Matematika 1

Gabrijel Tomšič   Bojan Orel   Neža Mramor Kosta

16. november 2010

Poglavje 2

Zaporedja in številske vrste

2.1 Zaporedja

2.1.1 Uvod

Definicija 2.1.1. Zaporedje

$$(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

je predpis, ki vsakemu naravnemu številu n (*indeksu* zaporedja) priredi neko realno število a_n (*n-ti člen* zaporedja). Zaporedje je torej preslikava množice naravnih števil v realna števila:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a_n.$$

Zaporedje lahko podamo na več načinov. Najbolj preprosto je, da preslikavo zapišemo *eksplicitno:* $a_n = f(n)$.

Primer 2.1.1. Nekaj eksplicitno podanih zaporedij:

1. Zaporedje s splošnim členom $a_n = 1/2^n$:
$$\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^3},\ \ldots \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{n+1}},\ \ldots.$$

2. Zaporedje
$$(a_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, 0, \ldots$$
ima splošen člen $a_n = (1 + (-1)^n)/2$. ∎

Zaporedje lahko podamo tudi *iterativno* ali *rekurzivno*, tako da zapišemo prvega ali prvih nekaj členov, in pravilo, kako izračunamo naslednji člen s pomočjo prejšnjih.

Primer 2.1.2. Nekaj rekurzivno podanih zaporedij:

1. *Aritmetično zaporedje* s prvim členom a_1 in z razliko d, dano s predpisom
$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \geq 1$$
je primer enočlenske rekurzije.

2. Podobno je tudi *geometrijsko zaporedje* s prvim členom a_1 in kvocientom q, ki je dano s predpisom
$$a_{n+1} = a_n q, \quad n \geq 1$$
primer enočlenske rekurzije.

3. Dobro znano Fibonaccijevo[1] zaporedje, ki je določeno z začetnima vrednostima $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ in s predpisom
$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 2$$
je primer dvočlenske rekurzije. ■

Množico členov zaporedja
$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R},$$
imenujemo *zaloga vrednosti* zaporedja. Zaporedje (a_n) je *navzdol omejeno*, *navzgor omejeno* ali *omejeno*, če je njegova zaloga vrednosti navzdol omejena, navzgor omejena ali omejena.

Navzgor omejeno zaporedje (a_n) ima zaradi lastnosti kontinuuma realnih števil (trditev 1.2.4) natančno zgornjo mejo $M = \sup a_n$, navzdol omejeno zaporedje (b_n) pa ima natačno spodnjo mejo $m = \inf b_n$. Natančna zgornja in natančna spodnja meja zaporedja sta lahko člena zaporedja, ali pa ne.

[1]Leonardo Fibonacci (1170–1250), italijanski matematik, ki je v Evropo prinesel arabske številke.

Primer 2.1.3. Nekaj omejenih zaporedij:

1. Zaporedje
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, \ldots, \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}, \ldots$$
je omejeno, $\sup a_n = 1$ in $\inf a_n = 1/2$. Natančna zgornja meja $\sup(a_n)$ ni člen zaporedja.

2. Podobno lahko ugotovimo za naslednja zaporedja:

$(1/n)$	je omejeno,	$m = 0,\ M = 1$
$((-1)^n)$	je omejeno,	$m = -1,\ M = 1$
$((-2)^n)$	je neomejeno	
$(n^{(-1)^n})$	je navzdol omejeno,	$m = 0$

3. Vzemimo rekurzivno dano zaporedje $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$. Očitno je zaporedje (a_n) omejeno navzdol, saj je $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

   Manj očitno pa je, da je zaporedja (a_n) omejeno tudi navzgor. Pokažimo, da je $a_n < 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pomagali si bomo z indukcijo.

   - Za $n = 1$ trditev drži, saj je $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
   - Recimo, da je $a_{n-1} < 2$. Potem je
   $$a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$
   in trditev je dokazana.

   Zaporedje (a_n) je torej omejeno. ■

Natančno zgornjo mejo zaporedja lahko opišemo tudi nekoliko drugače: $M = \sup a_n$ natanko tedaj, kadar so vsi členi manjši ali enaki M in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} > M - \varepsilon$. V vsaki ε-okolici mora torej biti vsaj en člen zaporedja. Če M ne sodi med člene zaporedja, lahko sklepamo, da mora biti v vsaki njegovi ε-okolici celo neskončno mnogo členov zaporedja. To pripelje do pojma stekališča:

Definicija 2.1.2. Število a je *stekališče* zaporedja (a_n), kadar je v vsaki ε-okolici $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja.

Povzemimo:

Trditev 2.1.1. *Natančna zgornja meja je največji člen ali pa je stekališče zaporedja. Podobno je natančna spodnja meja najmanjši člen ali pa stekališče zaporedja.*

Seveda ima lahko zaporedje tudi kakšno stekališče, ki ni niti natančna zgornja niti natančna spodnja meja.

Kadar je a stekališče, je torej neenačba $|a - a_n| < \varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo členov zaporedja. Lahko pa je še neskončno mnogo členov zaporedja, ki tej enačbi ne zadoščajo in so zato izven ε-okolice.

Primer 2.1.4. Stekališča zaporedja:

1. Zaporedje recipročnih vrednosti naravnih števil
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots$$
ima eno stekališče $a = 0 = \inf a_n$, ki ni člen zaporedja.
To sledi iz Arhimedove lastnosti množice $\mathbb{R}$ (trditev 1.2.5), kajti v vsaki okolici $(-\varepsilon, \varepsilon)$ je vsaj eno število $a_n = 1/n$, torej so v isti okolici tudi vsa števila $a_m = 1/m < 1/n$, kjer je $m > n$, teh pa je neskončno mnogo.

2. Zaporedje $((-1)^n)$ ima dve stekališči, -1 in 1, ki sta obe tudi člena zaporedja.

3. Zaporedje (n^2) nima stekališč. ■

Izrek 2.1.2. *Vsako (navzgor in navzdol) omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz. Naj bo $m = \inf a_n$ in $M = \sup a_n$. Množica
$$A = \{x \in \mathbb{R};\ a_n < x \text{ za največ končno mnogo indeksov } n\}$$
je neprazna, saj je $m \in A$. Poleg tega je navzgor omejena, saj je $x < M$ za vsak $x \in A$. Torej ima svojo natančno zgornjo mejo $a = \sup A$.

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je $a = \sup A$, je $a - \varepsilon \in A$, torej je levo od števila $a - \varepsilon$ največ končno mnogo členov zaporedja. Po drugi strani pa $a + \varepsilon \notin A$, torej je levo od tega števila neskončno mnogo členov zaporedja. Od tega jih je končno mnogo levo od števila $a - \varepsilon$, torej jih mora biti na intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neskončno mnogo. Drugače povedano, za vsak $\varepsilon > 0$ je v okolici $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja, torej je a stekališče zaporedja (a_n). □

2.1.2 Konvergentna zaporedja

Najbolj nas bodo zanimala zaporedja, pri katerih se vsi členi približujejo nekemu številu, ko postaja n vse večji. Natančneje:

Definicija 2.1.3. Zaporedje (a_n) *konvergira* proti številu a, natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da so v ε-okolici števila a vsi členi a_n z indeksom $n \geq n_0$.

Zaporedje, ki konvergira, je *konvergentno* zaporedje, število a je njegova *limita*, kar zapišemo

$$a = \lim a_n \quad \text{ali} \quad a_n \to a;\ n \to \infty.$$

Zaporedje, ki ne konvergira, je *divergentno*.

Pri konvergentnem zaporedju z limito a je neenačba

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

izpolnjena za vse indekse n od nekega n_0 dalje.

Očitno je limita konvergentnega zaporedja stekališče in to *edino* stekališče tega zaporedja. Ni pa vsako stekališče limita zaporedja: če ima zaporedje več kot eno stekališče ne more biti konvergentno — v tem primeru nobeno od stekališč ni limita.

Člene konvergentnega zaporedja si lahko predstavljamo kot zaporedje približkov za število a. Razlika $|a - a_n|$ je v tem primeru napaka, ki jo naredimo, če namesto limite a vzamemo n-ti člen zaporedja. Če zaporedje konvergira k a, lahko dosežemo, da bo ta napaka manjša od poljubnega vnaprej izbranega števila $\varepsilon > 0$, če le vzamemo dovolj pozen člen zaporedja (kar pomeni, da mora biti indeks n dovolj velik).

Primer 2.1.5. Konvergenco zaporedja lahko pokažemo direktno s pomočjo definicije:

1. V primeru 2.1.4 smo se pravzaprav prepričali, da zaporedje, dano z $a_n = 1/n$ konvergira proti številu 0.

2. Dokažimo, da ima zaporedje

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

limito 1. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poglejmo, za katere indekse n je izpolnjena neenačba

$$|1 - a_n| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} |1 - a_n| = \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n. \end{aligned}$$

Neenačba (2.1) je torej izpolnjena za vsak $n \geq n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ (tj. celi del števila $1/\varepsilon$).

Na primer, za $\varepsilon = 10^{-1}$ je $n_0 = 10$: vsi členi zaporedja od desetega dalje se razlikujejo od limite 1 za manj kot 1/10.

3. Vzemimo zaporedje $a_n = (-1)^n n/(n+1)$ in pokažimo, da število 1 *ni* limita tega zaporedja. Naj bo $\varepsilon > 0$.

$$|1 - a_n| = \left| \frac{n + 1 - (-1)^n n}{n+1} \right| = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n = 2k \\ \frac{2n+1}{n+1} & n = 2k+1 \end{cases}$$

Če je $\varepsilon < 1$, je ta neenačba izpolnjena samo za tiste *sode* indekse n, za katere velja $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, medtem ko obstajajo poljubno veliki lihi indeksi, za katere neenačba ni izpolnjena. ■

Lastnosti konvergentnih zaporedij

Izrek 2.1.3. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Drugače povedano: konvergentnost zaporedja je zadosten pogoj za omejenost, omejenost zaporedja pa je potreben pogoj za konvergenco.

Dokaz. Naj bo $a = \lim a_n$. Vsi členi zaporedja razen končno mnogo so na intervalu $(a-1, a+1)$. Če levo od tega intervala ni nobenega člena, je število $a-1$ očitno spodnja meja, če pa so kakšni členi manjši od $a-1$, jih je le končno mnogo, najmanjši med njimi pa je spodnja meja (celo natančna spodnja meja). Na podoben način se prepričamo, da je zgornja meja zaporedja število $a+1$ ali pa največji od vseh členov in tako je izrek dokazan. □

Zaporedje, ki ni omejeno, torej ne more biti konvergentno. Prav tako zaporedje, ki ima več kot eno stekališče ne more biti konvergentno. To pa sta edina pogoja, saj velja:

Izrek 2.1.4. *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima samo eno stekališče.*

Dokaz. Pokazati moramo le še, da je omejeno zaporedje z enim samim stekališčem vedno konvergentno. Drugače povedano: pokazati moramo, da ima omejeno divergentno zaporedje nujno več kot eno stekališče.

Naj bo (a_n) omejeno divergentno zaporedje. Ker je (a_n) omejeno, obstaja omejen interval $[m, M]$, na katerem ležijo vsi členi zaporedja $\{a_n\} \subset [m, M]$. Zaradi izreka 2.1.2 ima zaporedje vsaj eno stekališče, označimo ga z a. Zaradi divergentnosti zaporedja to stekališče ne more biti limita, zato je zunaj dovolj majhne ε-okolice neskončno členov zaporedja. To pomeni, da je vsaj na enem od intervalov, $[m, a-\varepsilon]$ ali $[a+\varepsilon, M]$ neskončno mnogo členov zaporedja, torej obstaja (spet zaradi izreka 2.1.2) vsaj še eno stekališče $b \neq a$.

Če ima omejeno zaporedje le eno stekališče, je torej nujno konvergentno. □

Naslednji kriterij za konvergenco ima to lepo lastnost, da govori samo o členih zaporedja in ne o limiti. Z njim lahko ugotovimo, ali je neko zaporedje konvergentno, ne da bi poznali njegovo limito.

Izrek 2.1.5. *Zaporedje (a_n) je konvergentno natanko takrat, kadar zadošča tako imenovanemu* Cauchyjevemu[2] pogoju:

Vsakemu pozitivnemu številu ε pripada tak indeks n_0, da je neenačba

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \tag{2.2}$$

izpolnjena za vsak $n > n_0$ in za vsako naravno število p.

Dokaz: Najprej dokažimo, da je Cauchyjev pogoj potreben za konvergenco zaporedja. Vzemimo zaporedje (a_n), ki konvergira proti limiti a, in naj bo ε poljubno pozitivno število. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja tak indeks n_0, da je $|a - a_n| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_0$, torej je tudi $|a - a_{n+p}| < \varepsilon/2$ za poljuben $p \in \mathbb{N}$, saj je $n + p$ tudi večji od n_0. Ocenimo razliko

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) - (a_n - a)| \leq |a_{n+p} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

in vidimo, da zaporedje zadošča Cauchyjevemu pogoju.

Dokažimo še, da je Cauchyjev pogoj zadosten za konvergenco. Naj zaporedje (a_n) zadošča Cauchyjevemu pogoju. Izberimo si $\varepsilon = 1$ in določimo indeks r tako, da bo za vsak $p \in \mathbb{N}$ izpolnjena neenačba $|a_{r+p} - a_r| < 1$, kar pomeni, da vsi členi zaporedja z indeksom večjim od r ležijo na intervalu $(a_r - 1, a_r + 1)$. Zaporedje (a_n) je torej omejeno in ima zaradi izreka 2.1.2 vsaj eno stekališče a. Pokazali bomo, da je $a = \lim a_n$

[2] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francoski matematik, začetnik teorije kompleksnih funkcij.

Vzemimo poljubno pozitivno število ε. Zaradi Cauchyjevega pogoja obstaja tak indeks n, da je $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon/2$ za vsak $p \in \mathbb{N}$. Vsi členi a_m za $m > n$ so na intervalu $(a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2)$, torej leži stekališče a na zaprtem intervalu $[a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2]$. Ker je razlika dveh števil s tega intervala manjša od ε, velja za vsak $m > n$ ocena $|a - a_m| < \varepsilon$, kar že pomeni, da je a limita, torej je zaporedje (a_n) res konvergentno. □

Primer 2.1.6. Dokažimo, da zaporedje, ki je dano z dvočlensko rekurzijo

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \beta, \quad a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$$

zadošča Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentno.

Razlika dveh zaporednih členov je

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}).$$

Od tod sledi:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - a_{n+1}| = \frac{1}{2^2}|a_{n-1} - a_n| = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{2^n}|a_2 - a_1| = \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{n+p-2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) |\beta - \alpha| \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^p}{1 - \frac{1}{2}} \cdot |\beta - \alpha| < \frac{1}{2^{n-2}} \cdot |\beta - \alpha|.
\end{aligned}$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ in izberimo N tako velik, da bo

$$\frac{1}{2^{N-2}} < \frac{\varepsilon}{|\beta - \alpha|}.$$

Potem je za vsak $n > N$ in za vsak $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{1}{2^{N-2}} \cdot |\beta - \alpha| < \varepsilon.$$

Zaporedje a_n je torej konvergentno, ker zadošča Cauchyjevemu pogoju. ■

Divergentna zaporedja

Zaporedje, ki ni konvergentno, je divergentno. Na primer, vsako neomejeno zaporedje je divergentno. Tudi vsako zaporedje z več kot enim stekališčem je divergentno.

Če so členi zaporedja čedalje večji in rastejo proti neskončnosti, pravimo, da zaporedje *divergira proti* ∞. Natančneje:

Definicija 2.1.4. Če za vsako pozitivno število M obstaja tak indeks n_0, da je $a_n > M$, če je $n \geq n_0$, pravimo, da zaporedje a_n *divergira proti neskončnosti* in napišemo

$$\lim a_n = \infty$$

Podobno, zaporedje *divergira proti* $-\infty$:

$$\lim a_n = -\infty,$$

če za vsako pozitivno število A obstaja tak indeks n_0, da je $a_n < -A$, če je $n > n_0$.

Zaporedje, ki divergira proti ∞ ali proti $-\infty$, ne more imeti stekališč. Seveda ni nujno, da divergentno zaporedje divergira proti ∞ ali proti $-\infty$.

Primer 2.1.7. Nekaj divergentnih zaporedij:

1. Zaporedje (n) divergira proti ∞, saj za poljuben $M > 0$ lahko vzamemo $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$.

2. Tudi zaporedje $(\log n)$ divergira proti ∞, saj za poljuben $M > 0$ lahko vzamemo $n_0 = \lfloor e^M \rfloor + 1$.

3. Zaporedje $(\sin n)$ je divergentno, vendar je omejeno, zato ne divergira proti ∞. ■

Lastnosti limite zaporedja

Konvergentnost je lastnost, ki je odvisna le od zelo poznih členov zaporedja, začetni členi pa nanjo ne vplivajo. Očitno ostane konvergentno zaporedje konvergentno z isto limito, če mu dodamo ali odvzamemo končno mnogo členov.

Trditev 2.1.6. *Če imata zaporedji (a_n) in (b_n) isto limito,*

$$\lim a_n = \lim b_n = l,$$

in je zaporedje (c_n) med njima, tako da je

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ za vsak } n,$$

je tudi

$$\lim c_n = l.$$

Dokaz: Ker je l limita zaporedij (a_n) in (b_n), obstajata za vsak ε taka n_1 in n_2, da velja

$$\begin{aligned} a_n &\in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \text{ za } n > n_1, \\ b_n &\in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \text{ za } n > n_2. \end{aligned}$$

Če je n_0 večje od števil n_1 in n_2, veljata za vsak $n > n_0$ oba pogoja hkrati, torej

$$l - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < l + \varepsilon,$$

tako da je c_n za vsak $n > n_0$ v ε-okolici limite l. □

Preprosta posledica trditve 2.1.6 je tale sklep: če za zaporedje (a_n) velja $a_n < b$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, je tudi $a \leq b$. Na primer, limita zaporedja s pozitivnimi členi je nenegativna.

Trditev 2.1.7. *Če sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, $\lim a_n = a$ in $\lim b_n = b$, potem so konvergentna tudi zaporedja*

$$\begin{aligned} (a_n + b_n) &= a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \\ (a_n - b_n) &= a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots \\ (a_n \cdot b_n) &= a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots. \end{aligned}$$

in velja:

$$\begin{aligned} \lim(a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n \\ \lim(a_n - b_n) &= \lim a_n - \lim b_n \\ \lim(a_n b_n) &= \lim a_n \cdot \lim b_n. \end{aligned}$$

Dokaz: Izberimo pozitivno število ε. Ker sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, obstajata naravni števili n_a in n_b, da je $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_a$ in $|b_n - b| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_b$. Če za n_0 vzamemo večje izmed števil n_a in n_b, za vsak $n > n_0$ velja

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

torej zaporedje $(a_n + b_n)$ res konvergira proti limiti $a + b$. Podobno dokažemo, da je limita razlike enaka razliki limit.

Poglejmo še limito produkta. Produkt $a_n b_n$ zapišemo v obliki

$$a_n b_n = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a) + ab.$$

Tako je

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Recimo, da je η pozitivno število manjše od 1. Če je n dovolj velik, je $|a_n - a| < \eta$ in $|b_n - b| < \eta$. Za tak n je

$$|a_n b_n - ab| < \eta^2 + \eta(|a| + |b|) < \eta(|a| + |b| + 1).$$

Naj bo ε poljubno pozitivno število manjše od 1. Če si izberemo

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$

je za dovolj velike indekse n izpolnjena neenačba $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$, torej zaporedje $(a_n b_n)$ res konvergira proti ab. □

Trditev 2.1.8. *Če je $a_n \neq 0$ za vsak n in če zaporedje (a_n) konvergira proti $a \neq 0$, konvergira tudi zaporedje $(1/a_n)$ in je*

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

Dokaz: Naj bo ε poljubno pozitivno število, in η pozitivno število, ki je manjše od $|a|/2$ in od $\varepsilon|a|^2/2$. Ker je a limita zaporedja (a_n), je za vsak dovolj velik indeks n izpolnjena neenačba $|a_n - a| < \eta$. Za tak n je $|a_n| = |a + (a_n - a)| \geq |a| - |a_n - a| > |a|/2$, zato je tudi

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} < \frac{2\eta}{|a|^2}.$$

Ker smo izbrali $\eta < \varepsilon|a|^2/2$, je torej

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| < \varepsilon$$

za vsak dovolj velik n, torej zaporedje $(1/a_n)$ konvergira proti $1/a$. □

Iz zadnjih dveh trditev sledi še:

Trditev 2.1.9. *Če zaporedje (a_n) konvergira proti limiti a in zaporedje (b_n), kjer so $b_n \neq 0$za vsak n, konvergira proti $b \neq 0$, konvergira zaporedje kvocientov (a_n/b_n) proti a/b.*

Primer 2.1.8. Oglejmo si zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2 + 3n}{2n^2 - 1}.$$

Če števec in imenovalec delimo z n^2, dobimo

$$\lim a_n = \lim \frac{1 + 3/n}{2 - 1/n^2} = \frac{1 + 3 \lim \frac{1}{n}}{2 - \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

saj zaporedji $(3/n)$ in $(1/n^2)$ očitno konvergirata proti 0.

Splošneje: če je a_n kvocient dveh polinomov in $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$, potem je

$$\lim a_n = \lim \frac{\alpha_0 n^k + \ldots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k}{\beta_0 n^l + \ldots + \beta_{l-1} n + \beta_l} = \begin{cases} 0 & \text{če je} \quad k < l \\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0} & \text{če je} \quad k = l \\ \pm\infty & \text{če je} \quad k > l \end{cases}.$$

■

2.1.3 Monotona zaporedja

Definicija 2.1.5. Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n < a_{n+1}$, je zaporedje *strogo naraščajoče.* Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če za vsako naravno število n velja $a_n \geq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n > a_{n+1}$, je zaporedje *strogo padajoče.* Zaporedje je *monotono*, če je naraščajoče ali padajoče.

Monotona zaporedja so vsaj z ene strani omejena. Vsako naraščajoče zaporedje (a_n) je navzdol omejeno in $\inf a_n = a_1$, vsako padajoče zaporedje (b_n) pa je navzgor omejeno in $\sup b_n = b_1$.

Poleg tega velja:

Izrek 2.1.10. *Naraščajoče zaporedje, ki je navzgor omejeno, konvergira proti* $\lim a_n = \sup a_n$. *Naraščajoče zaporedje, ki ni navzgor omejeno, pa divergira proti* ∞.

Podobno, padajoče zaporedje, ki je navzdol omejeno, konvergira proti $\lim a_n = \inf a_n$. *Padajoče zaporedje, ki ni navzdol omejeno, pa divergira proti* $-\infty$.

Dokaz: Naj bo (a_n) naraščajoče zaporedje in M njegova natančna zgornja meja. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je M natančna zgornja meja zaporedja, je $a_n \leq M$ za vsak n in $a_k > M - \varepsilon$ za vsaj en člen a_k. Ker je zaporedje monotono naraščajoče, je $a_n > M - \varepsilon$ tudi za vsak $n > k$, zato so v ε-okolici točke M vsi členi od k-tega dalje, torej je

$$\lim a_n = M.$$

Če zaporedje ni navzgor omejeno, obstaja za vsak $A > 0$ kakšen člen a_{n_0}, za katerega velja $a_{n_0} > A$. Ker je zaporedje monotono, je $a_m \geq a_{n_0} > A$ za vsak $m > n_0$, torej je

$$\lim a_n = \infty.$$

Dokaz trditve za padajoče zaporedje je podoben. $\square$

Primer 2.1.9. **Zaporedje približkov za število** $\sqrt{2}$. Naj bo

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Pokažimo, da je dano zaporedje padajoče in navzdol omejeno, torej konvergentno.

1. Da je zaporedje omejeno navzdol, je očitno, saj je $a_n > 0$ za vsak n. Spodnjo mejo 0 lahko precej dvignemo, saj velja:

$$2a_{n+1}a_n = a_n^2 + 2,$$

$$a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})^2 + 2 \geq 2,$$

odtod

$$a_{n+1} \geq \sqrt{2} \quad \text{za vsak } n.$$

Torej je tudi $\sqrt{2}$ spodnja meja zaporedja.

2. Pokažimo še, da je zaporedje monotono padajoče:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\ &= \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} \geq 0, \end{aligned}$$

ker je $a_n^2 \geq 2$ za vsak n.

3. Zaporedje a_n je torej konvergentno. Naj bo $\lim a_n = l$. Očitno mora biti $l \geq \sqrt{2} > 0$. Poleg tega iz enakosti $a_{n+1} = (a_n/2 + 1/a_n)$ sledi

$$l = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right).$$

Če to enačbo rešimo, dobimo $l = \pm\sqrt{2}$. Ker mora biti $l > 0$, je

$$l = \lim a_n = \sqrt{2},$$

torej je a_n res zaporedje približkov za število $\sqrt{2}$.

Če zapišemo prvih nekaj členov zaporedja,

$$2,\ 1.5,\ 1.41\overline{6},\ 1.41421568628,\ 1.41421356238,\ \ldots,$$

se prepričamo, da se že člen a_5 od prave vrednosti $\sqrt{2}$ razlikuje za manj kot 10^{-10}. ■

2.1.4 Potence z realnimi eksponenti

Zaporedje potenc. Naj bo c poljubno realno število. Oglejmo si zaporedje potenc (c^n).

Trditev 2.1.11. *Zaporedje (c^n) je konvergentno, če je $c \in (-1, 1]$. Natančneje:*

$$\lim c^n = \begin{cases} \infty, & \text{če je} \quad c > 1 \\ 1, & \text{če je} \quad c = 1 \\ 0, & \text{če je} \quad |c| < 1 \end{cases}.$$

Če je $c \leq -1$, zaporedje ni konvergentno.

Dokaz. Naj bo najprej $c > 1$. Potem je $c = 1 + x$, kjer je $x > 0$ in

$$c^n = (1 + x)^n$$

Po *binomski formuli* je

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \ldots + x^n.$$

Vsi členi v tej vsoti so pozitivni, zato je cela vsota gotovo večja od prvih dveh členov:

$$c^n = (1 + x)^n > 1 + nx. \tag{2.3}$$

Zaporedje $(1 + nx)$ je naraščajoče in ni omejeno, kar sledi iz Arhimedove lastnosti realnih števil (izrek 1.2.5), torej je $\lim c^n = \infty$.

Za $c = 1$ je trditev očitna, saj so vsi členi enaki $1^n = 1$.

Naj bo $|c| < 1$. Zaporedje $(|c^n|)$ je padajoče in navzdol omejeno, torej konvergira k nekemu številu $\alpha \geq 0$. To pomeni, da zaporedje sodih potenc (c^{2n}) konvergira proti α, zaporedje lihih potenc (c^{2n+1}) pa k α ali k $-\alpha$, glede na predznak števila c. Zaporedje (c^n) ima tako največ dve stekališči: α in $-\alpha$. Iz rekurzivne formule $|c^n| = |c| \cdot |c^{n-1}|$ sledi, da je

$$\lim |c^n| = |c| \cdot \lim |c^{n-1}|,$$

torej $\alpha = |c|\alpha$, to pomeni, da je $\alpha = 0$. Zaporedje (c^n) je omejeno in ima v vsakem primeru eno samo stekališče $\alpha = -\alpha = 0$, ki je njegova limita.

Če je $c = -1$ ima zaporedje $((-1)^n)$ dve stekališči, zato ni konvergentno. Če pa je $c < -1$, je zaporedje c^n v obe smeri neomejeno, in je tudi divergentno. $\square$

Zaporedje korenov. Vzemimo pozitivno realno število $c > 0$ in si oglejmo zaporedje korenov $(c^{1/n}) = (\sqrt[n]{c})$.

Trditev 2.1.12. *Za vsak $c > 0$ je zaporedje $(c^{1/n})$ konvergentno z limito*

$$\lim c^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{2.4}$$

Dokaz. Naj bo najprej $c > 1$, tako je $c = 1 + nx$, kjer smo pisali $x = (c-1)/n > 0$. Iz enačbe (2.3) sledi

$$(1+x)^n > 1 + nx = 1 + n\frac{c-1}{n} = c.$$

Obe strani korenimo in dobimo $\sqrt[n]{c} < 1 + (c-1)/n$. Ker je $c > 1$, je tudi $\sqrt[n]{c} > 1$ in velja za vsak n ocena

$$1 < \sqrt[n]{c} < 1 + \frac{c-1}{n}.$$

Ker je $\lim(1 + (c-1)/n) = 1$, sledi (po trditvi 2.1.6), da je $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Za $c = 1$ je veljavnost relacije očitna. Če pa je $c < 1$, obstaja tak $b > 1$, da je $c = 1/b$ in $\sqrt[n]{c} = 1/\sqrt[n]{b}$, torej je

$$\lim \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{b}} = 1.$$

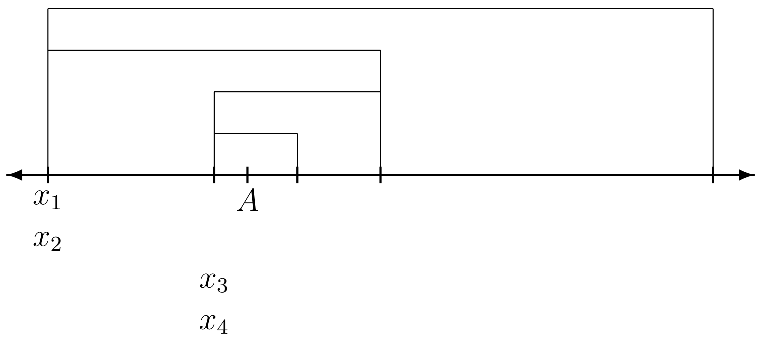
□

V razdelku 1.2.4 smo za $a > 0$ potenco a^r definirali za poljuben racionalen eksponent r. Da bi lahko definirali potenco tudi za iracionalne eksponente, potrebujemo naslednji rezultat:

Izrek 2.1.13. *Za vsako realno število x obstaja zaporedje racionalnih števil (x_n), ki konvergira k x:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Dokaz. Naj bo x_1 največje celo število, ki ni večje od x. Tako je gotovo $x \in [x_1, x_1+1)$. Če je x v levi polovici tega intervala: $x < x_1 + 1/2$, izberemo $x_2 = x_1$, sicer pa $x_2 = x_1 + 1/2$. Število x tako gotovo leži na intervalu $[x_2, x_2 + 1/2)$. Ta interval spet razpolovimo in izberemo za x_3 levo krajišče tistega podintervala, na katerem se nahaja x. Tako nadaljujemo, dokler ne



Slika 2.1: Konstrukcija racionalnega zaporedja, ki konvergira proti realnemu številu A

dobimo monotono naraščajočega omejenega zaporedja (x_n). Za tako dobljeno zaporedje je $x - x_n < 2^{1-n}$, kar je poljubno blizu 0, če je le n dovolj velik.$\square$

Naj bo r poljubno realno število in (r_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti r. Izberimo poljubno število $c > 0$ in konstruirajmo zaporedje

$$a_n = c^{r_n}; \qquad n = 1, 2, \dots \ .$$

Pokažimo, da zaporedje (a_n) zadošča Cauchyjevemu pogoju. Razlika

$$|a_{n+p} - a_n| = |c^{r_{n+p}} - c^{r_n}| = |c^{r_n}| \cdot |c^{r_{n+p} - r_n} - 1|$$

postane pri dovolj velikem n za vsak p poljubno majhna, saj je vrednost prvega faktorja omejena, v drugem faktorju pa gre z rastočim n razlika $r_{n+p} - r_n$ proti 0, zato tudi ves faktor konvergira proti 0. Zaporedje (a_n) je konvergentno. Izkaže se, da je za vsako zaporedje (r_n), ki konvergira proti r, limita zaporedja (c^{r_n}) vedno isto število. To limito vzamemo za vrednost potence c^r:

Definicija 2.1.6. Naj bo $c > 0$. Potem je

$$c^r = c^{\lim r_n} = \lim c^{r_n}.$$

Vsa običajna pravila običajna pravila za računanje s potencami veljajo tudi za potence z realnim eksponentom.

Konstrukcija števila e. Vzemimo zaporedji

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{in} \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}. \tag{2.5}$$

Pokazali bomo, da sta obe zaporedji konvergentni in imata isto limito.

V dokazu bomo potrebovali naslednjo neenakost:

Lema 2.1.14. *Za vsak $x \in (0,1)$ in za vsak $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > 1$, velja:*

$$(1 - x)^m > 1 - mx. \tag{2.6}$$

Dokaz leme. Za eksponente $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ si lahko pomagamo z indukcijo:

1. Če je $m = 2$, je očitno

   $$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 > 1 - 2x.$$

2. Iz indukcijske predpostavke

   $$(1 - x)^m > 1 - mx$$

   sledi

   $$\begin{aligned}(1 - x)^{m+1} &= (1 - x)^m(1 - x) > (1 - mx)(1 - x) \\ &= 1 - (m + 1)x + mx^2 > 1 - (m + 1)x\end{aligned}$$

   in lema je dokazana za $m \geq 2$.

Če je $m = -n \leq -2$, $n \in \mathbb{N}$, pa iz neenačbe

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 < 1$$

sledi

$$1 + x < \frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1},$$

torej je

$$(1 - x)^m = (1 - x)^{-n} > (1 + x)^n > 1 + nx = 1 - mx$$

in neenačba je dokazana tudi v tem primeru. □

Trditev 2.1.15. *Zaporedje*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

je naraščajoče, zaporedje

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad n \geq 2$$

pa je padajoče.

Dokaz. V neenačbi (2.6) izberimo $m = n$ in $x = 1/n^2$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Obe strani delimo z $(1 - 1/n)^n$ in dobimo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-(1-n)} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}. \tag{2.7}$$

Na levi strani je a_n, na desni pa a_{n-1}, torej $a_n > a_{n-1}$, zaporedje (a_n) je torej naraščajoče. Ker ocena (2.7) velja tudi za $n \leq -2$, lahko zapišemo še

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)},$$

kar je isto kot $b_{n+1} < b_n$. To pa pomeni, da je zaporedje (b_n) padajoče. □

Trditev 2.1.16. *Zaporedje (a_n) je navzgor, zaporedje (b_n) pa navzdol omejeno.*

Dokaz. Zaradi

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n, \end{aligned}$$

je za vsak $n \geq 2$

$$a_n < b_{n+1} \leq b_2 = 4 \quad \text{in} \quad b_n > a_{n-1} \geq a_1 = 2.$$

Tako je 4 zgornja meja zaporedja (a_n) in 2 spodnja meja zaporedja (b_n). Obe zaporedji sta zato monotoni in omejeni, torej konvergentni. □

Trditev 2.1.17. *Zaporedji (a_n) in (b_n) imata isto limito, ki jo označimo z e.*

Dokaz. Iz zveze $b_{n+1} = a_n(1 + 1/n)$ sledi,

$$\lim b_{n+1} = \lim a_n \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim a_n,$$

torej imata isto limito, ki jo bomo označili z e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

□

Število e je iracionalno število, ki ga bomo še pogosto srečali. Zaokroženo na dvanajst decimalk je

$$e = 2.718\,281\,828\,459.$$

Primer 2.1.10. Določimo limito zaporedja s splošnim členom $(1 - 5/n)^n$!

Naj bo $m = n/5$, torej $n = 5m$. Potem je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{5m}$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}\right]^{-5} = e^{-5}.$$

■

2.1.5 Logaritmi

Ko smo iskali obrat relacije $A = a^n$ pri fiksnem eksponentu, smo prišli do definicije korena: $a = \sqrt[n]{A}$. Če pa na to relacijo gledamo pri spremenljivem eksponentu in konstantni osnovi, je njen obrat logaritem.

Definicija 2.1.7. *Logaritem* števila $A > 0$ pri osnovi $a > 0$, $a \neq 1$ je število, s katerim moramo potencirati osnovo a, da dobimo A.

$$x = \log_a A \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = A.$$

Število A imenujemo *logaritmand*, število a pa *osnovo*.

Definicija logaritma je smiselna samo, če je osnova $a > 0$ in $a \neq 1$. Če sta a in A pozitivni števili, se lahko na podoben način, kot smo dokazali izrek 1.2.8 o obstoju korena, prepričamo, da obstaja natanko določeno število $x = \log_a A$. Zlahka se prepričamo, da za vsak $a > 0$, $a \neq 1$ velja

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{in} \quad \log_a a = 1.$$

Prvo enačbo dobimo iz $a^0 = 1$, drugo iz $a^1 = a$.

Iz zakonov za računanje s potencami lahko izpeljemo naslednja pravila za računanje z logaritmi:

$$\begin{aligned} \log_a(AB) &= \log_a A + \log_a B; \\ \log_a \frac{A}{B} &= \log_a A - \log_a B; \\ \log_a A^r &= r \log_a A. \end{aligned}$$

Če sta a in b različni osnovi, je

$$\log_a A = \log_a b \cdot \log_b A = \frac{\log_b A}{\log_b a}.$$

V matematiki največ uporabljamo logaritme, ki imajo za osnovo število e. Pravimo jim tudi *naravni logaritmi*, številu e pa *osnova naravnih logaritmov*. Naravne logaritme zato pišemo brez osnove, včasih pa uporabljamo tudi oznako ln. Tako je torej $\log_e A$ isto kot $\log A$ ali pa $\ln A$. Poleg naravnega logaritma se, zlasti v tehniki, pogosto uporablja logaritem z osnovo 10, $\lg A = \log_{10} A$, ki mu pravimo *desetiški* ali *Briggsov* logaritem, in v računalništvu logaritem z osnovo 2, $\mathrm{lb}\, A = \log_2 A$, ali *dvojiški logaritem*.

2.2 Številske vrste

2.2.1 Konvergenca vrst

Definicija 2.2.1. Če je dano zaporedje (a_n), je s predpisom

$$S_1 = a_1,\ S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

določeno *zaporedje delnih vsot vrste s členi* a_n, ki jo označimo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \tag{2.8}$$

Če zaporedje delnih vsot S_n konvergira proti številu s, pravimo, da je vrsta (2.8) *konvergentna* in da je njena *vsota* enaka s, kar zapišemo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Če je zaporedje delnih vsot divergentno, je vrsta divergentna in nima vsote.

Primer 2.2.1. Naj bo $c \in \mathbb{R}$. Vrsti

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n$$

pravimo *geomtrijska vrsta* s kvocientom c. Za zaporedje delnih vsot geometrijske vrste velja:

$$S_{n+1} - 1 = (1 + c + \cdots + c^{n+1}) - 1 = c + \cdots + c^{n+1} = cS_n$$

in

$$S_{n+1} = S_n + c^{n+1} = cS_n + 1,$$

zato je za $c \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

To zaporedje je konvergentno samo, če je $|c| < 1$ (trditev 2.1.11). V tem primeru je

$$\lim S_n = \lim \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} = \frac{1}{1 - c}.$$

■

Primer 2.2.2. Poiščimo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Člene te vrste lahko razstavimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

zato je

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n+1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim S_N = 1.$$

■

Iz Cauchyjevega pogoja (2.2) za konvergenco zaporedja delnih vsot sledi

Izrek 2.2.1. *Vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je konvergentna natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ *obstaja tak indeks* n_0*, da je*

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

za vsak $p \in \mathbb{N}$*, če je le* $n > n_0$*.*

Drugače povedano: če je vrsta konvergentna, lahko izračunamo njeno vsoto poljubno natančno, če le seštejemo dovolj njenih začetnih členov — vsota preostalih neskončno mnogo členov bo manjša od predpisane napake.

Primer 2.2.3. Vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

imenujemo *harmonična vrsta*. Pokažimo, da harmonična vrsta ni konvergentna. Če bi bila konvergentna, bi po Cauchyjevem kriteriju za vsak $\varepsilon > 0$ obstajal tak indeks n_0, da bi veljalo

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

za vsak $n \geq n_0$ in za vsak p. Vendar, če izberemo poljuben n in $p = n$, je

$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

to pa ni poljubno majhno število. ■

Izrek 2.2.2. *[Potreben pogoj za konvergenco]Če je vrsta konvergentna, konvergira zaporedje njenih členov proti* 0*.*

Dokaz. Naj bo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n.$$

Očitno velja

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

torej

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

in izrek je dokazan. ■

Pogoj $\lim a_n = 0$ je potreben za konvergenco vrste, ni pa zadosten, saj harmonična vrsta temu pogoju zadošča, pa kljub temu ni konvergentna.

2.2.2 Vrste s pozitivnimi členi

Če so vsi členi $a_n > 0$, je zaporedje delnih vsot vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

naraščajoče in je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno. Če ni omejeno, pa divergira proti ∞.

Primer 2.2.4. Naj bo $p > 1$. Pokažimo, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergentna.

Pokazali bomo, da je zaporedje delnih vsot

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$$

navzgor omejeno. Za vsak $N > 1$ je

$$\begin{aligned}
S_N &< S_{2^N-1} \\
&= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^N-1)^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{(N-1)p}} + \cdots + \frac{1}{(2^N-1)^p}\right) \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{(N-1)p}} + \cdots + \frac{1}{2^{(N-1)p}}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{2^p} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{(N-1)p}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{N-1},
\end{aligned}$$

to je $(N-1)$-va delna vsota geometrijske vrste s kvocientom $q = 1/2^{p-1}$. Ker je $p > 1$, je $q < 1$ in geometrijska vrsta je konvergentna, delna vsota pa je manjša od vsote cele vrste, torej

$$S_N < \frac{1}{1 - (1/2^{p-1})},$$

kar je zgornja meja za zaporedje delnih vsot S_N. ■

Ugotavljanje konvergence vrste s pozitivnimi členi je precej bolj preprosto, ker je zaporedje delnih vsot take vrste monotono naraščajoče, in poznamo celo vrsto kriterijev, s katerimi si lahko pomagamo. Navedli bomo dva.

Izrek 2.2.3. *[Primerjalni kriterij] Če sta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

vrsti s pozitivnimi členi in je $a_n \leq b_n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$, *velja:*

$$\textit{če je } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konvergentna, je tudi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konvergentna,}$$

ali drugače povedano,

$$\textit{če je } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ divergentna, je tudi } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ divergentna.}$$

Dokaz. Za zaporedji delnih vsot

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{in} \quad S_n' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

očitno velja $S_n \leq S_n'$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je zaporedje (S_n') omejeno, torej je omejeno tudi zaporedje (S_n). Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je zaporedje (S_n) neomejeno, torej je tudi večje zaporedje (S_n') neomejeno. □

Primer 2.2.5. V primeru 2.2.3 smo dokazali, da harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ni konvergentna. Za vsak $p < 1$ je $1/n^p > 1/n$ in primerjalni kriterij pove, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

divergentna za vsak $p \leq 1$. ■

Zaporedje kvocientov

$$\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \ldots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \ldots$$

meri hitrost naraščanja členov vrste. Geometrijska vrsta s pozitivnimi členi (pri njej so ti kvocienti konstantni), konvergira, če je ta konstanta manjša kot 1. Podobno velja tudi za splošne vrste:

Izrek 2.2.4. *[Kvocientni kriterij] Če obstaja*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(ki je lahko tudi ∞), velja: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $L < 1$ in divergira, če je $L > 1$.

Dokaz. Recimo, da je $L < 1$ in naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da je $L+\varepsilon < 1$. Potem obstajati tak indeks n_0, da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon < 1.$$

Na konvergenco vrste, podobno kot na konvergenco zaporedja, ne vpliva, če na začetku vrste nekaj členov dodamo ali odvzamemo. Prvih n_0 členov lahko izpustimo, tako da dobimo vrsto, kjer velja neenakost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon < 1 \quad \text{za vsak } n.$$

Potem je

$$a_2 \leq (L+\varepsilon)\cdot a_1 \quad \text{in} \quad a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-1} a_1.$$

Ker je geometrijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_1(L+\varepsilon)^n$ konvergentna, sledi iz primerjalnega kriterija, da je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Če je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \text{je} \quad a_{n+1} > a_n$$

in je zaporedje členov (a_n) naraščajoče zaporedje pozitivnih števil in $\lim a_n \neq 0$. Potrebni pogoj za konvergenco vrste tako ni izpolnjen. □

V primeru, ko je $\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$, kvocientni kriterij na vprašanje o konvergenci vrste ne da odgovora.

Primer 2.2.6. Zgled za uporabo kvocientnega kriterija

1. Za vrsto
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
velja
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim \frac{2}{n+1} = 0,$$
in vrsta je konvergentna.

2. Za vrsti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
velja (kot se prepričamo s kratkim računom):
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$
Prva je divergentna, druga pa konvergentna, torej v tem primeru kvocientni kriterij res ne da odgovora o konvergenci. ■

Če je vrsta konvergentna, je N-ta delna vsota
$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$
približek za vsoto vrste S, napaka pa je enaka *ostanku vrste*
$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Metodo, s pomočjo katere smo izpeljali kvocientni kriterij, lahko uporabimo tudi za oceno ostanka. Če vemo, da je za vsak $n \geq N$
$$m \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M,$$
kjer sta števili m in M pozitivni in manjši od 1, sledi
$$a_n m \leq a_{n+1} \leq a_n M,$$
kar pomeni, da je
$$a_N(m + m^2 + \cdots) \leq a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots \leq a_N(M + M^2 + \cdots).$$
Od tod dobimo oceno za ostanek
$$a_N \frac{m}{1-m} \leq R_N \leq a_N \frac{M}{1-M}.$$

2.2.3 Absolutna in pogojna konvergenca vrst

Če so členi vrste poljubna števila (pozitivna ali negativna), ločimo dva tipa konvergence:

Definicija 2.2.2. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ in *pogojno konvergentna*, če je konvergentna, pa ni absolutno konvergentna.

Vrsta je torej absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta iz absolutnih vrednosti njenih členov, to pa je vrsta s pozitivnimi členi. Pri ugotavljanju absolutne konvergence si torej lahko pomagamo s kriteriji za konvergenco vrst s pozitivnimi členi.

Izrek 2.2.5. *Absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Če je vrsta absolutno konvergentna, je za zaporedje delnih vsot

$$S'_N = |a_1| + \cdots + |a_N|$$

izpolnjen Cauchyjev pogoj (izrek 2.2.1) in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da za poljuben $p \in \mathbb{N}$ velja

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon,$$

če je le $n \geq n_0$. Potem je tudi

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

za vsak $n \geq n_0$. Očitno tudi zaporedje delnih vsot

$$S_N = a_1 + \cdots + a_N$$

zadošča Cauchyjevemu pogoju in zato je vrsta konvergentna. □

Obratno seveda ni res, saj bomo kmalu spoznali kakšno pogojno konvergentno vrsto.

Izrek 2.2.6. Leibnizov[3] kriterij *Če je* (a_n) *padajoče zaporedje pozitivnih števil in* $\lim a_n = 0$*, je vrsta*

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

konvergentna.

---

[3]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), nemški filozof in matematik, skupaj z I. Newtonom začetnik diferencialnega in integralnega računa.

Vrstam, kjer se predznaki členov izmenjujejo, (kot je ta v izreku), pravimo *alternirajoče vrste.*

Dokaz. Ker je zaporedje (a_n) padajoče, za vsak N velja

$$S_{2N} \geq 0 \quad \text{in} \quad S_{2N+2} = S_{2N} + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) \geq S_{2N}.$$

Po drugi strani je

$$S_{2N} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - a_{2N} < a_1.$$

Zaporedje sodih delnih vsot S_{2N} je naraščajoče in navzgor omejeno, ter zato konvergentno. Za lihe delne vsote velja

$$S_{2N+1} = (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2N-1}) - (a_{2N} - a_{2N+1}) \leq S_{2N-1},$$

zato je zaporedje lihih delnih vsot padajoče. Poleg tega je

$$S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} \geq S_{2N} \geq S_2,$$

torej so lihe delne vsote omejene navzdol in zato je zaporedje (S_{2N+1}) konverentno.

Ker je

$$\lim S_{2N+1} - \lim S_{2N} = \lim(S_{2N+1} - S_{2N}) = \lim a_{2N+1} = 0,$$

imata zaporedji S_{2N+1} in S_{2N} isto limito. Zaporedje (S_N) je omejeno in ima eno samo stekališče, torej je konvergentno. To pomeni, da tudi vrsta konvergira. □

Primer 2.2.7. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \tag{2.9}$$

zadošča pogojem zgornjega izreka, zato je konvergentna. Vrsta absolutnih vrednosti njenih členov je harmonična vrsta, ki je divergentna, zato vrsta (2.9) konvergira pogojno.

Podobno velja za vse vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \quad 0 < p \leq 1.$$

■

Spomnimo se primerov 2.2.4 in 2.2.5 in povzemimo:

Trditev 2.2.7. *Alternirajoča vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} \quad \textit{je} \quad \begin{cases} \textit{absolutno konvergentna} & \textit{za} \quad p>1 \\ \textit{pogojno konvergentna} & \textit{za} \quad 0<p\le 1 \\ \textit{divergentna} & \textit{za} \quad p\le 0 \end{cases}.$$

Vrste so pravzaprav "neskončne vsote", vendar vseh lastnosti "končnih vsot" nimajo. Za končne vsote velja komutativnost — vrstni red členov na vsoto ne vpliva, za neskončne vrste pa v splošnem komutativnost ne velja.

Primer 2.2.8. Naj bo

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Očitno je

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\ge\frac{1}{2},$$

zato je $S\neq 0$. Zapišimo člene te vrste v drugačnem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} S' &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots \end{aligned}$$

Če upoštevamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n} &= \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), \end{aligned}$$

dobimo

$$S'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Ker je $S\neq 0$, je $S'=S/2\neq S$. Torej smo z zamenjavo vrstnega reda členov dosegli, da se je vsota vrste spremenila. ■

To je mogoče samo, če je vrsta pogojno konvergentna (tako kot v našem primeru), saj velja:

Izrek 2.2.8. *Poljubni absolutno konvergentni vrsti z istimi členi, vendar v drugačnem vrstnem redu, imata enako vsoto.*

Dokaz izreka 2.2.8 najdemo v [8].

Literatura

[1] K. G. Binmore: *Mathematical Analysis (a straightforeward approach), 2 ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] C. H. Edwards Jr. in D. E. Penney: *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1990.

[3] R. Jamnik: *Matematika*, Partizanska knjiga, Ljubljana, 1981.

[4] P. Lax, S. Burstein in A. Lax: *Calculus with Applications and Computing, Vol I*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[5] N. Piskunov: *Differential and Integral Calculus, vol. I*, Mir Publishers, Moscow, 1974.

[6] N. Prijatelj: *Uvod v matematično analizo, 1. del*, DMFA, Ljubljana, 1980.

[7] G. B. Thomas, Jr: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1972.

[8] I. Vidav: *Višja matematika I* (10. natis), DMFA, Ljubljana, 1990.