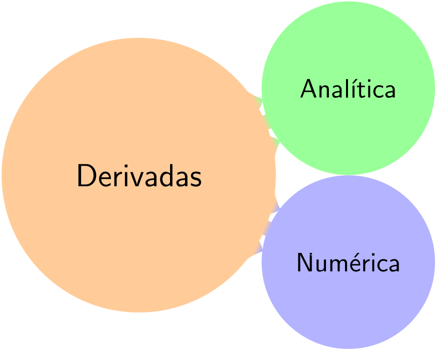
Calculo de derivadas



Teorema

Theorem

Para una función $f(x)$ tal que $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, se cumple siempre la siguiente expresión

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

donde $x_{i\,i}$ es un conjunto de puntos donde se mapea la función, $\xi(x)$ es alguna función de x tal que $\xi \in [a, b]$, y $P(x)$ es el polinomio interpolante de Lagrange asociado.
A medida que n se hace mayor, la aproximación debe ser mejor ya que el término de error se vuelve despreciable.

Ecuación general

Tomando la expresión anterior y diferenciando, obtenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

donde $L_{n,k}$ es la k-ésima función base de Lagrange para n puntos, $L'_{n,k}$ es su primera derivada. Nota que la última expresión se evalúa en x_j en lugar de un valor general de x, la causa de esto es que esta expresión no es válida para otro valor que no esté dentro del conjunto $x_{i\,i}$, sin embargo esto no es un inconveniente cuando se manejan aplicaciones reales. Esta fórmula constituye la aproximación de (n+1) puntos y comprende una generalización de casi todos los esquemas existentes para diferenciar numéricamente.

Ecuación para 3 puntos

Por ejemplo, la forma que toma este polinomio derivado para 3 puntos (x_i, y_i) es la siguiente

$$f'(x_j) = f(x_0)\left[\frac{2x_j - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{2x_j - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\right]$$
$$+ f(x_2)\left[\tfrac{2x_j - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right] + \tfrac{1}{6} f^{(3)}(\epsilon_j) \textstyle\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j - x_k) \tag{1}$$

Fórmulas de extremo

Se basan en evaluar la derivada en el primero de un conjunto de puntos, es decir, si queremos evaluar $f'(x)$ en x_i, entonces necesitamos $(x_i,\, x_{i+1} = x_i + h,\, x_{i+2} = x_i + 2h,\, \cdots)$. Por simplicidad, se suele asumir que el conjunto $x_{i\,i}$ está equiespaciado tal que $x_k = x_0 + k \cdot h$.

- Fórmula de extremo de tres puntos

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}[-3f(x_i) + 4f(x_i + h) - f(x_i + 2h)] + \frac{h^2}{3} f(3)(\xi)$$

con $\xi \in [x_i, x_i + 2h]$

- Fórmula de extremo de cinco puntos

$$f'(x_i) = \frac{1}{12h}[-25f(x_i) + 48f(x_i + h) - 36f(x_i + 2h)$$

$$+16f(x_i + 3h) - 3f(x_i + 4h)] + \tfrac{h^4}{5} f(5)(\xi)$$

con $\xi \in [x_i, x_i + 4h]$

Son especialmente útiles cerca del final de un conjunto de puntos, donde no existen más puntos.