

Primer Gaussove eliminacije sistema z neskončno rešitvami

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array}$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) // \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) /$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 2I \end{matrix}$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

IV $0 = 0$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$IV \quad 0 = 0$$

$$III \quad z = 1$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$IV \quad 0 = 0$$

$$III \quad z = 1$$

$$II \quad y + 2z = 3 \implies y = 1$$

Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

pivot

podpivotni element

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} II \\ I \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$IV \quad 0 = 0$$

$$III \quad z = 1$$

$$II \quad y + 2z = 3 \implies y = 1$$

$$I \quad x - y + z = 0 \implies x = 0$$