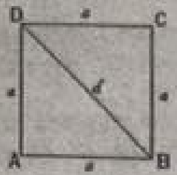
GEOMETRIJA V PROSTORU

PLOŠČINE IN OBSEGI LIKOV

(A) Ploščine in obsegi likov

Kvadrat

$ob = 4a$
$S = a^2$
$d = a\sqrt{2}$



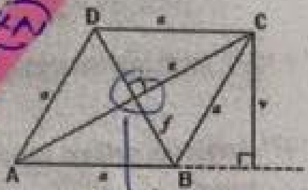
Pravokotnik

$ob = 2a + 2b$
$S = a \cdot b$
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Romb

$ob = 4a$
$S = a \cdot v$
$S = \frac{e \cdot f}{2}$

$a^2 = (\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2$

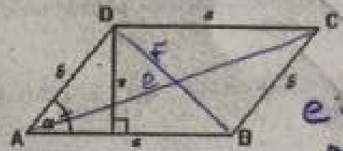


razpolavljata po ½

Paralelogram

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$

$ob = 2a + 2b$
$S = a \cdot v_a$
$S = ab\sin\alpha$

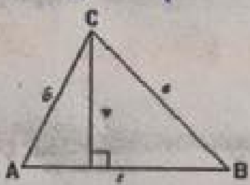


e in f ne razpolavljata

Trikotnik

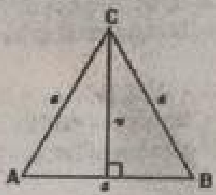
$ob = a + b + c$
$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$
$S = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$
$s = \frac{a+b+c}{2}$

$r = \frac{S}{s}$



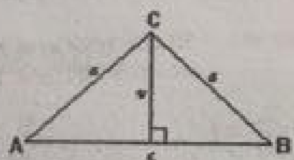
Enakostranični trikotnik

$ob = 3a$
$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



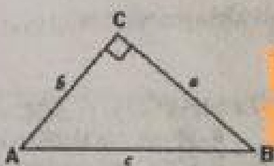
Enakokraki trikotnik

$ob = 2a + c$
$S = \frac{c \cdot v_c}{2}$



Pravokotni trikotnik

$ob = a + b + c$
$S = \frac{a \cdot b}{2}$

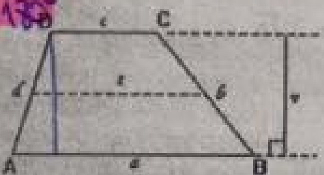


$c^2 = a^2 + b^2$
sin, cos, tan

Trapez $\alpha + \delta = 180^\circ$

$ob = a + b + c + d$
$S = s \cdot v$
$s = \frac{a+c}{2}$

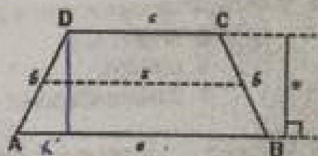
$AB \parallel CD$



d/a|v $\sin\alpha = \frac{v}{d}$

Enakokraki trapez

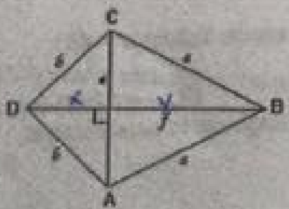
$ob = a + 2b + c$
$S = s \cdot v$
$s = \frac{a+c}{2}$



$x = \frac{a-c}{2}$

Deltoid

$ob = 2a + 2b$
$S = \frac{e \cdot f}{2}$

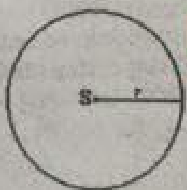


$\alpha = \gamma$

$f = x + y$
$a^2 = (\frac{e}{2})^2 + x^2$
$b^2 = (\frac{e}{2})^2 + y^2$

Krog

$ob = 2 \cdot \pi \cdot r$
$S = \pi \cdot r^2$



$l = \frac{\pi r \alpha}{180}$
$S_i = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{l r}{2}$

včrtan ○

$S = r \cdot s$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

očrtan ○

$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
$2R = \frac{c}{\sin\gamma}$

· kompleksna št. $i^1 = i$ $z+w = (a+c)+(bi+di)$

$z = a+bi$ $i^2 = -1$ $z\cdot w = ac-bd+(bc+ad)i$

$a = Re(z)$. realni del (x-os) $i^3 = -i$ $z = a+bi \to$ konjugiramo: $\bar{z} = a-bi$

$b = Im(z)$. imag. del (y-os) $i^4 = 1$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$: absolutna vrednost

$$\frac{z}{w} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

kvadratna enačba : $D = \ominus$

· eksponentna funkcija : $f(x) = a^x$, $a \neq 1$

$f(x) = -2\cdot 4^x \boxed{-3}$ – asimptota!!

· logaritem : $\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$

$\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a x^r = r\cdot \log_a x$

$\log_{10} x = \log x$

$\log_a x + \log_a y = \log_a x\cdot y$

$\log_a x - \log_a y = \log_a x/y$

$\log_e x = \ln x \to$ naravni logaritem

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ → prehod na novo osnovo

logaritemske enačbe : na koncu vedno preizkus!!

$\log(-1)$ // ni definiran $\nrightarrow$

· polinomi : iskanje ničel s hornerjevim algoritmom $x_1 = 0$ L (seka: x)

$p(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ $x_{1,2} = 0$ S (odbije: •)

poli ( )

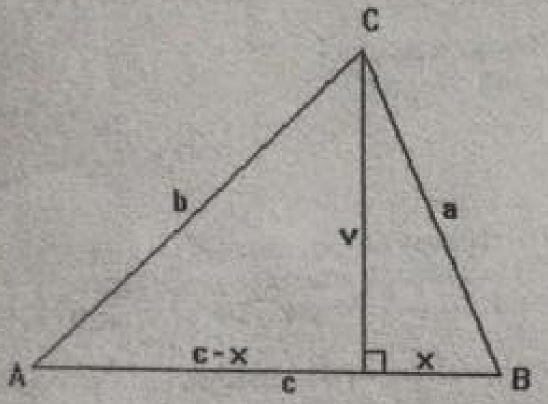
· racionalna funkcija : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3 ...\}$

neenačbe : narišemo ——→ in iščemo ; $x \in$

RAVNINSKA TRIGONOMETRIJA

(A) Kosinusni izrek in Pitagorov izrek

V poljubnem trikotniku *ABC* narišimo višino, ki osnovnico razdeli na odseka dolžine x in $c-x$. Iz nastalih dveh pravokotnikov izrazimo višino s Pitagorovim izrekom.



$$v^2 = a^2 - x^2$$

$$v^2 = b^2 - (c-x)^2$$

Izenačimo desni strani enačbe in dobimo:

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

Preuredimo enakost tako, da izrazimo b^2, in odsek x nadomestimo z $a\cos\beta$. Dobimo eno od enakosti:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$

Drugi dve sta:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Kosinusni izrek uporabljamo, če v trikotniku poznamo:
- dve stranici in kot med njima (izračunamo tretjo stranico)
- vse tri stranice (izračunamo notranje kote trikotnika):

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Pitagorov izrek je poseben primer kosinusnega izreka. Velja namreč v pravokotnem trikotniku, kjer je kot γ enak $90°$ in zato $\cos\gamma = 0$.

Kvadrat hipotenuze je enak vsoti kvadratov katet: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$.

(B) Sinusni izrek

Razmerje med stranico trikotnika in sinusom nasprotnega kota je enako premeru trikotniku očrtanega kroga:

$$\boxed{2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

Sinusni izrek uporabljamo, če v trikotniku poznamo:
- stranico in dva notranja kota
- dve stranici in kot, ki leži eni od obeh stranic nasproti:
  - kot leži nasproti daljši stranici → ena rešitev
  - kot leži nasproti krajši stranici → možni dve rešitvi
- polmer očrtanega kroga in dve stranici
- polmer očrtanega kroga in dva kota
- polmer očrtanega kroga, ena stranica in en kot, ki ne leži tej stranici nasproti

(C) Vaje

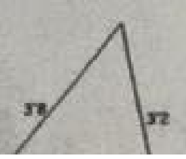
1. Izračunaj kot oziroma stranico x, če so vpisane mere v centimetrih:

[R: 43,16°, 50,57°, 3,04 cm]

a.

b.

c.



·stožnice : <u>elipsa</u> $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ $S(0,0)$ a...velika, b...mala polos

$T_1(a,0)$, $T_2(0,b)$... temena

F_1, F_2 = gorišča $(e,0)$ $e^2=a^2-b^2$ (linearna eksc.)

$S(p,q) \Rightarrow \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ $F(p+e,q)$

<u>krožnica</u>: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$\boxed{(x-p)^2+(y-q)^2=r^2}$ dopolnjevanje do pop. kvadrata

$S(0,0) \Rightarrow x^2+y^2=r^2$ $T(x,y)$, $S(p,q)$

dve koncentrični O: isto središče!

$D=0 \Rightarrow$ tangenta

<u>hiperbola</u>: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ asimptota: $y_{1,2}=\pm\frac{bx}{a}$

$T_1(a,0)$, $T_2(-a,0)$

a...realna, b...imaginarna polos $F_1(e,0)$, $F_2(-e,0)$ $e^2=a^2+b^2$

<u>parabola</u>: $\boxed{y^2=2px}$ premica: $x=-p/2$

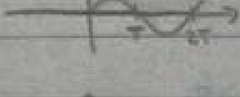
gorišče: $F(p/2,0)$

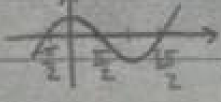
·<u>trigonometrija</u>

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$; $\cos(\alpha+\beta)=$ −

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$; $\sin(\alpha+\beta)=$ +

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$f(x)=\sin x$  $\sin x=a$, $x_0=\arcsin a$ $\boxed{x_1=x_0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad x_2=\pi-x_0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

$f(x)=\cos x$  $\cos x=a$, $x_0=\arccos a$ $\boxed{x_1=x_0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad x_2=-x_0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$

arcsin: $[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

sin: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$

arccos: $[-1,1]\to[0,\pi]$

cos: $[0,\pi]\to[-1,1]$

$\sin x=0$, $x=k\pi$

$\sin x=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\sin x=1$ (max), $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\cos x=1$, $x=2k\pi$

$\cos x=-1 \to x=\pi+2k\pi$

· kombinatorika · $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_i$

· permutacije brez: $P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

s · $P_n^{k_1, k_2, \ldots} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots}$

· variacije brez: $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$, s: $^{(p)}V_n^r = n^r$

· kombinacije brez: $C_n^r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ / $C_n^r = \binom{n}{r}$, s: $^{(p)}C_n^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \cdot r!}$

· binomski izrek: $\binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$ 5-ti člen - k ; $(a+b)^{5\; n}$

· verjetnost dogodka: $P(A) = \frac{m}{n}$ - št. ugodnih el.
n - vsi elementi

obrazec za popolno verjetnost: $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \ldots + P(H_i) \cdot P(A|H_i)$

bayesov obrazec: $P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$

nasprotni dogodek

bernoullijev obrazec: $P(B) = \binom{n}{k} \cdot P(A)^k \cdot P(A')^{n-k}$

· aritmetično zaporedje: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ $d = a_n - a_{n-1}$

$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ (aritmetična sredina)

$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ⇒ vsota AZ

· geometrijsko zaporedje: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ $q = \frac{a_2}{a_1}$

$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ ⇒ vsota GZ $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ (geometr. sredina)

· obrestno obrestni račun

$G_n = G_0 (1 + \frac{n \cdot p}{100})$; AZ p... obrestna mera

$G_n = G_0 \cdot r^n$; GZ n... čas obrestovanja

↳ $r = 1 + p/100$ G... glavnica/kapital

· **vektorji**

$m\cdot(n\cdot\vec a)=(m\cdot n)\vec a$

$(m+n)\cdot\vec a = m\vec a+n\vec a$

$m(\vec a+\vec b)=m\cdot\vec a+m\cdot\vec b$

skalarni produkt: $\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\alpha$

$|\vec a|=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}$

$\vec a\cdot\vec b=0 \Rightarrow \vec a\perp\vec b$

$\vec a\parallel\vec b \Rightarrow \vec a=k\cdot\vec b$

poljuben Δ

kosinusni izrek: $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$

$\vec a=(a_1,a_2,a_3)$ $\vec a+\vec b=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$; $\vec a-\vec b=(-,-,-)$

$\vec b=(b_1,b_2,b_3)$ $m\cdot\vec a=m(a_1,a_2,a_3)=(ma_1,ma_2,ma_3)$

$\vec a\cdot\vec b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$|\vec a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

krajevni vektor: $\vec{AB}=\vec r_B-\vec r_A=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

ploščina Δ: $S=\frac{c\cdot b\cdot\sin\alpha}{2}$

kot med vektorjema: $\cos\alpha=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}$

· **potenčna funkcija**: $f(x)=x^n$; $D_f=\mathbb{R}$

premikanje grafov: $f(x)=a(x-c)^n+b$ → v y-smer

raztegi/skrčitev   └ v x-smer

· enačbe s koreni: 1. koren osamimo!, 2. na koncu preizkus!! + $R=\{\dots\}$

· **kvadratna funkcija**: $f(x)=ax^2+bx+c$; $f(x)=a(x-p)^2+q$

$T(p,q)=$ teme

dopolnjevanje do popolnega kvadrata!!

$f(x)=\underbrace{2x^2+4x}-5=2(x^2+2x)-5$

$=2((x+1)^2-1)-5=2(x+1)^2-2-5=2(x+1)^2-7=f(x)$

Če imamo kvadrat $(x^2\dots)$ imamo vedno DVE rešitvi: $x_{1,2}=\pm$

$p=-\frac{b}{2a}$; $q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$; $D=b^2-4ac$ → $D>0$: dve ničli

$D=0$: ena ničla

$D<0$: ni ničel

$a>0$: 

$a<0$: 

· odvod

naklon premice: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $\tan\alpha = k$

kot med premicama: $\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$

stacionarne točke: prevoj $x_{1,2} = 0$ S   lokalni in globalni max. [,]
ekstrem $x_1 = 0$ L

$(\sin x)' = \cos x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\cos x)' = -\sin x$ $(\text{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x$ $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a^x)' = a^x \ln a$

· integrali : $f'(x) = \frac{df}{dx} \rightarrow \int f(x)\,dx$

nedoločeni (vedno na koncu $+c$!!!)

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg}\, x + c$

določeni integral: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

ploščina: $S = \int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$

$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

$S = \int_a^b (\underset{\text{zgornja}}{f(x)} - \underset{\text{spodnja}}{g(x)})\,dx$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (-)(+ +)$

$\frac{a}{b}$ $a \rightarrow$ števec, $b \rightarrow$ imenovalec

· praštevila: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

· največji skupni delitelj: $D(a,b) \Rightarrow D(27,18) = 9$

· najmanjši skupni večkratnik: $v(a,b) \Rightarrow v(9,12) = 36$

· množice: $A \subset B$ (A je podmnožica m. B)

$A \cup B$:  $A \cap B$:  $A \setminus B$, $A - B$: 

$\leq$: [ ] •——— št. JE vključeno

$<$: ( ) ←——— št. NI vključeno

$a < b \; / \cdot, : (-1)$

$-a > -b$

· razdalja med točkama v ravnini: $d = (A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

· smerni koeficient: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

· enačba premice: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow k_1 = k_2$

$p_1 \perp p_2 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$

implicitna: $ax + by + c = 0$

eksplicitna: $y = kx + n$ ← začetna vrednost

odsekovna: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ $A(m,0)$; $B(0,n)$

· Δ

pitagorov izrek: $c^2 = a^2 + b^2$

višinski izrek: $v^2 = a_1 \cdot b_1$

· $\llcorner \Delta$ 

kotne funkcije

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\underbrace{\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \mathrm{ctg}\,\alpha \end{aligned}}_{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos\alpha &= -\cos(180^\circ - \alpha) \end{aligned}}_{90^\circ < \alpha < 180^\circ}$$

	sin
sin + cos −	sin + cos +
sin − cos −	sin − cos +

cos