UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Informática

Modelación y Simulación

Laboratorio 2

Juan Arredondo

Flavio Ramos

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Alan Barahona

Santiago – Chile

2021

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia se pueden observar muchos fenómenos de la realidad, la cual es compleja y confusa, se pueden analizar mediante sistemas. Estos sistemas no son más que un ordenamiento de la realidad, elementos interrelacionados entre sí que actúan juntos para lograr cierta meta. De estas surgen los modelos que son una herramienta que surge a partir de un sistema y permite manejar o actuar sobre la realidad, uno de estos modelos son los matemáticos.

Para este laboratorio se realiza un análisis de sistemas lineales, para esto se trabaja con sus funciones de transferencia. Toda la interconexión de estos sistemas se expresan mediantes diagramas de bloques, en la cual la salidas de estos representan el comportamiento en el tiempo del sistema, lo cual es lo que queremos analizar ante un escalón unitario como entrada.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo general

El objetivo principal es que mediante el lenguaje de programación MATLAB, se pueda tener un análisis satisfactorio de un sistema mediante su función de transferencia, que con esta herramientas se puedan graficar las respuestas de estos sistemas, junto con obtener toda la información importante de estos, como polos, ceros, ganancia estática.

1.1.2 Objetivos específicos

- Graficar respuestas de lazo abierto y cerrado de diferentes funciones.
- Graficar la respuesta al escalón de sistema expresado en diagrama de bloques.

1.2 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Este documento se divide en dos partes principales, la primera consta de los gráficos de las respuestas de lazo abierto y cerrado de tres funciones, las cuales son de primer y segundo orden. La segunda parte consta de análisis y gráfico de la respuesta al escalón de un diagrama de bloques, además se incluye introducción y conclusiones de la experiencia.

CAPÍTULO 2. MÁRCO TEÓRICO

2.1 MODELOS MATEMÁTICOS

Un sistema es una colección de entidades (seres o máquinas) que actúan y se relacionan hacia un fin lógico. Mientras que un modelo es una representación simplificada de un sistema, elaborado para comprender, predecir y controlar el comportamiento de dicho sistema. Existe una gran variedad de modelos, para este trabajo se utilizarán los modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos son un tipo de modelo científico que emplea algún tipo de formulismo matemático para expresar relaciones entre distintas variables y relaciones, para estudiar el comportamiento de un sistema. Dependiendo del objetivo buscado el modelo puede predecir los valores de las variables en el futuro, evaluar los efectos de alguna actividad, entre otros objetivos.

Un modelo matemático puede estar dentro de las siguientes clasificaciones:

- *Lineal o no lineal*.
- *Estático o dinámico*.
- *Discreto o continuo*.
- *Determinista o probabilístico*.
- *Deductivo, inductivo o flotante*.

2.2 SISTEMAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Se denomina orden de un sistema al grado de su polinomio característico. Consecuentemente el orden de un sistema coincide con el número de polos de éste y con el orden de la ecuación diferencial que lo modela. (Lorca, 2011). Estos sistemas contienen muchos valores que son explicados a continuación.

2.2.1 Funciones de transferencia

La función de transferencia representa una relación entre la salida y la entrada del sistema, para todos los valores de entrada posibles. Esta función modela el comportamiento del sistema en solo dos variables, es decir se compone de una variable independiente de entrada y una variable dependiente de salida. Se define como:

"La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas."

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{L[y(t)]}{L[x(t)]}$$

Donde H(s) es la función de transferencia; Y(s) es la transformada de Laplace de respuesta y X(s) es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

La función de transferencia H(s) de un sistema de primer y segundo orden se puede expresar con las siguientes ecuaciones:

$$H(s) = \frac{b}{a_1 s + a_0}$$

$$H(s) = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

2.2.2 Ganancia estática

La ganancia estática **K** se define como el valor final ante una entrada escalón unitario. Siendo el cociente entre la variación final de la salida y la variación de la entrada. Es decir, cuando la entrada es constante (escalón) y la salida se estabiliza (regimen permanente), la razón del cambio de la salida entre el cambio de la entrada nos da la ganancia estática del sistema.

2.2.3 Tiempo de estabilización

Consiste en el tiempo que requiere un sistema en estabilizarse ante la respuesta de un escalón, esta esta dentro de un rango específico, comúnmente entre 2 % y 5 %. En la figura 2.1 se puede visualizar la respuesta de un sistema a un escalón, cuando este llega al tiempo t_s entra dentro de este rango de valores, por lo que este valor es su tiempo de estabilización.

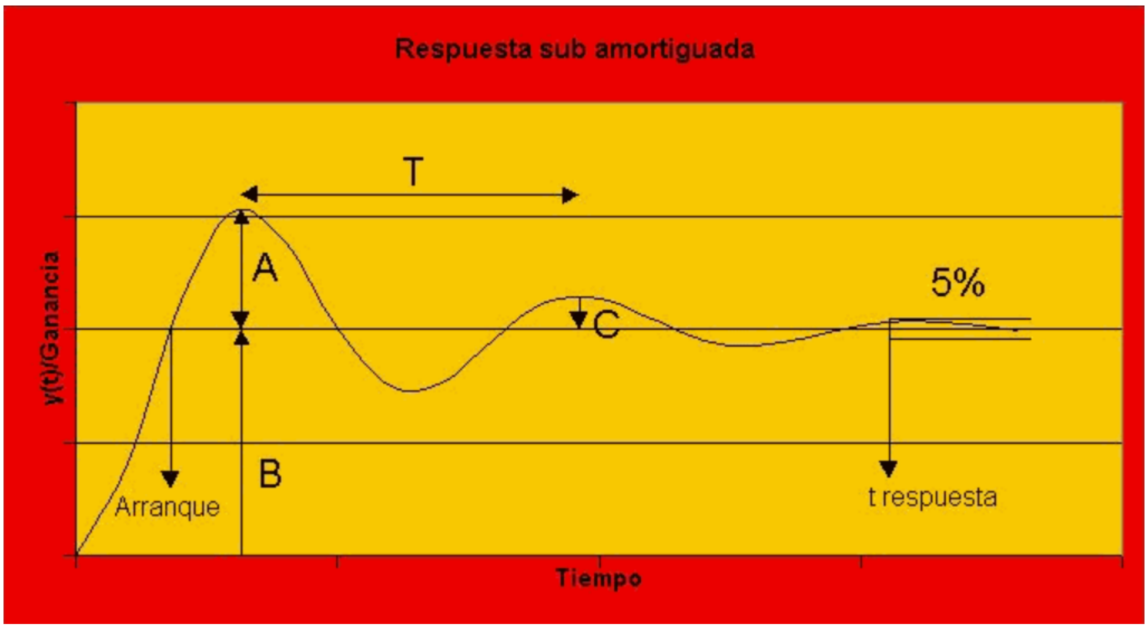

Figura 2.1: Representación gráfica del tiempo de estabilización.

2.2.4 Ceros y polos

Los ceros y polos son utilizados determinar el comportamiento de un sistema de tiempo continuo según la posición de sus polos y ceros en el plano.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K * \frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

Los ceros corresponden a los valores de z para los que el polinomio del numerador Y(s) vale cero, (z1, z2, ... zm) y los valores para los que el polinomio del denominador X(s) vale cero se conocen como polos (p1, p2, ... pn).

2.3 SISTEMAS DE LAZO CERRADO Y LAZO ABIERTO

Los sistemas de lazo cerrado son sistemas que incorporan un circuito de “correccion” del funcionamiento que contiene una unidad de retroalimentación. La unidad de retroalimentación es un mecanismo que “lee” la información de salida de un actuador y la compara con un valor fijado por el usuario, por ejemplo una temperatura determinada. De acuerdo con el resultado de la comparación, el controlador genera una señal de corrección que modifica el funcionamiento del actuador.

La comparación y la corrección deben ser realizadas en forma continua (el sensor debe estar midiendo continuamente y el controlador corrigiendo el funcionamiento de los actuadores en base a la información recibida).

Para los sistemas de lazo abierto, a partir de un programa determinado, el controlador cumple la función de ejecutar una serie de instrucciones, independientemente de los resultados que se produzcan, en general con intervalos de tiempo preestablecidos. Los sistemas de control sin retroalimentación, es decir que no tienen sensores que monitoreen el funcionamiento de los actuadores y donde los flujos no se cierran, se denominan a lazo abierto.

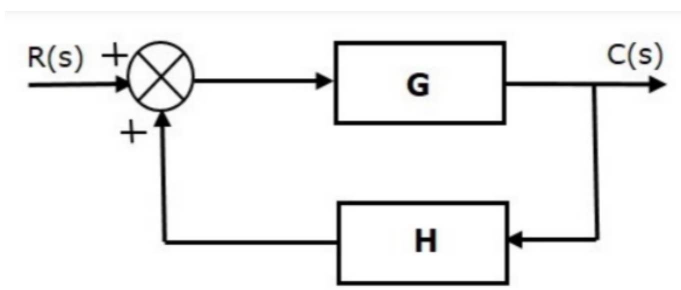

Figura 2.2: Ejemplo de sistema de lazo cerrado.

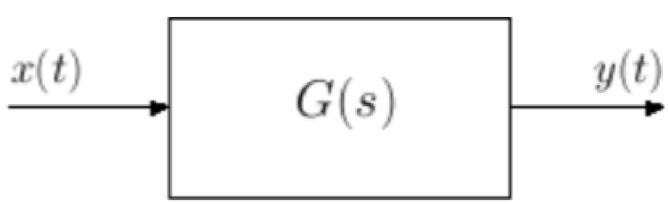

Figura 2.3: Ejemplo de sistema de lazo abierto.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

Para la primera parte de esta experiencia se debe graficar las respuestas de lazo abierto y lazo cerrado de las siguientes funciones.

$$6y'(t) + 2y(t) = 8u'(t)$$
$$y''(t) + 6y(t) + 3y(t) = 5u''(t) + 7u'(t) + u(t)$$

Para obtener las respuestas de lazo abierto y cerrado primero se necesita obtener las funciones de transferencia de cada una de las funciones. Donde en primer lugar se muestra el cálculo para obtener la función de transferencia de cada una.

3.1 DESARROLLO PRIMERA FUNCIÓN

La función se puede escribir de la siguiente forma.

$$6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 8\frac{du(t)}{dt}$$

1. Se calcula la transformada de Laplace a la función, como no se conocen los valores iniciales y(0) y y'(0), se dejan escritos como constantes:
   - $6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 8\frac{du(t)}{dt}/L$
   - $6L[\frac{dy(t)}{dt}] + 2L[y(t)] = 8L[\frac{du(t)}{dt}]$
   - $6(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 8(sU(s) - U(0))$

   Se factoriza Y(s) en el lado izquierdo de la función y U(s) en el derecho.
   - $Y(s)(6s + 2) - 6y(0) + 8u(0) = 8sU(s)$
2. Dejamos solo a Y(s) en el lado izquierdo pasando dividiendo hacia el otro lado el termino que acompaña a Y(s), y en el lado derecho separamos los términos en los que acompañan al U(s) y los que no.
   - $Y(s) = \frac{8sU(s)}{6s+2} + \frac{6y(0)-8u(0)}{6s+2}$

3. Finalmente lo que queremos es la función de transferencia, es decir, lo que acompaña a U(s), esto quiere decir que da igual cuales valores iniciales y(0) y y'(0) tengamos.

   - $Y(s) = \frac{8sU(s)}{6s+2}$

   Por lo tanto la función de transferencia obtenida es:

   - $H(s) = \frac{8s}{6s+2}$

3.2 DESARROLLO SEGUNDA FUNCIÓN

La segunda función se obtiene de una forma similar a la anterior, solo que al ser de segundo orden el cálculo para obtener la función de transferencia es mas largo. Dicha función también se puede escribir de la siguiente forma.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + u(t)$$

1. Se calcula la transformada de Laplace a la función, como no se conocen los valores iniciales y(0) y y'(0), se dejan escritos como constantes:

   - $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + u(t)/L$
   - $L[\frac{d^2y(t)}{dt^2}] + 6L[\frac{dy(t)}{dt}] + 3L[y(t)] = 5L[\frac{d^2y(t)}{dt^2}] + 7L[\frac{dy(t)}{dt}] + L[u(t)]$
   - $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6sY(s) - 6y(0) = 5s^2U(s) - 5su(0) - 5u'(0) + 7sU(s) - u(0) + U(s)$

   Los pasos siguientes son factorizar Y(s) y U(s), esto se hace igual que en la función anterior.

2. Como ya vimos anterior solo nos importa la función de transferencia de la función (Lo que acompaña al U(s)) entonces solo se muestra esa parte de la función.

   - $Y(s) = \frac{5s^2+7s+a}{s^2+6s+3}U(s)$

   Por lo tanto la función de transferencia obtenida es:

   - $H(s) = \frac{5s^2+7s+a}{s^2+6s+3}$

3.3 RESPUESTA DE FUNCIONES A UN ESCALÓN

Ahora que se conoce el valor de todas las funciones de transferencia, se procede a hacer los gráficos respectivos. Ya analizado el comportamiento del sistema se ingresa un escalón como entrada con la función step de MATLAB. En las figuras 3.1 y 3.2 se puede observar el comportamiento de la función en un lazo abierto y cerrado.

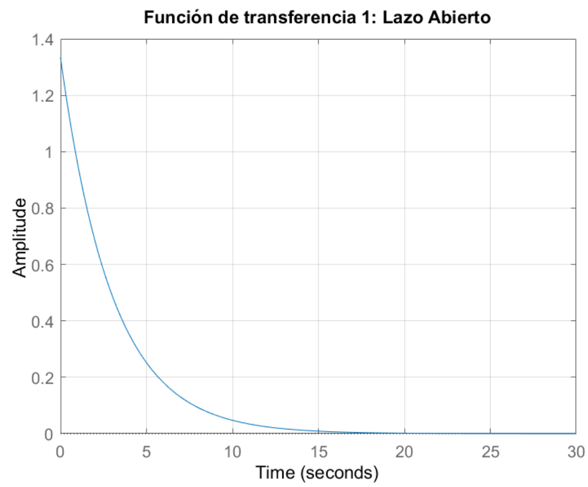

Figura 3.1: Gráfico de función 1 de transferencia: Lazo abierto

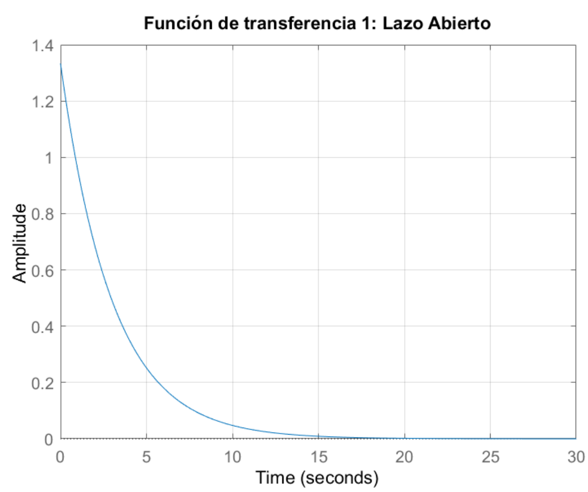

Figura 3.2: Gráfico de función 1 de transferencia: Lazo Cerrado

En estos gráficos se puede apreciar como la función de lazo cerrado tiene una demora más larga hasta llegar a la estabilización del sistema. Además se observa que la amplitud máxima que alcanza el lazo abierto es mas alto que el lazo cerrado. Y por otro lado se puede comprobar que este sistema es estable debido a que después de un cierto tiempo la salida obtenida converge a un valor estable.

A continuación se procede a obtener la ganancia estática, el tiempo de estabilización, los ceros y los polos del sistema. Se calcula cada uno de estos valores para la función de lazo abierto y cerrado. Los resultados quedan expresados en la Tabla 3.1.

	Lazo abierto	Lazo cerrado
Ganancia estática	1.333333	0.5714286
Tiempo de estabilización	11.73622	27.38462
Ceros	0	0
Polos	-0.3333333	-0.1428571

Tabla 3.1: Tabla comparativa primera función

Con estos datos se puede determinar más claramente que la función de lazo abierto tiene una demora mas corta hasta llegar a su estabilización, mientras que la de lazo cerrado cuenta con un tiempo de casi el doble. Sin embargo la función de lazo abierto alcanza un peak mas alto en la salida obtenida debido al escalón. Luego se grafíca los polos y ceros de las funciones de transferencia (como x y o respectivamente), según su componente real y compleja. Segpun el valor de los polos se puede determinar que el sistema es estable debido a que la parte real de los polos son menores que cero.

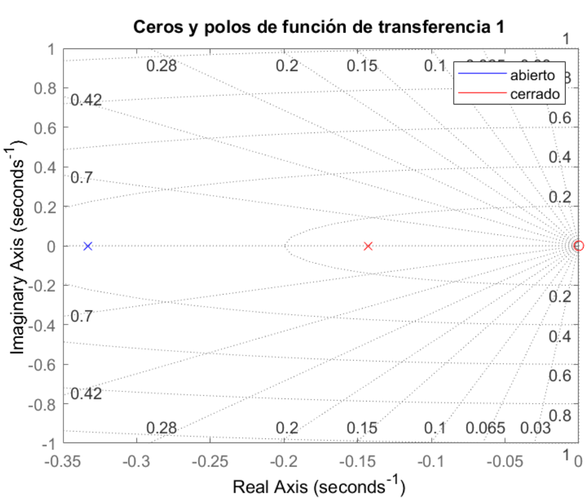

Figura 3.3: Gráfico polo y ceros función 1.

Luego se realiza el mismo proceso para la función 2, donde se ingresa un escalón como entrada para el sistema y luego se gráfica su comportamiento.

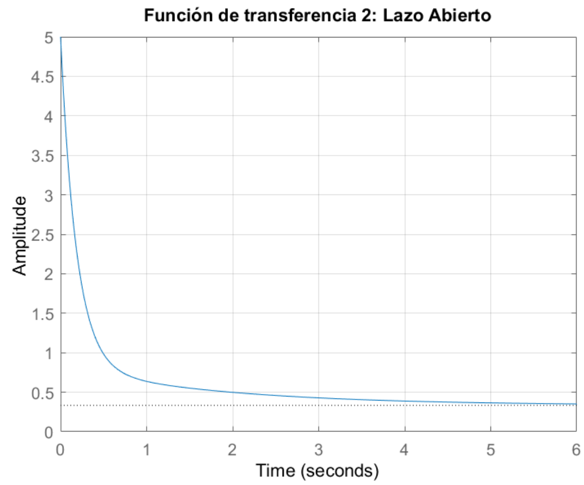

Figura 3.4: Gráfico de función 2 de transferencia: Lazo abierto

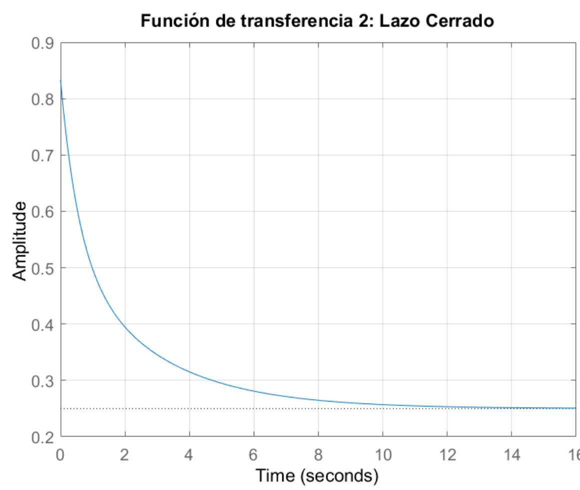

Figura 3.5: Gráfico de función 2 de transferencia: Lazo Cerrado

En esta función se puede observar un comportamiento similar a la anterior donde la función de lazo cerrado tiene un tiempo de estabilización mas largo, pero cuenta con una amplitud máxima menor que la función de lazo abierto.

Se realiza el mismo proceso para la obtención de la ganancia estática, el tiempo de estabilización, los ceros y los polos para este sistema.

	Lazo abierto	Lazo cerrado
Ganancia estática	5	0.8333333
Tiempo de estabilización	3.035089	8.623077
Ceros	[-1.238516 ; -0.1614835]	[-1.238516 ; -0.161483]
Polos	[-5.449490 ; -0.5505103]	[-1.795334 ; -0.3713330]

Tabla 3.2: Tabla comparativa segunda función

Acá se puede observar la diferencia de tiempo de estabilización y de amplitud máxima que tiene cada una de las funciones. Además al igual que la función 1 se puede notar que los polos tiene parte real negativa por lo que se puede deducir que es un sistema estable.

Luego finalmente se gráfica los polos y ceros de las funciones, según su componente real y compleja para la funcion 2.

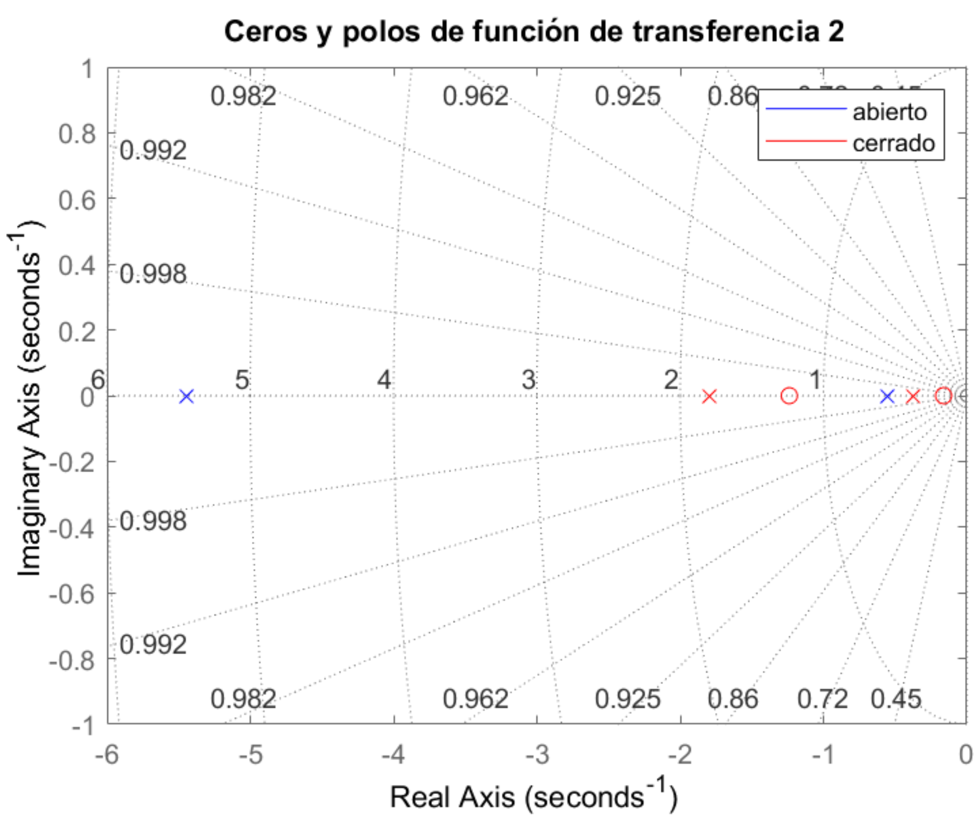

Figura 3.6: Gráfico polo y ceros función 2.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

Para la segunda parte se debe obtener la función de transferencia y respuesta al escalón del siguiente sistema. Para el cálculo de la función de transferencia se hará dividiendo al sistema en subsistemas.

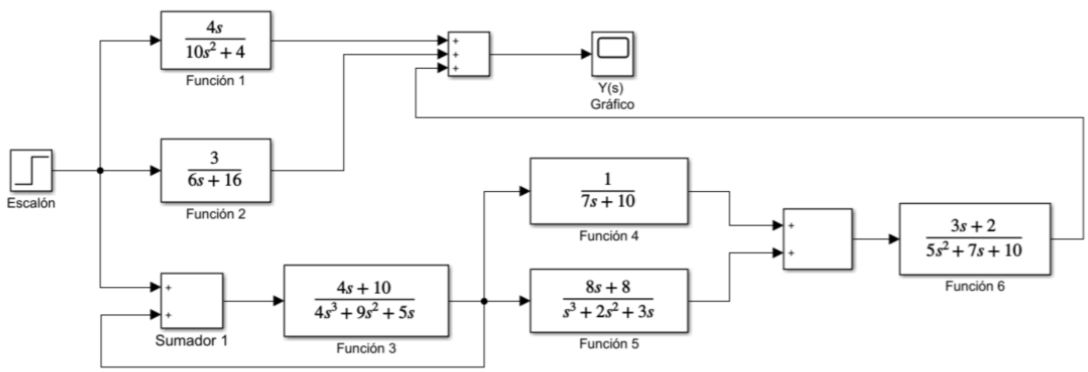

Figura 4.1: Diagrama de bloques del sistema.

4.1 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

4.1.1 Lazo de realimentación

En primer lugar se calcula el lazo con retorno positivo 4.2

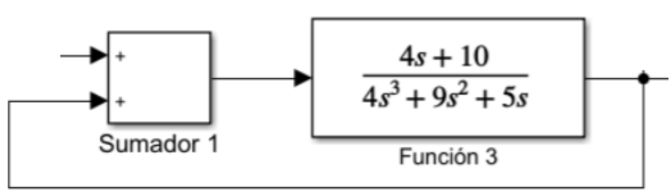

Figura 4.2: Subsistema de lazo cerrado del diagrama de bloques.

$$Y = F_3(U + Y)$$
$$Y = F_3U + F_3Y$$
$$Y(1 - F_3) = F_3U$$
$$\frac{Y}{U} = \frac{F3}{1-F_3}$$

Finalmente al reemplazar se obtiene la función de transferencia del subsistema.

$$H_1(s) = \frac{4s+10}{4s^3+9s^2+s-10}$$

De la misma forma es posible obtenerla a través de la función feedback en MATLAB.

```
>> H_1 = feedback(f_3, 1, +1)

H_1 =

         4 s + 10
  ----------------------
  4 s^3 + 9 s^2 + s - 10

Continuous-time transfer function.
```

Figura 4.3: Función de transferencia del primer subsistema en MatLab.

4.1.2 Subsistema en paralelo.

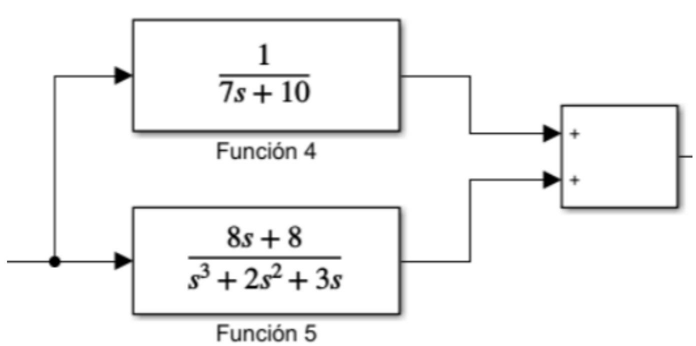

Figura 4.4: Subsistema paralelo del diagrama de bloques.

En este caso solo es necesario sumar ambos sistemas para obtener su función de transferencia.

$$H_2(s) = \frac{1}{7s+10} + \frac{8s+8}{s^3+2s^2+3s}$$

Utilizando MATLAB se obtiene el resultado como muestra la figura 4.5.

```
>> H_2 = f_4 + f_5

H_2 =

    s^3 + 58 s^2 + 139 s + 80
  ------------------------------
  7 s^4 + 24 s^3 + 41 s^2 + 30 s

Continuous-time transfer function.
```

Figura 4.5: Función de transferencia del segundo subsistema en MatLab.

4.1.3 Subsistema en serie.

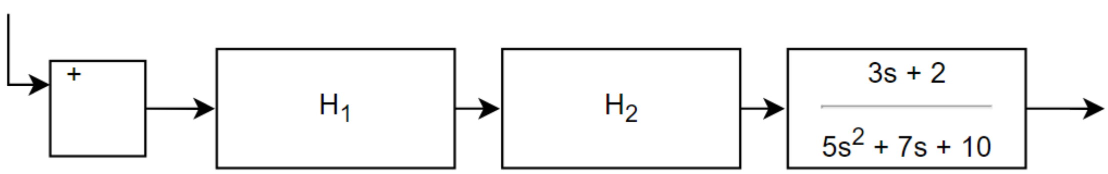

Figura 4.6: Subsistema en serie del diagrama de bloques.

En este caso se multiplican los tres sistemas de la serie.

$$H_3(s) = H_1(s)H_2(s)(\frac{3s+2}{5s^2+7s+10})$$

Utilizando MATLAB se obtiene el resultado como muestra la figura 4.7.

```
>> H_3 = H_1 * H_2 * f_6

H_3 =

                   12 s^5 + 734 s^4 + 3892 s^3 + 7402 s^2 + 5820 s + 1600
  -------------------------------------------------------------------------------------------
  140 s^9 + 991 s^8 + 3328 s^7 + 6514 s^6 + 7326 s^5 + 3027 s^4 - 3450 s^3 - 5900 s^2 - 3000 s

Continuous-time transfer function.
```

Figura 4.7: Función de transferencia del tercer subsistema en MatLab.

4.1.4 Sistema final.

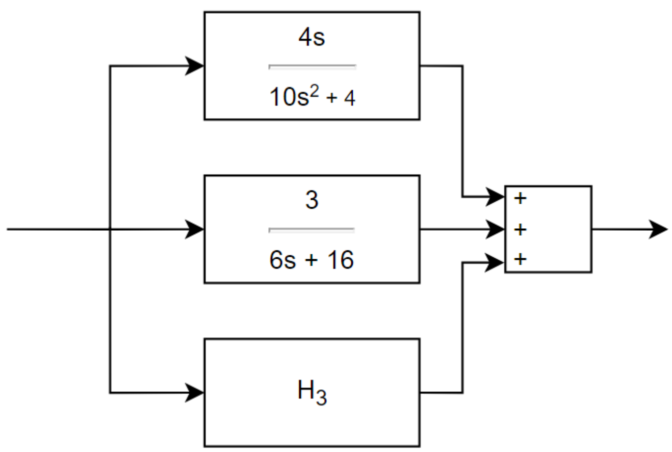

Figura 4.8: Sistema final en paralelo del diagrama de bloques.

Por último, para obtener la función de transferencia del sistema total se suman los sistemas en paralelo.

$$H_F(s) = \frac{4s}{10s^2+4} + \frac{3}{6s+16} + H_3(s)$$

Utilizando MATLAB se obtiene el resultado como muestra la figura 4.9.

```
H_final =

  7560 s^11 + 62474 s^10 + 244816 s^9 + 577360 s^8 + 898396 s^7 + 1.062e06 s^6 + 1.181e06 s^5 + 1.171e06 s^4

                                                               + 872936 s^3 + 606608 s^2 + 374880 s + 102400

  ----------------------------------------------------------------------------------------------------------

  8400 s^12 + 81860 s^11 + 361600 s^10 + 956064 s^9 + 1.625e06 s^8 + 1.723e06 s^7 + 870040 s^6 - 364488 s^5

                                                         - 1.013e06 s^4 - 842400 s^3 - 449600 s^2 - 192000 s

Continuous-time transfer function.
```

Figura 4.9: Función de transferencia del sistema final en MatLab.

4.2 RESPUESTA AL ESCALÓN DEL SISTEMA.

Al graficar la respuesta del sistema a un escalón se obtiene el gráfico 4.10

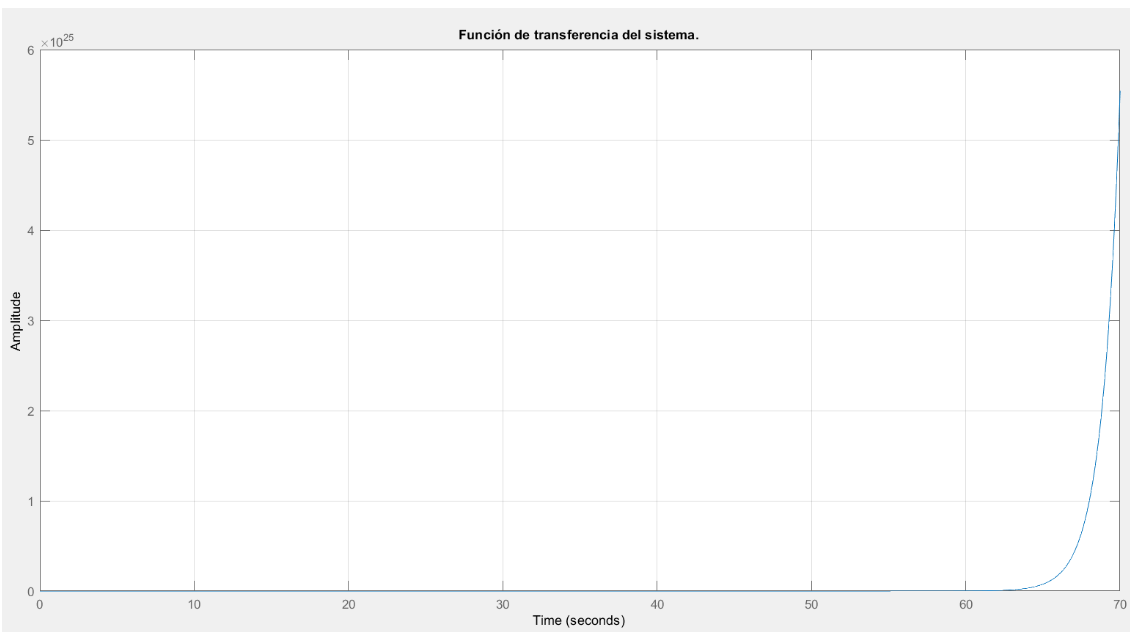

Figura 4.10: Respuesta al escalón del sistema.

Se puede ver a simple vista que el sistema diverge cuando el tiempo tiende al infinito, lo anterior indica que el sistema es inestable.

Para comprobar lo anterior se analizan los polos del sistema obteniendo asi los resultados de la figura 4.11.

```
ans =

   0.0000 + 0.0000i
  -2.6667 + 0.0000i
  -1.5538 + 0.7077i
  -1.5538 - 0.7077i
  -1.4286 + 0.0000i
  -1.0000 + 1.4142i
  -1.0000 - 1.4142i
  -0.7000 + 1.2288i
  -0.7000 - 1.2288i
   0.8576 + 0.0000i
  -0.0000 + 0.6325i
  -0.0000 - 0.6325i
```

Figura 4.11: Polos del sistema.

Se puede observar que, en el décimo polo del sistema, la parte real de este es $0{,}8576$. Se debe recordar que ün sistema lineal independiente es estable si y sólo si, todos los polos de su función de transferencia tienen parte real estrictamente negativa”, por lo cual se puede confirmar que el sistema en cuestión es inestable.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

MATLAB es un potente software matemático el cual cuenta con una gran cantidad de funciones integraadas útiles en cuanto se refiere a modelamiento de sistemas, lo cual ayuda al análisis e interpretación de los mismos.

La experiencia actual utilizó las propiedades del software con el fin de generar gráficos y cálcular las funciones de transferencia de funciones en el dominio del tiempo y sistemas compuestos.

Se llevaron a cabo cálculos que, apoyados con lo visto en catedra, permitieron profundizar en el conocimiento y funcionamiento matemático de los sistemas lineales invariantes.

Los conocimientos ahondados en esta experiencia, tanto matemáticos como en el uso del software MATLAB, servirán como base para siguientes experiencias donde se deba desarrollar programas con un mayor enfoque en la modelación de sistemas.

BIBLIOGRAFÍA

- Muñoz F. (2020). *Apuntes generales de Modelación y Simulación*. Recuperado el 10 de Junio del 2021.

- MathWorks. (2006). *zpkdata*. Recuperado el 10 de Junio del 2021. Sitio web: `https://www.mathworks.com/help/control/ref/lti.zpkdata.html`

- Control Tutorial for MATLAB SIMULINK. (2017). *Extras: Generating a Step Response in MATLAB*. Recuperado el 10 de Junio del 2021. Sitio web: `https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras_step`

- MathWorks (2006). *Feedback connection of two models*. Recuperado el 10 de Junio del 2021. Sitio web: `https://la.mathworks.com/help/control/ref/lti.feedback.html`