El método de cuadratura de Gauss

April 30, 2024

¿Qué es la cuadratura de Gauss?

- La cuadratura de Gauss es una técnica de **integración numérica** que permite aproximar el valor de una integral definida de una función, usando una combinación lineal de valores de la función en puntos específicos dentro del intervalo de integración.
- Estos puntos se eligen de tal manera que la aproximación sea exacta para polinomios de grado $2n - 1$ o menos, donde n es el número de puntos o nodos.

- Los coeficientes de la combinación lineal se llaman pesos y se calculan a partir de los polinomios ortogonales de Legendre.
- El método de cuadratura de Gauss tiene la ventaja de ser más preciso que otros métodos como el trapecio o Simpson, ya que aprovecha mejor la información disponible sobre la función.
- Sin embargo, el método requiere conocer las raíces de los polinomios de Legendre, que no tienen una fórmula cerrada y deben ser halladas numéricamente. Además, el método solo es aplicable a intervalos finitos y simétricos, por lo que se debe hacer un cambio de variable si se quiere integrar en otros intervalos.

Fórmula general

La fórmula general para la cuadratura de Gauss es la siguiente:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

donde:

- n es el número de nodos o puntos.
- w_i son los pesos asociados a cada nodo.
- x_i son las raíces del polinomio ortogonal de Legendre $P_n(x)$.
- $f(x)$ es la función a integrar.

La aproximación es exacta si $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a $2n-1$.

- La cuadratura de Gauss es un método que aprovecha la ortogonalidad de los polinomios de Legendre para aproximar integrales de la forma: $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ usando una suma ponderada de valores de la función en puntos que son las raíces de los polinomios de Legendre:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Relación para determinar los pesos en la cuadratura de Gauss

- Los pesos en la cuadratura de Gauss se pueden obtener a partir de los polinomios de Legendre usando la siguiente fórmula: $w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$ donde x_i son las raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)$ y $P_n'(x)$ es su derivada.
- Esta fórmula se puede deducir usando el teorema del valor medio para integrales y la ortogonalidad de los polinomios de Legendre.
- Los polinomios de Legendre se pueden calcular recursivamente usando la siguiente relación: $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$ con las condiciones iniciales $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- Los polinomios de Legendre también se pueden obtener usando la fórmula de Rodrigues[4][4] : $\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$

- El polinomio de Legendre es un polinomio ortogonal que satisface la ecuación diferencial de Legendre:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$$

donde n es un entero no negativo.

- El polinomio de Legendre de grado n se puede expresar usando la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

o usando una expresión explícita en potencias de x:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}$$

- En la cuadratura de Gauss las raíces del polinomio de Legendre de grado n son los nodos que se usan para aproximar la integral en el intervalo $[-1,1]$.

Relación entre la integral y el polinomio de Legendre

- Los polinomios de Legendre son útiles en el cálculo numérico ya que permiten el cómputo de integrales definidas sin necesidad de usar fórmulas analíticas, tan sólo fijando como intervalo de integración $[-1, 1]$ (con el correspondiente cambio de variable).
- Esta propiedad se debe a que los polinomios de Legendre son ortogonales con respecto al producto escalar definido en L^2 en el intervalo $[-1, 1]$: $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$ donde δ_{mn} denota la delta de Kronecker, igual a 1 si $m = n$ y 0 para otros casos.
- La ortogonalidad implica que si $f(x)$ es una función continua en $[-1, 1]$, se puede expresar como una serie de Fourier-Legendre: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ donde los coeficientes a_n se calculan por:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

Cambio de variable en la cuadratura de Gauss

- La cuadratura de Gauss está definida para una integral en el intervalo $[-1, 1]$, pero muchas veces se quiere aproximar una integral en otro intervalo $[a, b]$.
- Para hacer esto, se debe aplicar un cambio de variable lineal que transforme el intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[-1, 1]$.
- El cambio de variable se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta de igualar los extremos de los intervalos:

$$\begin{cases} x = a & \text{cuando} \quad z = -1 \\ x = b & \text{cuando} \quad z = 1 \end{cases}$$

- La solución es la siguiente fórmula:

$$x = \frac{b-a}{2} z + \frac{b+a}{2}$$

donde x es la variable original y z es la variable transformada.

- Al aplicar el cambio de variable, se debe tener en cuenta que también se debe modificar la función a integrar y el diferencial de integración. La regla general es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(z)dz$$

donde $g(z) = f(x(z))$ y $dx = \frac{b-a}{2}dz$.

Ejemplo

$$I = \int_0^1 e^x dx$$

Para aplicar la cuadratura de Gauss, debemos hacer un cambio de variable para llevar el intervalo $[0, 1]$ al intervalo $[-1, 1]$. Sea $t = 2x - 1$, entonces $x = \frac{t+1}{2}$ y $dx = \frac{dt}{2}$. La integral queda:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\frac{t+1}{2}} dt$$

Ahora podemos usar la fórmula general con $n = 2$, es decir, con dos nodos. Los valores correspondientes son:

$$w_1 = w_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces, la aproximación es:

$$I \approx \frac{1}{2} \left(e^{\frac{-\sqrt{3}+1}{2}} + e^{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \right) \approx 1.71828$$

El valor exacto de la integral es $e - 1 \approx 1.71828$