PEP 1 – Modelación y Simulación

Flavio Andrés Ramos Osorio – 19.743.063-k

2.5 p

6.5

1)

a.- ¿Qué es una variable de entrada?

Una variable de entrada es una variable externa que es capaz de afectar al sistema, pero el sistema no puede afectar a la variable de entrada, por lo cual también son llamadas variables independientes. Son variables manipulables utilizadas en el estudio del sistema para dar explicación a sus salidas. ¿las perturbaciones?

b.- ¿Puede un sistema dinámico ser invariante en el tiempo?

Si, puesto que en un sistema dinámico su salida considera los estados anteriores por los cuales pasó. Mientras que un sistema invariante en el tiempo se refiere a que el sistema no cambia sus parámetros a través del tiempo.

Para ilustrar lo anterior consideremos como sistema una radio, en este caso el input sería presionar el botón de volumen, y la salida (el nivel actual de volumen) dependerá del volumen que tenía anteriormente la radio, entonces podemos definirlo como un sistema dinámico. También sabemos que, mientras la radio se mantenga en buen estado, el volumen siempre variará de la misma manera según el input, sin importar el año o la semana en la que se utilice, así que el sistema es invariante en el tiempo.

3p

2)

a.- Determine, utilizando la Transformada de Laplace, la respuesta de estado cero a un escalón y respuesta de entrada cero, en el dominio temporal, para el siguiente sistema:
$6d^2 y/dt^2 + 2\, dy/dt + 11\, y = 2\, u$; $y(0)= -2$; $dy(0)/dt = 3$

$$6y''(t) + 2y'(t) + 11y(t) = 2u \qquad y(0) = -2 \qquad y'(0) = 3$$

Aplicando LaPlace

$$6[s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + 11Y(s) = 2U(s)$$

$$6[s^2 Y(s) + 2s - 3] + 2[sY(s) + 2] + 11Y(s) = 2U(s)$$

$$6s^2 Y(s) + 12s - 18 + 2sY(s) + 4 + 11Y(s) = 2U(s)$$

$$Y(s)[6s^2 + 2s + 11] + 12s - 14 = 2U(s)$$

$$Y(s) = \frac{2U(s) - 12s + 14}{6s^2 + 2s + 11}$$

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{\frac{2}{6s^2+2s+11} \cdot U(s)}}_{RESC} + \underbrace{\boxed{\frac{(-12s+14)}{6s^2+2s+11}}}_{RENC}$$

Fracciones Parciales - RESC

$$\frac{2}{6s^2+2s+11} \cdot U(s) \Rightarrow \frac{2}{6s^2+2s+11} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{6s^2+2s+11}}$$

$$\frac{A(6s^2+2s+11) + (Bs+C)s}{s(6s^2+2s+11)} \Rightarrow \frac{s^2(6A+B) + s(2A+C) + 11A}{s(6s^2+2s+11)}$$

$$6A + B = 0$$
$$2A + C = 0$$
$$11A = 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 2/11 \\ B &= -12/11 \\ C &= -4/11 \end{aligned}}$$

$$Y(s) = \frac{2/11}{s} + \frac{(-12/11)s + (-4/11)}{6s^2 + 2s + 11}$$

Resolviendo la segunda parte

$$\frac{\left(-\frac{12}{11}\right)s + \left(-\frac{4}{11}\right)}{6s^2 + 2s + 11} \quad / \cdot \frac{-\frac{11}{12} \cdot \frac{12}{11}}{\frac{6}{6}}$$

$$\frac{-\frac{12}{11}}{\frac{6}{1}} \cdot \frac{s + \frac{1}{3}}{s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{11}{6}} = \frac{s - a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$s^2 + \tfrac{1}{3}s + \tfrac{11}{6} = s^2 - 2as + a^2 + \omega^2$$

$$-2a = \tfrac{1}{3} \qquad a^2 + \omega^2 = \tfrac{11}{6} \Rightarrow \omega^2 = \tfrac{11}{6} - \tfrac{1}{36}$$

$$\boxed{a = -\tfrac{1}{6}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{66-1}{36}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{65}/6}$$

$$\frac{-12}{66}\left[\frac{s + \frac{1}{3}}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad / +a-a\right] = \frac{-2}{11}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \left(\frac{1}{3}+a\right)\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2} \quad / \omega/\omega\right]$$

$$= \frac{-2}{11}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \left(\frac{1}{3}+a\right)\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right]$$

Pasando al dominio del tiempo

$$Y_{resc} = \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{s} + \frac{-2}{11}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{65}/6}\cdot\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right] \quad / \mathcal{L}^{-1}\{\}$$

$$y_{resc} = \frac{2}{11}\cdot 1 + \frac{-2}{11}\left[e^{at}\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{65}}\cdot e^{at}\operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$$\boxed{y_{resc} = \frac{2}{11} - \frac{2e^{-\frac{1}{6}t}\cos\left(\frac{\sqrt{65}}{6}t\right)}{11} - \frac{2e^{-\frac{1}{6}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{65}}{6}t\right)}{11\sqrt{65}}}$$

Resolviendo RENC

$$\frac{-12s+14}{6s^2+2s+11} \quad / \frac{-12}{12}\cdot -1 \quad / \frac{6}{6}$$

$$\frac{-12}{6}\cdot\frac{s+7/6}{s^2+1/3\,s+11/6} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -1/6 \\ \omega &= \sqrt{65}/6 \end{aligned}}$$

Ya calculados

$$\frac{-12}{6}\left[\frac{s+7/6}{(s-a)^2+\omega^2} \quad / -a+a\right] = -2\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \left(\frac{7}{6}+a\right)\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2} \quad / \cdot\frac{\omega}{\omega}\right]$$

$$= -2\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \left(\frac{7}{6}+a\right)\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right]$$

Pasando al dominio del tiempo

$$Y_{RENC} = -2\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + \left(\frac{7}{6}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{65}/6}\cdot\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right] \quad / \mathcal{L}^{-1}\{\}$$

$$y_{RENC} = -2\left[e^{at}\cos(\omega t) + \frac{6}{\sqrt{65}}\cdot e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]$$

$$\boxed{y_{RENC} = -2e^{-1/6\,t}\cos\left(\sqrt{65}/6\,t\right) - \frac{12e^{-1/6\,t}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{65}/6\,t\right)}{\sqrt{65}}}$$

3P

Respuesta de estado cero (RESC): $\frac{2}{11} - \frac{2e^{\frac{-1}{6}t}\cos\left(\frac{\sqrt{65}}{6}t\right)}{11} - \frac{2e^{\frac{-1}{6}t}\sin\left(\frac{\sqrt{65}}{6}t\right)}{11\sqrt{65}}$

Respuesta de entrada cero (RENC): $-2e^{\frac{-1}{6}t}\cos\left(\frac{\sqrt{65}}{6}t\right) - \frac{12e^{\frac{-1}{6}t}\sin\left(\frac{\sqrt{65}}{6}t\right)}{\sqrt{65}}$

b.- Identifique la Función de Transferencia del sistema, la Ganancia Estática, el Coeficiente de Amortiguamiento y la Frecuencia Natural. Dibuje una forma aproximada de la respuesta. ¿Es un sistema estable? Justifique su respuesta.

Igualando a la forma canónica

$$H(s) = \frac{2}{6s^2+2s+11} \quad /\cdot\frac{6}{6}$$

$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{1}{3}s+\frac{11}{6}} = k\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$s^2+\frac{1}{3}s+\frac{11}{6} = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{11}{6} \qquad 2\xi\omega_n = \frac{1}{3} \Rightarrow \xi\omega_n = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}} \qquad \xi = \frac{1/6}{\sqrt{11}/\sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{11}}}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad /\cdot\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}$$

$$\frac{1}{3\omega_n^2}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

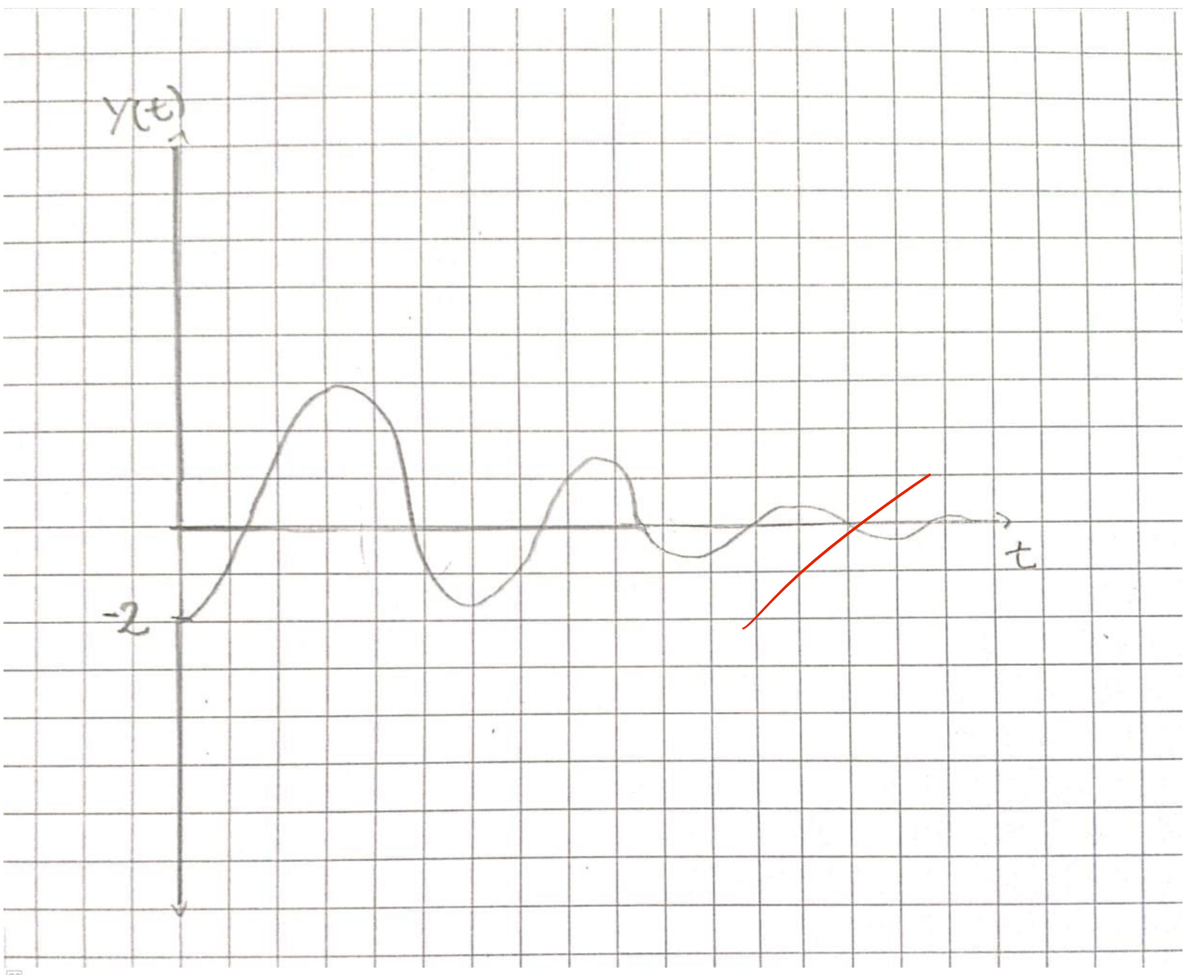
$$k = \frac{1}{3\omega_n^2} = \frac{1}{3\cdot\frac{11}{6}} = \frac{2}{11} \qquad \boxed{k = \frac{2}{11}}$$

Función de transferencia H(s): $\frac{2}{6s^2+2s+11}$

Ganancia estática k: $\frac{2}{11}$

Coeficiente de amortiguamiento ξ: $\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{11}}$

Frecuencia natural W_n: $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$



La función sigue la anterior forma aproximadamente, debido a que su condición inicial es y(0)=-2. También el hecho de que ξ < 1 implica que es un sistema subamortiguado, dándole su forma oscilatoria.

Estabilidad con el teorema de Routh – Hurwitz con función $D(s) = 6s^2 + 2s + 11$

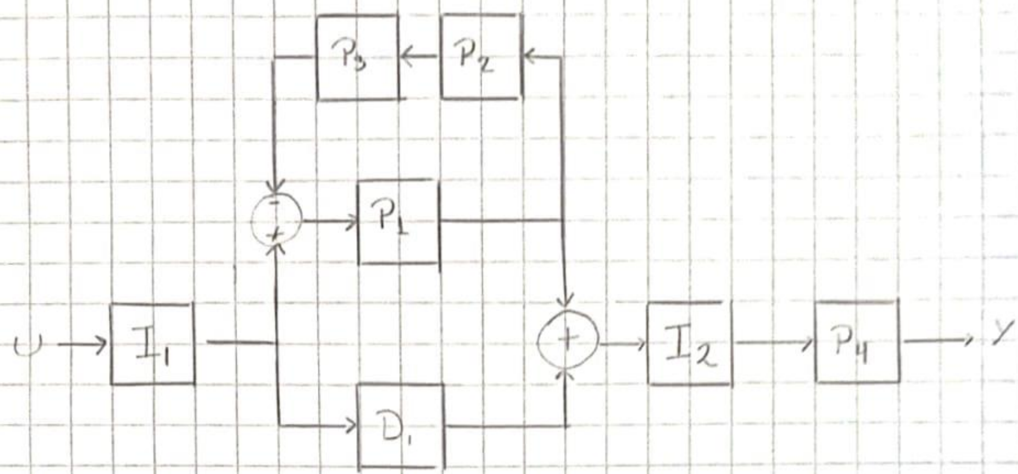
$\boxed{7.0}$

S^2	6	11
S^1	2	0
S^0	11	0

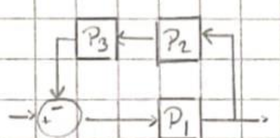
No hay cambios de signo en el arreglo de Routh – Hurwitz [6, 2, 11].
Por lo cual el sistema es estable.

3) Diseñe un sistema de orden 6, inestable, que contenga al menos 3 sistemas de 1er orden y que en su arquitectura conste de al menos 2 sistemas en serie, 2 en paralelo y un bucle de realimentación.

Considerando que los sistemas P son sistemas de primer orden, los sistemas I son sistemas integradores y el sistema D un sistema derivador.



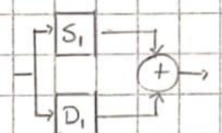
$S_1 =$



$$S_1 = \frac{P_1}{1+P_1P_2P_3}$$

Bucle de realimentación

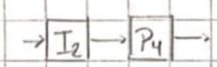
$S_2 =$



$$S_2 = S_1 + D_1$$

Sistemas en paralelo

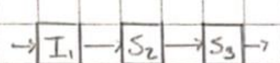
$S_3 =$



$$S_3 = I_2 P_4$$

Sistemas en serie

$S =$



$$S = I_1 S_2 S_3$$

$$S = I_1 S_2 S_3$$

$$= \frac{k}{s}\left(S_1 + D_1\right)\left(I_2 P_4\right)$$

$$= \frac{k}{s}\left(\frac{P_1}{1+P_1P_2P_3} + ks\right)\left(\frac{k}{s}\,\frac{k}{(sT+1)}\right)$$

$$= \frac{k^3}{s^2(sT+1)}\left(\frac{k/(sT+1)}{1 + k^3/(sT+1)^3} + ks\right)$$

$$= \frac{k^3}{s^2(sT+1)}\left(\frac{k(sT+1)^2}{(sT+1)^3+k^3} + ks\right)$$

$$= \frac{k^3}{s^2(sT+1)}\left(\frac{k(sT+1)^2 + ks(sT+1)^3 + k^4 s}{(sT+1)^3+k^3}\right)$$

$$= \frac{k^4(sT+1)^2 + k^4 s(sT+1)^3 + k^7 s}{s^2(sT+1)(sT+1)^3 + s^2(sT+1)k^3}$$

Teniendo el sistema un denominador: $s^2(sT+1)(sT+1)^3 + s^2(sT+1)k^3$
El cual es de grado 6.

y la inestabilidad ?

$\boxed{5,3}$