

1. Poišči matematično upanje, varianco oz. disperzijo in standardni odklon

(a) $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(b) $X \sim \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

2. Izračunaj matematično upanje, varianco in standardni odklon za slučajno spremenljivko $Y = 3X + 2$, če je slučajna spremenljivka X porazdeljena takole:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

3. V škatli imamo 6 kart: as ♡, as ♦, 2♣, 2♠, 3♡ in 5♦. Izvlečemo dve karti (brez vračanja). Naj bo slučajna spremenljivka X največje izmed izvlečenih števil. Izračunaj matematično upanje, varianco in standardni odklon slučajne spremenljivke X .

4. Igralec vrže tri poštene kovance. Za tri grbe dobi 10 eurov, za 2 grba 5 eurov, za en grb 3 eure, če pa padejo same cifre pa izgubi 2 eura. Koliko mora plačati za igro, da bo le ta poštena? Namig: izračunaj pričakovani dobiček.

5. Izbruhnila je neka nova bolezen, za katero smo ugotovili, da je verjetnost okužbe enaka 0.15. V razredu je 20 učencev. Izračunaj verjetnosti:

- (a) da se ni okužil noben učenec.
- (b) da so okuženi natanko trije učenci
- (c) da so okuženi manj kot trije učenci
- (d) da so okuženi vsaj trije učenci

6. V posodi imamo 5 rdečih in 7 modrih kroglic. Naključno izvlečemo eno kroglico, zapišemo njeno barvo in jo vrnemo. Ta poskus ponovimo 20 krat.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da smo rdečo kroglico izvlekli v največ petih poskusih?
- (b) Izračunaj pričakovano število izvlečenih rdečih kroglic v 20 ponovitvah poskusa.

7. V nekem podjetju imajo 500 računalnikov. Verjetnost okvare posameznega računalnika je 0.08. Naključno izberemo 10 računalnikov.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da so trije izbrani računalniki pokvarjeni?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da bodo vsi izbrani računalniki delujoči?
- (c) Poišči pričakovano število okvarjenih računalnikov v celotnem podjetju.

8. Proizvajalec mikročipov razpošilja čipe v ogromnih škatlah. V povprečju je 5% mikročipov v škatli defektnih. Prejemnik jemlje čipe enega iz škatle enega za drugim in jih testira.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da bo prvi defektni čip med prvimi desetimi testiranimi?

- (b) Poišči matematično upanje, varianco in standardni odklon.
9. Telefonske linije pri neki službi za pomoč uporabnikom so 20% časa zasedene. Predpostavite, da kličete to službo, in da so vaši klici med seboj neodvisni.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da dobite operaterja, ko kličete desetič?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da bote morali klicati več kot petkrat?
- (c) Kolikšno je pričakovano število potrebnih klicev, da dobite operaterja?
10. Imamo nepoštено igralno kocko, ki je obtežena tako, da je verjetnost, da pade ena pika enaka 0.2, verjetnost, da padejo tri pike 0.1, verjetnosti ostalih izidov pa so enake.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da se v tretjem metu kocke prvič pokaže 6 pik?
- (b) Kolikšno je pričakovano število potrebnih metov, ki so potrebni, da prvič pade 6 pik?
11. Raziskovalci so ugotovili, da je pri neki vrsti ovc verjetnost okužbe z nekim parazitom enaka 0.2. Za testiranje novega cepiva morajo iz črede poiskati 5 okuženih ovc.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da morajo pregledati vsaj 10 ovc preden najdejo 5 okuženih?
- (b) Kolikšno je pričakovano število ovc, ki jih morajo pregledati, da najdejo 5 okuženih?
- (c) Izračunaj verjetnost, da bodo morali pregledati 2 ovci več ali manj kot so pričakovali?
12. Nek igralec košarke zadane prosti met z verjetnostjo 0.85.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da bo na eni tekmi zadel svoj peti prosti met v sedmem poskusu?
- (b) Kolikšno je pričakovano število metov, da zadane petkrat?
13. Iz kupa 52 kart naključno izberemo pet kart brez vračanja.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da so med njimi tri karte črne barve?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da sta med njimi dve kraljevski karti? (kraljevske karte: pubec, dama, kralj)
- (c) Kolikšna je verjetnost, da so med njimi štirje piki?
14. V nekem podjetju je zaposlenih 800 ljudi. Verjetnost, da je zaposleni vegetarjanec je enaka 0.3. Naključno izberemo 10 ljudi.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da je med njimi natanko en vegetarjanec?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da je med njimi več kot en vegetarjanec?
- (c) Kolik”o vegetarjancev bi pričakovali med desetimi izbranimi?

15. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki jo lahko modeliramo s Poissonovo porazdelitvijo.
- (a) Izračunaj $P(X = 4)$ za $\lambda = 5$
 - (b) Izračunaj $P(X \leq 3)$ za $\lambda = 2$
 - (c) Izračunaj $P(X \geq 1)$ za $\lambda = 3$
 - (d) Izračunaj $P(X = 0)$ za $\lambda = \frac{3}{2}$
16. Naj bo slučajna spremenljivka X število avtomobilov, ki v nekem časovnem intervalu prečkajo železniško progo na določenem prehodu. Izkazalo se je, da progo v povprečju prečka en avto na deset minut.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da bodo v nekem 10-minutnem intervalu progo prečkali vsaj trije avtomobili?
 - (b) Ko pripelje vlak se zapornice spustijo za dve minuti. Kolikšna je verjetnost, da v tem času ne pripelje noben avto?
17. Število strank, ki vstopijo v neko poslovalnico v eni uri lahko modeliramo s Poissonovo porazdelitvijo.
- (a) Določi λ , če veš, da je $P(X = 0) = 0.05$
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da imamo v eni uri dve stranski?
 - (c) Prišlo je do nepričakovanega izpada elektrike, ki je trajal 20 minut. Kolikšna je verjetnost, da v tem času ni bilo nobene stranke?
18. Življenjska doba nekega avtomobilskega motorja znaša v povprečju 15 let. Naj bo slučajna spremenljivka X življenjska doba motorja, ki je porazdeljena eksponentno.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da motor deluje vsaj 10 let ?
 - (b) Kako dolgo deluje 80% teh motorjev?
 - (c) Kolikšna je verjetnost, da motor deluje več kot 15 in manj kot 20 let?
19. Stranka v povprečju ostane v trgovini 25 minut. Kolikšna je verjetnost, da stranka ostane v trgovini več kot 30 minut?
20. Električni tok v bakreni žici je porazdeljen normalno s povprečjem 10mA in disperzijo $4(mA)^2$.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da izmerimo več kot 13 mA?
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da izmerimo tok med 9 in 11 mA?
21. Zgornji krvni pritisk pri ženskah v starosti 18 do 25 let je porazdeljen normalno s povprečjem 114.8 in standardnim odklonom 13.1.
- (a) Kolikšen odstotek žensk v tej starosti ima zgornji krvni pritisk nižji od 90?
 - (b) Kje moramo postaviti spodnjo mejo za zg. krvni pritisk, če hočemo najti 5% žensk, ki imajo najvišji zg. krvni pritisk?

22. Uspeh dijakov na spomladanskem roku mature pri slovenščini je bil porazdeljen normalno s povprečjem 65.7 točk in standardnim odklonom 11.9 točk. Če naključno izberemo maturanta, kolikšna je verjetnost, da je
- (a) pisal pozitivno, tj. zbral vsaj 48 točk
 - (b) dosegel med 60 in 70 točk
 - (c) Koliko točk je moral maturant zbrati pri slovenščini, da ga to uvršča med zgornjih 5% svoje generacije?
23. Trajanje nosečnosti v dnevih lahko aproksimiramo z normalno porazdelitvijo s povprečjem 264 dni in standardnim odklonom 16 dni.
- (a) Kolikšna je verjetnost, da nosečnost traja manj kot 250 dni?
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da nosečnost traja med 240 in 270 dnevi?
 - (c) Poišči mejo za zgornja 2% trajanja nosečnosti (zaokroženo navzdol). To je zadnja meja, pri kateri zdravniki sprožijo porod.
24. Uspeh dijakov na spomladanskem roku mature pri matematiki je bil porazdeljen normalno s povprečjem 59.1 in standardnim odklonom 19.1. Iz te populacije vzamemo naključni vzorec velikosti $n=80$ (toliko dijakov je na neki srednji šoli pisalo matematiko na spomladanskem roku).
- (a) Poišči verjetnost, da je bilo povprečje njihovih točk manjše od 60
 - (b) Poišči verjetnost, da se povprečje njihovih točk od povprečja celotne mature razlikuje za kvežjemu 3 točke
 - (c) Poišči verjetnost, da je njihovo povprečje med 50 in 65 točkami
25. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno $X \sim N(60, 20)$. Iz te populacije vzamemo naključni vzorec velikosti $n=30$.
- (a) Zapiši porazdelitev za vzorčno povprečje \bar{X}
 - (b) Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje manjše od 50?
 - (c) Kolikšna je verjetnost, da leži vzorčno povprečje med 57 in 69?

REŠITVE

1. (a) $E(X) = \sum x_i p_i = 3.667$
 $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$
 1.889
 $\sigma = \sqrt{Var X} = 1.374$

(b) $E(X) = -0.75$
 $Var(X) = 7.188$
 $\sigma = 2.681$
2. $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$
 $E(Y) = 2.6$
 $Var(Y) = 6.84$
 $\sigma = 2.615$
3. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{2}{30} & \frac{10}{30} & \frac{8}{30} & \frac{10}{30} \end{pmatrix}$
 $E(X) = 3.2$
 $Var(X) = 1.893$
 $\sigma = 1.376$
4. X=pričakovani dobiček v eurih
 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 10 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$
 $E(X) = 4$
Da bo igra poštena mora plačati 4 eure.
5. $X \sim Bin(20, 0.15)$
 - (a) 0.0388
 - (b) 0.2428
 - (c) 0.4049
 - (d) 0.5951
6. $X \sim Bin(20, \frac{5}{12})$
 - (a) 0.06
 - (b) 8.33
7. (a) $X \sim Bin(10, 0.08), P(X = 3) = 0.034$
(b) $X \sim Bin(10, 0.08), P(X = 0) = 0.434$
(c) $X \sim Bin(500, 0.08), E(X) = 40$

8. $X \sim \text{Geom}(0.05)$

(a) $P(X \leq 10) = 0.401$

(b) $E(X) = 20$

$Var(X) = 380 \quad \sigma = 19.49$

9. $X \sim \text{Geom}(0.2)$

(a) $P(X = 10) = 0.027$

(b) $P(X > 5) = 0.328$

(c) $E(X) = 5$

10. $0.2 + 0.1 + 4p = 1 \Rightarrow p = 0.175 \Rightarrow$
 $\Rightarrow X \sim \text{Geom}(0.175)$

(a) $P(X = 3) = 0.119$

(b) $E(X) = 5.7$

11. $X \sim \text{NegBin}(5, 0.2)$

(a) $P(X > 10) = 0.991$

(b) $\mu = \frac{m}{p} = 25$

(c) $P(23 \leq X \leq 27) = 0.194$

12. $X \sim \text{NegBin}(5, 0.85)$

(a) $P(X=7)=0.1498$

(b) $\mu = 5.88$

13. (a) $X \sim H(5; 26, 52), P(X = 3) = 0.325$

(b) $X \sim H(5; 12, 52), P(X = 2) = 0.251$

(c) $X \sim H(5; 13, 52), P(X = 4) = 0.011$

14. $X \sim H(10; 240, 800)$

(a) $P(X = 1) = 0.12$

(b) $P(X \geq 2) = 0.852$

(c) $E(X) = \frac{nM}{N} = 3$

-
15. (a) $P(X = 4) = 0.176$
(b) $P(X \leq 3) = 0.857$
(c) $P(X \geq 1) = 0.95$
(d) $P(X = 0) = 0.223$
16. (a) $\lambda = 0.1$, $X \sim P(0.1)$, $P(X \geq 3) = 0.00016$
(b) $\lambda = 0.02$, $X \sim P(0.02)$, $P(X = 0) = 0.98$
17. (a) $e^{-\lambda} = 0.05 \Rightarrow \lambda = -\ln(0.05) = 2.996$
(b) $X \sim P(2.996)$, $P(X = 2) = 0.224$
(c) $X \sim P(0.998)$, $P(X = 2) = 0.369$
18. (a) $\lambda = \frac{1}{\mu} \Rightarrow X \sim \text{Exp}(\frac{1}{15})$
(b) $P(X > 7) = 0.497$
(c) $P(X < t) = 0.8 \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.2)}{\frac{1}{15}} = 24.14$
(d) $P(15 < X < 20) = 0.104$
19. (a) $\lambda = \frac{1}{25} \Rightarrow X \sim \text{Exp}(\frac{1}{25})$
(b) $P(X > 30) = 0.301$
20. $X \sim N(10, 2)$
(a) $P(X > 13) = P(Z > 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$
(b) $P(9 < X < 11) = P(-0.5 < Z < 0.5) = 0.383$
21. $X \sim N(114.8, 13.1)$
(a) $P(X < 90) = 0.0294$
(b) $P(X > t) = 0.05 \Rightarrow 1 - \Phi(\frac{t-114.8}{13.1}) \Rightarrow 1.645 = \frac{t-114.8}{13.1} \Rightarrow t = 136.35$
22. $X \sim N(65.7, 11.9)$
(a) $P(X \geq 48) = 0.9319$
(b) $P(60 < X < 70) = 0.325$
(c) $P(X > t) = 0.05 \Rightarrow 1 - \Phi(\frac{t-65.7}{11.9}) \Rightarrow 1.645 = \frac{t-65.7}{11.9} \Rightarrow t = 85.28$

23. $X \sim N(264, 16)$

(a) $P(X < 250) = 0.1908$

(b) $P(240 < X < 270) = 0.5794$

(c) $P(X > t) = 0.02 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{t-264}{16}\right) \Rightarrow 2.05 = \frac{t-264}{16} \Rightarrow t = 296$

24. $\bar{X} \sim N(59.1, \frac{19.1}{\sqrt{80}})$

(a) $P(\bar{X} < 60) = P(Z < \frac{60-59.1}{19.1} \cdot \sqrt{80}) = \Phi(0.421) = 0.6628$

(b) $P(\mu - 3 < \bar{X} < \mu + 3) = 0.8414$

(c) $P(50 < \bar{X} < 65) = 0.9971$

25. (a) $\bar{X} \sim N(60, \frac{20}{\sqrt{30}})$

(b) $P(\bar{X} < 50) = 0.0031$

(c) $P(57 < \bar{X} < 69) = 0.7871$