OMEJENI KVANTIFIKATORJI

Zapis s pomočjo *omejenih kvantifikatorjev* je, strogo gledano, zloraba izjavnih formul — jezika, ki ga uporabljamo v predikatnem računu. Pa vendar ga srečamo vsepovsod v matematični literaturi, zato vseeno razčistimo pojme.

motivacija

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule zahteva, da si izberemo področje pogovora $\mathcal{D}$. Denimo, da je v naši interpretaciji resnična formula $\forall x W$. Če izbreremo "isto" interpretacijo z nekoliko večjim področjem pogovora $\mathcal{D}'$, pa formula $\forall x W$ morda ni več resnična.

Opazujmo formulo $V = \forall x(S(x) \wedge L(x))$. Če govorimo o naravnih številih, predikat S naj označuje sodost in predikat L lihost, pridelamo resnično izjavo. Toda ista formula V postane neresnična, če področje pogovora razširimo na vsa realna števila, četudi "ohranimo" pomena predikatov S in L. Omejeni kvantifikatorji rešujejo predstavljeno težavo.

Zapis

$$\forall x \in \mathbb{N}\,(S(x) \wedge L(x))$$

beremo kot: *Za vsak x iz množice naravnih števil velja, da je x sod ali x lih.* Področje pogovora, če le vsebuje množico naravnih števil, ne vpliva več na pravilnost izjave. Zgornja izjava ima isto logično vrednost, ne gleda na to, ali govorimo o celih, racionalnih, realnih ali celo kompleksnih številih.

Seveda se lahko omejenim kvantifikatorjem izognemo. Uporabiti pa moramo dodaten predikat. V zgornjem primeru takšnega, ki označuje pripadnost množici naravnih števil: $N(x)$ naj pomeni "*x je naravno število.*" V tem primeru je

$$\forall x \in \mathbb{N}\,(S(x) \wedge L(x)) \quad \sim \quad \forall x(N(x) \Rightarrow S(x) \wedge L(x))$$

definicija

Naj bo $\mathcal{A}$ podmnožica področja pogovora in $A(x)$ predikat, ki pomeni $x \in \mathcal{A}$. Omejena univerzalni in eksistenčni kvantifikator definiramo takole:

$$\forall x \in \mathcal{A}\,(W) \quad \overset{\text{def}}{\sim} \quad \forall x\,(A(x) \Rightarrow W)$$

$$\exists x \in \mathcal{A}\,(W) \quad \overset{\text{def}}{\sim} \quad \exists x\,(A(x) \wedge W)$$

še dva zgled

Reciklirajmo zgoraj omenjeni predikata N, $P(x)$ pa naj pomeni "*x lahko pišemo kot produkt praštevil.*"

Vsako naravno število lahko pišemo kot produkt praštevil.

$$\forall x\,(N(x) \Rightarrow P(x)) \quad \sim \quad \forall x \in \mathbb{N}\,(P(x))$$

zakoni z omejenimi kvantifikatorji

Obnašanje je ravno takšno, kot pričakujemo.

$$\begin{aligned} \neg\forall x \in \mathcal{A}\,(W) &\quad\sim\quad \exists x \in \mathcal{A}\,\neg(W) \\ \neg\exists x \in \mathcal{A}\,(W) &\quad\sim\quad \forall x \in \mathcal{A}\,\neg(W) \end{aligned}$$

Za polovico dokaza je potrebno dvakrat uporabiti definicijo in prenesti negacijo preko običajnega kvantifikatorja:

$$\begin{aligned} &\neg\forall x \in \mathcal{A}\,(W) \\ \sim\quad &\neg\forall x\,(A(x) \Rightarrow W) \\ \sim\quad &\neg\forall x\,(\neg A(x) \vee W) \\ \sim\quad &\exists x\,\neg(\neg A(x) \vee W) \\ \sim\quad &\exists x\,(A(x) \wedge \neg W) \\ \sim\quad &\exists x \in \mathcal{A}\,\neg(W) \end{aligned}$$

Manjkajoči račun opravimo analogno.