Matematika 1

Gabrijel Tomšič   Bojan Orel   Neža Mramor Kosta

15. december 2010

Poglavje 3

Funkcije

3.1 Osnovni pojmi

Preslikavam v množico $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ običajno pravimo *funkcije* — v prvem primeru realne, v drugem pa kompleksne. V tem poglavju bomo obravnavali realne funkcije ene realne spremenljivke, to so preslikave

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}.$$

Definicijsko območje D in zaloga vrednosti

$$Z_f = \{y \in \mathbb{R};\, y = f(x) \text{ za nek } x \in D\} = f(D)$$

sta podmnožici množice $\mathbb{R}$. Funkcija f priredi številu $x \in D$ (*neodvisni spremenljivki*) realno število $y = f(x) \in Z_f$, (*odvisno spremenljivko*).

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je določena z definicijskim območjem D, s predpisom f in z zalogo vrednosti Z_f. Kadar definicijskega območja funkcije ne navajamo posebej, je to največja množica $D \subset \mathbb{R}$, na kateri je predpis f še definiran.

Primer 3.1.1. Oglejmo si nekaj preprostih funkcij.

1. Naj bo $c \in \mathbb{R}$ in $f(x) = c$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Taki funkciji pravimo (iz očitnih razlogov) *konstantna funkcija*, njeno definicijsko območje je cela množica realnih števil, njena zaloga vrednosti pa ena sama točka $Z_f = \{c\} \subset \mathbb{R}$.

2. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *identična funkcija*:
$$f(x) = x.$$
Definicijsko območje in zaloga vrednosti identične funkcije je cela množica $\mathbb{R}$.

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Funkciji
$$f(x) = x^n$$
pravimo *potenčna funkcija*, njeno definicijsko območje je $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti je odvisna od n: če je n sodo število, je $Z_f = [0, \infty)$, če je n liho število, je $Z_f = \mathbb{R}$.

4. V razdelku 1.2.4 smo pokazali, da ima vsako pozitivno število $x \geq 0$ natanko določen pozitiven koren $y = \sqrt[n]{x}$, ki zadošča enačbi $y^n = x$. Za liha števila $n = 2k + 1$ smo definicijo korena razširili še na negativna števila. Funkcija
$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$
ima za $n = 2k$ definicijsko območje $[0, \infty)$ in zalogo vrednosti $[0, \infty)$, za $n = 2k + 1$ pa definicijsko območje in zalogo vrednosti $\mathbb{R}$. ■

Dve funkciji f in g sta enaki, kadar imata enaki definicijski območji: $D_f = D_g = D$ in če za vsak $x \in D$ velja $f(x) = g(x)$.

Primer 3.1.2. Dve funkciji nista enaki, če nimata enakih definicijskih območij, čeprav sta funkcijska predpisa navidez enaka:

1. Naj bo $f(x) = x$ in $g(x) = (\sqrt{x})^2$. Za vsak $x \in D_g$ je $f(x) = g(x)$, definicijski območji $D_f = \mathbb{R}$ in $D_g = [0, \infty)$ pa sta različni, torej sta f in g različni funkciji $f \neq g$.

2. Naj bo $f(x) = |x|$ in $g(x) = \sqrt{(x^2)}$. Funkciji f in g imata enaki definicijski območji $D_f = D_g = \mathbb{R}$ in $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, torej je $f = g$. ■

Graf funkcije

Graf realne funkcije ene realne spremenljivke

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

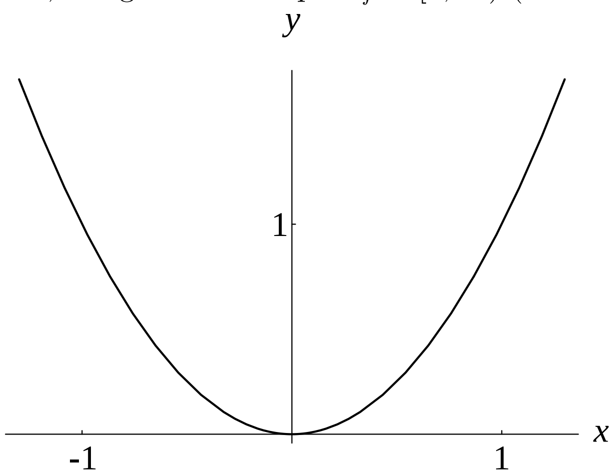
je podmnožica koordinantne ravnine. Vsaka navpična premica $x = a$, kjer je $a \in D$ seka graf $\Gamma(f)$ v natanko eni točki (navpična premica $x = a$, $a \notin D$ grafa sploh ne seka). Pravokotna projekcija grafa $\Gamma(f)$ na os x je definicijsko območje D, projekcija na os y pa je zaloga vrednosti Z_f.

Primer 3.1.3. Nekaj grafov funkcij:

1. Graf konstantne funkcije $f(x) = c$ je vodoravna premica na višini c.

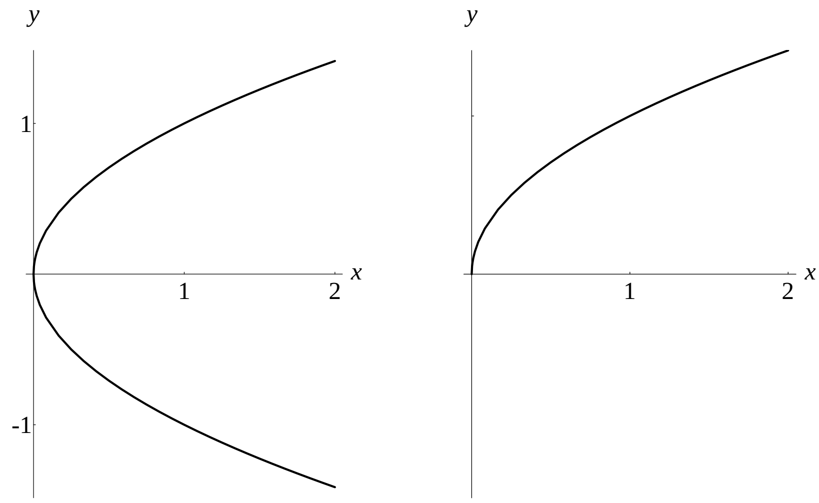
2. Graf identične funkcije $f(x) = x$ je premica $y = x$, ki razpolavlja prvi in tretji kvadrant.

3. Graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je parabola $y = x^2$. Definicijsko območje je $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $Z_f = [0, \infty)$ (slika 3.1).



Slika 3.1: Graf funkcije $f(x) = x^2$

4. Enačba $y^2 = x$ določa množico točk $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ki ležijo na paraboli (slika 3.2). Ta parabola ni graf funkcije, kajti vse navpične premice $x = a > 0$ jo sekajo v dveh točkah (vsakemu $a > 0$ pripadata dve vrednosti $y = \pm\sqrt{a}$, ki zadoščata dani enačbi). Enačba $y^2 = x$ zato ne določa funkcije $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.



Slika 3.2: Točke, ki zadoščajo enačbi $y^2 = x$ (levo) in graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ (desno)

Enačba $y^2 = x$; $y \geq 0$ določa funkcijo $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, to je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$. Njen graf je na sliki 3.2. ■

Funkcijski predpis $f(x)$ je lahko dan eksplicitno (tako kot v prvih treh primerih), *implicitno* z enačbo, ki povezuje neodvisno spremenljivko x in funkcijsko vrednost $y = f(x)$ (kot v četrtem primeru), ali pa kako drugače — na primer parametrično, opisno, grafično ....

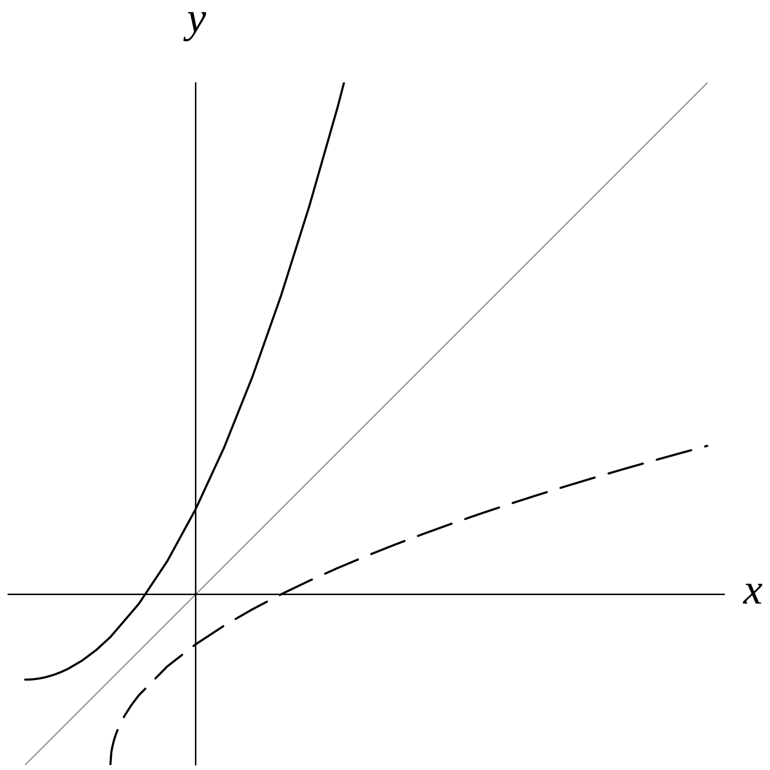
Če je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ injektivna (razdelek 1.1.2), pripada vsaki vrednosti $c \in Z_f$ natanko en $x \in D$, za katerega je $f(x) = c$, torej seka vodoravna premica $y = c$, $c \in Z_f$, graf $\Gamma(f)$, v natanko eni točki. Vodoravna premica $y = c$, $c \notin Z_f$ pa grafa sploh ne seka.

Če je $f : D \to \mathbb{R}$ surjektivna (razdelek 1.1.2), je vsak $c \in \mathbb{R}$ v zalogi vrednosti Z_f, torej vsaka vodoravna premica $y = c$ seka graf $\Gamma(f)$ vsaj v eni točki.

Inverzna funkcija Injektivna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *obrnljiva* (glej razdelek 1.1.2), torej ji pripada *inverzna funkcija*

$$f^{-1} : Z_f \to \mathbb{R},$$

katere zaloga vrednosti je definicijsko območje D funkcije f. Inverzno funkcijo f^{-1} dobimo tako, da zamenjamo vlogo spremenljivk x in y. Graf $\Gamma(f^{-1})$ je graf $\Gamma(f)$ prezrcaljen preko premice $y = x$ (slika 3.3).



Slika 3.3: Graf funkcije in njene inverzne funkcije

Primer 3.1.4.

1. Funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, je injektivna. Njena inverzna funkcija je $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^2$. Splošneje: za vsako sodo število $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ obrnljiva, inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = x^n$; $x \geq 0$. Za vsako liho število $n \in \mathbb{N}$ je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = x^n$; $x \in \mathbb{R}$.

2. Tudi funkcija

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$$

je injektivna. Njeno inverzno funkcijo dobimo tako, da v enačbi

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

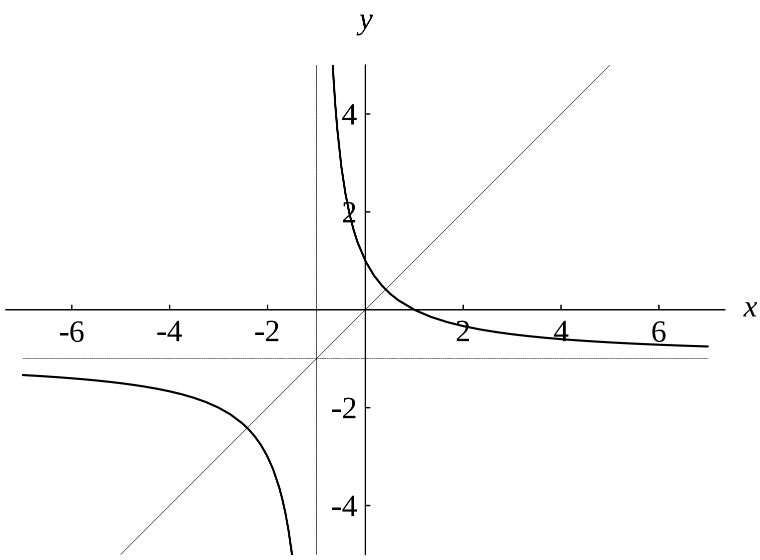
zamenjamo vlogi spremenljivk:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-y}{1+y} \\ x + xy &= 1 - y \\ y &= \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Tako je

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Funkcija je sama sebi inverzna, njen graf je simetričen glede na premico $y = x$ (slika 3.4). ■



Slika 3.4: Graf racionalne funkcije $f(x) = (x-1)/(x+1)$

Monotone funkcije so funkcije, pri katerih z naraščanjem vrednosti neodvisne spremenljivke stalno narašča (ali stalno pada) tudi vrednost odvisne spremenljivke. Povejmo natančneje:

Definicija 3.1.1. Funkcija $y = f(x)$ je *naraščajoča*, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Če q je $f(x_1) < f(x_2)$, potem je f *strogo naraščajoča.*

Funkcija $y = f(x)$ je *padajoča*, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \geq f(x_2)$. Če je $f(x_1) > f(x_2)$, potem je f *strogo padajoča.*

Funkcija je *monotona*, če je padajoča ali naraščajoča in *strogo monotona*, če je strogo padajoča ali strogo naraščajoča.

Strogo monotone funkcije so injektivne, zato ima vsaka strogo monotona funkcija svojo inverzno funkcijo. Inverzna funkcija naraščajoče funkcije je spet naraščajoča, inverzna funkcije padajoče funkcije je padajoča.

Računanje s funkcijami

Iz funkcij lahko na različne načine sestavljamo nove funkcije. Če imamo funkciji $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : D \to \mathbb{R}$ z enakima definicijskima območjema, lahko tvorimo njuno vsoto in razliko:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

njun produkt

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

ki imajo vse definicijsko območje D, in njun kvocient

$$f/g : D' \to \mathbb{R} \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

ki ima za definicijsko območje množico

$$D' = \{x \in D,\ g(x) \neq 0\} \subseteq D.$$

Primer 3.1.5.

1. Funkcija oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

   je *polinom*. Vsak člen polinoma je produkt konstante a_i, ki ji pravimo *koeficient*, in potenčne funkcije x^i. Koeficientu $a_n \neq 0$ pri najvišji potenci x^n pravimo *vodilni koeficient*, eksponentu n pa *stopnja polinoma*. Definicijsko območje polinoma so vsa realna števila $\mathbb{R}$.

2. Kvocientu dveh polinomov

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

   pravimo *racionalna funkcija*, njeno definicijsko območje je

$$\{x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0\}.$$

■

Če sta dani funkciji $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$ in je zaloga vrednosti Z_f vsebovana v definicijskem območju D_g, obstaja *sestavljena funkcija* ali *kompozitum* (glej razdelek 1.1.2)

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Primer 3.1.6. Če sta

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{in} \quad g(x) = \sqrt{x},$$

je funkcija

$$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

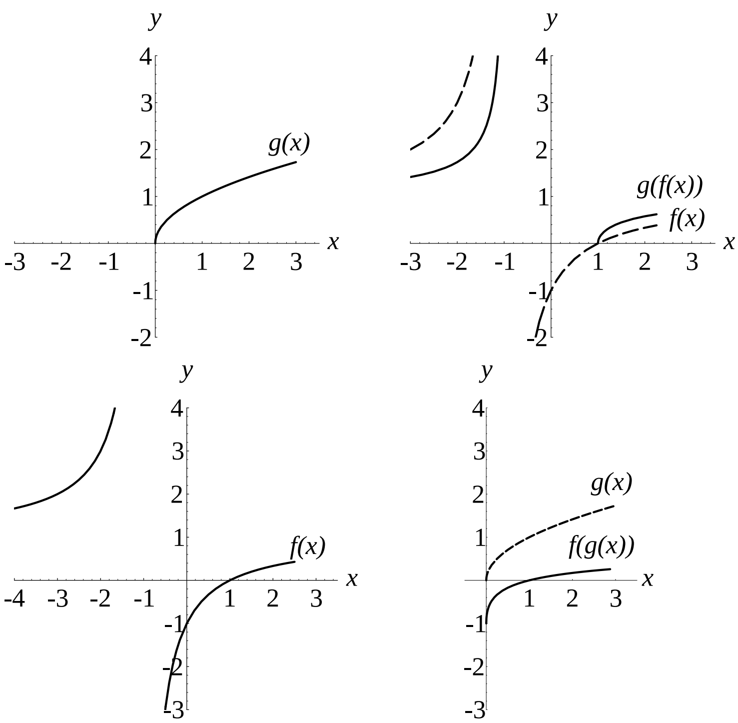
definirana za vsak $x \geq 0$, funkcija

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

pa je definirana, če je

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0, \quad \text{torej} \quad x < -1 \quad \text{ali} \quad x \geq 1.$$

Grafe sestavljenih funkcij pogosto rišemo v dveh (ali več) korakih, tako kot so funkcije sestavljene (slika 3.5). ■



Slika 3.5: Konstrukcija grafov sestavljenih funkcij iz primera 3.1.6

Če je f obrnljiva in f^{-1} njena inverzna funkcija, velja zveza

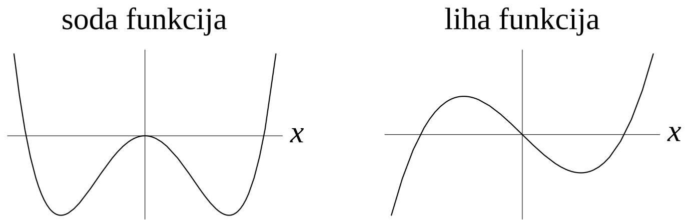
$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Sode in lihe funkcije

Naj bo definicijsko območje D funkcije f simetrično glede na točko $0 \in \mathbb{R}$, na primer $D = (-a, a)$.

Definicija 3.1.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *soda*, če je $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in D$. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *liha*, če je $f(x) = -f(-x)$ za vsak $x \in D$.

Graf sode funkcije je krivulja, ki je simetrična glede na os y. Graf lihe funkcije pa je simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.



Slika 3.6: Soda in liha funkcija

Primer 3.1.7. Poglejmo si nekaj primerov sodih in lihih funkcij:

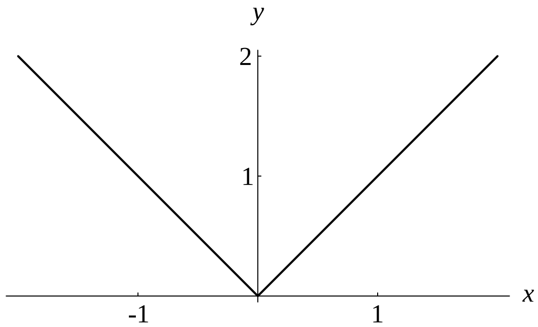
1. Funkcija, ki vsakemu številu priredi njegovo absolutno vrednost,
$$f(x) = |x|$$
je soda, kajti $|-x| = |x|$. Njen graf je simetričen glede na os y (slika 3.7).

2. Funkcija
$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$$
je liha, ker je
$$f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -f(x).$$

3. Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ je soda, če je $n = 2k$ sodo število, in liha, če je $n = 2k+1$ liho število (slika 3.8).

4. Korenska funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je liha, če je $n = 2k+1$ liho število, če je n sodo, pa ni ne liha ne soda, ker njeno definicijsko območje $D = [0, \infty)$ v tem primeru ni simetrično glede na izhodišče. ■

Trditev 3.1.1. *Vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih funkcij je liha funkcija. Produkt (ali kvocient) dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt sode in lihe funkcije pa je liha funkcija.*



Slika 3.7: Graf funkcije $f(x) = |x|$.

Dokažimo, da je produkt dveh lihih funkcij soda funkcija. Če je $f(-x) = -f(x)$ in $g(-x) = -g(x)$, je

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) \\ &= (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)\end{aligned}$$

in trditev za ta primer je dokazana. Dokazi vseh ostalih primerov so prav tako preprosti, zato jih prepustimo bralcu.

Primer 3.1.8. Polinom s samimi sodimi potencami je soda funkcija, polinom s samimi lihimi potencami pa je liha funkcija. Na primer:

$$f(x) = x^6 + 4x^2 - 1$$

je soda (konstanta je soda potenca $1 = x^0$),

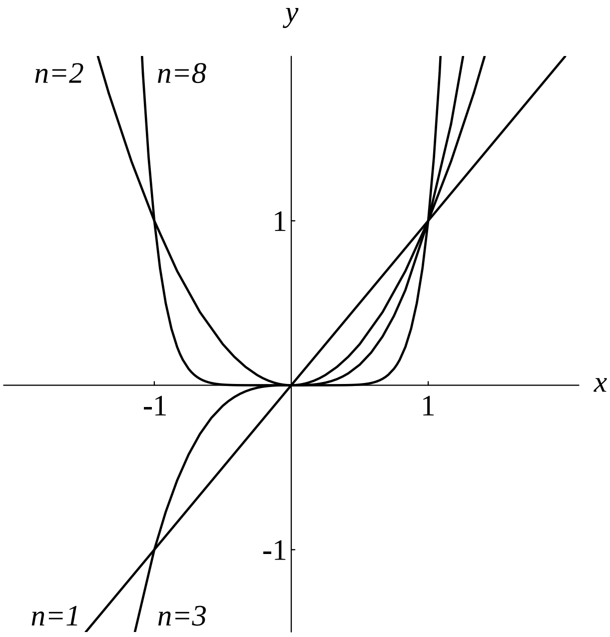
$$g(x) = x^7 - 5x^5 + 3x^3 - x \quad \text{in} \quad h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$

sta lihi funkciji. ■

3.2 Zvezne funkcije

Oglejmo si funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x \;; & \text{za} \quad x \leq 0 \\ 0 \;; & \text{za} \quad 0 < x < 1 \\ x - 2; & \text{za} \quad x \geq 1 \end{cases} . \tag{3.1}$$



Slika 3.8: Grafi funkcij $f(x) = x^n$ za $n = 1, 2, 3, 8$.

Funkcija $f(x)$ je *zlepek* treh linearnih funkcij. Njen graf (slika 3.9) je v točki $x = 0$ nepretrgana krivulja, v točki $x = 1$ pa je pretrgan. Vedenje funkcije f v okolici točke 0 je torej bistveno različno kot njeno vedenje v okolici točke 1 — funkcijska vrednost $f(x)$ v točkah x, ki so blizu točke 0, se ne razlikuje dosti od vrednosti $f(0) = 0$, vrednost $f(x)$ v točkah $x < 1$, ki so zelo blizu 1, pa se od $f(1)$ razlikuje skoraj za 1.

Pravimo, da je f v točki 0 zvezna, v točki 1 pa nezvezna. Razliko med vedenjem funkcije f v točki 0 in v točki 1 opišimo natančneje.

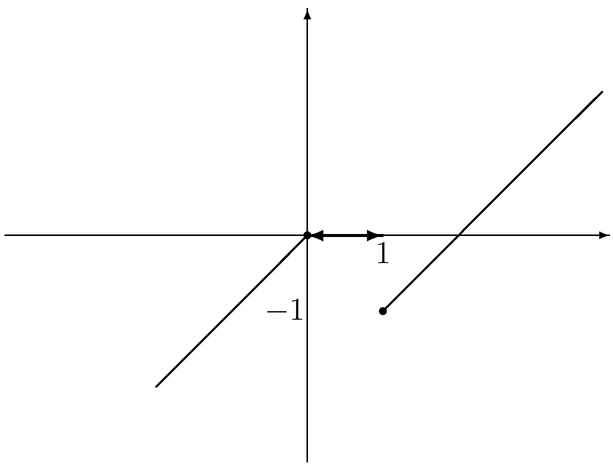
Definicija 3.2.1. Funkcija f je v točki x_0 *zvezna*, če lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da je

$$|\Delta y| = |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

če je $|h| < \delta$.

Drugače povedano: za vsako ε-okolico $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ točke $f(x_0)$ na osi y obstaja taka δ-okolica $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ točke x_0 na osi x, da je $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (slika 3.10).

Ohlapno rečeno: funkcija je zvezna takrat, kadar majhna sprememba neodvisne spremenljivke povzroči majhno spremembo funkcijske vrednosti.



Slika 3.9: Nezvezna funkcija, definirana z enačbo (3.1)

Zavedati se moramo pomena zveznosti (oziroma pasti, ki jih skriva nezveznost) v praksi. Kadar računamo, uporabljamo le nekatera racionalna števila, vsa ostala števila pa zaokrožujemo, torej zanje uporabljamo neke približke. Če je funkcija v točki x_0 zvezna in x_1 približek za x_0, bo vrednost $f(x_1)$ približek za vrednost $f(x_0)$ — v okviru predpisane (ali željene) natančnosti, če je le napaka $|x_0 - x_1|$ dovolj majhna. Če funkcija v točki x_0 ni zvezna, se lahko vrednost $f(x_1)$ močno razlikuje od vrednosti $f(x_0)$, ne glede na to, kako dober približek za vrednost x_0 je x_1.

Primer 3.2.1. Pokažimo, da funkcija (3.1) v točki 0 zadošča definiciji zveznosti.

Vzemimo poljubno majhen $\varepsilon > 0$. Če je $|h| < 1$, je

$$f(h) - f(0) = \begin{cases} 0; & h > 0 \\ h; & h \le 0 \end{cases} .$$

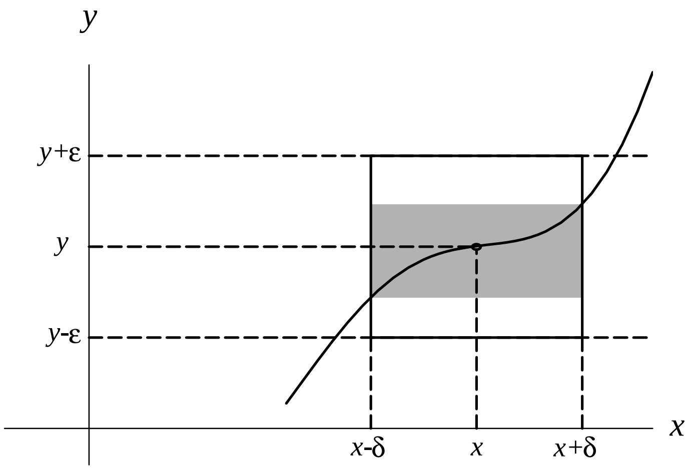
Neenačba

$$|f(h) - f(0)| < \varepsilon$$

je izpolnjena za vsak $|h| < \varepsilon$, torej je iskani $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$.

Pokažimo še, da funkcija f v točki 1 ni zvezna. Tu je

$$f(1+h) - f(1) = \begin{cases} -1; & h < 0 \\ h; & h \ge 0 \end{cases} .$$



Slika 3.10: Definicija zvezne funkcije

Za vsak $\delta < 1$, je $|f(1+h) - f(1)| = 1$, če je $|h| < \delta$ in $h < 0$, torej ta razlika ne more biti manjša od nobenega $\varepsilon < 1$. ∎

Limita

Ugotavljanje zveznosti funkcije le na podlagi definicije je precej naporno celo pri tako preprostih funkcijah kot je (3.1). Potrebujemo kakšen bolj praktičen kriterij za zveznost, s katerim si lahko pomagamo. Do takega kriterija pridemo s pomočjo pojma limite funkcije.

Definicija 3.2.2. Naj bo funkcija f definirana na intervalu (a, b), razen morda v eni točki $\xi \in (a, b)$. Pravimo, da funkcija f *konvergira* k vrednosti l, ko gre x proti ξ, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

če je le $|\xi - x| < \delta$.

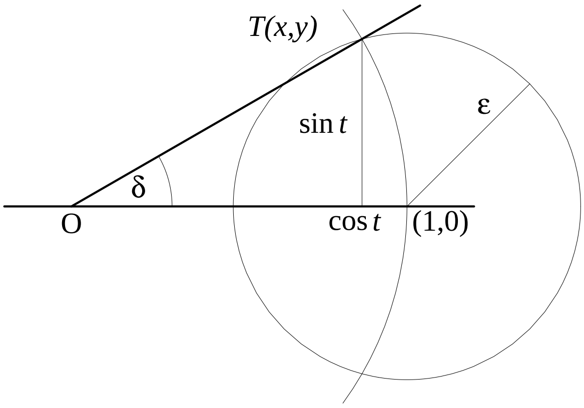
Število l je *limita* funkcije f v točki ξ, kar zapišemo:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l \quad \text{ali pa} \quad f(x) \to l,\ x \to \xi.$$

Primer 3.2.2. Limite funkcij:

1. Limita funkcije (3.1) v točki 0 je

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$



Slika 3.11: Limiti funkcij $\sin t$ in $\cos t$, $t \to 0$

2. Spomnimo se definicije kotnih funkcij sin in cos: naj bo t kot z vrhom v koordinatnem izhodišču v ravnini in prvim krakom na osi x, točka $T(x, y)$ pa presečišče drugega kraka s krožnico

$$K = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1\}$$

(pri tem merimo kote v pozitivni smeri, tj. v nasprotni smeri vrtenja urinega kazalca). Potem je $x = \sin t$ in $y = \cos t$. Na sliki 3.11 vidimo, da za vsak, še tako majhen $\varepsilon > 0$ najdemo tak kot δ, da je

$$|\sin h| < \varepsilon \quad \text{in} \quad |\cos h - 1| < \varepsilon$$

za vsak $|h| < \delta$: okrog točke $(1, 0)$ narišemo krožnico s polmerom ε in drugi krak kota δ potegnemo skozi tisto presečišče te krožnice s krožnico K, ki je v zgornji polravnini. Iz te konstrukcije sledi

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

■

Funkcija (3.1) v točki 1 nima limite: če se x številu 1 približuje z leve strani, je funkcijska vrednost ves čas enaka 0, če se približuje z desne, pa se $f(x)$ približuje vrednosti -1. V takšnem primeru pravimo, da ima funkcija *levo limito* enako 0, *desno limito* pa -1. Splošneje:

Definicija 3.2.3. Funkcija f, definirana na intervalu (a, b), *konvergira z leve* k vrednosti l, ko x narašča proti b, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

če je $b - \delta < x < b$.

Število l je *leva limita* funkcije f v točki b, kar zapišemo

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = l \quad \text{ali} \quad f(x) \to l,\ x \nearrow b.$$

Podobno definiramo pojem desne limite:

Definicija 3.2.4. Funkcija f, definirana na (a, b), *konvergira z desne* k vrednosti l, ko x pada proti a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

če je $a < x < a + \delta$.

Število l je *desna limita* funkcije f v točki a, kar zapišemo:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = l \quad \text{ali} \quad f(x) \to l,\ x \searrow a.$$

Neposredno iz definicij sledi:

Trditev 3.2.1.

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l$$

natanko takrat, kadar je

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x) = l.$$

Limite smo srečali že pri zaporedjih, zato poglejmo kakšna je zveza med limito funkcije in limito zaporedja:

Izrek 3.2.2. *Naj bo f definirana na intervalu (a, b), razen morda v točki $\xi \in (a, b)$. Potem je*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l$$

natanko takrat, kadar za vsako zaporedje (x_n) z intervala (a, b), ki konvergira proti ξ, zaporedje slik $(f(x_n))$ konvergira proti l.

Dokaz: Naj bo (x_n) konvergentno zaporedje, $\{x_n\} \subset (a, b)$ z limito $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ in $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$. Pokažimo, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Ko izberemo $\varepsilon > 0$, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - l| < \varepsilon$, če je le $|x - \xi| < \delta$. Ker zaporedje (x_n) konvergira proti ξ, obstaja naravno število n_0, da za vsak $n > n_0$ velja ocena $|x_n - \xi| < \delta$, od tod pa sledi, da je $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Dokazali smo, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Recimo, da limita funkcije $f(x)$, ko $x \to \xi$ ne obstaja, ali je različna od l. Pokazati moramo še, da v tem primeru obstaja tako zaporedje (x_n), ki konvergira proti ξ, za katero zaporedje slik $(f(x_n))$ ne konvergira proti vrednosti l.

Če število l ni limita funkcije $f(x)$, ko $x \to \xi$, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je v vsaki δ-okolici točke ξ vsaj ena točka x, za katero je $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Tudi za vsak $\delta = 1/n$ obstaja taka točka x_n, da je $|\xi - x_n| < 1/n$ in $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Zaporedje (x_n), ki ga tako dobimo, očitno konvergira proti ξ, vse vrednosti $f(x_n)$ pa so od l oddaljene za več kot ε, torej zaporedje $(f(x_n))$ gotovo ne konvergira k l. □

Podobne trditve veljajo tudi za levo in desno limito funkcije. Na primer: $\lim_{x\nearrow b} f(x) = l$ natanko takrat, ko za vsako naraščajoče zaporedje $x_n \to b$ velja $f(x_n) \to l$.

Vpeljimo še nekaj oznak, ki jih bomo pogosto uporabljali.

Naj bo $f(x) = g(x)/h(x)$, kjer sta funkciji $g(x)$ in $h(x)$ zvezni v točki a in je $h(x) \neq 0$ za $x \neq a$, $h(a) = 0$ in $g(a) \neq 0$. V tem primeru pravimo, da ima funkcija v točki *a pol*. Ko se x približuje polu, raste (ali pada) vrednost $f(x)$ preko vseh meja. Graf funkcije $f(x)$ se približuje navpični premici $x = a$, ki ji pravimo *navpična asimptota*. Takšno vedenje funkcije opišemo simbolično

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \text{ali} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Prva oznaka pomeni, da za vsak M obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$ za vsak $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Podobno velja za $-\infty$.

Podobno definiramo oznake:

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\nearrow a} f(x) = \infty$$

ter

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\nearrow a} f(x) = -\infty.$$

Če je funkcija $f(x)$ definirana na neomejenem intervalu $[a, \infty)$, se lahko funkcijska vrednost približuje neki končni vrednosti A, ko raste $x \to \infty$. V tem primeru se graf funkcije $f(x)$ približuje vodoravni premici $y = A$, ki ji pravimo *vodoravna asimptota*. Takšno vedenje funkcije zapišemo simbolično

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

kar pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M > a$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je $x > M$.

Če skupaj z x tudi funkcijska vrednost raste preko vseh meja, torej če za vsak A obstaja tak M, da je $f(x) > A$, če je $x > M$, zapišemo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Podobno lahko opišemo tudi vedenje funkcije, ki je definirana na neomejenem intervalu $(-\infty, b]$, ko gre $x \to -\infty$.

Kriteriji za zveznost funkcije

Limita funkcije v točki $x = \xi$ lahko obstaja ali ne — ne glede na to, ali je funkcija v tej točki definirana. Če je vrednost $f(\xi)$ definirana, velja:

Trditev 3.2.3. *Funkcija $f(x)$ je v točki ξ zvezna natanko takrat, kadar njena limita v točki ξ obstaja in velja*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi).$$

Zadnja trditev je preprosta posledica definicij zveznosti in limite in določa zelo uporaben kriterij za ugotavljanje zveznosti. Pogosto raje uporabimo enakovredno trditev:

Trditev 3.2.4. *Funkcija $f(x)$ je v točki ξ zvezna natanko takrat, kadar je*

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Primer 3.2.3. Če se še zadnjič vrnemo k primeru (3.1), zlahka ugotovimo, da je

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0) = 0,$$

in f je v točki $x=0$ zvezna. V točki $x=1$ je

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x\searrow 1} f(x) = f(1) = -1,$$

zato f v točki $x=1$ ni zvezna. ■

Ker je $\lim_{x\searrow 1} f(x) = f(1)$ pravimo, da je funkcija (3.1) v točki $x=-1$ *zvezna z desne.*

Definicija 3.2.5. Funkcija f je v točki $x=\xi$ *zvezna z leve*, če je

$$\lim_{x\nearrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

in *zvezna z desne*, če je

$$\lim_{x\searrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Pogosto se zgodi, da funkcija f v točki $x=\xi$ ni definirana, vendar obstaja $\lim_{x\to\xi} f(x)$. V takih primerih lahko dodatno definiramo

$$f(\xi) = \lim_{x\to\xi} f(x).$$

Strogo gledano smo tako dobili novo funkcijo, ki ima večje definicijsko območje kot f (za točko ξ), vendar so njene vrednosti enake vrednostim funkcije f povsod, kjer je ta definirana, v točki ξ pa je ta nova funkcija zvezna. Pravimo, da smo funkcijo f *zvezno razširili* na točko ξ.

Primer 3.2.4. Naj bo

$$f(x) = \frac{(1+x)^2-1}{x}.$$

Funkcija f v točki 0 seveda ni definirana, obstaja pa

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0}(2+x) = 2.$$

Če torej dodatno definiramo

$$f(0) = 2,$$

smo f zvezno razširili na 0 (in povsod velja $f(x) = x+2$). ■

Zapišimo še en koristen kriterij za ugotavljanje zveznosti, ki prav tako sledi neposredno iz definicije limite in zveznosti:

Trditev 3.2.5. *Funkcija $f(x)$, definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$ zvezna natanko takrat, kadar je*

$$\lim_{h\to 0} \Delta y = \lim_{h\to 0}(f(\xi + h) - f(\xi)) = 0,$$

torej, kadar gre prirastek Δy odvisne spremenljivke proti 0, ko gre prirastek h neodvisne spremenljivke proti 0.

Primer 3.2.5.

1. Pokažimo, da je konstantna funkcija $f(x) = c$ zvezna v vsaki točki x:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

   in očitno je tudi

$$\lim_{h\to 0} \Delta y = 0.$$

2. Pokažimo še za identično funkcijo $f(x) = x$, da je zvezna v vsaki točki

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}((x+h) - x) = 0.$$

■

Naslednji kriterij za zveznost je neposredna posledica izreka 3.2.2:

Izrek 3.2.6. *Funkcija $f(x)$, definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$ zvezna natanko takrat, kadar za vsako konvergentno zaporedje $x_n \to \xi$ velja $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Računanje z zveznimi funkcijami

Iz izreka 3.2.2 sledi, da ima limita funkcije podobne lastnosti kot limita zaporedja:

Izrek 3.2.7. *Če sta funkciji f in g definirani na intervalu (a,b), razen morda v točki $\xi \in (a,b)$ in je $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ in $\lim_{x\to\xi} g(x) = m$, velja:*

$$\lim_{x\to\xi}(f(x) \pm g(x)) = l \pm m$$

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = lm,$$

in, če je $g(x) \neq 0$ v neki okolici točke xi in $m \neq 0$,

$$\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l}{m}.$$

Posledica 3.2.8. *Če sta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ zvezni v točki $\xi \in (a,b)$, so v ξ zvezne tudi funkcije $f(x) \pm g(x)$ in $f(x)g(x)$. Če je $g(\xi) \neq 0$, je v ξ zvezna tudi funkcija $f(x)/g(x)$.*

Primer 3.2.6. Oglejmo si nekaj zveznih funkcij. V primeru 3.2.5 smo pokazali, da je identična funkcija zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$. Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ je produkt n zveznih funkcij $f(x) = x \cdot x \cdots x$, zato je zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$.

Ker je konstanta tudi zvezna funkcija (glej primer 3.2.5), je produkt ax^n zvezna funkcija.

Polinom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je zato vsota zveznih funkcij in je zvezen v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$.

Racionalna funkcija je kvocient dveh zveznih funkcij

$$q(x) = \frac{a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots b_1 x + b_0}$$

in je zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$, kjer je definirana, tj. tam, kjer je imenovalec različen od 0. ■

Tudi naslednji izrek je neposredna posledica podobnega izreka 2.1.6, ki govori o limitah zaporedij:

Izrek 3.2.9. *Če za funkcije $f(x)$, $g(x)$ in $h(x)$, ki so definirane na intervalu (a,b), razen morda v točki $\xi \in (a,b)$, povsod velja*

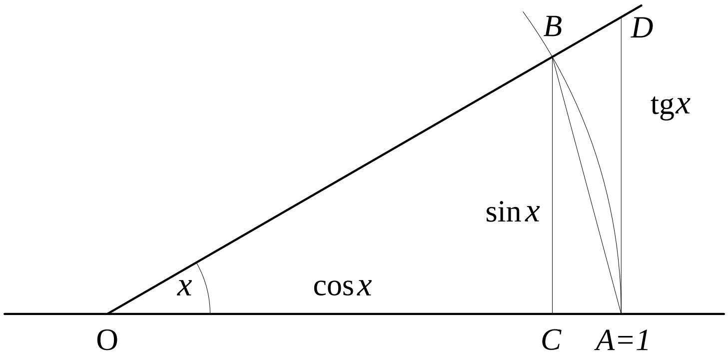
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

in

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} h(x) = l,$$

je tudi

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l.$$



Slika 3.12: Konvergenca funkcije $(\sin x)/x$

Primer 3.2.7. Uporaba izreka 3.2.9:

1. Izračunajmo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

   Na sliki 3.12 je ploščina trikotnika $\triangle OAB$ enaka $(\sin x)/2$, ploščina krožnega izseka $\sphericalangle OAB$ je $x/2$, ploščina trikotnika $\triangle OAD$ pa $(\operatorname{tg} x)/2$. Očitno je, da so te ploščine urejene po velikosti, torej za vsak $x > 0$ velja
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

   Za $0 < x < \pi$ je $\sin x > 0$ in zgornjo neenakost lahko delimo s $\sin x$, da dobimo
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{oziroma} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

   V primeru 3.2.2 smo se prepričali, da je $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, zato iz izreka 3.2.9 sledi:
$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

   Na podoben način bi se prepričali, da je tudi leva limita enaka 1:
$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. V razdelku 2.1.4 smo pokazali, da

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Pokažimo, da je tudi

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.2}$$

Ker velja neenakost

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1},$$

lahko v izreku 3.2.9 izberemo

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} \quad \text{in} \quad h(x) = \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}.$$

Ker sta limiti

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

in

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

obe enaki e, mora veljati tudi (3.2). ∎

Izrek 3.2.10. *Če obstaja*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l$$

in je funkcija $g(u)$ zvezna v točki $u = l$, obstaja tudi limita kompozituma $g \circ f$ in je

$$\lim_{x\to\xi} (g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to\xi} f(x)) = g(l).$$

Dokaz. Naj bo (x_n) poljubno zaporedje, ki konvergira proti ξ. Ker $f(x) \to l$, ko $x \to \xi$, sledi iz izreka 3.2.2, da $(f(x_n)) \to l$. Ker je $g(u)$ zvezna pri $u = f(\xi)$, je

$$(g(f(x_n))) = (g \circ f)(x_n) \to g(l).$$

Po izreku 3.2.2 je torej

$$\lim_{x \to \xi}(g \circ f)(x) = g(l).$$

□

S pomočjo trditve 3.2.3 od tod dobimo

Posledica 3.2.11. *Če je funkcija $f(x)$ zvezna v točki $x = \xi$ in funkcija $g(u)$ zvezna v točki $u = f(\xi)$, je kompozitum $(g \circ f)(x)$ zvezen v točki $x = \xi$.*

Ta rezultat lahko uporabimo tudi za dokaz zveznosti inverzne funkcije:

Izrek 3.2.12. *Če je funkcija $f(x)$ injektivna (tj. če obstaja inverzna funkcija f^{-1}) in zvezna v točki $x = \xi$, je inverzna funkcija $f^{-1}(y)$ zvezna v točki $y = f(\xi)$.*

Dokaz. Ker je f zvezna v točki $x = \xi$, je

$$\lim_{y \to f(\xi)} f(f^{-1}(y)) = f(\lim_{y \to f(\xi)} f^{-1}(y)).$$

Po drugi strani je

$$\lim_{y \to f(\xi)} f(f^{-1}(y)) = \lim_{y \to f(\xi)} y = f(\xi),$$

zato tudi

$$f(\lim_{y \to f(\xi)} f^{-1}(y)) = f(\xi).$$

Ker je f injektivna funkcija, mora biti

$$\lim_{y \to f(\xi)} f^{-1}(y) = \xi = f^{-1}(f(\xi))$$

in je, po trditvi 3.2.3, funkcija f^{-1} zvezna v točki $f(\xi)$. □

Primer 3.2.8. Funkcija $f(x) = x^n$ je zvezna, zato je tudi njej inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ zvezna: za liho število n je definirana na celi množici $\mathbb{R}$, za sodo število n pa le za $x \geq 0$. ■

Zveznost funkcij na intervalu

Definicija 3.2.6. Funkcija $f(x)$ je *zvezna na odprtem intervalu* (a, b), če je zvezna v vsaki točki $x \in (a, b)$. Funkcija $f(x)$ je *zvezna na zaprtem intervalu* $[a, b]$, če je zvezna na odprtem intervalu (a, b), zvezna z desne v točki a in zvezna z leve v točki b.

Za funkcijo, ki je zvezna na intervalu, lahko v vsaki točki tega intervala k vsakemu ε najdemo tak δ, da se bo funkcijska vrednost spremenila za manj kot ε, če se neodvisna spremenljivka spremeni za manj kot δ. Seveda pa je v vsaki točki pri istem ε lahko potreben drugačen δ. Pri nekaterih zveznih funkcijah pa pri vsakem ε na celem intervalu zadošča isti δ:

Definicija 3.2.7. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ *enakomerno zvezna*, če vsakemu $\varepsilon > 0$ pripada tak $\delta > 0$, da je neenačba

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

izpolnjena za vse take x_1, x_2 z intervala $[a, b]$, za katere je $|x_2 - x_1| < \delta$.

Primer 3.2.9. Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ je enakomerno zvezna na vsakem intervalu $[0, a]$, kjer je $a > 0$. Razliko $f(x_2) - f(x_1)$ zapišemo kot

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2}, \quad x_1 < x_2.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta = \varepsilon^2$. Ker je $x_2 \geq x_2 - x_1$, je $\sqrt{x}_2 \geq \sqrt{x_2 - x_1}$, še bolj pa $\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1 \geq \sqrt{x_2 - x_1}$. Če imenovalec v izrazu na desni v zgornji enakosti zamenjamo z $\sqrt{x_2 - x_1}$, se bo vrednost ulomka kvečjemu povečala in

$$|f(x_2) - f(x_1)| \geq \sqrt{x_2 - x_1} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Ta ocena velja za poljubni števili x_1 in x_2 z intervala $[0, a]$, ki zadoščata pogoju $|x_2 - x_1| < \delta$. Tako smo pokazali, da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, a]$ enakomerno zvezna. ■

Funkcija, ki je enakomerno zvezna na intervalu I, je zvezna v vsaki točki tega intervala. Na končnem zaprtem intervalu se pojem zveznosti in pojem enakomerne zveznosti ujemata, saj velja naslednji izrek, ki ga navajamo brez dokaza. Bralec ga najde na primer v [8].

Izrek 3.2.13. *Če je funkcija zvezna na zaprtem intervalu* $[a, b]$ *zvezna, je na tem intervalu enakomerno zvezna.*

Izrek 3.2.13 ne velja za funkcije, ki so zvezne na odprtem intervalu. Poglejmo primer:

Primer 3.2.10. Funkcija $f(x) = 1/x$ je zvezna na odprtem intervalu $(0, 1)$, torej lahko za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak $x \in (0, 1)$ najdemo tak δ, da bo $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ za vsak $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Vendar pa je velikost tega δ močno odvisna od tega, kje na intervalu leži točka x — če je bliže krajišča 1, kjer se funkcija spreminja čedalje počasneje, je δ lahko bistveno večji kot če je x blizu krajišča 0, kjer se funkcija zelo hitro spreminja. Drugače povedano, za še tako majhen δ, bo razlika

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right|$$

večja od poljubnega ε, če sta le x_1 in x_2 dovolj majhna in med seboj različna.

■

V preostanku tega razdelka bomo navedli nekaj lastnosti funkcij, zveznih na zaprtem intervalu, ki jih bomo kasneje še večkrat uporabili.

Izrek 3.2.14. *Funkcija* f *naj bo zvezna na intervalu* $[a, b]$ *in naj bo v krajiščih intervala različno predznačena:* $f(a)f(b) < 0$*. Potem obstaja vsaj ena točka* $\xi \in (a, b)$*, kjer je* $f(\xi) = 0$*.*

Geometrijsko je izrek preprosto utemeljiti: če je vrednost funkcije v krajiščih intervala nasprotno predznačena, je graf funkcije na obeh bregovih abscisne osi in mora, ker je neprekinjena krivulja, vsaj enkrat sekati abscisno os.

Pri dokazu izreka bomo uporabili *metodo bisekcije*, ki je uporabna tudi za numerično iskanje ničel funkcij.

Dokaz. Vzemimo, da je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$. Interval $[a, b]$ razpolovimo s točko $x_1 = (a + b)/2$. Če je $f(x_1) = 0$, smo ničlo že našli, če je $f(x_1) < 0$, funkcija zamenja znak na podintervalu $[x_1, b]$, sicer pa na $[a, x_1]$. Interval, na katerem funkcija zamenja znak, zopet razpolovimo s točko x_2. Če je $f(x_2) \neq 0$, izberemo podinterval, na katerem f zamenja znak. Če ta postopek nadaljujemo, dobimo zaporedje (x_n), s členi, ki so razpolovišča podintervalov, izberanih na vsakem koraku. Dolžina podintervala, ki ga izberemo na n-tem koraku je $(a-b)/2^n$ in na tem podintervalu so vsi členi od n-tega dalje, torej za vsak p velja:

$$|x_n - x_{n+p}| < (b-a)/2^n.$$

Zaporedje (x_n) zadošča Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentno. Njegovo limito označimo s ξ.

Pokažimo, da je ξ iskana ničla, da je torej $f(\xi) = 0$. Če bi veljalo $f(\xi) = \varepsilon > 0$, bi zaradi zveznosti funkcije f obstajal nek tak δ, da bi za vsak $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ veljalo

$$|f(x) - f(\xi)| = |f(x) - \varepsilon| < \varepsilon,$$

torej $f(y) > 0$. Po drugi strani pa iz konstrukcije števila ξ sledi, da so v vsaki njegovi okolici tako točke x, kjer je $f(x)$ pozitivna kot tudi točke, kjer je $f(x)$ negativna. Podobno se prepričamo, da ne more biti $f(x_0) < 0$, torej ostane le $f(x_0) = 0$. □

Definicija 3.2.8. Funkcija f je na množici A *omejena*, če je slika

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} \subset \mathbb{R}$$

omejena množica.

Izrek 3.2.15. *Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na tem intervalu omejena.*

Dokaz: Recimo, da funkcija $f(x)$ na zaprtem intervalu $[a, b]$ ni navzgor omejena. Potem obstaja za vsak $n \in \mathbb{N}$ taka točka $x_n \in [a, b]$, da je $f(x_n) > n$. Tako dobljeno zaporedje (x_n) je omejeno, ker so vsi členi na intervalu $[a, b]$, torej ima vsaj eno stekališče $\xi \in [a, b]$. V točki xi funkcija f ne more biti zvezna, saj v vsaki okolici te točke obstajajo členi zaporedja (x_n), za katere je $f(x_n) > n$ za poljubno veliko število n in zato ne moremo najti tako majhnega števila δ, da bi neenačba $|f(\xi + h) - f(\xi)| < 1$ za vsak $|h| < \delta$. □

Množica vrednosti $f([a, b])$ zvezne funkcije je torej omejena množica, zato ima svojo natančno zgornjo mejo $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ in svojo natančno spodnjo mejo $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$.

Izrek 3.2.16. *Funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, zavzame v neki točki $x_m \in [a, b]$ svojo natančno spodnjo mejo m in v neki točki $x_M \in [a, b]$ svojo natančno zgornjo mejo M.*

Dokaz: Dokažimo, da funkcija zavzame svojo natančno zgornjo mejo $M = \sup\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja kakšna točka $y_n = f(x_n)$, za katero velja

$$y_n > M - 1/n.$$

Tako imamo dve zaporedji: konvergentno zaporedje $(y_n) = (f(x_n))$ z limito M in omejeno zaporedje (x_n) s členi $\{x_n\} \subset [a,b]$. Naj bo ξ stekališče zaporedja (x_n). Ker je f zvezna na intervalu $[a,b]$, mora biti

$$M = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$$

in funkcija f v točki ξ zavzame svojo natančno zgornjo mejo d. □

Izrek 3.2.17. *[Izrek o vmesnih vrednostih] Funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, na tem intervalu zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M.*

Dokaz: Če je f konstantna funkcija, je $m = M$ in funkcija to vrednost tudi zavzame v vsaki točki intervala.

Če f ni konstantna funkcija, je $m < M$. Naj bo število $A \in (m, M)$. Pokazati moramo, da obstaja število $x_A \in [a,b]$, da je $f(x_A) = A$.

Po izreku 3.2.16 na $[a,b]$ obstajata točki x_m in x_M, za kateri je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Ker f ni konstantna funkcija, je $m \neq M$. Razlika $f(x) - A$ je na intervalu med x_m in x_M zvezna funkcija in v krajiščih zavzame vrednosti

$$f(x_m) - A = m - A < 0 \quad \text{in} \quad f(x_M) - A = M - A > 0,$$

ki sta nasprotno predznačni. Po Izreku 3.2.14 je med x_m in x_M vsaj ena točka x_A, kjer je $f(x_A) - A = 0$, torej je tam $f(x_A) = A$. □

Zadnje tri izreke lahko na kratko povzamemo v obliki enega samega izreka

Izrek 3.2.18. *Zaprt intervala se z zvezno funkcijo preslika v zaprt interval.*

3.3 Pregled elementarnih funkcij

3.3.1 Algebraične funkcije

Funkcije delimo na *algebraične* in *transcendentne*. Med algebraične funkcije sodijo polinomi, racionalne funkcije, koreni in vse možne kombinacije naštetih funkcij. Natančneje:

Definicija 3.3.1. Funkcija f je *algebraična*, če odvisna spremenljivka $y = f(x)$ zadošča kakšni enačbi oblike

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

kjer so koeficient $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ polinomi spremenljivke x.

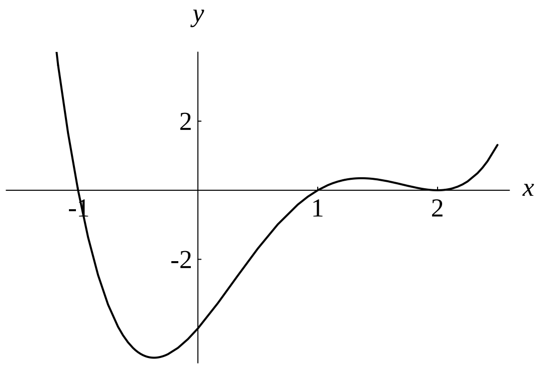
Na primer, funkcija $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je algebraična, ker $y = f(x)$ zadošča enačbi:

$$y^2 + x^2 - 1 = 0.$$

Vsote, produkti, kvocienti, potence in kompozitumi algebraičnih funkcij so spet algebraične funkcije.

Primer 3.3.1. Narišimo nekaj grafov algebraičnih funkcij:

1. Približno narišimo graf polinoma $p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)^2$.



Slika 3.13: Graf polinoma $p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)^2$.

Polinom p_4 ima dve navadni ničli pri $x = -1$ in $x = 1$ ter dvojno ničlo pri $x = 2$. Poglejmo si še predznak polinoma p_4 na vsakem od odsakov, na katere ničle razdelijo realno os:

$(-\infty, -1)$	$\{-1\}$	$(-1, 1)$	$\{1\}$	$(1, 2)$	$\{2\}$	$(2, \infty)$
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$.

Graf polinoma p je na sliki 3.13.

2. Narišimo graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 2}.$$

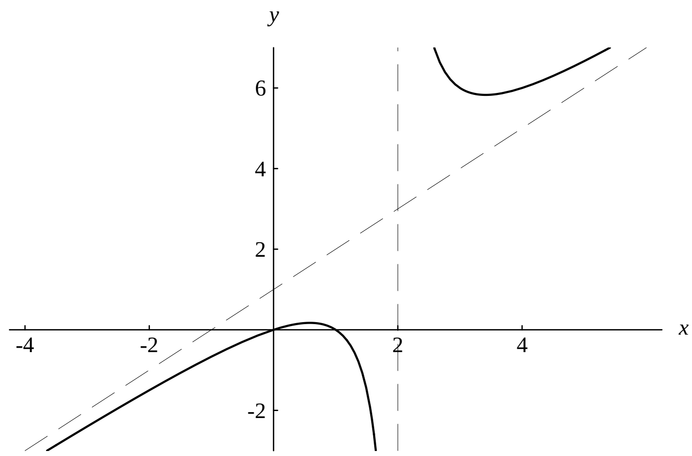
Ugotovimo:

(1) Funkcija je definirana za vsak x, razen za $x = 2$, kjer je pol.

(2) Funkcija ima vrednost 0 za tiste x, ki so rešitev kvadratne enačbe $x^2 - x = 0$, to je za $x = 0$ in za $x = 1$.

(3) Funkcija lahko spremeni predznak le v ničli ali v polu, zato je

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{za} \quad x \in (-\infty, 0) \\ > 0 & \text{za} \quad x \in (0, 1) \\ < 0 & \text{za} \quad x \in (1, 2) \\ > 0 & \text{za} \quad x \in (2, \infty). \end{cases}$$



Slika 3.14: Graf funkcije $(x^2 - x)/(x - 2)$

(4) Ker je $f(x) = x + 1 + 2/(x - 2)$ in je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-2} = 0,$$

je premica $y = x + 1$ poševna asimptota, ki se ji graf funkcije f približuje od spodaj, ko $x \to -\infty$ in od zgoraj, ko $x \to \infty$.

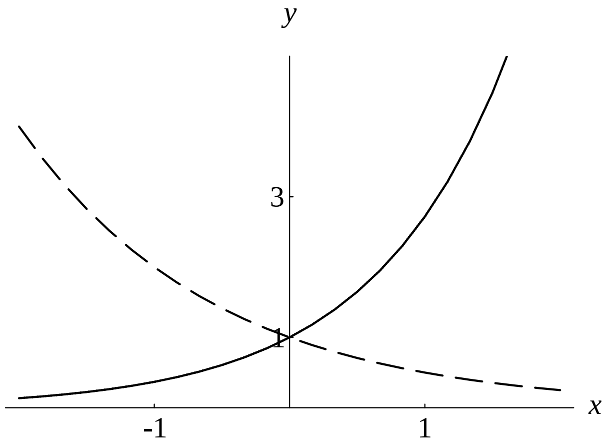
Graf funkcije f je na sliki 3.14. ■

3.3.2 Transcendentne funkcije

Funkcije, ki niso algebraične, so *transcendentne*. Med elementarne transcendentne funkcije sodijo *logaritem* in *eksponentna* funkcija, *kotne* ali *trigono-*

metrične funkcije, inverzne trigonometrične ali *ciklometrične* funkcije, *hiperbolične* funkcije in inverzne hiperbolične ali *area* funkcije. Seznama vseh transcendetnih funkcij s tem še zdaleč nismo izčrpali.

Eksponentna funkcija



Slika 3.15: Graf eksponentne funkcije a^x za $a = e$ in $a = 1/2$

Funkcija oblike

$$f(x) = a^x,$$

kjer je *osnova* a poljubno pozitivno realno število, ki ni enako 1, je *eksponentna funkcija*. Vemo že (glej definicijo 2.1.6), da je potenca enolično definirana za vsako realno vrednost eksponenta, zato je eksponentna funkcija definirana za vsak x. Zanjo sta značilna *adicijska izreka*:

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{in} \quad (a^x)^y = a^{xy}, \tag{3.3}$$

ki ju ne bomo dokazovali. Vrednost eksponentne funkcije je povsod pozitivna. Kadar je osnova $a > 1$, je eksponentna funkcija strogo naraščajoča, kadar pa je osnova $0 < a < 1$, je funkcija strogo padajoča. V matematiki je najpogosteje osnova eksponentne funkcije število e, ki smo ga definirali v razdelku 2.1.5, torej bomo najpogosteje srečevali eksponentno funkcijo $f(x) = e^x$.

Logaritemska funkcija

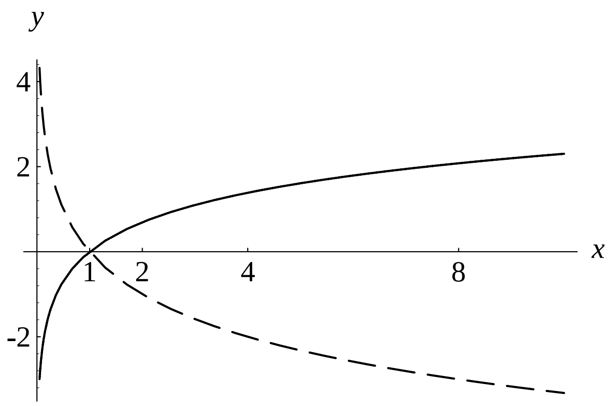
Eksponentni funkciji je je inverzna *logaritemska funkcija*. Dobimo jo tako, da v eksponentni funkciji $y = a^x$ zamenjamo spremenljivki x in y:

$$x = a^y \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad y = \log_a x.$$

Lastosti logaritemske funkcije lahko razberemo iz lastnosti eksponentne funkcije. Ker je eksponentna funkcija povsod pozitivna, je logaritemska definirana za $x > 0$. Kot eksponentna je tudi logaritemska funkcija za $a > 1$ strogo naraščajoča in za $a < 1$ strogo padajoča. Ničla logaritemske funkcije je pri $x = 1$, ker je $a^0 = 1$. Iz adicijskega izreka za eksponentno funkcijo (3.3) dobimo zvezo

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{3.4}$$

ki velja pri poljubni osnovi a.



Slika 3.16: Graf logaritemske funkcije $\log_a x$ za $a = e$ in $a = 1/2$

Kot pri eksponentni funkciji je tudi pri logaritemski v matematiki najpogosteje osnova število e. Logaritmu, ki ima za osnovo število e, pravimo *naravni logaritem* in ga navadno pišemo brez osnove, torej je $\log x = \log_e x = \ln x$.

Kotne funkcije

Osnovni kotni ali trigonometrični funkciji sta sinus in kosinus, ki smo ju definirali v razdelku 3.2. Povezani sta z enačbo

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Za funkciji sin in cos velja

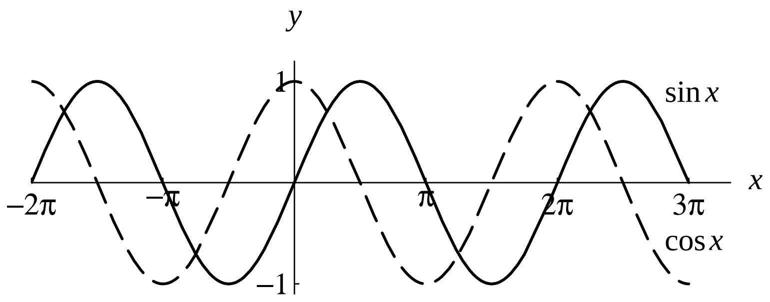
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{in} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

zato sta sin in cos *periodični funkciji* s *periodo* 2π. Splošno definiramo:

Definicija 3.3.2. Funkcija $f(x)$ je *periodična* s periodo ω, če je

$$f(x+\omega) = f(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Najmanjši periodi funkcije pravimo *osnovna perioda.*



Slika 3.17: Grafa funkcij $\sin x$ in $\cos x$

S pomočjo funkcij sin in cos sta definirani funkciji tangens in kotangens:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{in} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

in še sekans in kosekans, ki ju redkeje srečamo in ju zato tu ne bomo obravnavali. Tangens je definiran, povsod razen v točkah $\pi/2+k\pi$, kjer ima cos ničle, kotangens pa povsod razen v točkah $k\pi$, kjer ima sin ničle. Obe funkciji, tg in ctg sta periodični z osnovno periodo π.

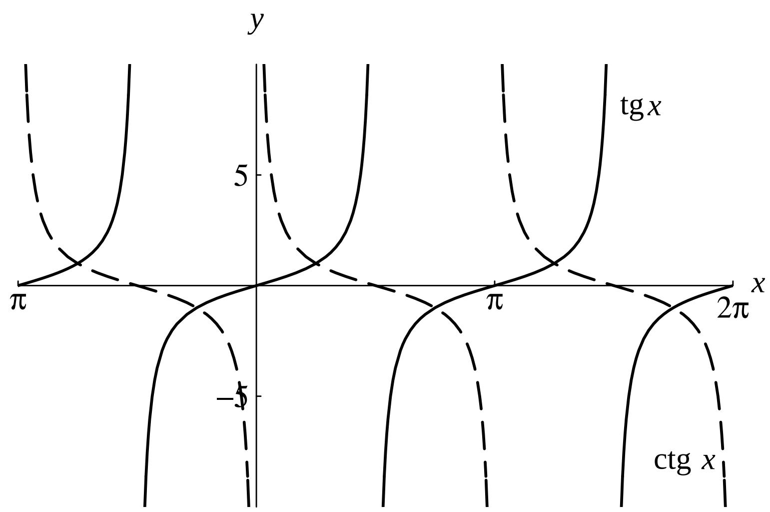
Naštejmo nekaj znanih lastnosti kotnih funkcij:

1. Funkciji sin in cos sta omejeni na vsej realni osi, njuna zaloga vrednosti je interval $[-1,1]$, funkciji tg in ctg pa imata zalogo vrednosti enako $\mathbb{R}$.

2. Funkcija sin je liha, cos pa soda. Funkciji tg in ctg sta obe lihi.

3. Spomnimo se adicijskih izrekov za kotne funkcije:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{3.5}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{3.6}$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \tag{3.7}$$
$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{1 - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} \tag{3.8}$$



Slika 3.18: Grafa funkcij $\operatorname{tg} x$ in $\operatorname{ctg} x$

4. Kotne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane. Zveznost funkcije sinus lahko ugotovimo s pomočjo adicijskega izreka, saj je

$$\lim_{h\to 0} \sin(x+h) = \sin x \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x \lim_{h\to 0} \sin h = \sin x,$$

torej je funkcija sin zvezna na vsej realni osi. Ker je, zaradi adicijskega izreka, $\cos x = \sin(x+\pi/2)$, je tudi cos povsod zvezna funkcija. Funkciji tg in ctg sta tako kvocienta dveh zveznih funkcij in sta zato zvezni povsod, kjer sta definirani.

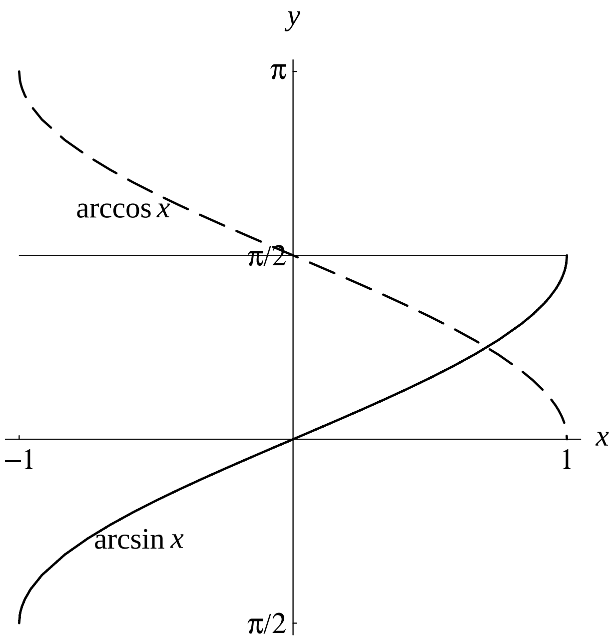
Ciklometrične funkcije

Ciklometrične funkcije so inverzne kotnim funkcijam. Pri njihovi definiciji moramo biti previdni, saj so kotne funkcije periodične in zato niso injektivne. Pri definiciji inverzne funkcije se moramo omejiti na tak interval, kjer je kotna funkcija strogo monotona, torej injektivna.

Funkcija *arkus sinus*, ki jo pišemo kot arc sin, je inverzna funkcija sinusu, omejenem na interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Definirana je z relacijo

$$x = \sin y;\ \ y \in Z_{\arcsin} = [-\pi/2, \pi/2];\ \ x \in D_{\arcsin} = [-1, 1].$$

Funkcija arc sin je naraščajoča, liha in zvezna na celem svojem definicijskem območju.



Slika 3.19: Grafa funkcij $\arcsin x$ in $\arccos x$

Funkcija *arkus kosinus*, $\arccos$, je inverzna funkcija kosinusu, omejenem na interval $[0, \pi]$. Definirana je z relacijo $x = \cos y$, kjer je $y \in Z_{\arccos} = [0, \pi]$ in $x \in D_{\arccos} = [-1, 1]$. Je padajoča in zvezna na celem svojem definicijskem območju.

Iz zveze

$$x = \cos y = \sin(\pi/2 - y), \quad y \in [0, \pi]$$

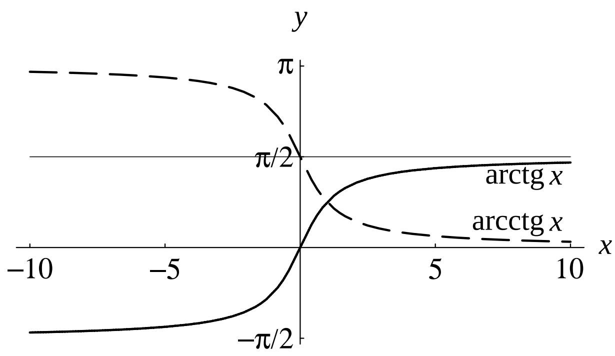
dobimo

$$y = \arccos x \quad \text{in} \quad \pi/2 - y = \arcsin x,$$

od koder sledi zveza med funkcijama $\arcsin$ in $\arccos$:

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Funkcija *arkus tangens*, $\operatorname{arc\,tg}$, je inverzna funkcija tangensu, omejenem na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ in je določena z relacijo $x = \operatorname{tg} y$, kjer je $y \in Z_{\operatorname{arc\,tg}} = (-\pi/2, \pi/2)$ in $x \in D_{\operatorname{arc\,tg}} = \mathbb{R}$. Je naraščajoča, liha in zvezna na celi množici $\mathbb{R}$. Funkcija *arkus kotangens*, $\operatorname{arc\,ctg}$, pa je inverzna kotangensu na intervalu $(0, \pi)$, torej je določena z relacijo $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in Z_{\operatorname{arc\,ctg}} = (0, \pi)$ in $x \in \mathbb{R}$ ter je padajoča in zvezna na celi množici $\mathbb{R}$.



Slika 3.20: Grafa funkcij $\operatorname{arc\,tg} x$ in $\operatorname{arc\,ctg} x$

Podobno kot za arc sin in arc cos velja:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \pi/2.$$

Hiperbolične funkcije

Hiperbolične funkcije so v marsičem podobne kotnim funkcijam. Osnovni hiperbolični funkciji sta *hiperbolični sinus*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

in *hiperbolični kosinus*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

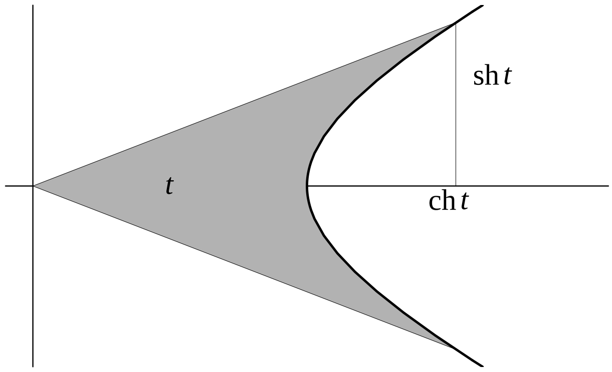
Funkciji sh in ch sta povezani s podobno enačbo kot sin in cos:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Točka s koordinatama $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ torej leži na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$. Hiperbolične funkcije bi lahko definirali podobno kot trigonometrične, tako kot kaže slika 3.21.

Poleg funkcij sh in ch sta še *hiperbolični tangens* in *hiperbolični kotangens*, ki sta definirana podobno kot pri kotnih funkcijah:

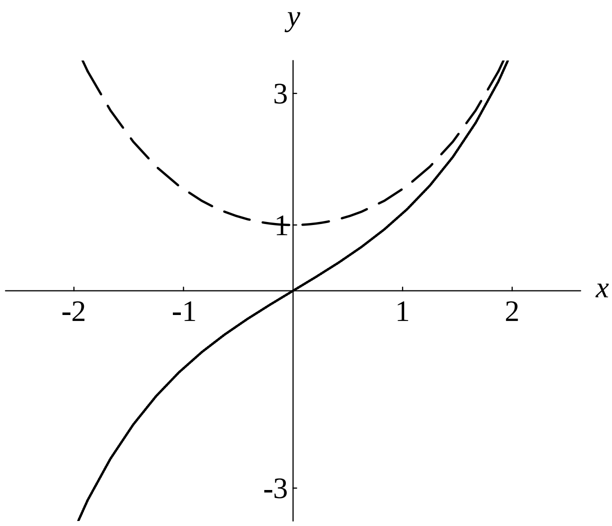
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$



Slika 3.21: Zveza med točkami hiperbole in funkcijama sh in ch.

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

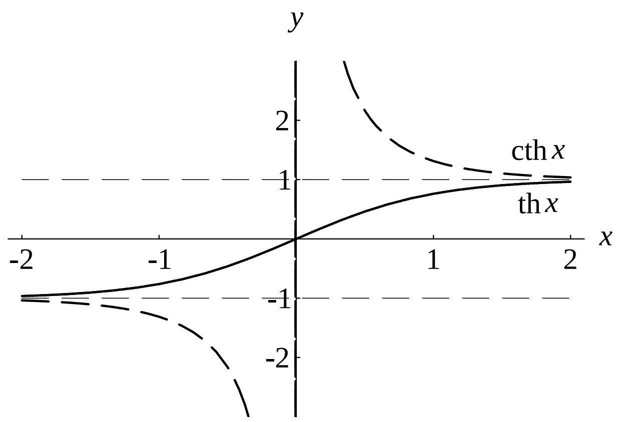
Vse hiperbolične funkcije so definirane in zvezne za vsa realna števila, razen cth, ki ni definirana za $x = 0$.



Slika 3.22: Grafa funkcij $\operatorname{sh} x$ in $\operatorname{ch} x$

Hiperbolične funkcije imajo podobne lastnosti kot trigonometrične:

1. Funkcija sh je liha, navzgor in navzdol neomejena in strogo naraščajoča.
2. Funkcija ch je soda, navzdol omejena, za $x < 0$ strogo padajoča in za $x > 0$ strogo naraščajoča.



Slika 3.23: Grafa funkcij $\operatorname{th} x$ in $\operatorname{cth} x$

3. Funkcija th je liha, omejena in strogo naraščajoča.

4. Funkcija cth je liha, neomejena in strogo padajoča na $(-\infty, 0)$ in na $(0, \infty)$.

Za hiperbolične funkcije tudi veljajo podobni adicijski izreki kot za trigonometrične funkcije:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \tag{3.9}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \tag{3.10}$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \tag{3.11}$$

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y}, \tag{3.12}$$

iz dobimo podobne relacije, kot smo jih že srečali pri trigonometričnih funkcijah:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{3.13}$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x \tag{3.14}$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x \tag{3.15}$$

Dokažimo na primer adicijski izrek za sh. Izračunajmo izraz na desni:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y && (3.16)\\
&= \frac{1}{4}\left((e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})\right) && (3.17)\\
&= \frac{1}{4}\left(2e^x e^y + 2e^{-x}e^{-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right). && (3.18)
\end{aligned}$$

To je enako $\operatorname{sh}(x + y)$. Vsi ostali dokazi so podobni. □

Inverzne hiperbolične funkcije

Funkcije sh, th in cth so injektivne, zato obstajajo njihove inverzne funkcije. Funkcija $\operatorname{ch} x$ je strogo naraščajoča za $x > 0$ in soda, zato se pri definiciji inverzne funkcije omejimo na interval $[0, \infty)$, kjer je funkcija ch strogo monotona. Inverzne funkcije hiperboličnih funkcij imenujemo *area funkcije* in jih označujemo po vrsti z Ar sh, Ar ch, Ar th in Ar cth. Podobno kot se hiperbolične funkcije izražajo racionalno z eksponentno funkcijo, se obratne hiperbolične funkcije izražajo z logaritmom algebraičnih funkcij.

Primer 3.3.2. Izračunajmo funkciji $y = \operatorname{sh} x$ inverzno funkcijo Ar sh.

Inverzna funkcija zadošča relaciji $x = \operatorname{sh} y = (e^y - e^{-y})/2$, odtod

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Iz te enačbe izračunamo $e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$, in

$$y = \operatorname{Ar sh} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Podobno lahko dobimo tudi ostale obratne hiperbolične funkcije izražene kot logaritme.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ar ch} x &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1})\\
\operatorname{Ar th} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1 + x}{1 - x}; \quad |x| < 1\\
\operatorname{Ar cth} x &= \frac{1}{2}\log\frac{x + 1}{x - 1}; \quad |x| > 1.
\end{aligned}$$

■

Literatura

[1] K. G. Binmore: *Mathematical Analysis (a straightforeward approach), 2 ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] C. H. Edwards Jr. in D. E. Penney: *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1990.

[3] R. Jamnik: *Matematika*, Partizanska knjiga, Ljubljana, 1981.

[4] P. Lax, S. Burstein in A. Lax: *Calculus with Applications and Computing, Vol I*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[5] N. Piskunov: *Differential and Integral Calculus, vol. I*, Mir Publishers, Moscow, 1974.

[6] N. Prijatelj: *Uvod v matematično analizo, 1. del*, DMFA, Ljubljana, 1980.

[7] G. B. Thomas, Jr: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1972.

[8] I. Vidav: *Višja matematika I* (10. natis), DMFA, Ljubljana, 1990.