LINEARNE REKURZIVNE ENAČBE

Rešujemo linearno rekurzivno enačbo (s konstantnimi koeficienti)

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 8n + 2, \quad a_0 = 7, a_1 = 10. \tag{1}$$

Z drugimi besedami, iščemo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki zadošča zgornji rekurzivni zvezi in začetnima pogojema. Enačba je nehomogena, saj je desna stran $8n + 2$ različna od nič.

Splošno rešitev nehomogene enačbe a_n lahko izrazimo kot vsoto $a_n = h_n + q_n$, kjer je h_n splošna rešitev homogene enačbe in q_n *posebna* (tudi *partikularna*) rešitev nehomogene enačbe.

Z drugimi besedami, zaporedje $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naj ustreza zvezi

$$h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n = 0, \tag{2}$$

zaporedje q_n pa bomo z uporabo *nastavka* izbrali tako, da bo poskrbel za desno stran $8n + 2$. Začetni pogoji? Z njimi se bomo ukvarjali na skrajnem koncu.

Zapišimo najprej *karakteristični polinom*

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2. \tag{3}$$

Enica 1 je torej dvojna ničla karakterističnega polinoma in splošno rešitev homogene enačbe z uporabo nedoločenih koeficientov a in b zapišemo takole:

$$h_n = a1^n + bn1^n. \tag{4}$$

Desno stran seveda lahko zapišemo kot produkt polinoma stopnje 1 in eksponentne funkcije, saj je $8n + 2 = (8n + 2)1^n$. Ker je enica 1 dvojna ničla karakterističnega polinoma za partikularno rešitev uporabimo nastavek

$$q_n = n^2(cn + d)1^n = cn^3 + dn^2.$$

Člene q_{n+2}, q_{n+1} in q_n, zaenkrat zapisane z nedoločenima koeficientoma c in d vstavimo v (1) in računajmo:

$$\begin{aligned} q_{n+2} - 2q_{n+1} + q_n = c(n+2)^3 + d(n+2)^2 - 2(c(n+1)^3 + d(n+1)^2) + cn^3 + dn^2 = \\ c(n^3 + 6n^2 + 12n + 8) + d(n^2 + 4n + 4) - 2c(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 2d(n^2 + 2n + 1) + cn^3 + dn^2 = \\ n^3(c - 2c + c) + n^2(6c + d - 6c - 2d + d) + n(12c + 4d - 6c - 4d) + 1(8c + 4d - 2c - 2d). \end{aligned}$$

Opazimo, da sta koeficienta pri členih n^3 in n^2 enaka 0, ne glede na izbiro c oziroma d. Če pa želimo, da zaporedje q_n reši nehomogeno enačbo, mora biti

$$n(12c + 4d - 6c - 4d) + 1(8c + 4d - 2c - 2d) = 8n + 2,$$

oziroma po koeficientih

$$\begin{aligned} 12c + 4d - 6c - 4d = 6c &= 8 \\ 8c + 4d - 2c - 2d = 6c + 2d &= 2. \end{aligned}$$

Odtod pridelamo $c = \frac{4}{3}$ in $d = -3$, oziroma

$$q_n = \frac{4}{3}n^3 - 3n^2.$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe a_n je vsota q_n in h_n, zato je

$$a_n = q_n + h_n = \frac{4}{3}n^3 - 3n^2 + bn + a.$$

Koeficienta a in b določimo tako, da a_n zadosti začetnim pogojem,

$$\begin{aligned} a_0 = 7 &= a \\ a_1 = 10 &= \frac{4}{3} - 3 + b + a. \end{aligned}$$

Odtod sledi $a = 7$ in $b = \frac{14}{3}$. Naloga je rešena, končna rešitev je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ opisano z zaprto formulo

$$a_n = \frac{4}{3} n^3 - 3n^2 + \frac{14}{3} n + 7.$$