Matematika

Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Številskih množice

Naravna števila $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}$ lahko seštevamo, množimo, potenciramo.
Cela števila $\mathbb{Z}$

- vse možne razlike $n - m$, $n, m \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-$, $\quad \mathbb{N}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- cela števila lahko seštevamo, odštevamo in množimo

Še več številskih podmnožic realnih števil

Racionalna števila $\mathbb{Q}$

- vsi kvocienti $\frac{n}{m}$, kjer $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$,
- vsako racionalno število lahko predstavimo kot *okrajšan ulomek*
$$\frac{x}{y},$$
kjer $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, x in y nimata skupnih deliteljev.
- racionalna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo, razen...
- NIKOLI NE DELIMO Z 0.

Realna števila

Realna števila $\mathbb{R}$

- poleg racionalnih vsebujejo še *iracionalna števila*
- realna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo
- lahko si jih predstavljamo kot točke na *številski premici*
- Za računske potrebe jih zapišemo kot *neskončna decimalna števila* v obliki
$$x = \pm n.d_1 d_2 d_3 \ldots,$$
kjer
  - je n nenegativno celo število, tj. $n = 0$ ali $n = 1 + \cdots + 1$
  - so d_i decimalke, tj. $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
  - ta zapis ni enoličen, na primer $1.000\ldots = 0.999\ldots$
- Racionalna števila predstavljajo periodični decimalni zapisi, prehod med zapisoma poteka preko deljenja.
- $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

Številska premica

Intervali:

- omejeni - daljice na številski premici:
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ odprt interval
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ zaprt interval
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ in
    $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ polodprta ali polzaprta intervala
- neomejeni - poltraki na številski premici:
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ odprt navzgor neomejen interval
  - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
  - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

∞ **ni število!**

Absolutna vrednost – razdalja na številski premici

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je razdalja števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x - y|$.
Osnovne lastnosti:

- $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
- $|xy| = |x||y|$
- *trikotniška neenakost*: $|x + y| \leq |x| + |y|$

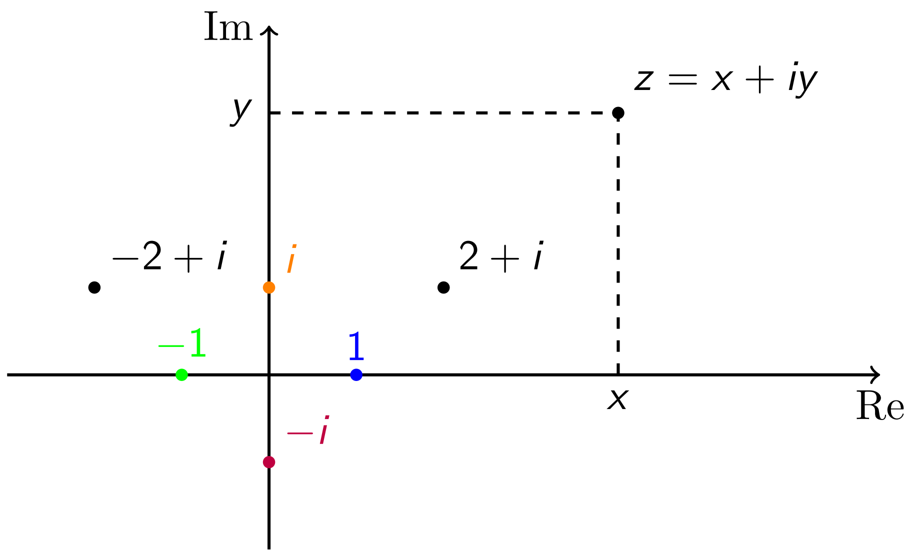
Absolutna vrednost

1. Narišimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-5| \leq 2$.
2. Narišimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.
3. Narišimo množico realnih števil, x, za katere velja $||x-3| - 2x| > 2$.
4. Narišimo množico točk (x, y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

Kaj so kompleksna števila?

- Vseh realnih števil ne moremo koreniti. Zato uvedemo kompleksna števila. To so 'dvodimenzionalna števila'.
- Množica kompleksnih števil: $\mathbb{C}$
- kompleksno število $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,
  - $x = \mathrm{Re}\,(\mathrm{z})$ *realni del*
  - $y = \mathrm{Im}\,(\mathrm{z})$ *imaginarni del*
  - i *imaginarna enota*, velja $i^2 = -1$.
- Dve kompleksni števili sta enaki natanko takrat, kadar imata enaka realna in imaginarna dela.
- Vsako kompleksno število ustreza natanko eni točki v *kompleksni ravnini*.

Kompleksna števila

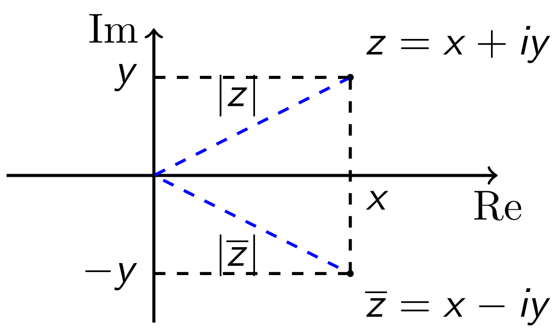


Absolutna vrednost kompleksnega števila z

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kompleksna števila lahko...

1. konjugiramo,



   $\overline{x + iy} = x - iy$ je *konjugirano število*

2. seštevamo

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

3. množimo

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Lastnosti

Velja:

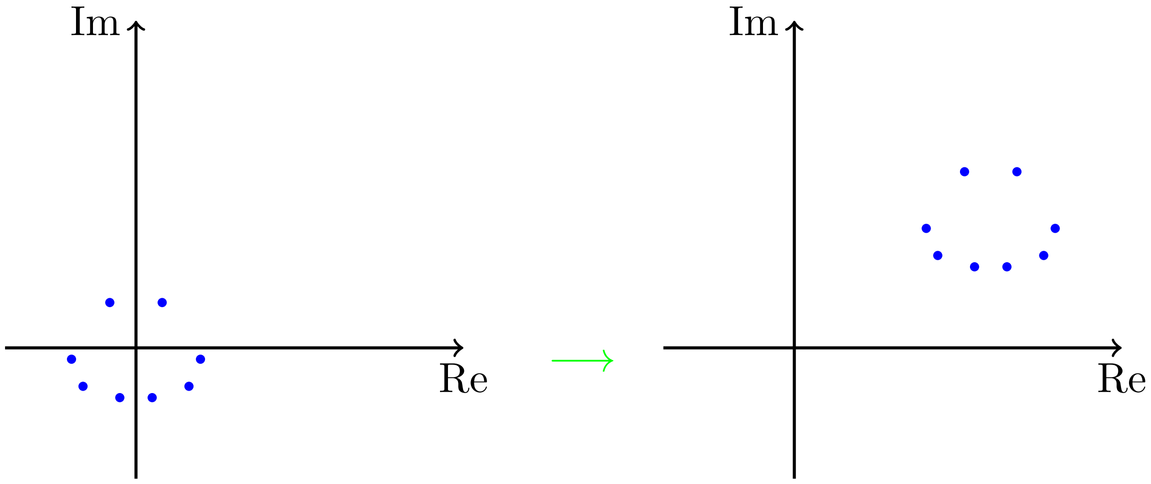
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *trikotniška neenakost*
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

Zgled

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

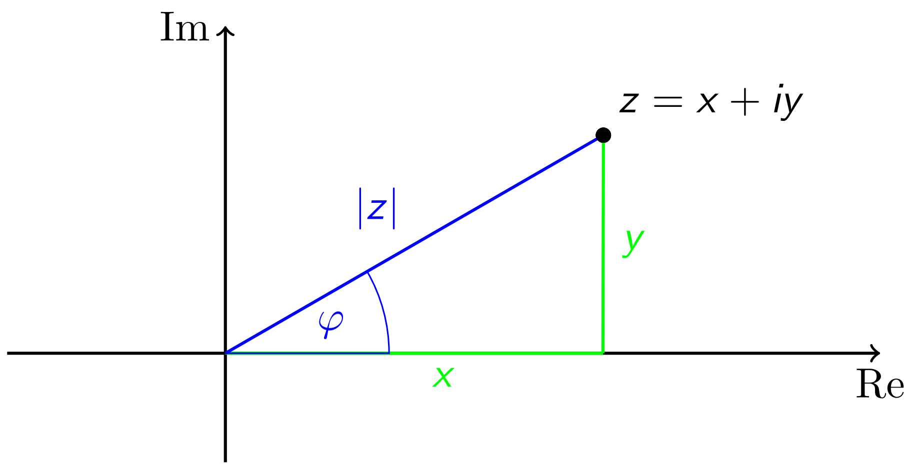
1. $2\bar{z} - z^2 = 0$
2. $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$
3. $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z^2 = 2$
4. $|z - 3 + 2i| = 4$
5. $|z + i| < |z - 1|$
6. $|z - 1| + |z + 1| = 4$

Zgled



$$z \mapsto z + (3 + 2i)$$

Polarni zapis kompleksnega števila



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = |z| \cos \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \qquad y = |z| \sin \varphi$$

Polarni zapis kompleksnega števila

- Zapišimo 1, -1 ter i v polarni obliki.
- Zapišimo $1+i$ ter $-1-i$ v polarni obliki.
- Opišimo zgornji zaprt polkrog s kompleksnimi koordinatami.

Polarni zapis kompleksnega števila

Kompleksno število $z = x + iy$ lahko zapišemo v *polarnem zapisu* kot

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ *polarni kot* ali *argument* in je določen samo do mnogokratnika celega kota 2π natanko.

-
$$|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$\underbrace{|z_1||z_2|}_{\text{produkt absolutnih vrednosti}}(\cos\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\text{vsota kotov}} + i\sin\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\text{vsota kotov}})$$
- Eulerjeva formula: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Polarni zapis se poenostavi: $z = |z|e^{i\varphi}$.
- Množenje se poenostavi: $z_1z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- Števila $z = e^{i\varphi}, \varphi\in\mathbb{R}$ so na *enotski krožnici* $|z| = 1$.

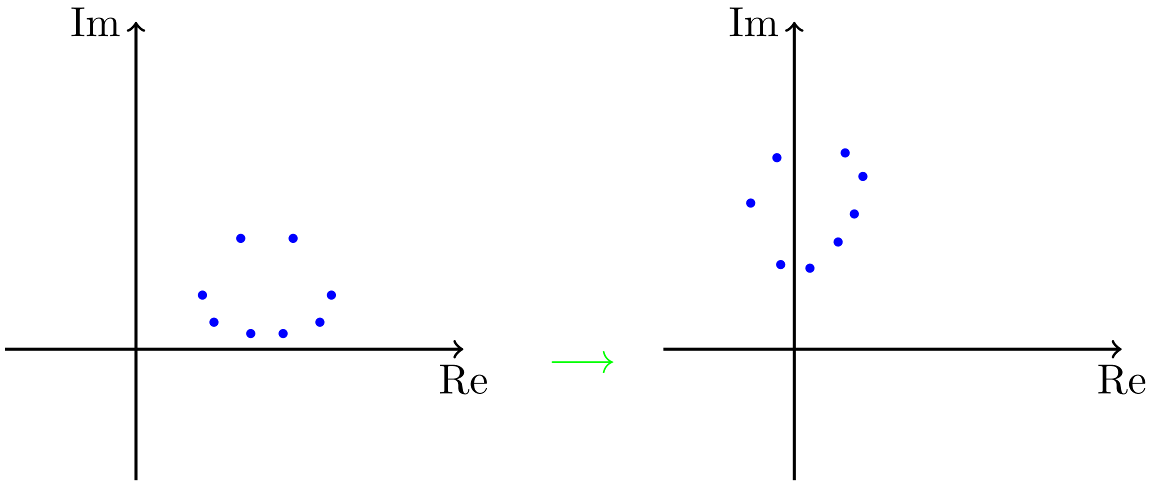
Računanje v polarni obliki

- Števili v polarni obliki sta enaki, če imata enaki absolutni vrednosti, argumenta pa se razlikujeta za mnogokratnik 2π,
- $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$,
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ *de Moivrova formula*
- $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Zgledi

Za $z = 1 - i\sqrt{3}$ narišimo števila z, z^2, z^3, z^4, z^5, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$.

Zgled



$z \qquad \mapsto \qquad ze^{i\frac{\pi}{3}}$

Geometrija operacij v kompleksni ravnini

$z_0 = |z_0|e^{i\varphi_0}$

Preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto z + z_0$	premik za z_0
$z \mapsto e^{i\varphi_0}z$	zasuk okrog izhodišča za kot φ_0
$z \mapsto z_0 z$	razteg (ali krčenje) za $\|z_0\|$ in zasuk za φ_0
$z \mapsto z^{-1}$	zrcaljenje čez realno os in razteg za $\|z\|^{-2}$

Primer

V kaj se s predpisom $z \mapsto (1-i)z + i\sqrt{2}$ preslika

- preslika krog $|z| \leq 1$,
- območje $\{z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$,
- kvadrat $|x| + |y| = 1$,
- parabola $z = t + it^2$?

Koreni kompleksnega števila

n-ti koreni števila $a \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe $z^n = a$.

- Enačbo zapišemo v polarni obliki: $a = |a|e^{i\varphi}$,
- dobimo n različnih rešitev

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

- rešitve ležijo na ogliščih pravilnega n-kotnika v kompleksni ravnini.

Zgledi

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $z^6 = 1$.
- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $(z^3 - 2)(z^4 + i) = 0$.
- Poiščimo z^{2013} za $z = \frac{1-i}{i}$.

NAUK: polarno obliko uporabljamo pri potenciranju, korenjenju ter (v veliki meri) pri množenju.