

Digitalna vezja

UL, FRI

P4 – XOR, XNOR, Seštevalniki, Odštevalniki

Vsebina

- ▶ Funkcijsko polni sistemi - operatorji XOR, XNOR
- ▶ Linearna funkcija
- ▶ Dvojiška aritmetika
 - ▶ Polovični seštevalnik
 - ▶ Polni seštevalnik
 - ▶ Polovični odštevalnik
 - ▶ Polni odštevalnik
- ▶ n-bitni podatki (Seštevalnik, Odštevalnik)

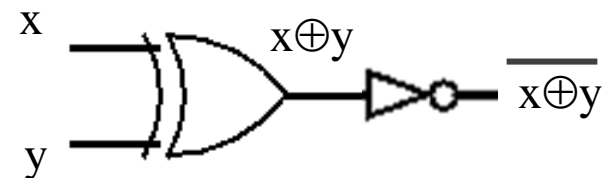
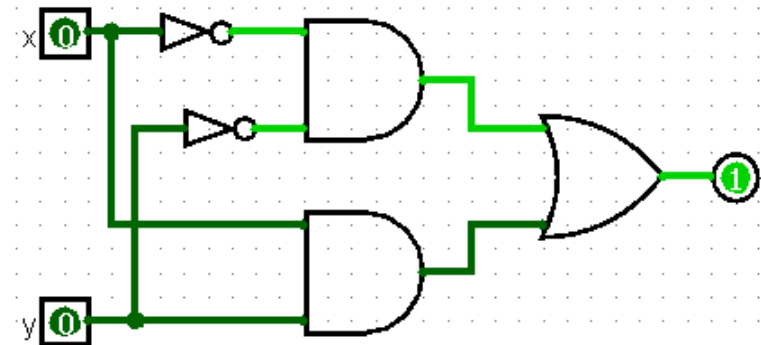
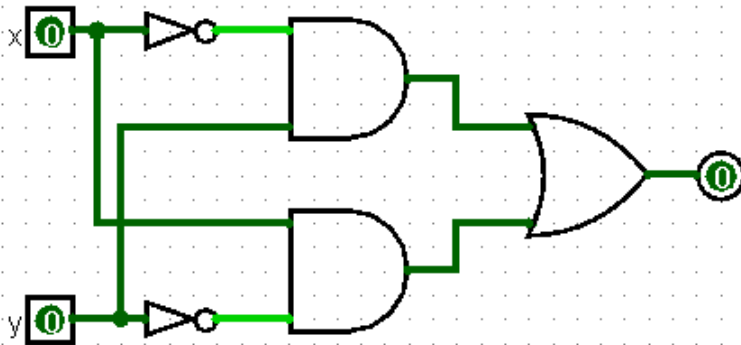
XOR, XNOR

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$x \oplus y = \bar{x}.y \vee x.\bar{y}$$

x	y	$(x \oplus y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\overline{x \oplus y} = \bar{x}.\bar{y} \vee x.y$$



Funkcijsko polni sistem

- ▶ Zapis logičnih funkcij NOT, AND, OR z izbranim naborom operatorjev:
- ▶ (XOR, AND, I)

$$x \oplus y = \bar{x}.y \vee x.\bar{y}$$

$$\bar{x} = \bar{x}.1 \vee x.0 = x \oplus 1$$

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1)} = (x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \oplus 1$$

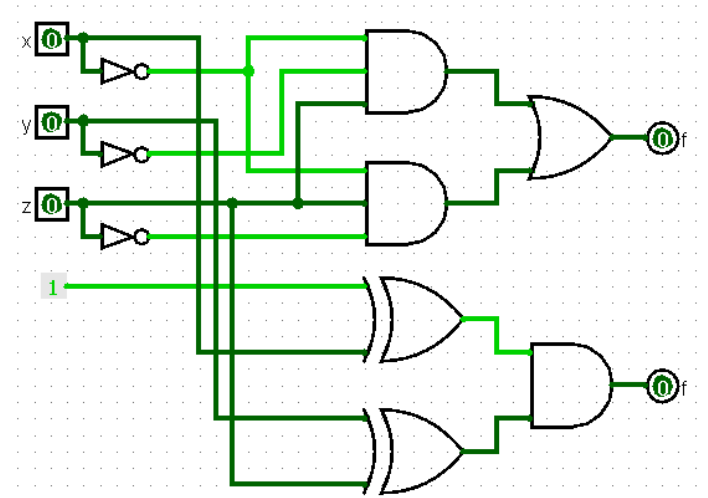
- ▶ Vse funkcije je mogoče realizirati z novim naborom operatorjev

a) PDNO

$$f(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z}$$

b) (XOR, AND, 1)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x}.(\bar{y}.z \vee y.\bar{z}) = \\ &= \bar{x}.(y \oplus z) = \\ &= (x \oplus 1).(y \oplus z) \end{aligned}$$



Linearna funkcija

- ▶ Linearne funkcije: (XOR, I): $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus a_n \cdot x_n$
- ▶ Vhodne kombinacije – zapis enačb za

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2$$

$$f_0 = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 = a_0$$

$$f_1 = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 = a_0 \oplus a_2$$

$$f_2 = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 = a_0 \oplus a_1$$

$$f_3 = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2$$

- ▶ Izračun koeficientov:

$$0 = a_0$$

$$1 = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 1$$

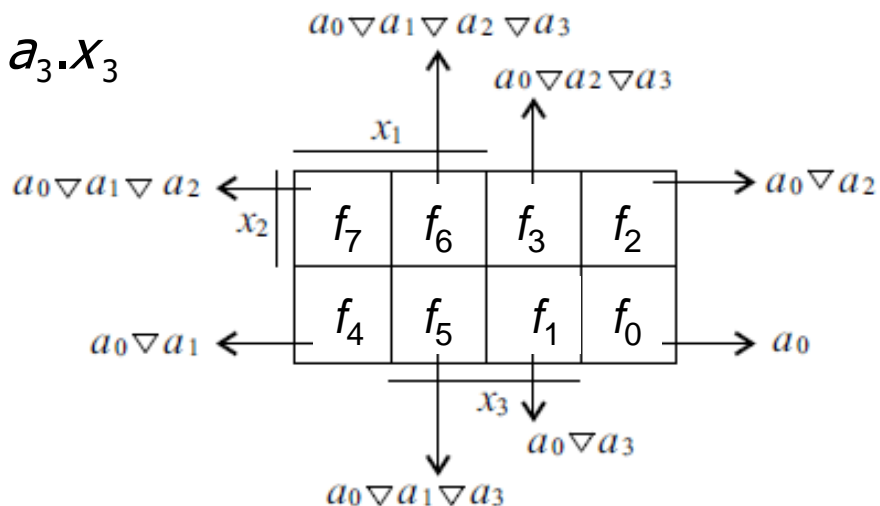
$$1 = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

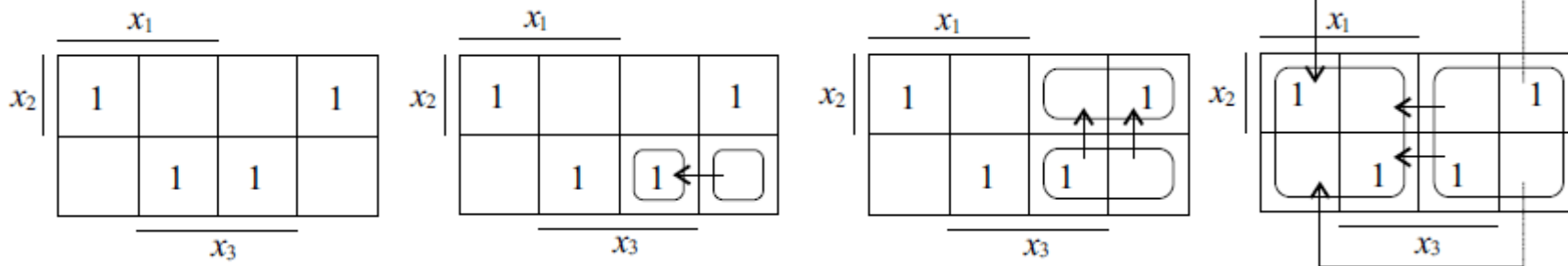
Funkcija: $f(x_1, x_2) = 0 \oplus 1 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 = x_1 \oplus x_2$

► Grafična predstavitev linearnih funkcij

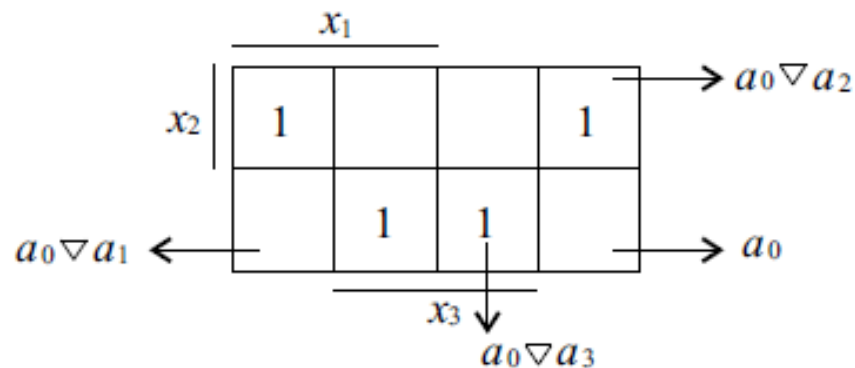
$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3$$



► Preverjanje pogoja linearnosti



- Izračun koeficientov: a_0, a_1, a_2, a_3



Slika 6.4: Enačbe za izračun koeficientov a_0, a_1, a_2, a_3

$$\begin{array}{lll}
 & & \Rightarrow a_0 = 0 \\
 a_0 \nabla a_3 = 1 & 0 \nabla a_3 = 1 & \Rightarrow a_3 = 1 \\
 a_0 \nabla a_2 = 1 & 0 \nabla a_2 = 1 & \Rightarrow a_2 = 1 \\
 a_0 \nabla a_1 = 0 & 0 \nabla a_1 = 0 & \Rightarrow a_1 = 0
 \end{array}$$

- Zapis linearne enačbe

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3 = 0 \oplus 0 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 \oplus 1 \cdot x_3 = x_2 \oplus x_3$$

Primer 1: Linearna funkcija

► Funkcija $g(x,y,z)$ ima vrednost 1 takrat, ko:

► so na vhodu same ničle

► je liho število enic na vhodu

► Zapis funkcije z XOR

► ? Linearna funkcija

x	y	z	g	\bar{g}
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

\bar{g}	\bar{z}	z
$\bar{x} \bar{y}$	1	
$\bar{x} y$		1
$x y$	1	
$x \bar{y}$		1

$$\begin{aligned}
 g &= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee \bar{x}.y.z \vee x.\bar{y}.z \vee x.y.\bar{z} = \\
 &= \bar{x}.(\bar{y}.\bar{z} \vee y.z) \vee x.(\bar{y}.z \vee y.\bar{z}) = \\
 &= \bar{x}.(\overline{y \oplus z}) \vee x.(y \oplus z) = \\
 &= \overline{x \oplus y \oplus z}
 \end{aligned}$$

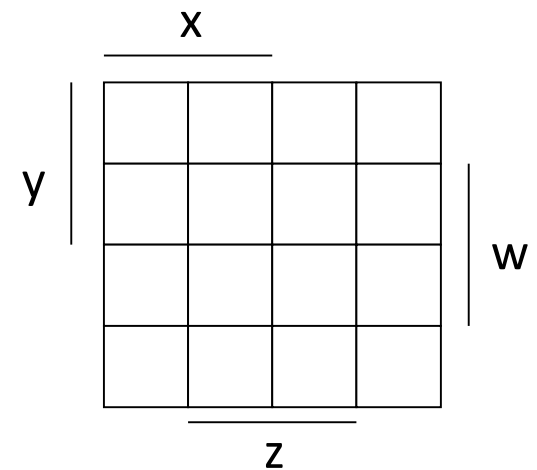
\bar{g}	\bar{z}	z
$\bar{x} \bar{y}$		1
$\bar{x} y$	1	
$x y$		1
$x \bar{y}$	1	

$$\begin{aligned}
 \bar{g} &= \bar{x}.\bar{y}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z} \vee x.\bar{y}.\bar{z} \vee x.y.z = \\
 &= \bar{x}.(\bar{y}.z \vee y.\bar{z}) \vee x.(\bar{y}.\bar{z} \vee y.z) = \\
 &= \bar{x}.(y \oplus z) \vee x.(\overline{y \oplus z}) = \\
 &= x \oplus y \oplus z
 \end{aligned}$$

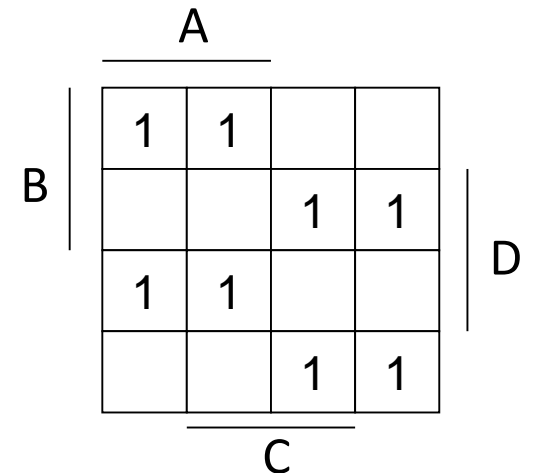
Primer 2

- Podano logično funkcijo zapišite v Veitchev diagram

$$f = 1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus w$$



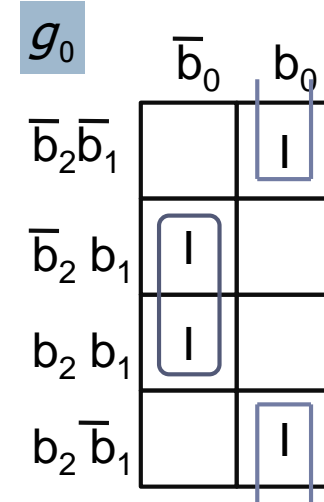
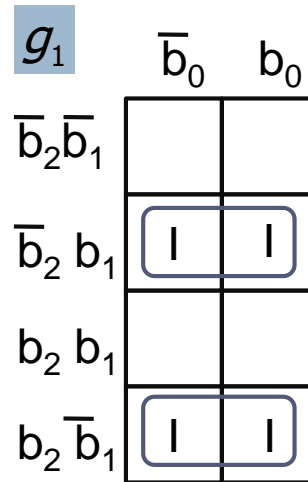
- Zapišite podano logično funkcijo z operatorji XOR, AND, I. Preverite ali je funkcija linearna in jo zapišite kot linearni polinom.



Primer 3: Grayeva koda - MDNO→XOR

Pretvorba dvojiške kode v Grayevo kodo

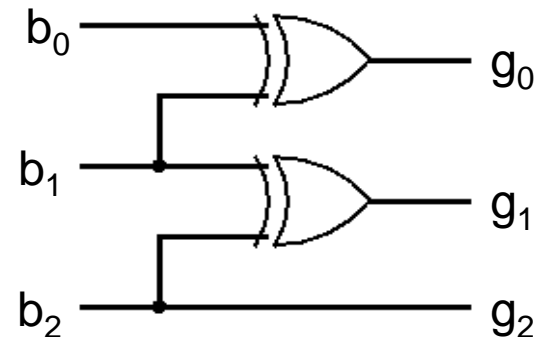
b_2	b_1	b_0	g_2	g_1	g_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0



$$g_2 = b_2$$

$$g_1 = \bar{b}_2 \cdot b_1 \vee b_2 \cdot \bar{b}_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = \bar{b}_1 \cdot b_0 \vee b_1 \cdot \bar{b}_0 = b_1 \oplus b_0$$



Dvojiška aritmetika - seštevanje

- ▶ Seštevanje dveh vrednosti x_0 in y_0 (bit 0 pri seštevanju)
(rezultat = vsota z_0 in prenos c_0)

$0+0 = 0$, prenos je 0

$0+1 = 1$, prenos je 0

$1+0 = 1$, prenos je 0

$1+1 = 0$, prenos je 1 ($1+1 = 10$)

	x_0
	y_0
c_0	z_0

Splošna oblika: $z_0 = x_0 + y_0$, prenos c_0

- ▶ Seštevanje treh vrednosti x_1 in y_1 in c_0
(upošteva se prenos z nižjega mesta):

Splošna oblika: $z_i = x_i + y_i + c_{i-1}$, prenos c_i

	x_1	x_0
	y_1	y_0
c_1	c_0	c_{-1}
	z_1	z_0

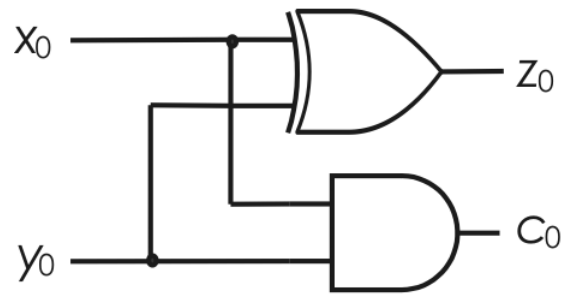
Polovični seštevalnik

- Vhoda: x_0, y_0
- Izhoda: z_0, c_0
- Funkciji: $z_0 = x_0 + y_0$;
 $c_0 = 1$, če je $x_0 + y_0 = 2$

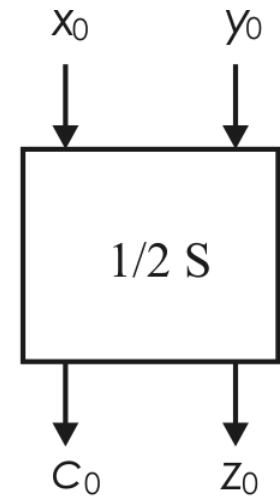
x_0	y_0	c_0	z_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$c_0 = x_0 \cdot y_0$$

$$z_0 = x_0 \oplus y_0$$



a)

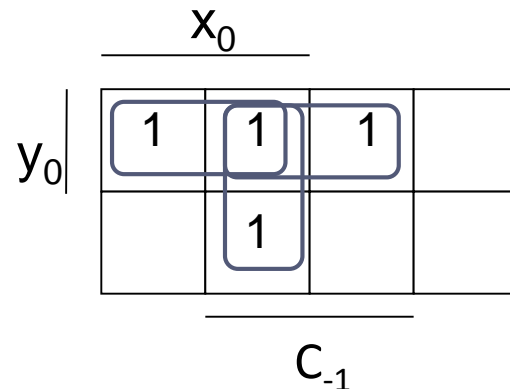


b)

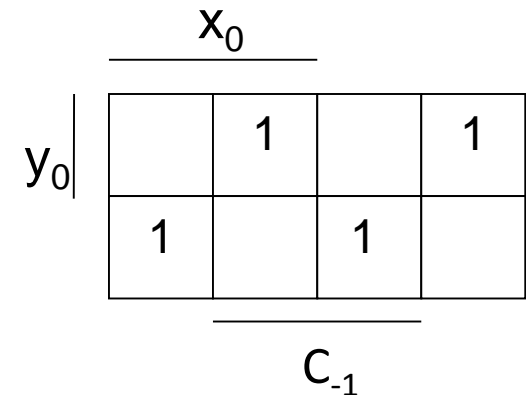
Polni seštevalnik

- Vhodi: x_0, y_0, c_{-1}
- Izhoda: z_0, c_0
- Funkciji: $z_0 = x_0 + y_0 + c_{-1}$;
 $c_0 = 1$, če je $x_0 + y_0 + c_{-1} \geq 2$

x_0	y_0	c_{-1}	c_0	z_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



$$c_0 = x_0 \cdot y_0 \vee x_0 c_{-1} \vee y_0 c_{-1}$$



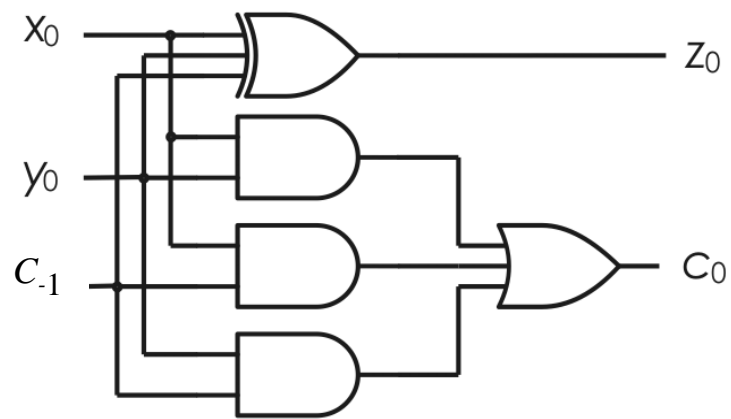
$$0 = a_0$$

$$1 = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus 1 \rightarrow a_3 = 1$$

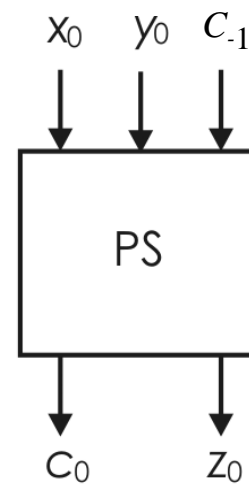
$$1 = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus 1 \rightarrow a_2 = 1$$

$$1 = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus 1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$z_0 = x_0 \oplus y_0 \oplus c_{-1}$$



a)



b)

Polni seštevalnik malo drugače

- ▶ Polni seštevalnik- sestavljata ga dva polovična seštevalnika

$$Z_0 = x_0 \oplus y_0 \oplus c_{-1} = (x_0 \oplus y_0) \oplus c_{-1} = Z_{01} \oplus c_{-1}$$

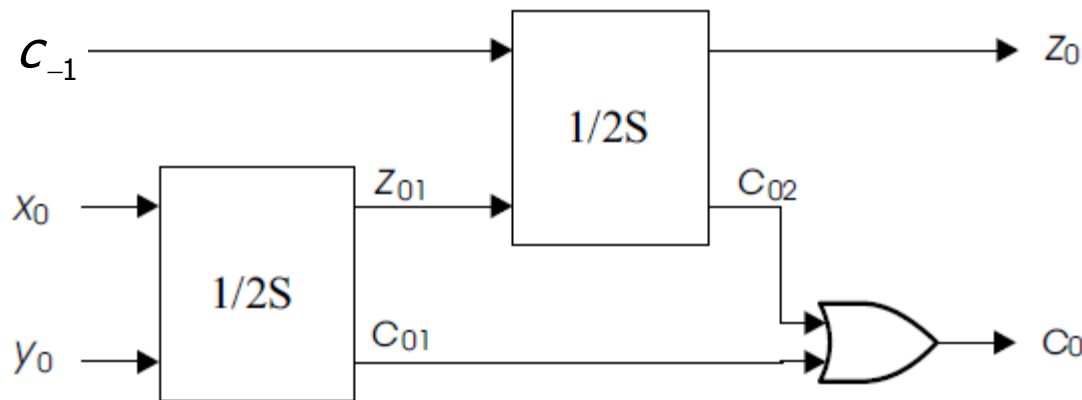
$$C_0 = \bar{x}_0 \cdot y_0 \cdot c_{-1} \vee x_0 \cdot \bar{y}_0 \cdot c_{-1} \vee x_0 \cdot y_0 \cdot \bar{c}_{-1} \vee x_0 \cdot y_0 \cdot c_{-1}$$

$$= c_{-1} \cdot (\bar{x}_0 \cdot y_0 \vee x_0 \cdot \bar{y}_0) \vee x_0 \cdot y_0 \cdot (\bar{c}_{-1} \vee c_{-1})$$

$$= c_{-1} \cdot (x_0 \oplus y_0) \vee x_0 \cdot y_0$$

$$= c_{-1} \cdot Z_{01} \vee C_{01}$$

$$= C_{02} \vee C_{01}$$



Dvojiška aritmetika - odštevanje

➤ Odštevanje (rezultat: razlika in sposodek)

$0-0 = 0$, sposodek je 0

$0-1 = 1$, sposodek je 1

$1-0 = 1$, sposodek je 0

$1-1 = 0$, sposodek je 0

➤ Splošna oblika: $d_0 = x_0 - y_0$, sposodek b_0

	x_0
	y_0
b_0	d_0

➤ Odštevanje i-tega mesta ($i=0$):

$d_i = x_i - y_i - b_{i-1}$, sposodek b_i

	x_i	x_0
	y_i	y_0
b_i	b_0	b_{-1}
	d_i	d_0

➤ Polovični odštevalnik

➤ Polni odštevalnik

Odštevalnik

Polovični odštevalnik

- Vhoda: x_0, y_0
- Izhoda: d_0, b_0
- Funkciji: $d_0 = x_0 - y_0$;
 $b_0=1$, če je $x_0 - y_0 = -1$

d_0	y_0	b_0	d_0
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$$b_0 = x_0 \cdot y_0$$

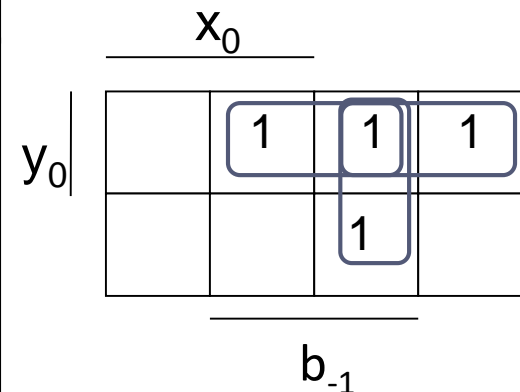
$$d_0 = x_0 \oplus y_0$$

Polni odštevalnik

- Vhodi: x_0, y_0, b_{-1}
- Izhoda: d_0, b_0
- Funkciji: $d_0 = x_0 - y_0 - b_{-1}$;
 $b_0=1$, če je $x_0 - y_0 - b_{-1} \leq -1$

x_0	y_0	b_{-1}	b_0	d_0
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$d_0 = x_0 \oplus y_0 \oplus b_{-1}$$



$$c_0 = \bar{x}_0 \cdot y_0 \vee \bar{x}_0 b_{-1} \vee y_0 b_{-1}$$

n-bitni podatki (Seštevalnik, Odštevalnik)

▶ Vhodi:

- ▶ $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$

- ▶ $Y = (y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0)$

▶ Izhodi:

- ▶ $Z = (z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_0)$

- ▶ C – prenos (c_{n-1})

▶ Operacija:

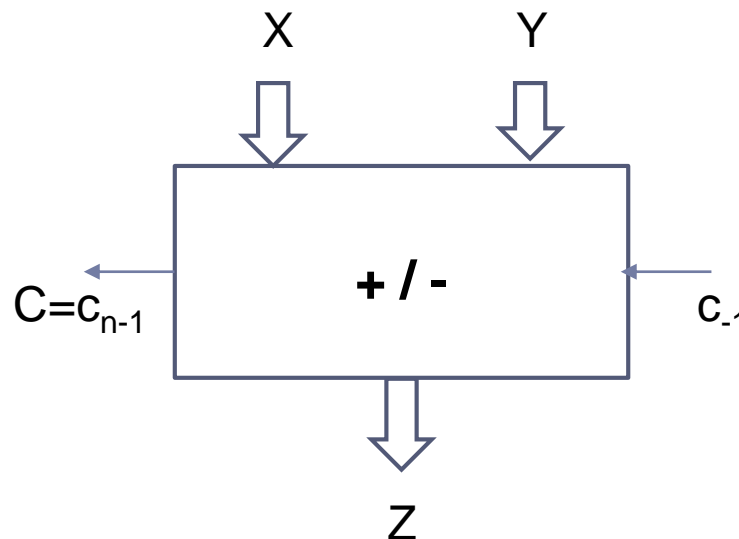
- ▶ Seštevanje

- ▶ Odštevanje

▶ Način izvedbe

- ▶ X, Y – paralelno seštevanje, prenos c_i - zaporedni izračun

- ▶ X, Y, c_i – paralelen izračun (vnaprejšnji izračun prenosov)



Primer 1: 4-bitni seštevalnik

Nepredznačena števila

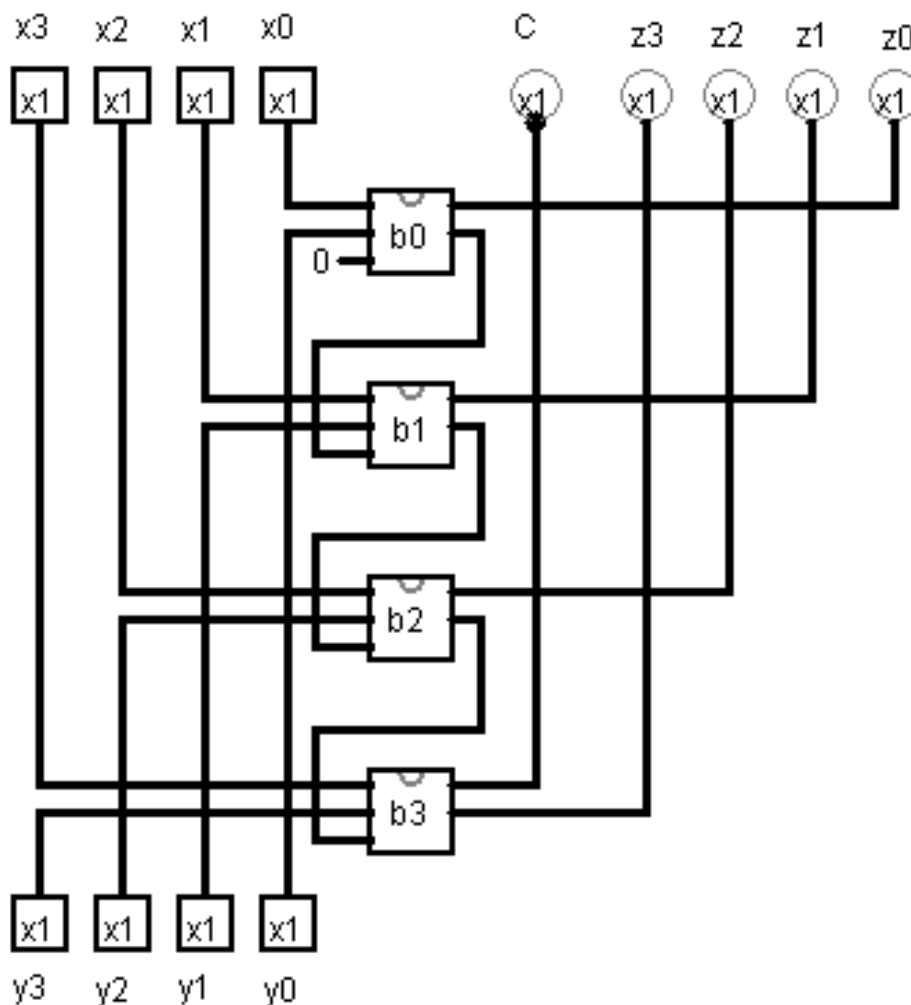
$X=6$, $Y=5$, $Z=5+6=11$

Število bitov seštevalnika: 4
(4-bit ripple adder)

Računanje prenosa poteka po korakih od bita 0 do bita 3.

		b3	b2	b1	b0
X		0	1	1	0
Y		0	1	0	1
	0	1	0	0	
	c_3	c_2	c_1	c_0	
Z		1	0	1	1

$c_3 = C$ – zastavica



Primer 2: 4-bitni odštevalnik

Odštevalnik - izvedba s seštevalniki: $D = X - Y = X + (-Y)$

Negativna vrednost $-Y$ (zapis v dvojiškem komplementu)

($5 \rightarrow -5$: $0101 \rightarrow 1010 + 1 = 1011$)

$X = 6$ 0110_2

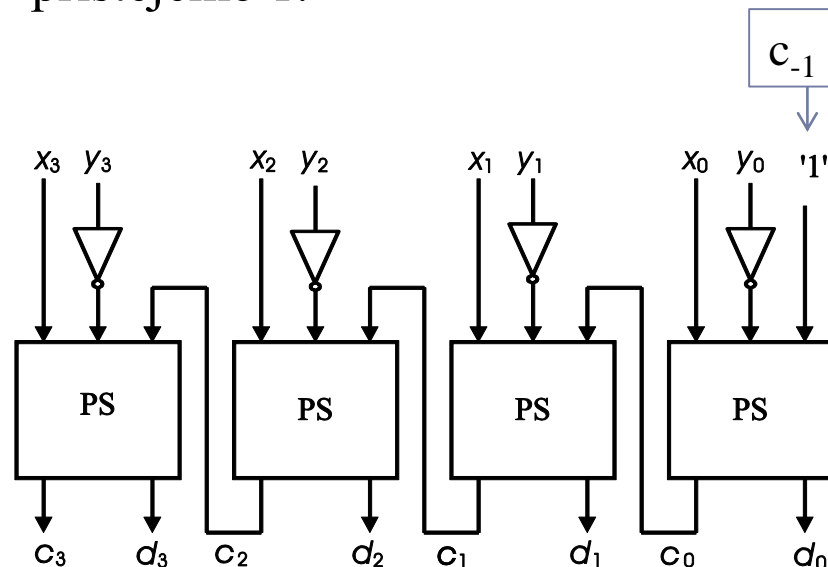
$Y = -5$ $+1011_2$

$Z = 1$ 10001_2

prenos $c_3 = 1$

			b3	b2	b1	b0
X			0	1	1	0
$-Y$ [1'K	+		1	0	1	0
+1	+					1
C	+	1	1	1	0	
Z			0	0	0	1

Log. vrata NOT izvedejo eniški komplement, na mestu $i=0$ (c_{-1}) pa prištejemo 1.



Primer 3: 4-bitni seštevalnik (predznačena števila)

Predznačena števila - izračun **preliva V**

X			0	1	1	0			6
Y			0	1	0	1		+	5
		c_3	c_2	c_1	c_0	c_{-1}			
C	+	0	1	0	0				
Z			1	0	1	1			11

Zastavica - C

Predznak = 1
(negativno število)

NAPAČEN REZULTAT

Preliv - V

$$V = c_3 \oplus c_2$$

