



ENSEIRB MATMECA

Compte rendu intermédiaire de TER

Modélisation de la détérioration du marbre par la pollution.

Auteurs :

Alexandre FIGUIN
Emile BERTHOUMIEU
Jérémy NADAL
Corentin VAZIA

Promo et groupe :

M1 4

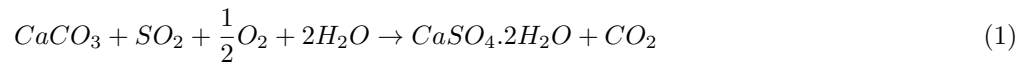
Tuteurs :

D. AREGBA
T. NGUYEN-BUI

30 janvier 2018

1 Introduction

Dans un milieu urbain pollué, les bâtiments et autres monuments sont attaqués par différents composés chimiques présents dans l'air. Dans ce projet, nous étudierons la formation de croûtes de gypse sur le marbre par l'action du dioxyde de soufre selon la réaction chimique suivante :



Le modèle mathématique mettant en jeu les densités locales de carbonates de calcium ($CaCO_3$), composant majeur du marbre, et de dioxyde de soufre (SO_2) suivant, est proposé :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [\phi(c) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\rho(x,t)}{\phi(c)})] = -\rho(x,t) \cdot c \\ \frac{\partial c(t)}{\partial t} = S(u) \end{cases} \quad (2)$$

Le but de notre projet est d'étudier la propagation d'un polluant dans le marbre. Ainsi, sous un regard physique, le front de propagation du gypse sera étudié. Puis, sous un regard purement mathématique, un modèle numérique sera développé.

A noter que ceci est le compte rendu intermédiaire du TER. Nous présentons ici les premiers résultats obtenus. Nous commençons, ici, par l'étude mathématique d'une première approche numérique. Par la suite, nous traitons les études faites concernant la sulfatation (Production d'une couche de sulfate de plomb sur les plaques d'un accumulateur au plomb) d'autres pierres que le marbre pour mieux cerner ce phénomène qui atteint aussi le marbre. Cependant, ils ne permettent pas d'avoir un modèle numérique encore satisfaisant. Il n'y aura donc pas de réponse concrète au sujet. En effet, la conclusion mettra essentiellement en valeur les choses qu'il nous reste à effectuer durant le semestre suivant.

2 Première approche numérique

Nos connaissances initiales ne nous permettent pas de répondre directement à la problématique. De ce fait, nous nous contenterons d'abord d'étudier le cas simplifié de l'équation (2) suivant :

$$\begin{cases} (a) & \phi(c) = \phi(\text{constante}) \\ (b) & c(t) = 0 \\ (c) & \rho(x_m, t_n) \simeq p_n^m = (m, n) \end{cases}$$

$$\text{sur lequel nous nous sommes donnés les contraintes suivantes : } \begin{cases} (i) & \rho(x, 0) = \rho(\frac{\Delta(x)}{2}, 0) \\ (ii) & n_{max} * \Delta(T) = T \\ (iii) & \Delta(x) \text{ et } \Delta(T) \text{ sont arbitraires tel que } \frac{\Delta(T)}{\Delta(x)} < 1 \\ (iv) & x \in [0, 1] \\ (v) & \text{conditions limites } \rho_0^n = \rho_{L+1}^n = 0 \end{cases}$$

Après simplification de l'équation (2), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} - \phi \cdot \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ \rho(0,t) = \rho(1,t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

2.1 Formules de Taylors et différences finies

L'équation (3) que nous cherchons à résoudre est une équation aux dérivées partielles, aussi appelé Équation Différentielle Partielle (EDP). Ce sont des équations qui, en général, n'ont pas de solution analytique comme dans le cas présent.

Notre but est donc de trouver un schéma numérique qui approximerait au maximum la solution exacte. Parmi les différentes méthodes existantes (volumes finis/éléments finis), nous nous intéresserons à la méthode des différences

finies. Elle consiste à remplacer la fonction $u(x)$ de l'EDP inconnue, qui est continue, par un nombre fini de valeurs u_i avec $0 \leq i \leq N$. L'objectif sera alors de calculer pour chaque valeur de i une approximation des valeurs exactes $u(x_i)$. Cela nous permet d'obtenir une discrétisation de notre problème.

Nous posons alors :

$$u_i \simeq u(x_i) \text{ avec } i = 0, \dots, N$$

La résolution du problème continu est remplacée par la recherche de $(N + 1)$ valeurs discrètes. Se pose alors la question de l'approximation des dérivées de la fonction u qui apparaissent dans l'EDP.

Dans notre schéma, nous utilisons une approximation numérique basée sur les différences divisées. Afin de trouver ces dernières, nous étudions le développement limité de Taylor.

Dérivée première

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + h * u'(x) + \frac{h^2}{2} * u''(x) + \frac{h^3}{6} * u'''(x) + O(h^3) \\ \Leftrightarrow \frac{u(x+h) - u(x)}{h} &= u'(x) + \frac{h}{2} * u''(x) + \frac{h^2}{6} * u'''(x) + O(h^2) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u(x-h) &= u(x) - h * u'(x) + \frac{h^2}{2} * u''(x) - \frac{h^3}{6} * u'''(x) + O(h^3) \\ \Leftrightarrow \frac{u(x+h) - u(x)}{h} &= -u'(x) + \frac{h}{2} * u''(x) - \frac{h^2}{6} * u'''(x) + O(h^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Nous pouvons tout de suite voir apparaître la première approximation de la dérivée première de u :

$$(4) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2} * u''(x) + O(h)$$

De ce développement limité, nous déduisons immédiatement la formule d'approximation de la dérivée première dont l'ordre est indiqué par la puissance dans le reste (c'est à dire 1).

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (6)$$

Nous pouvons en trouver une deuxième en faisant (4) - (5) :

$$\begin{aligned} (4) - (5) &\Leftrightarrow \frac{u(x+h) - u(x-h)}{h} = 2 * u'(x) + \frac{2 * h^2}{6} * u'''(x) + O(h^2) \\ &\Leftrightarrow u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2 * h} - \frac{h^2}{6} * u'''(x) \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2 * h} \quad (7)$$

Approximation d'ordre 2.

Dérivée seconde

De la même manière que précédemment nous trouvons :

$$(4)+(5) \Leftrightarrow \frac{u(x+h)+u(x-h)-2u(x)}{h} = h * u''(x) + O(h^2)$$

On obtient alors :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2} \quad (8)$$

Approximation d'ordre 2.

Nous appelons par abus de langage, formules aux différences finies. Il en existe d'autres mais nous ne nous servons que de celles là pour l'élaboration de notre schéma de résolution numérique.

Élaboration d'un schéma numérique

Revenons en à notre problème, notre but est, pour l'instant de résoudre l'équation différentielle (3).

Remplaçons donc $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}$ respectivement par (6) et (8). Nous donnons :

$$\frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} - \phi \cdot \frac{\rho(x + \Delta x, t) + \rho(x - \Delta x, t) + 2 \cdot \rho(x, t)}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (9)$$

Passons maintenant à la discrétisation de notre problème :

Posons $\rho_i^n \simeq \rho(x_i, t_n)$ avec $t_n = n \cdot \Delta t$ et $x_i = i \cdot \Delta x$.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} - \phi \cdot \frac{\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n - 2 \cdot \rho_i^n}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (10)$$

Nous cherchons la résolution de l'équation au temps $n + 1$ c'est à dire au temps $t + \Delta t$. Pour ce faire, isolons ρ_i^{n+1} :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \phi \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot [\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n - 2 \cdot \rho_i^n] \quad (11)$$

Nous allons donc écrire un algorithme qui va calculer la propagation de concentration au temps $n + 1$ sous forme de tableau $\rho_m^n = R(m)$ et $\rho_m^{n+1} = R1(m)$.

Pour cet algorithme nous avons seulement besoin de l'état au temps $t = 0$ et nous pourrions étudier la propagation dans le temps grâce à la récurrence (11).

2.2 Élaboration d'un algorithme

Premier algorithme

Dans un premier temps nous avons implémenté un algorithme qui résout le problème de la manière suivante :

Nous devons rentrer L, nmax et T qui étaient respectivement les intervalles d'espace, de temps et le temps sur lequel nous voulions faire l'étude. Pour l'instant, nous cherchons juste à comprendre de quelle manière la résolution numérique fonctionne. Nous avons essayé de résoudre ce premier problème en utilisant comme fonction de concentration $\rho(x, 0) = x * (1 - x)$. Cependant elle ne représente pas la réalité, elle a été conçue arbitrairement afin de satisfaire les conditions aux limites et de tester la validité de notre algorithme.

La fonction R_m^0 à l'instant initial. Avec pour valeurs L= 10, T=1, nmax=1000

La fonction R_m^{nmax} à l'instant final. Avec pour valeurs L= 10, T=1, nmax=1000

Deuxième algorithme

Ce n'est pas véritablement un nouvel algorithme mais plutôt une amélioration du précédent. Outre le fait de l'avoir rendu plus clair, nous avons maintenant décidé de n'avoir à choisir que le nombre d'intervalles en espace et le temps final qui sont les conditions de stabilité de notre schéma numérique.

Nous utilisons la contrainte : $\Delta = \frac{\Delta T}{(\Delta X)^2} < 1$ et imposons alors une valeur à $\Delta < 1$.

Nous avons donc : $\Delta T = \Delta \cdot (\Delta X)^2$

Malheureusement, celui ci ne fonctionne pas parfaitement. Voici les différents résultats obtenus.

"Data_init.txt" correspond à la concentration initiale et "Data.txt" à celle au temps final choisi.

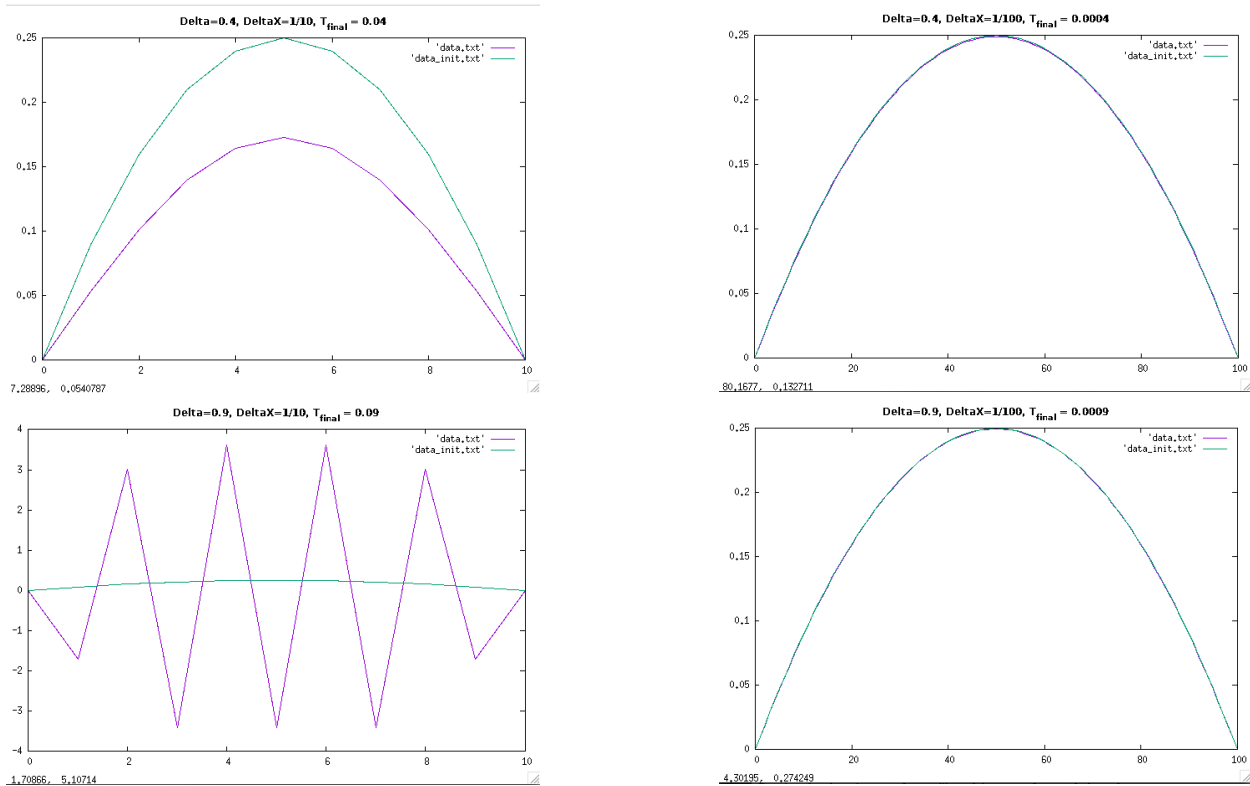


Figure 1 - Courbes des résultats obtenus pour l'algorithme 2

Les résultats obtenus ne sont pas en accord avec l'attendu. En fait, nous nous sommes rendus compte que l'erreur venait de la condition initiale qui était en fait : $2 \cdot \frac{\Delta T}{(\Delta X)^2} < 1$ donc, pour tous les $\Delta = \frac{\Delta T}{(\Delta X)^2} > 0.5$ nous avons des schémas faux comme l'indique les graphiques ci dessus. Nous continuerons donc avec une condition initiale tel que $\Delta < 0.5$.

2.3 Erreur d'approximation et détermination de l'ordre de notre méthode

Troisième algorithme

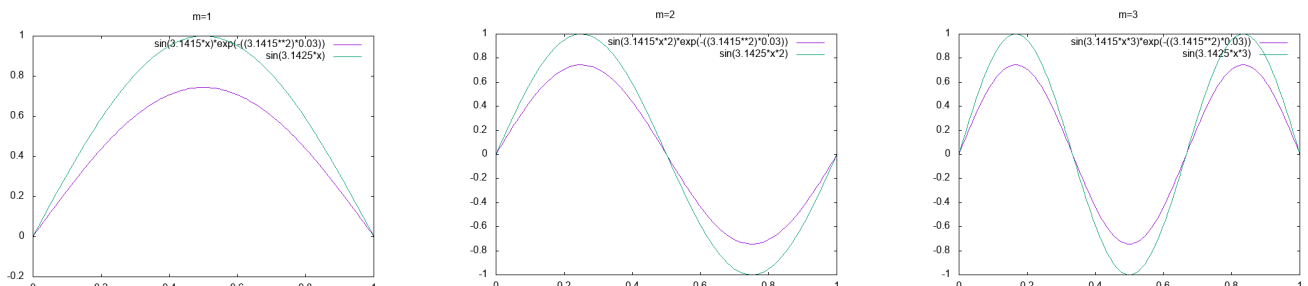
Prenons comme fonction $\rho(x, t) = \rho(t) \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x)$. De cette manière cette fonction vérifie toujours nos conditions aux limites et nous pouvons en trouver une solution, ainsi nous pourrions évaluer l'erreur introduite par notre programme et en trouver l'ordre de cette méthode.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \phi \cdot \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} &= [\rho'(t) + (m^2 \cdot \pi^2) \rho(t)] \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x) = 0 \\ \Leftrightarrow \rho' &= -m^2 \cdot \pi^2 \cdot \rho \\ \Leftrightarrow \rho(t) &= \rho(0) \cdot e^{-m^2 \cdot \pi^2 \cdot t} \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc notre solution au temps 0 :

$$\begin{cases} \rho(x, 0) = u_0 \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x) : \text{Instant initial} \\ \rho(t) = \sin(m \cdot \pi \cdot x) \cdot e^{-m^2 \cdot \pi^2 \cdot t} : \text{Instant final} \end{cases} \quad (12)$$

Avec $m \geq 1$ entier, et $u_0 \in \mathbf{R}$. Prenons $u_0 = 1$ et nous aurons donc les fonctions initiales suivantes (en vert) avec les fonctions solutions correspondantes au temps $T_{final} = 0.03$ (en violet) :



Puisque que nous connaissons la fonction solution de cette équation, nous pouvons calculer l'erreur induite par notre algorithme.

En effet, prenons l'erreur e_1 définie par :

$$e_1 = \sum_{i=0}^N |u_{\text{exa}}(i) - u_{\text{calculé}}(i)| \cdot \frac{1}{N} = \|e\|$$

Avec N le nombre d'intervalle en x .

Nous pouvons donc en déduire l'ordre α de notre méthode de la manière suivante :

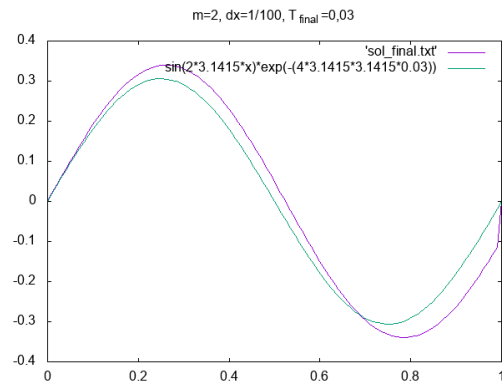
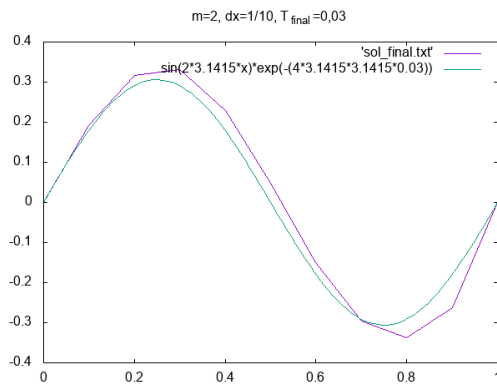
$$\|e\| \leq C \cdot h^\alpha \text{ avec } C \text{ constante inconnue.}$$

Nous prenons alors l'erreur correspondant à un pas de temps de Δx et $\frac{\Delta x}{2}$:

$$\begin{aligned} \|e_{\Delta x}\| &= C \cdot \Delta x^\alpha \text{ et} \\ \|e_{\frac{\Delta x}{2}}\| &= C \cdot \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{\|e_{\Delta x}\|}{\|e_{\frac{\Delta x}{2}}\|} &= 2^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(2)} \text{ d'où :} \\ \alpha &= \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{\|e_{\Delta x}\|}{\|e_{\frac{\Delta x}{2}}\|}\right) \end{aligned}$$

Donc avec deux calculs d'erreur, nous pourrions trouver l'ordre de notre méthode. Cela nous permet d'évaluer la pertinence de cette dernière.

Lorsque nous passons à la discrétisation de la solution finale, nous trouvons quelques erreurs que nous ne comprenons pas :



Nous avons en effet une solution discrétisée assez faussée par rapport à la solution exacte... Sauf que nous voulons faire l'erreur avec la solution exacte.

Donc dans un premier temps nous allons quand même utiliser cette discrétisation afin de calculer l'erreur.

Δx	e_1	α
$\frac{1}{10}$	$2,8959 \cdot 10^{-2}$	
$\frac{1}{20}$	$2,6739 \cdot 10^{-2}$	0,115

Nous trouvons un α incohérent, ce qui est peut-être du à l'erreur de discrétisation. Essayons alors de ne pas discrétiser la fonction.

Nous obtenons alors :

Δx	e_1	α
$\frac{1}{10}$	$3,8448 \cdot 10^{-2}$	
$\frac{1}{20}$	$3,1487 \cdot 10^{-2}$	0,288
$\frac{1}{40}$	$2,9420 \cdot 10^{-2}$	0,098

Ce qui ne semble toujours pas convenable. En effet, l'ordre d'une méthode est censé tendre vers un entier lorsque Δx diminue.

Correction du troisième programme

L'erreur que nous pensions être une erreur de discrétisation était en fait une erreur d'inattention, en effet nous avons défini π comme un entier et non un réel, ce qui donnait évidemment quelque chose de faux.

Après correction nous obtenons les courbes suivantes :

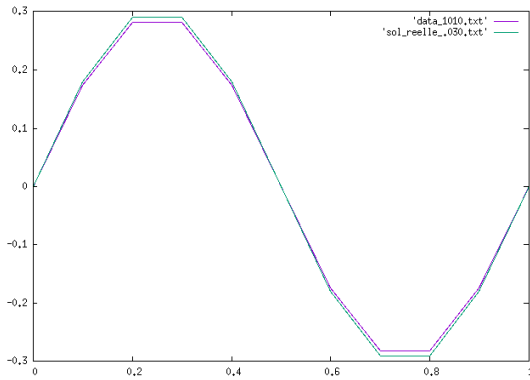


Figure 4 - $m = 2$ $dx = 1/10$ $T_{final} = 0.03$

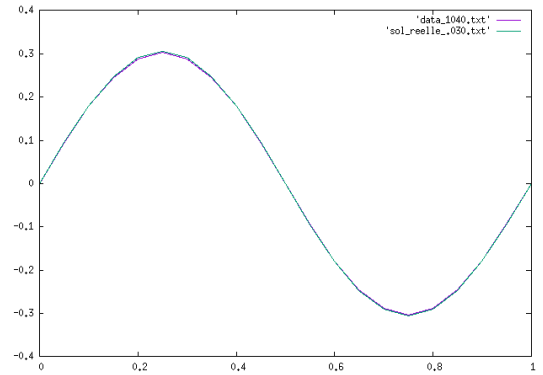


Figure 5 - $m = 2$ $dx = 1/20$
 $T_{final} = 0.03$

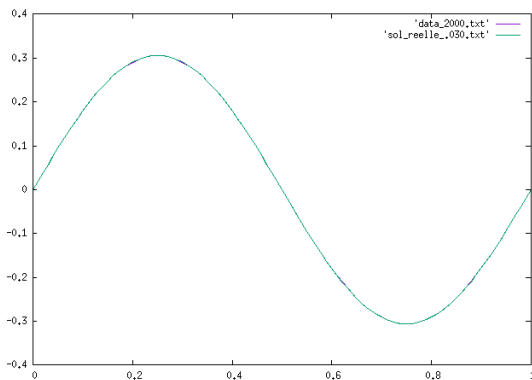


Figure 6 - $m = 2$ $dx = 1/100$
 $T_{final} = 0.03$

On ne voit plus de problème. On remarque même que même avec un intervalle d'espace très court, nous avons une solution finale très proche de la solution réelle. A partir de $\Delta x = \frac{1}{20}$ elle est même presque confondue avec cette dernière.

Nous pouvons alors à nouveau faire le tableau afin d'obtenir l'ordre numérique approché :

Δx	e_1	α
$\frac{1}{10}$	$5,434 * 10^{-323}$	
$\frac{1}{20}$	$1,5406 * 10^{-3}$	-1061,20
$\frac{1}{40}$	$1,1216 * 10^{-3}$	0.457
$\frac{1}{80}$	$3,6123 * 10^{-4}$	1.6345
$\frac{1}{160}$	$9,6145 * 10^{-5}$	1.9096
$\frac{1}{320}$	$2,4413 * 10^{-5}$	1.9775
$\frac{1}{640}$	$6,1270 * 10^{-6}$	1.9944

On peut voir que nous obtenons une première approximation de l'erreur totalement aberrante car très grande en valeur absolue et en plus négative donc il y a forcément quelque chose qui cloche. Dans un second temps on se rend compte que l'ordre semble tendre vers $\alpha = 2$. Ce qui est assez bizarre aussi car dans notre schéma numérique nous utilisons une méthode d'approximation de la dérivée première par rapport au temps d'ordre 1 et de 2 pour la dérivée seconde temporelle donc il est étonnant que nous obtenions ensuite une méthode d'ordre 2...

3 Étude de l'équation de la chaleur

Nous avons aussi essayé d'étudier l'équation de la chaleur. En effet, la première approximation de notre équation principale est identique. Nous avons déjà fait l'approximation numérique en 1D. Nous avons donc aussi essayé de faire la résolution de l'équation de la chaleur en 2D. Celle ci revient à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x)$$

Il nous faut aussi des conditions aux limites et pour coller à notre problème initial nous avons pris en compte une chaleur nulle sur les bords. Nous avons aussi posé $\Delta x = \Delta y = 1/100$ et $\Delta = 0,2$ donc un $\Delta t = \Delta \cdot (\Delta x)^2 = 2 \cdot 10^{-5}$. Voici quelques impression d'écran du résultat au cours du temps. Nous avons fais l'expérience d'une plaque chauffée en son centre à un temps initial puis laissé à elle même. La couleur jaune représente le plus chaud obtenu et le noir le plus froid.

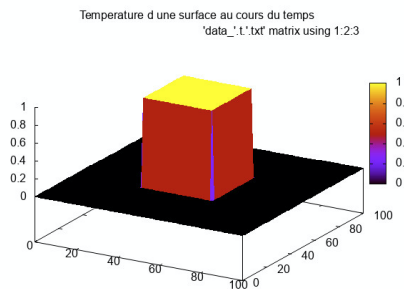


Figure 7 - Temps initial $T = 0$

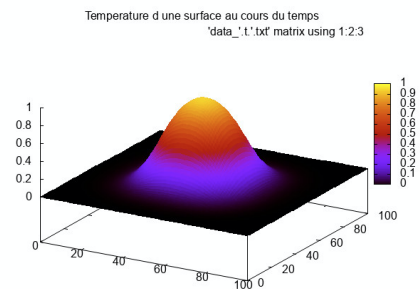


Figure 8 - $T = 0,0033$

On voit bien comment la méthode des différences finies fait passer d'un problème initial discontinu à un problème continu à la première itération. Et on observe bien la diffusion de la chaleur ce qui correspond à l'idée physique que l'on s'en fait .

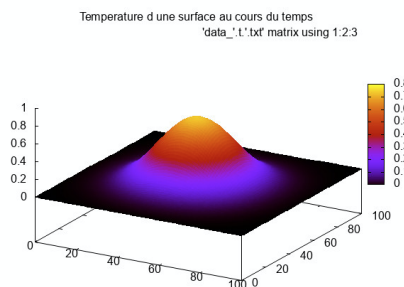


Figure 9 - $T = 0,0066$

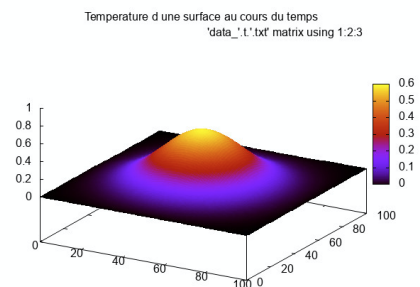


Figure 10 - Temps final $T = 0.01$

4 Quantification de la sulfatation d'une pierre

Dans le but de cerner entièrement notre sujet, il est nécessaire d'étudier et de comprendre le phénomène qui l'entoure : la sulfatation.

Pour mettre en place une théorie sur un phénomène, il est nécessaire d'être en possession de données numériques issues de mesures faites au préalable dans le but de pouvoir quantifier ce dernier. Cette quantification permet de mettre en évidence les comportements de ce phénomène en fonction de différents paramètres.

Dans notre cas, ce phénomène de sulfatation est présent sur la pierre que nous étudions : le marbre.

Des études concernant la sulfatation d'autres pierres telles que la calcaire ou la molasse ont fait l'objet d'un des travaux du Laboratoire de Conservation de la Pierre de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. L'objectif de cette partie va être de mettre en évidence les résultats issus de ce travail afin d'avoir une première idée, par analogie, des différents facteurs pouvant intervenir lors de la sulfatation du marbre.

Au cours de ces études, la quantification de la sulfatation de la pierre à été abordée de trois façons :

- En faisant des mesures sur des bâtiments directement.
- En exposant des échantillons de pierres sur les sites réels pendant une durée fixée en prenant en compte les données météorologiques et environnementales.
- En fixant des paramètres environnementaux et atmosphériques dans une chambre de simulation dans laquelle des échantillons de pierres sont introduits.

Notons que ces méthodes ont chacune leurs limites :

- Pour les deux premières méthodes, les conditions météorologiques et atmosphériques ne peuvent pas être contrôlées, elles sont imposées par le terrain.
- Pour la troisième méthode, certes l'expérimentateur peut contrôler les paramètres météorologiques et atmosphériques mais cette dernière constitue une démarche réductrice qui fait difficilement intervenir les synergies entre les facteurs atmosphériques.

Première méthode

Pour la première méthode de quantification, le Laboratoire a pu extraire de ses mesures un paramètre important : la vitesse de dépôt du soufre (V en $m.s^{-1}$). Il s'agit du rapport entre la densité de flux de soufre dans la pierre (F en $g.m^{-2}s^{-1}$) et la concentration (C en $g.m^{-3}$) en soufre dans l'atmosphère en contact de la pierre.

Nous avons donc :

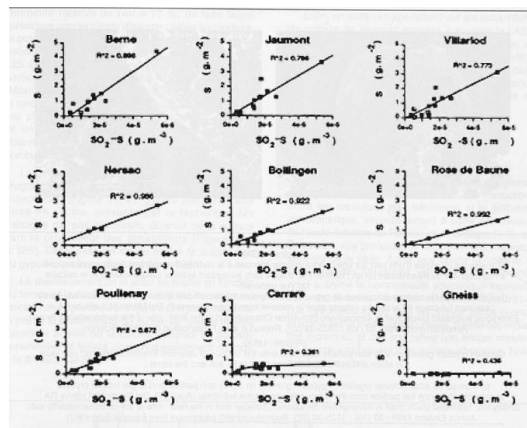
$$V = \frac{F}{C} \quad (13)$$

Notons que la concentration en soufre est une donnée obtenue à partir de mesures pratiquées par les réseaux de surveillance de l'air.

Les notions de vitesse de dépôt et de densité de flux quant à elles permettent d'aborder celle de fonction de transfert du soufre de l'atmosphère vers les matériaux. Il s'agit donc de paramètres supplémentaires directement en lien avec la diffusion du soufre dans la pierre.

Deuxième méthode

La seconde méthode de quantification a permis au Laboratoire de mettre en évidence la présence d'une autre notion importante : celle de dose réponse pour une pierre donnée. Il s'agit de la réponse de cette pierre à une dose qu'elle a reçue (ici de soufre). Mathématiquement, il s'agit de l'équation de la courbe reliant la concentration de soufre dans l'atmosphère au soufre mesuré dans les éprouvettes exposées sur ces sites. Elle est différente pour chaque pierre, comme en témoignent les courbes suivantes.



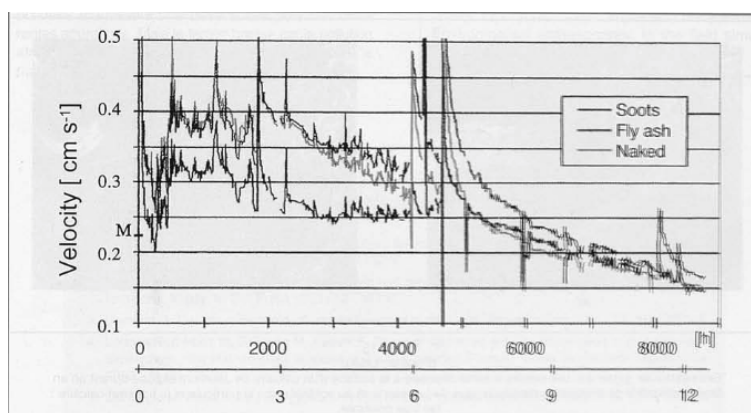
Corrélation entre les concentrations en soufre apportées par le $SO_2(g.m^{-1})$ atmosphérique et la prise en soufre $S(g.m^{-2})$ pour différents types de pierres exposées à l'abri de la pluie sur différents sites.

Troisième méthode

Pour la troisième méthode, les résultats suivants ont été mis en évidence :

- Une diminution progressive de la quantité de soufre captée par les échantillons peut être observée.
- Cette prise en soufre diminue de la surface vers la profondeur des échantillons.

Cela suggère une passivation de la pierre, avec une cristallisation du gypse, de volume molaire supérieur à celui du calcite, faisant progressivement obstacle à la diffusion du soufre. Le schéma suivant témoigne de ce fait.



Vitesse de dépôt du $\text{SO}_2(\text{cm.s}^{-1})$ sur le calcaire de Jaumont nu recouvert de cendres volantes ou de suies durant 12 mois d'expérimentation dans la chambre de simulation atmosphérique de Lausanne.

5 Conclusion

D'une part, notre étude numérique gagne en précision mais nécessite néanmoins des améliorations. En effet, bien que nous obtenions de bonnes approximations des fonctions étudiées, l'erreur de discrétisation reste imparfaite.

D'autre part, sous un regard physique, les résultats d'études sur d'autres pierres nous ont permis de mettre en évidence des paramètres importants (comme la vitesse de dépôt du soufre, la fonction dose réponse) mais encore des caractéristiques importantes (diminution de la vitesse de dépôt du soufre au cours du temps). Cela nous permettra, par analogie, d'avoir des bases comparatives pour les résultats que nous serons amenés à trouver au cours de notre TER.

Au final, il est nécessaire que nous ayons une meilleure compréhension la méthode des différences finies, dans le but d'apporter un schéma numérique exempt de toute simplification pour un meilleur réalisme. Une fois l'obtention de ce dernier, il nous restera à l'appliquer à l'équation (2) caractérisant notre sujet. DE plus, il est impératif d'associer la partie physique à la partie mathématique qui n'ont pour l'instant pas de lien concret. Une fois l'obtention de ce dernier, nous aurons alors cerné notre sujet d'étude.

Bibliographie

- Cours - Introduction aux différences finies de l'INSA Toulouse. <https://fr.wikibooks.org/wiki/LaTeX>
- Les effets de la pollution atmosphérique sur le patrimoine bâti : le pierre et le verre - Roger Alexandre LEFEVRE, Patrick AUSSET