w=0}$ ,  $R^n(u,v,w)|_{v=0}$  的 Hybrid 多项式逼近曲线.

而当  $r+p \geq 4$  时,只需要根据定理 3 的要求,给定控制顶点  $\{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n} \setminus \{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n,j \neq 4s,s \in \mathbb{N}}$  以及  $\{P_{i,j-1,1}\}_{i+j=n,j=4s,s \in \mathbb{N}}$  (图 5 实线上的点),可唯一确定一张三角域上多项式调和曲面满足类似的边界要求.

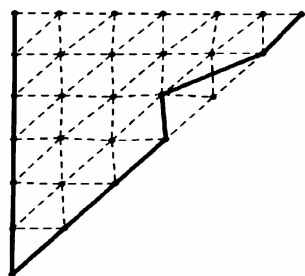


图 5 实线上的控制顶点为已给边界条件

Fig. 5 The control points on the solid line are the boundary conditions

具体步骤:

(1) 给定边界控制顶点  $\{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n}$  与  $\{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n}$ ;

(2) 根据定理 3,由已知点  $\{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n}$ ,  $\{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n,j \neq 4s,s \in \mathbb{N}}$  与未知点  $\{P_{i,j-1,1}\}_{i+j=n,j=4s,s \in \mathbb{N}}$  生成一张带未知数的曲面  $M'$ .

设  $M'$  的控制顶点为  $\{P'_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$ , 则其满足  $P'_{i,j,k} = P_{i,j,k}$ ,  $j=0, i+k=n$ , 或  $k=0, i+j=n, j \neq 4s$ . 且  $\{P'_{i,j,0}\}_{i+j=n,j=4s,s \in \mathbb{N}}$  的表达式只与  $\{P_{i,j,k}\}_{j=0,i+k=n}$ ,  $\{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n,j \neq 4s,s \in \mathbb{N}}$  有关,与参数  $\{P_{i,j-1,1}\}_{i+j=n,j=4s,s \in \mathbb{N}}$  无关.

(3) 将未知点  $\{P_{i,j-1,1}\}_{i+j=n,j=4s,s \in \mathbb{N}}$  的值取为对应的  $\{P_{i,j,k}\}_{k=0,i+j=n,j=4s,s \in \mathbb{N}}$ , 代入含未知数的曲面  $M'$  的表达式,得到的多项式曲面即为  $M$ .

### 2.4 通过比较 $T$ 和 $M$ ,得到 $R$ 中未知控制顶点和权因子的取值

为比较 2 张曲面的逼近度,考虑多项式三角曲面  $A, B$  之间距离的以下度量  $\bar{d}$ , 设

$$\begin{aligned} A(u,v,w) &= \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u,v,w) P_{i,j,k}, \\ B(u,v,w) &= \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u,v,w) P'_{i,j,k}, \end{aligned}$$

令

$$d(A,B) = \frac{\sum_{i+j+k=n} \left( \frac{n!}{i!j!k!} |P_{i,j,k} - P'_{i,j,k}| \right)^2}{n}.$$

选择这个度量是合理的. 这是因为,一般意义上的曲面之间的距离(由曲面的 supnorm 诱导)定义为

$$\bar{d}(A(u,v), B(u,v)) = \sup_{(u,v) \in [0,1] \times [0,1]} (|A(u,v) - B(u,v)|),$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式,

$$\begin{aligned} (\bar{d}(A(u,v), B(u,v)))^2 &= \\ \left( \sup_{(u,v) \in [0,1] \times [0,1]} (|A(u,v) - B(u,v)|) \right)^2 &\leq \\ \sup_{(u,v) \in [0,1] \times [0,1]} \frac{\sum_{i+j+k=n} (B_{i,j,k}^n(u,v,w) P_{i,j,k} - B_{i,j,k}^n(u,v,w) P'_{i,j,k})^2}{n} &\leq \\ \sup_{(u,v) \in [0,1] \times [0,1]} \left( \frac{1}{n} \sum_{i+j+k=n} \left( \frac{n!}{i!j!k!} |P_{i,j,k} - P'_{i,j,k}| \right)^2 \times \right. & \\ \left. |u^i v^j (1-u-v)^k|^2 \right) &\leq \\ \sum_{i+j+k=n} \frac{\left( \frac{n!}{i!j!k!} |P_{i,j,k} - P'_{i,j,k}| \right)^2}{n} &= \\ d(A(u,v), B(u,v)). \end{aligned}$$

因此,当  $d(A(u,v), B(u,v))$  足够小时,两曲面之间的距离在一般意义上也足够小,即 2 张曲面距离足够近.

现在已有含参数的多项式曲面  $T^{JK}(P, \omega, u, v)$  以及精确的调和曲面  $M(u, v)$ , 其中  $P = (P_{i,j,k})_{i+j+k=n, j \neq 0}$ ,  $\omega = (\omega_{ijk})_{i+j+k=n, j \neq 0}$ . 当  $I+J+K \neq r+p$  时,将次

数低的曲面进行升阶运算直至两曲面同阶. 故最终只需考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & d(T^{JK}(P, \omega, u, v), M), \\ \text{s.t.} \quad & \omega_{klm} > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

该优化问题为一标准非线性优化, 可以通过各种计算机程序(如 Lingo 或者 Matlab)的近似算法来计算出得到  $P$  和  $\omega$ . 由此得到的曲面  $R^n(u, v, \omega)$  就是一张欲求的近似调和 Bézier 曲面.

### 3 三角域上有理 Bézier 双调和曲面的构造

三角域有理 Bézier 双调和曲面的构造算法与上述三角域有理 Bézier 调和曲面的构造算法类似. 具体如下:

(1) 对已知边界曲线进行 Hybrid 逼近, 这时由双调和曲面给定的边界控制顶点如图 5 所示, 因此, 除了对边界曲线进行 Hybrid 逼近外, 还需要对内部 2 条准边界曲线进行 Hybrid 逼近.

(2) 按照逼近得到的控制顶点, 利用定理 3, 得到多项式双调和曲面  $M$ .

(3) 计算原曲面(含参数  $(P, \omega)$ )的 Hybrid 逼近曲面  $T^{JK}$ .

(4) 经过适当的曲面升阶, 再计算最优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & d(T^{JK}(P, \omega, u, v), M), \\ \text{st.} \quad & \omega_{klm} > 0. \end{aligned}$$

得到原曲面的参数  $(P, \omega)$  取值, 即得到三角域上的一张有理双调和曲面.

### 4 计算实例

**例 1** (2 次调和曲面的构造) 给定欲求三角有理 Bézier 调和曲面的边界控制顶点和权因子如下:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (0, 1, 0) & R_{011} & (0, 0, 1) \\ (0.25, 0.25, 0) & (0.25, 0, 0.25) \\ (1, 0, 0) \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & \omega_{011} & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

取  $r=2, p=1, I=J=K=1$ , 可计算得  $R_{011} = (-0.855\ 0, 1.660\ 1, 0.719\ 3)$ ,  $\omega_{011} = 1.768\ 9$ , 生成曲面如图 6 所示. 作为比较, 由逼近后的边界曲线生成的多项式精确调和曲面如图 7 所示.

**例 2** (2 次调和曲面的构造) 给定欲求三角有

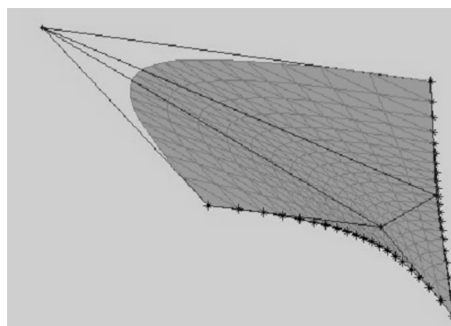


图 6 近似有理调和曲面

Fig. 6 Approximate rational harmonic surface

\* 为 2 条有理边界曲线

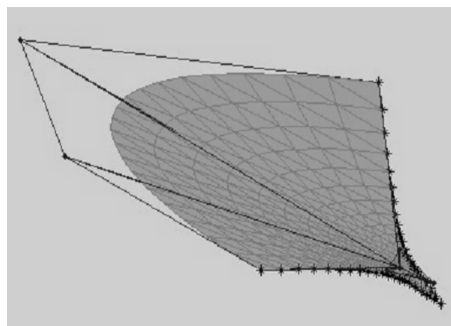


图 7 精确多项式调和曲面

Fig. 7 Accurate polynomial harmonic surface

\* 为 2 条近似边界曲线

理 Bézier 调和曲面的边界控制顶点和权因子如下:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (0.2, 0.75, 0) & R_{011} & (0.1, 0, 0.5) \\ (0.3, 0.5, 0) & (0.01, 0, 0.2) \\ (1, 0, 0) \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & \omega_{011} & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

取  $r=2, p=1, I=J=K=1$ , 可计算得  $R_{011} = (-0.295\ 2, 0.373\ 2, 0.391\ 3)$ ,  $\omega_{011} = 1.447\ 1$ , 生成曲面如图 8 所示. 作为比较, 由逼近后的边界曲线生成的多项式精确调和曲面如图 9 所示.

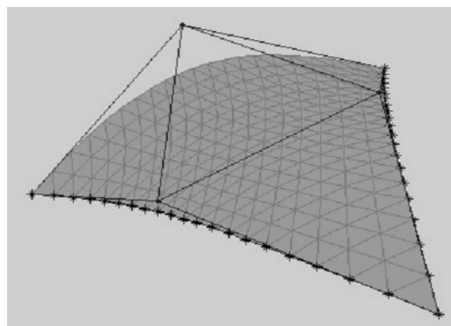


图 8 近似有理调和曲面

Fig. 8 Approximate rational harmonic surface

\* 为 2 条有理边界曲线

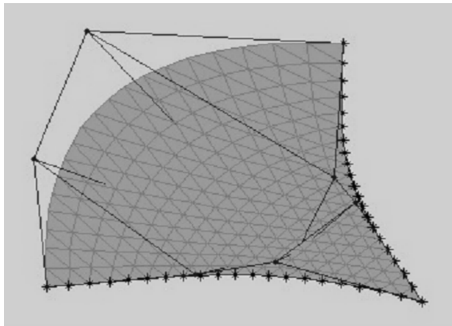


图9 精确多项式调和曲面

Fig. 9 Accurate polynomial harmonic surface

\* 为2条近似边界曲线

**例3** (3次调和曲面的构造) 给定欲求三角有理 Bézie 调和曲面的边界控制顶点和权因子如下:

$$\begin{pmatrix} (0,0,4,0) & R_{012} & R_{021} & (0,4,0,0) \\ (0,0,25,1) & R_{111} & (0,25,0,1) & \\ (0,0,05,0.5) & (0,05,0,0.5) & & \\ (0,0,1) & & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_{012} & \omega_{021} & 1 \\ 2 & \omega_{111} & 2 & \\ 0.1 & 0.1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

取  $r=2, p=1, I=J=K=1$ , 可计算得

$$\begin{aligned} R_{012} &= (0.123\ 2, 0.522\ 7, -4.988), \\ R_{021} &= (0.253\ 8, 0.241\ 0, -5.000\ 1), \\ R_{111} &= (-0.073\ 1, -0.016\ 9, 0.476\ 0), \\ \omega_{012} &= 1.984\ 1, \quad \omega_{021} = 1.796\ 2, \quad \omega_{111} = 1.730\ 5, \\ \begin{pmatrix} (0,1,0) & R_{013} \\ (0,0,722\ 6, 0.422\ 6) & R_{112} \\ (0,0,422\ 6, 0.522\ 6) & R_{211} \\ (0,0,422\ 6, 0.622\ 6) & (0.422\ 6, 0, 0.722\ 6) \\ (0,0,1) & \end{pmatrix} & \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1.071\ 8 & \omega_{013} & \omega_{022} & \omega_{031} & 1.071\ 8 \\ 1.242\ 6 & \omega_{112} & \omega_{121} & 1.242\ 6 & \\ 1 & \omega_{211} & 1 & & \\ 1.242\ 6 & 1.242\ 6 & & & \\ 1.071\ 8 & & & & \end{pmatrix},$$

取  $r=2, p=1, I=J=K=1$ , 可计算得

$$\begin{aligned} R_{013} &= (-0.167\ 1, -4.228\ 7, -2.708\ 9), \\ R_{022} &= (0.329\ 8, -0.494\ 5, 0.001\ 813), \\ R_{031} &= (0.743\ 1, -2.716\ 8, -1.356\ 8), \\ R_{112} &= (0.263\ 7, -0.923\ 1, -0.195\ 8), \\ R_{121} &= (0.265\ 8, -0.481\ 1, 0.049\ 35), \\ R_{211} &= (0.252\ 3, -0.966\ 5, -0.180\ 0), \\ \omega_{013} &= 0.740\ 4, \quad \omega_{022} = 1.110\ 5, \end{aligned}$$

生成曲面如图10所示. 作为比较, 由逼近后的边界曲线生成的多项式精确调和曲面如图11所示.

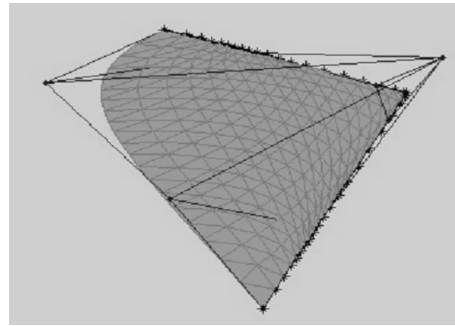


图10 近似有理调和曲面

Fig. 10 Approximate rational harmonic surface

\* 为2条有理边界曲线

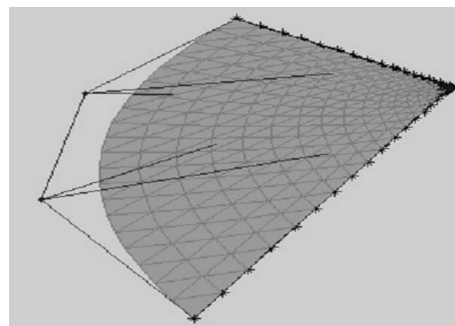


图11 精确多项式调和曲面

Fig. 11 Accurate polynomial harmonic surface

\* 为2条近似边界曲线

**例4** (4次调和曲面的构造) 给定欲求三角有理 Bézie 调和曲面的边界控制顶点和权因子如下:

$$\begin{pmatrix} R_{022} & R_{031} & (1,0,0) \\ R_{121} & (0.622\ 6, 0, 0.422\ 6) & \\ (0.422\ 6, 0, 0.522\ 6) & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \omega_{031} &= 0.656\ 0, \quad \omega_{112} = 0.714\ 4, \\ \omega_{121} &= 0.577\ 5, \quad \omega_{211} = 0.715\ 6, \end{aligned}$$

生成曲面如图12所示.

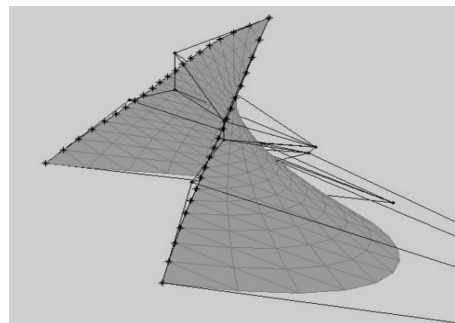


图12 近似有理调和曲面

Fig. 12 Approximate rational harmonic surface

\* 为2条有理边界曲线

**例 5** (4 次双调和曲面的构造) 给定欲求三角有理 Bézier 调和曲面的边界控制顶点和权因子如下:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} (0,1,0) & (0.422\ 6,1,0) & (0.788\ 7,0.788\ 7,0) & (1,0.422\ 6,0) & (1,0,0) \\ (0,1,0.422\ 6) & (0.589\ 4,1,0.589\ 4) & (1,0.589\ 4,0.589\ 4) & (1,0,0.422\ 6) & \\ (0,0.788\ 7,0.788\ 7) & (0.589\ 4,0.589\ 4,1) & & & \\ (0,0.422\ 6,1) & (0.422\ 6,0,1) & & & \\ (0,0,1) & & & & \end{array} \right] R_{220},$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 5.071\ 8 & 4.242\ 6 & 4 & 4.242\ 6 & 5.071\ 8 \\ 4.242\ 6 & 3.344\ 7 & 3.344\ 7 & 4.242\ 6 & \\ 4 & 3.344\ 7 & \omega_{220} & & \\ 4.242\ 6 & 4.242\ 6 & & & \\ 5.071\ 8 & & & & \end{array} \right],$$

取  $r_1=2, p_1=2, r_2=2, p_2=1, I=J=K=1$ , 可计算得

$$R_{220}=(0.232\ 981\ 0, -0.885\ 488\ 4, -0.549\ 451\ 2),$$

$$\omega_{220}=5.000\ 1.$$

生成曲面如图 13 所示.

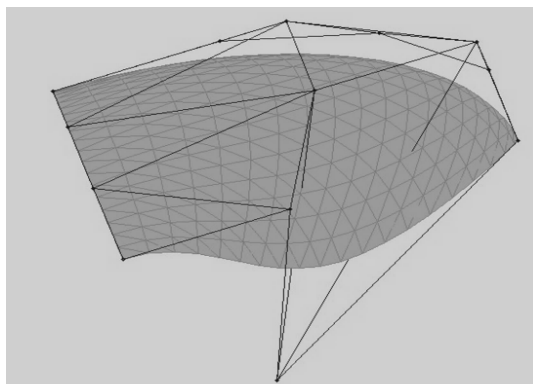


图 13 近似有理双调和曲面

Fig. 13 Approximate rational biharmonic surface

注 本例中使用的边界条件的原始数据为精确表示球面的 4 次有理 Bézier 曲面的边界条件<sup>[11]</sup>.

## 5 总 结

本文利用曲线曲面的 Hybrid 逼近算法成功得到了三角域上近似调和与双调和有理 Bézier 曲面的构造算法,并用数值实验验证了本算法的有效性.由于调和曲面与极小曲面的深刻联系,可以认为本算法得到的曲面是三角域上的近似有理极小曲面.虽然本文只给出了低次有理曲面的例子,但是根据本文的算法,可以解决任意高次的有理曲面造型问题,同时由于 Hybrid 逼近的一致性,可以认为当  $r, p, I, J, K$  趋于无穷时,本文算法得到的曲面即是足够精确的有理调和或有理双调和 Bézier 曲面.今后的工作是与类似工作<sup>[12]</sup>相比较,并运用新工具<sup>[13]</sup>等进行算法推广

## 参考文献(References):

- [1] JOHANNES C N. *Lectures on Minimal Surface: Vol I* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [2] 金文标. 若干特殊曲面的造型和应用[D]. 杭州: 浙江大学, 1999.  
JIN Wen-biao, *Modelling and Applications of Some Special Surfaces* [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1999.
- [3] 满家巨, 汪国昭. B-样条函数极小曲面造型[J]. 软件学报, 2003, 14(4): 824—829.  
MAN Jia-ju, WANG Guo-zhao. Approximating to nonparameterized minimal surface with B-spline surface [J]. *Journal of Software*, 2003, 14(4): 824—829.
- [4] FARIN G, HANSFORD D. Discrete Coons patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1999, 16(7): 691—700.
- [5] MONTERDE J. *The Plateau-Bézier Problem, Lecture Notes in Computer Science* [M]. Berlin/Heidelberg: Springer, 2003, 2768: 262—273.
- [6] MONTERDE J. Bézier surfaces of minimal area: the Dirichlet approach[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(1): 117—136.
- [7] MONTERDE J, UGAIL H. On harmonic and biharmonic Bézier surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21: 697—715.
- [8] 张磊, 王国瑾. 有理三角 B-B 曲面多项式逼近的一个有效算法[J]. 计算机学报, 2006, 29(12): 2151—2162.  
ZHANG Lei, WANG Guo-jin. An effective algorithm to approximate rational triangular B-B surfaces using polynomial forms[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2006, 29(12): 2151—2162.
- [9] ARNAL A, LLUCH A, MONTERDE J. PDE triangular Bézier surfaces: Harmonic, biharmonic and isotropic surfaces[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235(5): 1098—1113.

(下转第 170 页)

- [J]. **J Vac Sci Technol**, 2010, 28(1): 128—130.
- [9] GUO Xiao-wei, DU Jing-lei, GUO Yong-kang, et al. Large-area surface-plasmon polariton interference lithography[J]. **Opt Lett**, 2006, 31(17): 2613—2615.
- [10] HE Ming-yang, ZHANG Zhi-you, SHI Sha, et al. A practical nanofabrication method surface plasmon polaritons interference lithography based on backside-exposure technique[J]. **Opt Exp**, 2010, 18(15): 15975—15980.
- [11] XIONG Wei, DU Jing-lei, FANG Liang, et al. 193 nm interference nanolithography based on SPP[J]. **Microelectronic Engineering**, 2008, 85: 754—757.
- [12] SHI Sha, ZHAGN Zhi-you, HE Ming-yang, et al. Analysis of surface-plasmon-polaritons-assisted interference imaging by using silver film with rough surface[J]. **Optics Express**, 2010, 18(10): 10685—10693.
- [13] WANG Jing-quan, LIANG Hui-min, SHI Sha, et al. Theoretical analysis of interference nanolithography of surface plasmon polaritons without a match layer[J]. **Chin Phys Lett**, 2009, 26(8): 084208.
- [14] YUAN G H, WANG P, LU Y H, et al. A large-area photolithography technique based on surface plasmons leakage modes[J]. **Opt Commun**, 2008, 281: 2680—2684.
- [15] XIE Zhi-hua, YU Wei-xing, WANG Tai-sheng, et al. Plasmonic nanolithography a review[J]. **Plasmonics**, 2011, 6: 560—580.
- [16] SRITURAVANICH W, FANG Nicholas, SUNO Cheng, et al. Plasmonic nanolithography[J]. **Nano Lett**, 2004, 4(6): 1085—1088.
- [17] SREEKANTH K V, MURUKESHAN V M, CHUA J K. A planar layer configuration for surface plasmon interference nanoscale lithography[J]. **Appl Phys Lett**, 2008, 93: 093103.
- [18] RAETHER H. **Surface Plasmons**[M]. Berlin: Springer, 1988: 4—18.
- [19] ALEKSANDAR D R. Algorithm for the determination of intrinsic optical constants of metal films: application to aluminum[J]. **Appl Opt**, 1995, 34(22): 4755—4767.
- [20] JOHNSON P B, CHRISTY R W. Optical constants of the noble metals[J]. **Phys Rev B**, 1972, 6(12): 4370—4379.

(上接第 158 页)

- [10] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 斯普林格出版社, 2001.
- WANG Guo-jin, WANG Guo-zhao, ZHENG Jian-min. **Computer Aided Geometric Design**[M]. Beijing: Higher Education Publisher-Springer-Verlag, 2001.
- [11] FARIN G, PIPER B, WORSEY A J. The octant of a sphere as a nondegenerate triangular Bézier patch[J]. **Computer Aided Geometric Design**, 1987, 4: 329—332.
- [12] 史艳会, 王国瑾. 有理 Bézier 调和与双调和曲面的设计[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2010, 22(8): 1331—1338.
- SHI Yan-hui, WANG Guo-jin. Design for rational Bézier harmonic and biharmonic surfaces[J]. **Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics**, 2010, 22(8): 1331—1338.
- [13] 陈文喻, 汪国昭. 代数三角二阶混合式的拟 Bézier 曲线[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2007, 34(6): 615—621.
- CHEN Wen-yu, WANG Guo-zhao. Algebraic-trigonometric-twice-combined Bézier-like curves[J]. **Journal of Zhejiang University: Science Edition**, 2007, 34(6): 615—621.