Método de Diferencias Finitas

Hernan David Salinas Jiménez

April 18, 2024

Introducción al Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas convierte problemas diferenciales en sistemas algebraicos.

- Aproximamos derivadas numéricamente.
- Se basa en la expansión de Taylor alrededor de un punto.

Introducción al Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas aproxima derivadas numéricamente.

- Aproximación de primer orden hacia adelante:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$$

- Aproximación de primer orden hacia atrás:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h}$$

Error en la Aproximación de Primer Orden (Hacia Adelante)

La aproximación de primer orden hacia adelante es:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}$$

El error de truncamiento es:

$$\text{Error} = \frac{h}{2} f''(\xi)$$

donde ξ está entre x_k y x_{k+1}.

Aproximación de Segundo Orden (Diferencia Central)

Utilizando la fórmula de Taylor de segundo grado:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2 + R_2$$

Evaluando en $x = x_{k+1}$ y $x = x_{k-1}$:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2 + O(h^3)$$

$$f(x_{k-1}) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2 + O(h^3)$$

Restando estas ecuaciones y despejando $f'(x_k)$:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$

Error en la Aproximación de Segundo Orden (Diferencia Central)

La aproximación de segundo orden es:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$

El error de truncamiento es:

$$\text{Error} = \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

donde ξ está entre x_{k-1} y x_{k+1}.

Método de Tres Puntos (Three-Point Endpoint Formula)

Dado un conjunto de tres puntos x_0, x_1, y x_2, queremos aproximar la primera derivada $f'(x_0)$. Sigamos los siguientes pasos:
1. Polinomio Interpolante de Lagrange :
- Tenemos tres puntos: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, y $(x_2, f(x_2))$. - El polinomio interpolante de Lagrange es:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

donde los polinomios de Lagrange son:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

2. Derivada del Polinomio Interpolante:
- Queremos encontrar la derivada de $P(x)$ con respecto a x en x_0:

$$P'(x_0) = \frac{d}{dx} P(x)\bigg|_{x=x_0}$$

3. Evaluar la Derivada en x_0:
- Calculamos $P'(x_0)$ diferenciando cada término en $P(x)$ y luego sustituyendo $x = x_0$.
4. Fórmula de Tres Puntos para la Primera Derivada: - La fórmula de tres puntos para la primera derivada es:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

donde $h = x_1 - x_0$.

Método de Cinco Puntos (Five-Point Formula)

Ahora pasemos a la fórmula de cinco puntos. Dados cinco puntos x_0, x_1, x_2, x_3, y x_4, queremos aproximar la primera derivada $f'(x_0)$. La fórmula de cinco puntos es:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + \\ +16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)]$$

donde $h = x_1 - x_0$.