

## Izpit iz Osnov verjetnosti in statistike

### 24. junij 2011

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Rezultate lahko puščate v obliki  $\frac{8^3}{35! \binom{16}{4}} \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{14}}\right)$ .
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [20 točk] Verjetnost dogodkov

(a) Zapišite definicijo pogojne verjetnosti  $P(A|B)$ .

(b) Kdaj sta dogodka  $A$  in  $B$  nezdružljiva? Kdaj sta neodvisna?

Vržemo dve pošteni igralni kocki. Z  $A$  označimo dogodek, da je vsota pik na kockah enaka 4, 5 ali 6, z  $B$  pa dogodek, da je na obeh kockah (vsaki posebej) padlo sodo število pik.

(c) Kateri od dogodkov  $A$  ali  $B$  je bolj verjeten?

(d) Določite  $P(A|B)$ .

(e) Ali sta dogodka  $A$  in  $B$  neodvisna? Utemeljite.

2. [16 točk] Diskretne slučajne spremenljivke

(a) Na svojem predvajalniku glasbe imate posnetih 100 pesmi, med njimi je tudi 5 vaših najljubših. Predvajalnik imate nastavljen tako, da vam skladbe izbira naključno, **brez ponavljanja** pesmi. Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka, ki vam pove, koliko izmed prvih 60 poslušanih skladb, bo vaših najljubših. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke  $X$ .

(b)  $E(X) =$  \_\_\_\_\_

(c) Na svojem predvajalniku glasbe imate posnetih 100 pesmi, med njimi je tudi 5 vaših najljubših. Predvajalnik imate nastavljen tako, da vam skladbe izbira naključno, **z možnim ponavljanjem** pesmi. Naj bo  $Y$  slučajna spremenljivka, ki vam pove, koliko izmed prvih 60 poslušanih skladb, bo vaših najljubših. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke  $Y$ .

(d)  $E(Y) =$  \_\_\_\_\_

3. [16 točk] Naj bo  $X_1, X_2, \dots, X_n$  zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki so vse enako porazdeljene z  $E(X_i) = \mu$  in  $\sigma(X_i) = \sigma$ .

(a)  $E\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right) =$  \_\_\_\_\_

(b)  $D\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right) =$  \_\_\_\_\_

(c) Za velike  $n$  slučajna spremenljivka  $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$  porazdeljena približno

\_\_\_\_\_

(d) Če je  $\mu = 0$  ter  $\sigma = 1$ , potem je slučajna spremenljivka  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  porazdeljena \_\_\_\_\_

4. [16 točk] Vzorčenje

(a) Kaj je enostavno slučajni vzorec?

(b) Zapišite povprečje in popravljen standardni odklon vzorca  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Tovarna žarnic izdeluje vrsto žarnic, katere življenjska doba je porazdeljena normalno s povprečjem 15 mesecev in standardnim odklonom 2 meseca. Naključno jih pakirajo v pakete po 400 žarnic. Denimo, da slučajna spremenljivka  $Y$  meri povprečno življenjsko dobo žarnic v posameznih paketih.

(c)  $\sigma(Y) =$  \_\_\_\_\_.

(d)  $Y \sim$  \_\_\_\_\_.

5. [12 točk] Intervali zaupanja

Izberemo si velik vzorec, katerega povprečje je enako  $a$ . Denimo, da je interval zaupanja za populacijsko povprečje pri stopnji zaupanja  $\gamma = 0,95$  širine  $2k$ . Vemo, da je  $\Phi(1,65) = 0,95$ ,  $\Phi(1,96) = 0,975$ ,  $\Phi(2,34) = 0,99$  ter  $\Phi(2,58) = 0,995$ , kjer je  $\Phi(t) = P(Z < t)$  za  $Z \sim N(0,1)$ .

(a) S kakšno verjetnostjo omenjeni interval zaupanja pokrije populacijsko povprečje?

(b) Če bi poznali populacijski standardni odklon  $\sigma$  ter velikost vzorca  $n$ , potem bi bila širina intervala zaupanja  $2k$  enaka \_\_\_\_\_ . (Utemeljite.)

(c) Če bi na istem vzorcu zapisali interval zaupanja za populacijsko povprečje pri stopnji zaupanja 0,99, bi bila njegova širina enaka \_\_\_\_\_ . (Utemeljite.)

6. [20 točk] Korelacija in regresija

- (a) Kaj geometrijsko predstavlja regresijska premica  $Y = a + bX$ ?
- (b) V kakšni zvezi sta predznaka koeficienta regresijske premice  $b$  ter korelacijskega koeficienta  $r(X, Y)$ ?

Za slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  velja  $K(X, Y) = 8$ ,  $D(X) = 4$ ,  $D(Y) = 1$ .

- (c) Smerni koeficient prve regresijske premice je enak \_\_\_\_\_.
- (d) Smerni koeficient druge regresijske premice \_\_\_\_\_.
- (e) Prva in druga regresijska premica se sekata v točki \_\_\_\_\_.