

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Modelos de estados

Modelación y simulación

Nombre completo	Flavio Andrés Ramos Osorio
Profesor	Gonzalo Acuña Leiva
Ayudante	Alan Barahona Ruiz
RUT	19.743.063-k
Fecha del Informe	25 - 07 - 2021

Índice

1. Introducción	3
2. Marco teórico	3
2.1. Zero Order Hold	3
2.2. First Order Hold	3
3. Desarrollo primera parte	4
4. Desarrollo segunda parte	7
5. Desarrollo tercera parte	9
6. Conclusiones	11

1. Introducción

Desde la antigüedad el hombre ha intentado modelar el mundo a su alrededor con el objetivo de poder simplificar su manera de entender el mundo y como este mismo funciona. Con el tiempo la necesidad de generar modelos ha sido cada vez mas relevante para poder entender como funcionan ciertas situaciones que se escapan de la posibilidad de una experimentación directa.

Para este laboratorio se realiza una experimentación sobre la modelación a través de sistemas de estados, analizando tanto sistemas fenomenológicos como sistemas modelados como un diagrama de bloque. También se hará un análisis de la discretización de un sistema a través de funciones de orden cero (zero order hold) y funciones de orden uno (first order hold).

2. Marco teórico

2.1. Zero Order Hold

Es un modelo matemático de la reconstrucción de una señal realizado por un convertidor digital-analógico (DAC). Convierte una señal discreta en una continua manteniendo el valor muestreado por un intervalo de muestreo. Recibe su nombre debido a que la aproximación que realiza del valor muestreado es una función de orden cero, es decir una constante.

2.2. First Order Hold

Es un modelo matemático de la reconstrucción de una señal realizado por un convertidor digital-analógico (DAC). Convierte una señal discreta en una continua a través de una aproximación lineal a trozos de la señal original. Recibe su nombre debido a que la aproximación que realiza del valor muestreado es una función de orden uno, graficamente representada como una recta.

3. Desarrollo primera parte

Para la función mab se reordenan los terminos en las matrices de manera que muestra el desarrollo algebraico.

$$\begin{aligned}
 X_1 &= H_1(U - X_2) \\
 X_1 &= \frac{a}{bs - c}(U - X_2) \\
 X_1bs - X_1c &= a(U - X_2) \\
 X_1bs &= aU - X_2a + X_1c / L^{-1}() \\
 x'_1b &= au - x_2a + x_1c \\
 x'_1 &= \frac{au}{b} - \frac{x_2a}{b} + \frac{x_1c}{b} \\
 x'_1 &= \frac{x_1c}{b} - \frac{x_2a}{b} + \frac{au}{b}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 X_2 &= H_2X_1 \\
 X_2 &= \frac{d}{es - f}X_1 \\
 X_2es - X_2f &= X_1d \\
 X_2es &= X_1d + X_2f / L^{-1}() \\
 x'_2e &= x_1d + x_2f \\
 x'_2 &= \frac{x_1d}{e} + \frac{x_2f}{e}
 \end{aligned} \tag{2}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente sistema de estados.

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{c}{b} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix} U \tag{3}$$

Al analizar la única salida del sistema se obtiene lo siguiente.

$$y = x_1 \quad (4)$$

Obteniendo así el modelo de estados de la salida.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} U \quad (5)$$

Luego para la función bam se desarrolla la función de transferencia como se muestra a continuación.

$$x' = Ax + Bu/L()$$

$$y = Cx + Du/L()$$

$$sX - x(0) = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$sX - AX = BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$(sI - A)X = BU$$

$$Y = CX + DU \quad (6)$$

$$X = (sI - A)^{-1}BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$Y = C[(sI - A)^{-1}BU] + DU$$

$$Y = [C(sI - A)^{-1}B + D]U$$

$$Y/U = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$H = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Finalmente, haciendo la comparación del sistema para las entradas de a, b, c, d, e y f con los valores 47, 30, 23, 46, 13 y 22 respectivamente se obtiene lo siguiente.

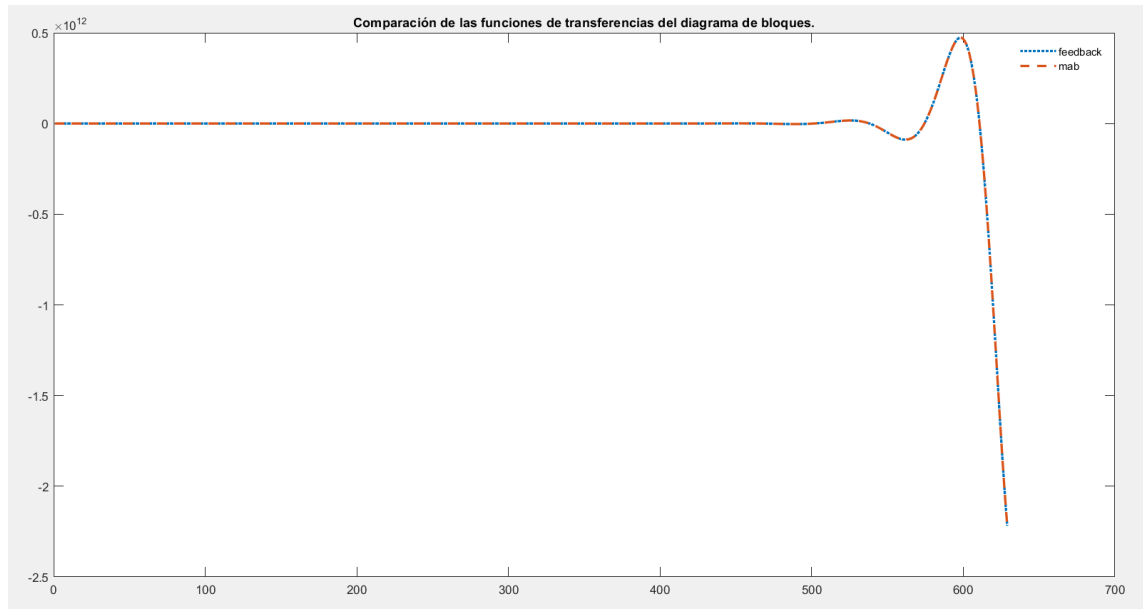


Figura 1: Gráfico de la salida del sistema con las funciones mab y feedback.

En la figura se puede observar que ambas funciones producen el mismo grafico.

4. Desarrollo segunda parte

Se crean los modelos de estados a partir del despeje algebraico de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 h'_1 &= \frac{F_{entrada} - F_{salida}}{Area} \\
 h'_1 &= \frac{U + F_{i2}}{A_1} - \frac{F_{s1} + F_{i1}}{A_1} \\
 h'_1 &= \left(\frac{U}{A_1} + \frac{h_2 - h_1}{R_{i2}A_1} \right) - \left(\frac{h_1}{R_{s1}A_1} + \frac{h_1 - h_2}{R_{i1}A_1} \right) \\
 h'_1 &= \frac{U}{A_1} + \frac{h_2}{R_{i2}A_1} - \frac{h_1}{R_{i2}A_1} - \frac{h_1}{R_{s1}A_1} - \frac{h_1}{R_{i1}A_1} + \frac{h_2}{R_{i1}A_1} \\
 h'_1 &= -\left(\frac{1}{R_{i2}A_1} + \frac{1}{R_{s1}A_1} + \frac{1}{R_{i1}A_1} \right)h_1 + \left(\frac{1}{R_{i2}A_1} + \frac{1}{R_{i1}A_1} \right)h_2 + \left(\frac{1}{A_1} \right)U \\
 h'_1 &= -\left(\frac{R_{i1}R_{s1} + R_{i1}R_{i2} + R_{i2}R_{s1}}{R_{i1}R_{i2}R_{s1}A_1} \right)h_1 + \left(\frac{R_{i1} + R_{i2}}{R_{i1}R_{i2}A_1} \right)h_2 + \left(\frac{1}{A_1} \right)U
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 h'_2 &= \frac{F_{entrada} - F_{salida}}{Area} \\
 h'_2 &= \frac{U + F_{i1}}{A_2} - \frac{F_{s2} + F_{i2}}{A_2} \\
 h'_2 &= \left(\frac{U}{A_2} + \frac{h_1 - h_2}{R_{i1}A_2} \right) - \left(\frac{h_2}{R_{s2}A_2} + \frac{h_2 - h_1}{R_{i2}A_2} \right) \\
 h'_2 &= \frac{U}{A_2} + \frac{h_1}{R_{i1}A_2} - \frac{h_2}{R_{i1}A_2} - \frac{h_2}{R_{s2}A_2} - \frac{h_2}{R_{i2}A_2} + \frac{h_1}{R_{i2}A_2} \\
 h'_2 &= \left(\frac{1}{R_{i1}A_2} + \frac{1}{R_{i2}A_2} \right)h_1 - \left(\frac{1}{R_{i1}A_2} + \frac{1}{R_{s2}A_2} + \frac{1}{R_{i2}A_2} \right)h_2 + \left(\frac{1}{A_2} \right)U \\
 h'_2 &= \left(\frac{R_{i1} + R_{i2}}{R_{i1}R_{i2}A_2} \right)h_1 - \left(\frac{R_{i2}R_{s2} + R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R_{s2}}{R_{i1}R_{i2}R_{s2}A_2} \right)h_2 + \left(\frac{1}{A_2} \right)U
 \end{aligned} \tag{8}$$

De las ecuaciones se obtiene el siguiente sistema de estados.

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{R_{i1}R_{s1}+R_{i1}R_{i2}+R_{i2}R_{s1}}{R_{i1}R_{i2}R_{s1}A_1} & \frac{R_{i1}+R_{i2}}{R_{i1}R_{i2}A_1} \\ \frac{R_{i1}+R_{i2}}{R_{i1}R_{i2}A_2} & -\frac{R_{i2}R_{s2}+R_{i1}R_{i2}+R_{i1}R_{s2}}{R_{i1}R_{i2}R_{s2}A_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \\ \frac{1}{A_2} \end{pmatrix} U \quad (9)$$

Como salida a estudiar se utilizará la altura del liquido en los contenedores [h], obteniendo las siguientes ecuaciones.

$$y_1 = h_1 \quad (10)$$

$$y_2 = h_2$$

Obteniendo el sistema de estados a partir de las ecuaciones.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} U \quad (11)$$

Al graficar el comportamiento del sistema se puede ver que al aplicar un escalón el sistema se estabiliza con ambos contenedores a una altura de $0,1m$ en aproximadamente $0,8s$. Por otra parte, al aplicar un impulso se puede apreciar el primer contenedor se vacía de manera constante, mientras que el segundo primero aumenta (probablemente debido al flujo intermedio que va hacia el mismo) antes de comenzar a descender de manera constante, hasta que ambos se vacían luego de aproximadamente $1s$

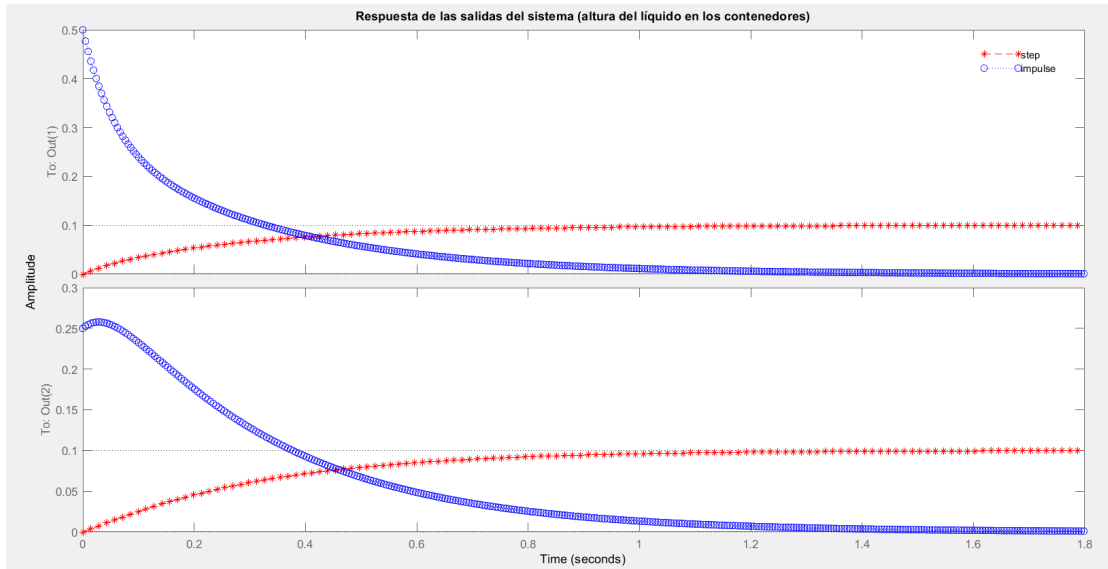


Figura 2: Gráfico de las salidas del sistema ante un impulso y un escalón.

Al gráficar la respuesta del sistema frente a una función $u(t) = 100\sin(\frac{t}{4})$ se puede ver que se le aplica un alto valor al flujo de entrada en dos instancias a lo largo del tiempo. La altura del líquido en ambos contenedores llega a un máximo aproximado de $10m$ en el mayor flujo de entrada, y debido a la magnitud de la misma es difícil apreciar una diferencia significativa entre el comportamiento del líquido de ambos contenedores.

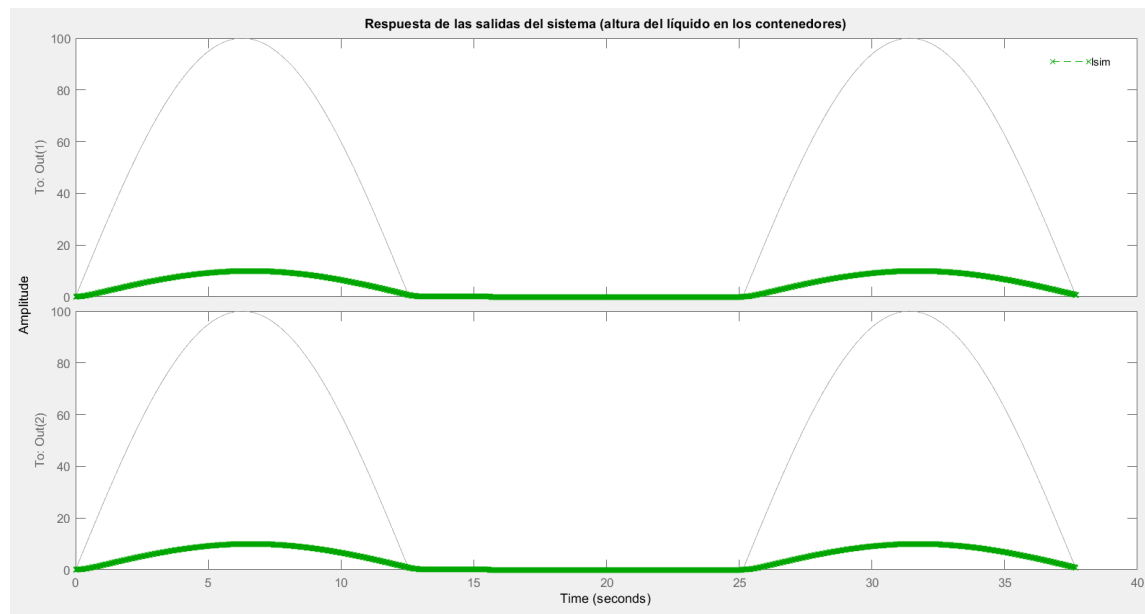


Figura 3: Gráfico de las salidas del sistema ante una función $u(t)$

5. Desarrollo tercera parte

Se discretizan el sistema obtenido en la parte anterior con zero order hold y first order hold para luego gráficar la respuesta de dichas discretizaciones ante un impulso. Debido a que el eje X se extiende no es posible apreciar con tanto detalle la forma en la que se generan las funciones, pero al analizar las curvas con mayor acercamiento se puede ver que están formadas por impulsos entre cada instante de muestreo.

Al muestrear con una frecuencia de $Y = 0,001$ y $T = 0,1$ las curvas se comportan de manera similar, mientras que al usar una frecuencia de muestreo de $T = 2$ se puede ver como solo reconoce una instancia reconociblemente distinta de un valor cero.

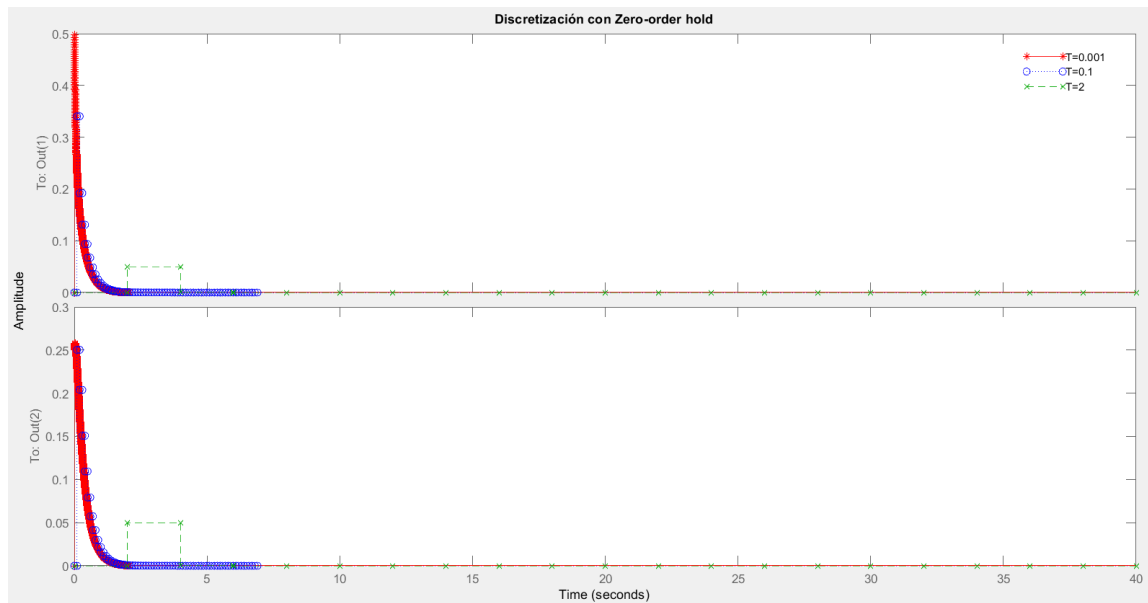


Figura 4: Respuesta del sistema discretizado con zero-order hold ante un impulso.

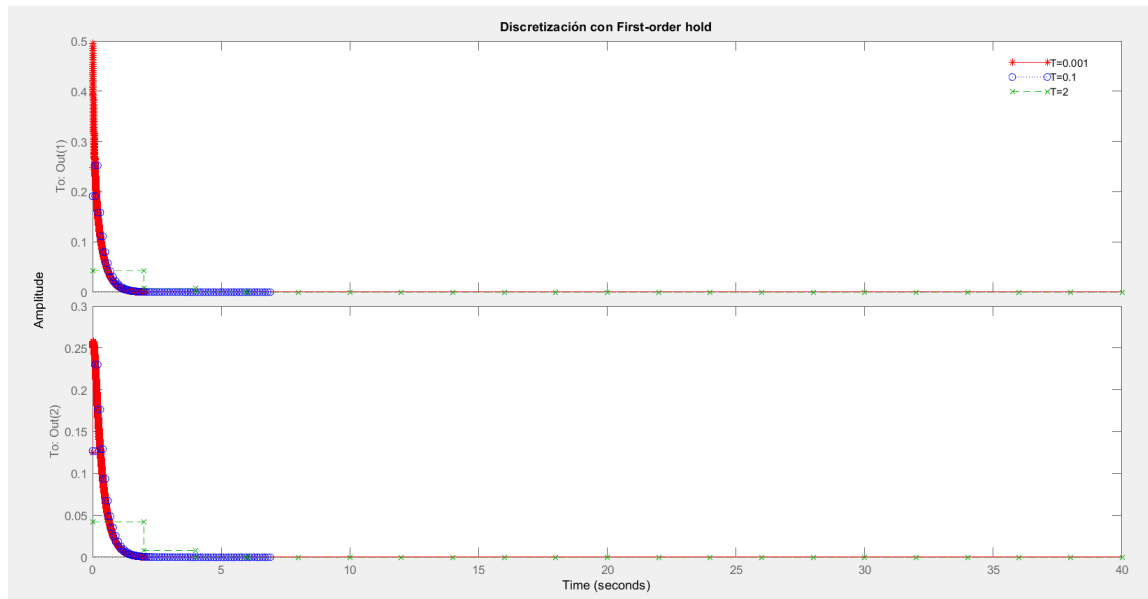


Figura 5: Respuesta del sistema discretizado con first-order hold ante un impulso.

6. Conclusiones

La experimentación realizada en el presente laboratorio permitió comprobar los conocimientos obtenidos de manera teórica.

La primera parte permite comprobar de manera experimental que la obtención de la función de transferencia por distintos métodos permite obtener los mismos resultados.

Las siguientes experimentaciones permitieron una mayor comprensión en cuanto al modelamiento de un sistema que puede asemejarse a una situación real (vasos comunicantes), viendo un pequeño acercamiento del desarrollo algebraico y al uso de las variables de estado, pero reconociendo que las situaciones reales poseen muchas más variables a tomar en cuenta.

Por último, la discretización de un sistema deja ver como una frecuencia de muestreo alta puede reducir la fiabilidad de la aproximación de la función real, recordando que la frecuencia de muestreo debe concordar con la teoría de muestreo de Nyquist-Shannon.