Robotika in računalniško zaznavanje (RRZ)

Homogene transformacije

Danijel Skočaj

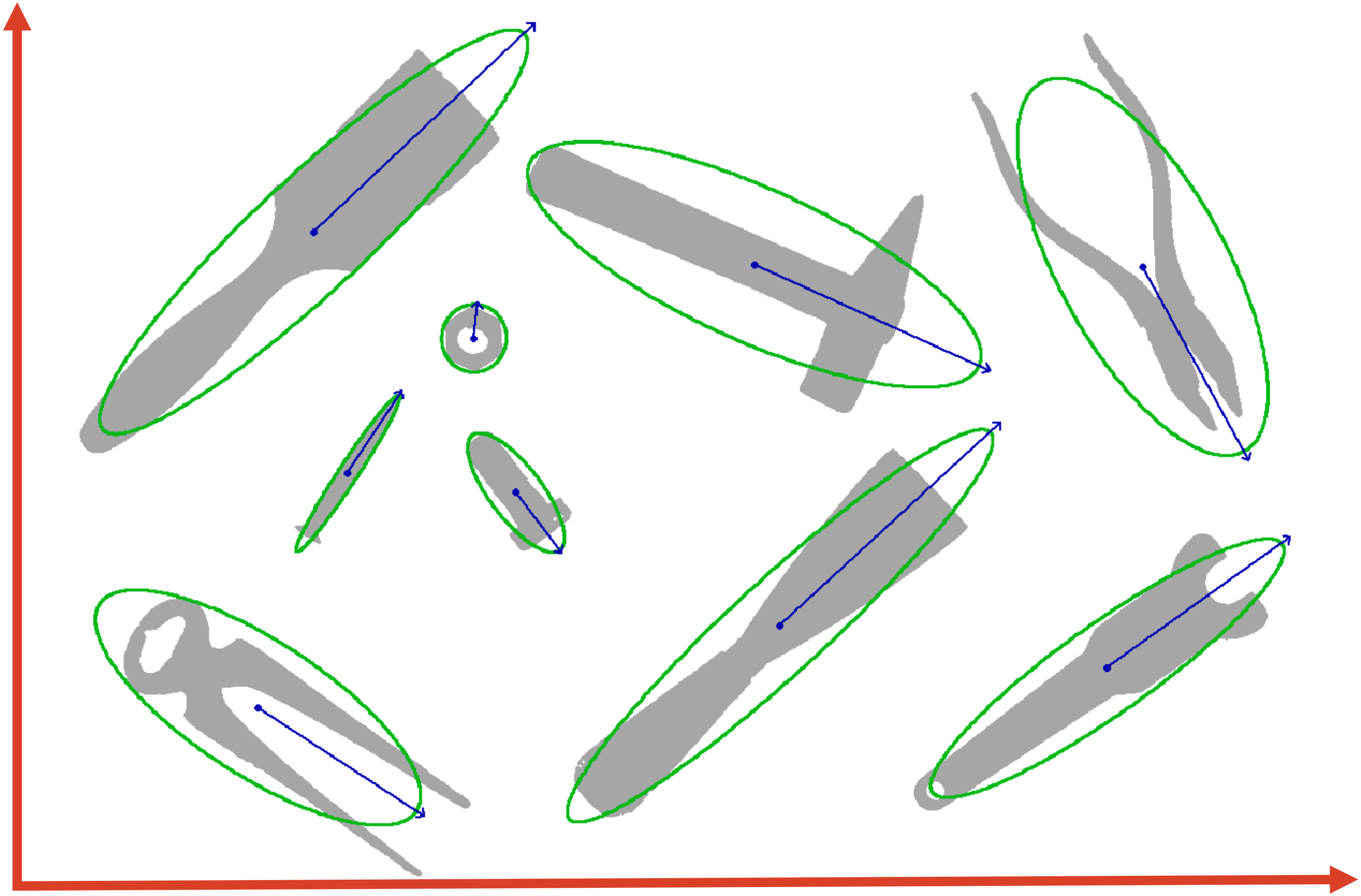
Univerza v Ljubljani

Fakulteta za računalništvo in informatiko

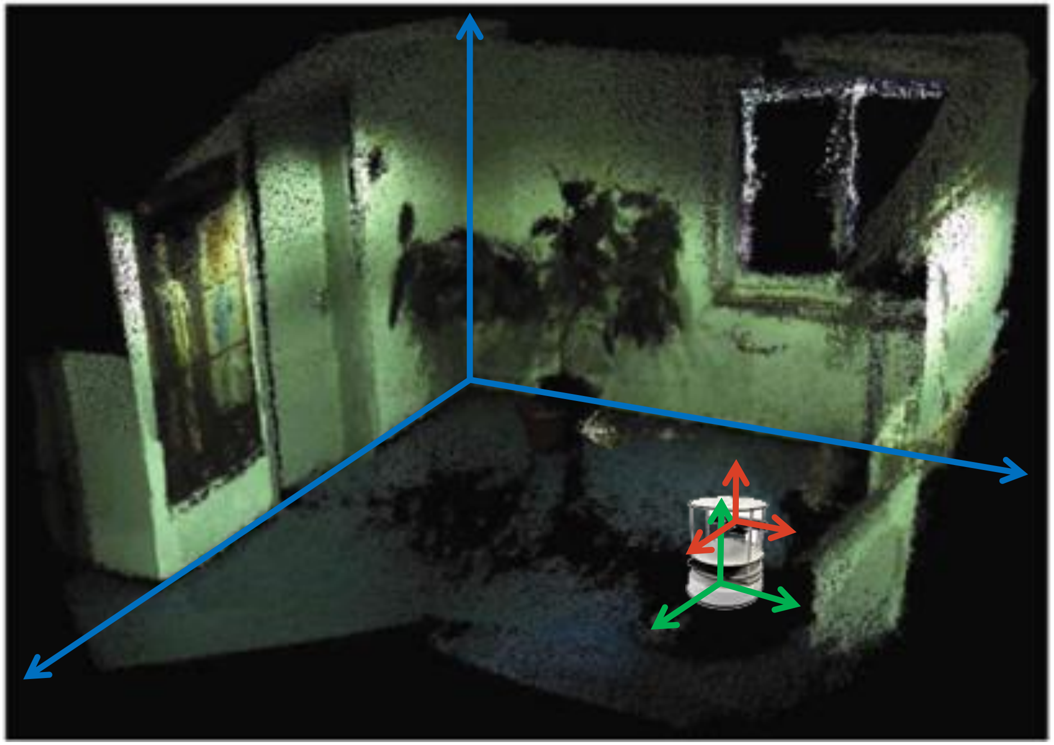
Literatura: Tadej Bajd (2006).
Osnove robotike, poglavje 2

v7.0

Pozicija in orientacija predmetov



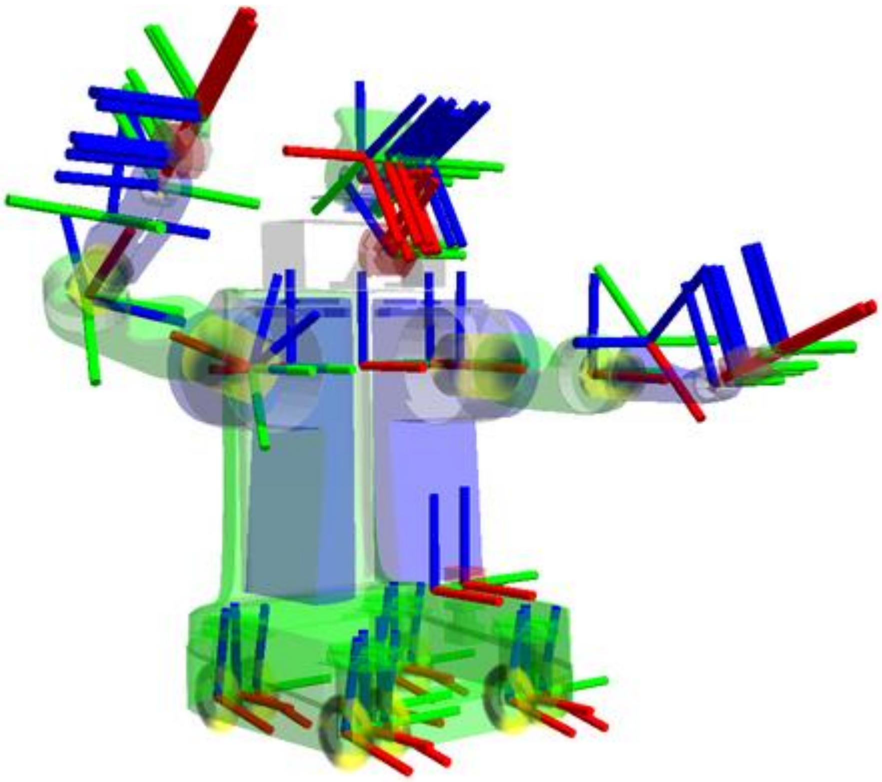
3D okolje



2D navigacija

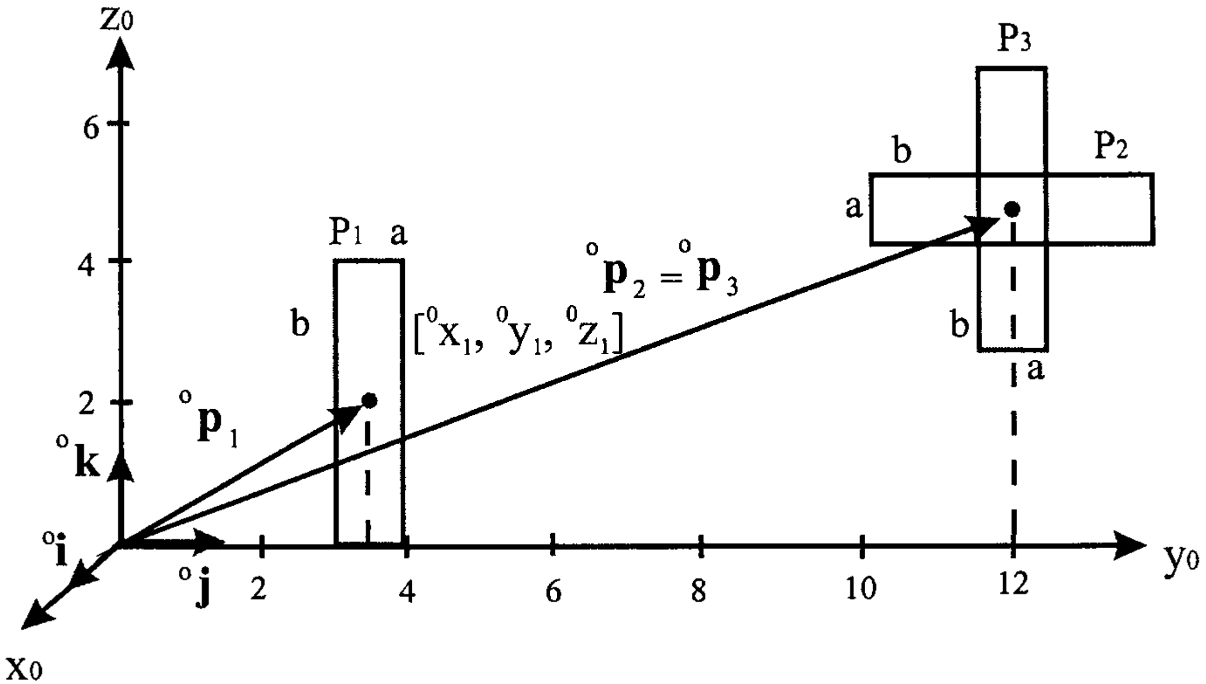
Verige koordinatnih sistemov

- Izražanje točk v različnih koordinatnih sistemih



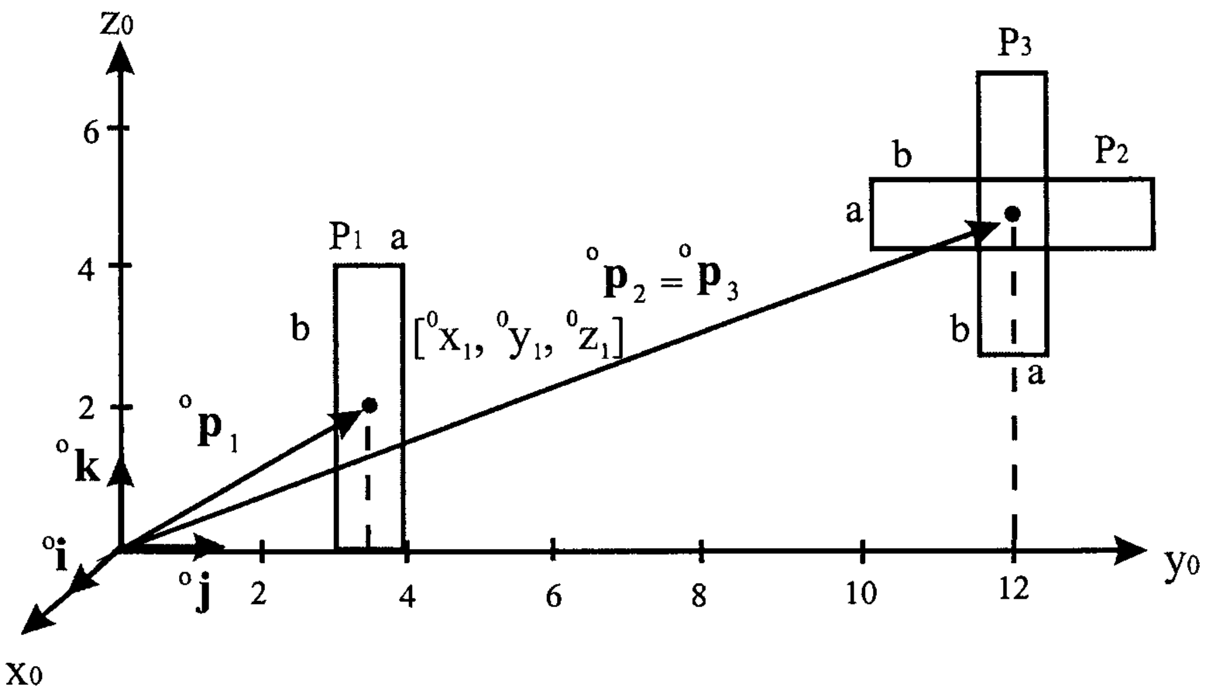
Pozicija in orientacija

- Lega=Pozicija+Orientacija
  - Pozicija(P2)=Pozicija(P3)
  - Pozicija(P1)~=Pozicija(P2)
  - Orientacija(P1)=Orientacija(P3)
  - Orientacija(P2)~=Orientacija(P3)
  - Lega(P1)~=Lega(P2)~=Lega(P3)



Translacija in rotacija

- Prestavljanje predmetov:
  - P1 v P3: Translacija (T)
  - P2 v P3: Rotacija (R)
  - P1 v P2: Translacija in rotacija

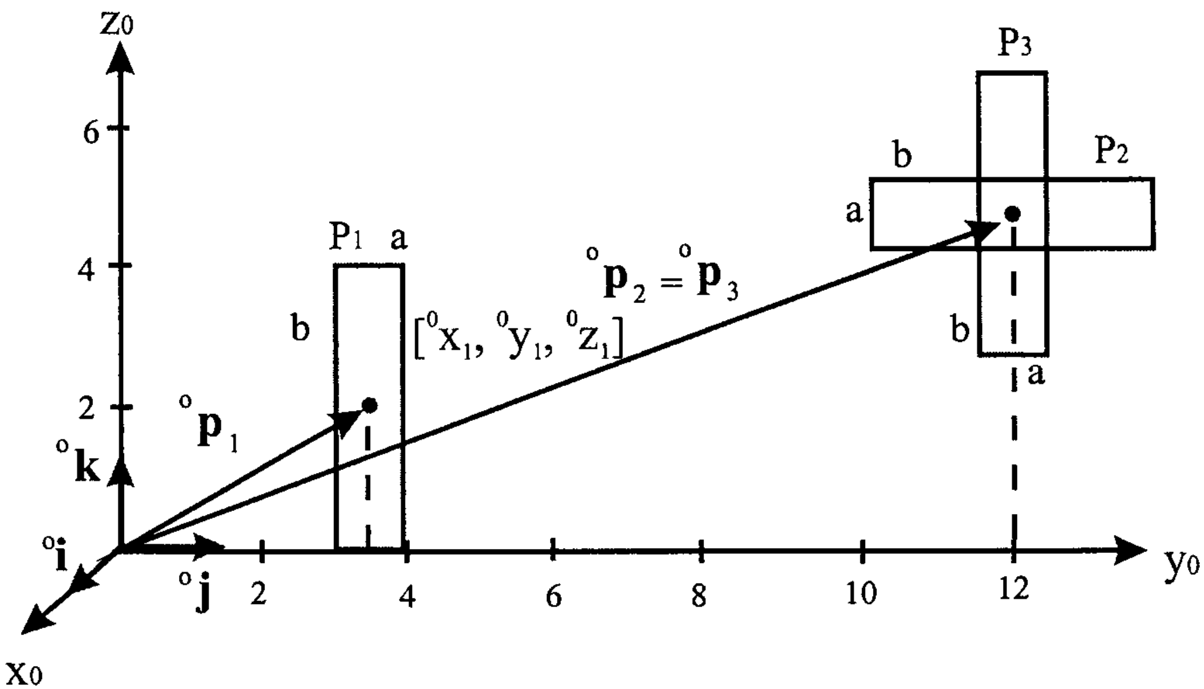


Pozicija

- Pozicija: vektor, ki poteka od izhodišča koordinatnega sistema do točke, katere položaj želimo izraziti

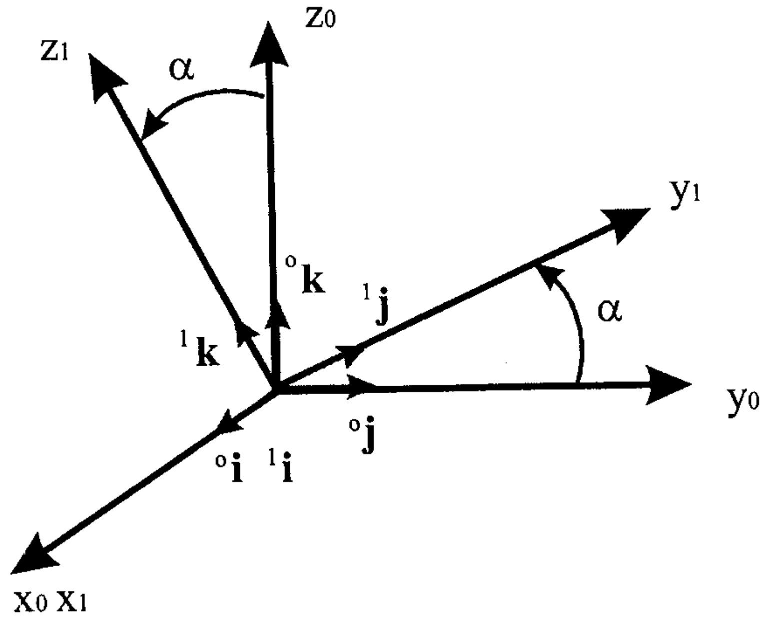
- Pozicija predmeta P1:

$$ {}^{0}\mathbf{p}_1 = {}^{0}x_1\,{}^{0}\mathbf{i} + {}^{0}y_1\,{}^{0}\mathbf{j} + {}^{0}z_1\,{}^{0}\mathbf{k} $$



Orientacija

- Desnosučni koordinatni sistem
- Rotacija okrog x_0 osi:
- Rotacijska matrika:



$$ {}^{0}\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} $$

- Orientacija k.s. O_1 glede na k.s. O_0
- Transformacija vektorja ${}^{1}\mathbf{p}$ izraženega v k.s. O_1 v koordinate izražene v k.s. O_0 :

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{p} $$

Rotacijske matrike

- Rotacija okrog osi x:

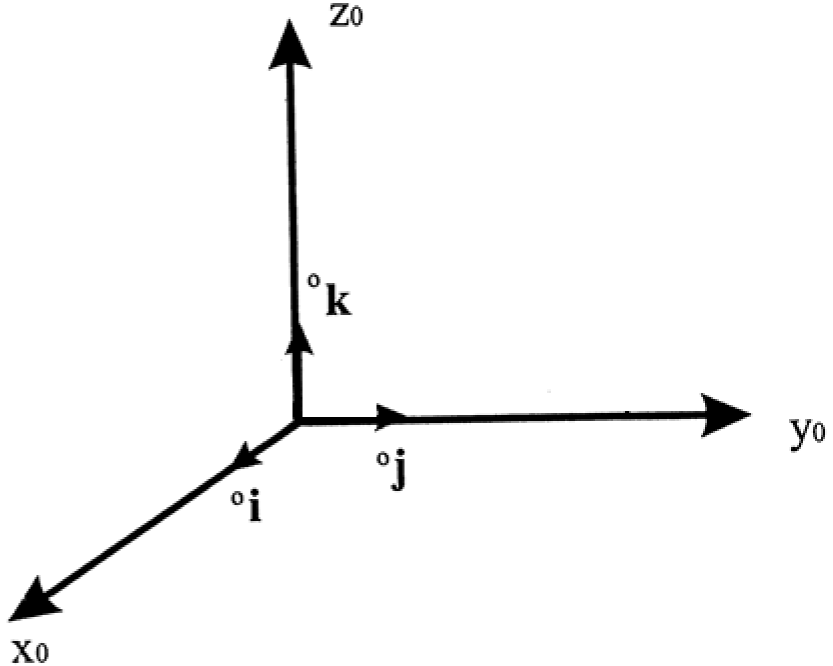
$$\mathbf{R}_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Rotacija okrog osi y:

$$\mathbf{R}_{Y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Rotacija ogrog osi z:

$$\mathbf{R}_{Z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Lastnosti rotacijske matrike

- Rotacija je ortogonalna transformacijska matrika
- Inverzna transformacija:

$$^{1}\mathbf{R}_0 = ({}^{0}\mathbf{R}_1)^{-1} = ({}^{0}\mathbf{R}_1)^T$$

- V desnosučnem koordinatnem sistemu je determinanta enaka 1

- Seštevanje kotov:

$$\mathbf{R}_{X,\alpha_1} \cdot \mathbf{R}_{X,\alpha_2} = \mathbf{R}_{X,\alpha_1+\alpha_2}$$

- Rotacija nazaj

$$\mathbf{R}_{X,\alpha}{}^{-1} = \mathbf{R}_{X,-\alpha}$$

Zaporedne rotacije

- Vektor, ki ga želimo rotirati, moramo premultiplicirati z rotacijsko matriko
- Zaporedne rotacije

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{p} \qquad {}^{1}\mathbf{p} = {}^{1}\mathbf{R}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{p} $$

$$ {}^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 \, {}^{2}\mathbf{p} $$

  - Rotacijski zapisi so postmultiplicirani:

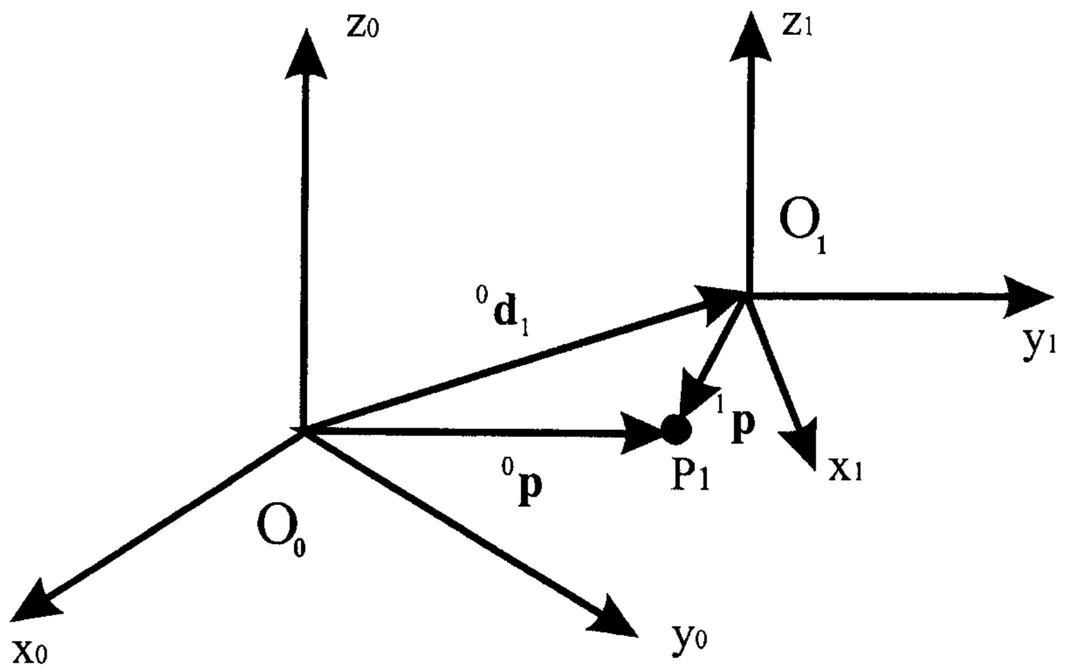
$$ {}^{0}\mathbf{R}_2 = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 $$

- V splošnem:
  - Postmultipliciramo matrike vsake naslednje rotacije
  - Rotacije se nanašajo na vsakokratni relativni trenutni koordinatni sistem

$$ {}^{0}\mathbf{R}_n = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{R}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{R}_n $$

Transformacije

- Transformacija iz enega KS v drugi:



- Če sta k.s. vzoredna:
  - Samo translacija

$$^{0}\mathbf{p} = {}^{1}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{d}_1$$

- Če k.s. nista vzporedna:
  - Rotacija in translacija
  - Splošni opis lege

$$^{0}\mathbf{p} = {}^{0}\mathbf{R}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{p} + {}^{0}\mathbf{d}_1$$

Matrični zapis

- Trije koordinatni sistemi:

$$^0\mathbf{p} = {^0\mathbf{R}_1} \cdot {^1\mathbf{p}} + {^0\mathbf{d}_1} \qquad {^1\mathbf{p}} = {^1\mathbf{R}_2} \cdot {^2\mathbf{p}} + {^1\mathbf{d}_2}$$

$$^0\mathbf{p} = {^0\mathbf{R}_2} \cdot {^2\mathbf{p}} + {^0\mathbf{d}_2}$$

- Združimo transformacije:

$$^0\mathbf{R}_2 = {^0\mathbf{R}_1} \cdot {^1\mathbf{R}_2} \qquad {^0\mathbf{d}_2} = {^0\mathbf{d}_1} + {^0\mathbf{R}_1} \cdot {^1\mathbf{d}_2}$$

$$^0\mathbf{p} = {^0\mathbf{R}_1} \cdot {^1\mathbf{R}_2}\,{^2\mathbf{p}} + {^0\mathbf{R}_1}\,{^1\mathbf{d}_2} + {^0\mathbf{d}_1}$$

  - Translacijske vektorje smemo sešteti, če jih izrazimo v istem koordinatnem sistemu
- Matrični zapis zgornjih dveh enačb:

$$\begin{bmatrix} {^0\mathbf{R}_1} & {^0\mathbf{d}_1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {^1\mathbf{R}_2} & {^1\mathbf{d}_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {^0\mathbf{R}_1} \cdot {^1\mathbf{R}_2} & {^0\mathbf{R}_1} \cdot {^1\mathbf{d}_2} + {^0\mathbf{d}_1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Homogena transformacija

- Splošno lego

$$^{0}\mathbf{p} = \mathbf{R}\cdot {}^{1}\mathbf{p} + \mathbf{d}$$

je mogoče izraziti v matrični obliki:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Homogena transformacija, ker homogenizira (združi) rotacijsko in translacijsko transformacijo v eni matriki
  - Zelo zgoščen in priročen zapis

- Homogena matrika razsežnosti 4x4 (za 3D prostor)
  - Dodamo eno vrstico, tudi 1 v zapisu vektorja položaja:

$$\begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} {}^{0}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \begin{bmatrix} {}^{1}\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogena matrika

- Rotacija za R in translacija za d:

$$\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & R & \circ & d \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Samo rotacija:

$$\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & 0 \\ \circ & R & \circ & 0 \\ \circ & \circ & \circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Samo translacija:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \circ \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & \circ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lastnosti homogene transfromacije

- Inverz homogene transformacije:

$$^{0}\mathbf{p} = \mathbf{R} \cdot {}^{1}\mathbf{p} + \mathbf{d}$$

$$^{1}\mathbf{p} = \mathbf{R}^{T} \cdot {}^{0}\mathbf{p} - \mathbf{R}^{T}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{T} & -\mathbf{R}^{T} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Zaporedne lege:
  - Postmultiplikacija homogenih transformacij:

$$^{0}\mathbf{H}_{2} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \cdot {}^{1}\mathbf{H}_{2}$$

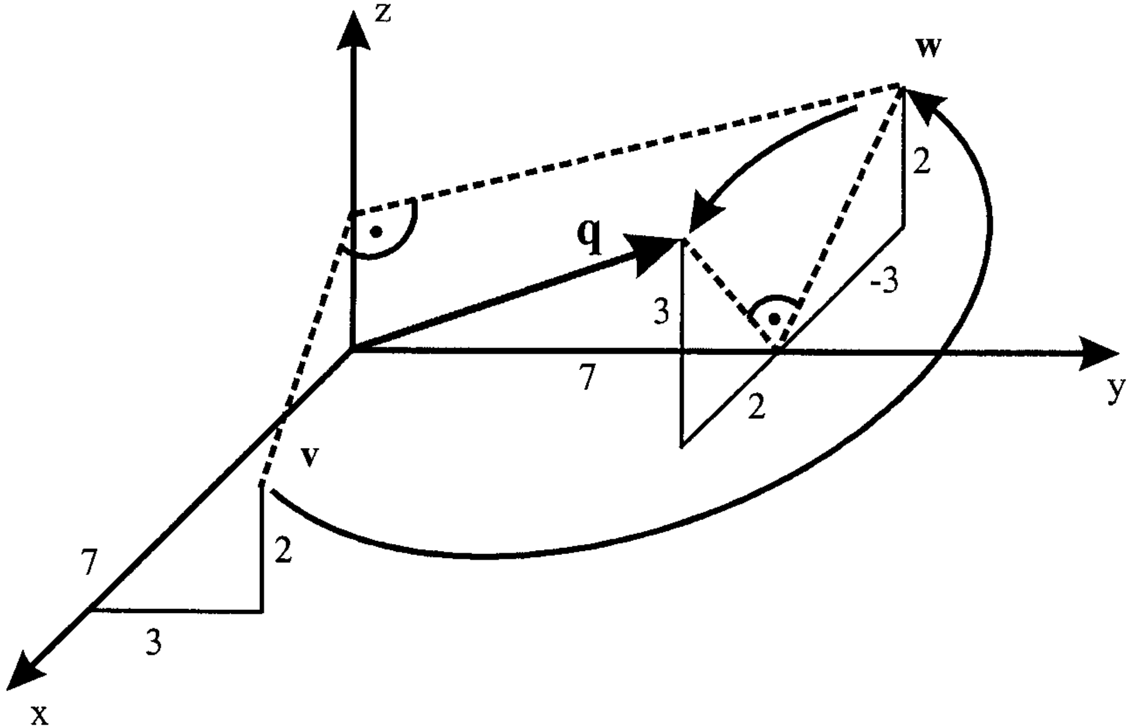
$$^{0}\mathbf{H}_{n} = {}^{0}\mathbf{H}_{1} \cdot {}^{1}\mathbf{H}_{2} \ldots {}^{n-1}\mathbf{H}_{n}$$

  - Nek element lahko poljubnokrat transformiramo – s postmultiplikacijo homogenih matrik

Primer

- Primer dvakratne rotacije
  - Vektor $\mathbf{v} = [7, 3, 2, 1]^T$
    najprej zarotiraj za 90° okrog z
    in potem še za 90° okrog y osi

$$\mathbf{w} = \mathbf{Rot}\,(z, 90)\,\mathbf{v}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}\,(y, 90)\,\mathbf{w}$$



Primer – dvojna rotacija

$$\mathbf{w} = \mathbf{Rot}\,(z, 90)\,\mathbf{v}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}\,(y,90)\,\mathbf{w}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Rot}\,(y,90)\;\mathbf{Rot}\,(z, 90)\,\mathbf{v}$$

$$\mathbf{Rot}(y,90)\,\mathbf{Rot}(z, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primer - translacija

- Po dvojni rotaciji hočemo vektor še translirati za (4,-3,7)
  - Združiti hočemo
    - Translacijo $\mathbf{Trans}(4\mathbf{i}\ -3\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$
      z rotacijama $\mathbf{Rot}(y,90) \cdot \mathbf{Rot}(z,90)$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{Trans}\,(4, -3, 7)\,\mathbf{Rot}\,(y,90)\,\mathbf{Rot}\,(z, 90)$$

- Transformacija točke (7,3,2):

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Preslikava koordinatnega sistema

- Homogena transformacijska matrika preslika osnovni koordinatni sistem

$$\textbf{Trans}(4, -3, 7)\ \textbf{Rot}(y, 90)\ \textbf{Rot}(z, 90)$$

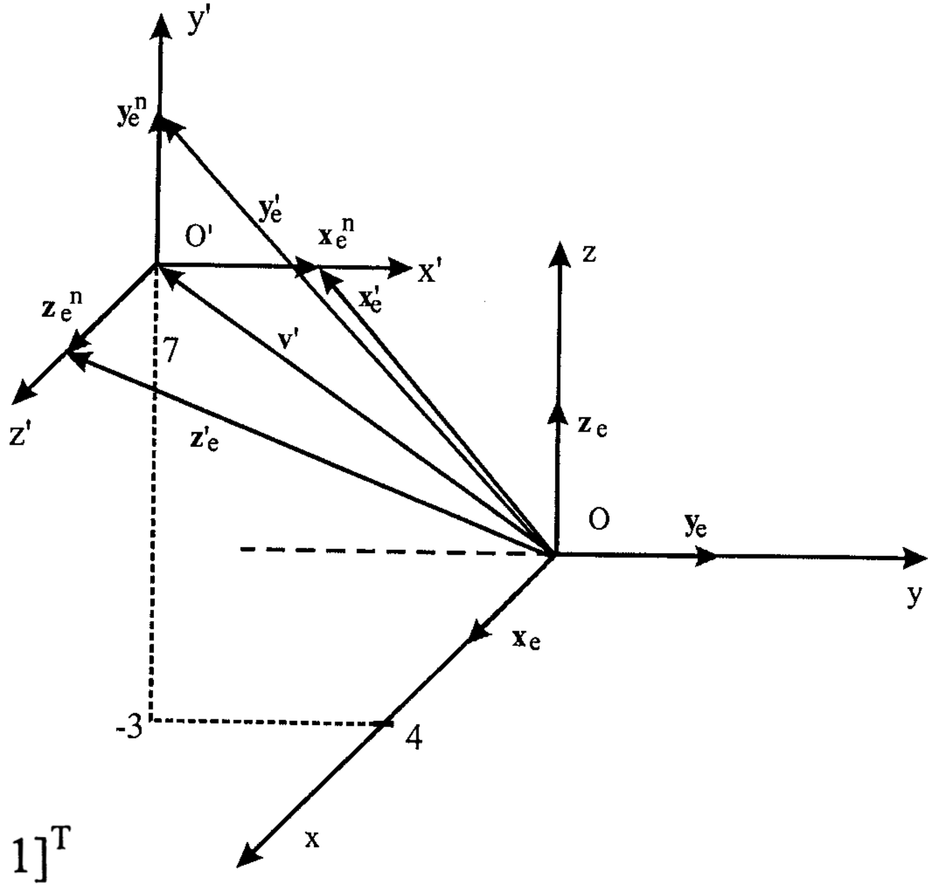
  - Izhodiščni vektor k.s.:

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}'$$

  - Enotske vektorje k.s.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_e'$$

$$\mathbf{y}_e' = [4, -3, 8, 1]^T \quad , \quad \mathbf{z}_e' = [5, -3, 7, 1]^T$$



Opis lege koordinatnega sistema

- Enotski vektorji novega koordinatnega sistema:

$$\mathbf{x}_e^n: \quad 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{x}_e^n = [0, 1, 0, 0]^T$$

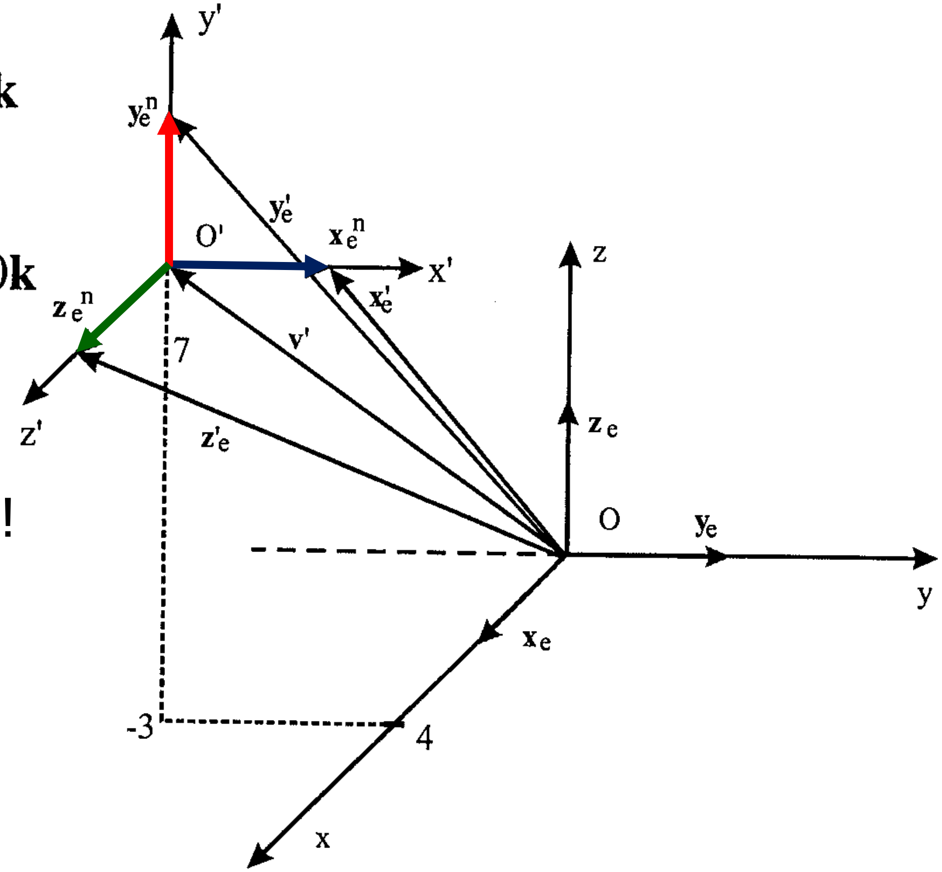
$$\mathbf{v}' = [4, -3, 7, 1]^T$$

$$\mathbf{y}_e^n: 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{y}_e^n = [0, 0, 1, 0]^T$$

$$\mathbf{z}_e^n = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = 1\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{z}_e^n = [1, 0, 0, 0]^T$$



- Transformacijska matrika predstavlja koordinatni sistem!

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \mathbf{x}_e^n & \mathbf{y}_e^n & \mathbf{z}_e^n & \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Opis premika koordinatnega sistema

- Premultiplikacija oz. postmultiplikacija transformacije (predmeta oz. k.s.) s transformacijo

- Primer:

  - Koordinatni sistem:

$$\mathbf{C}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\mathbf{i}_c & \mathbf{j}_c & \mathbf{k}_c & \end{array} \\ & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 20\\ 0 & 0 & -1 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\\ \end{array}$$

  - Transformacija:

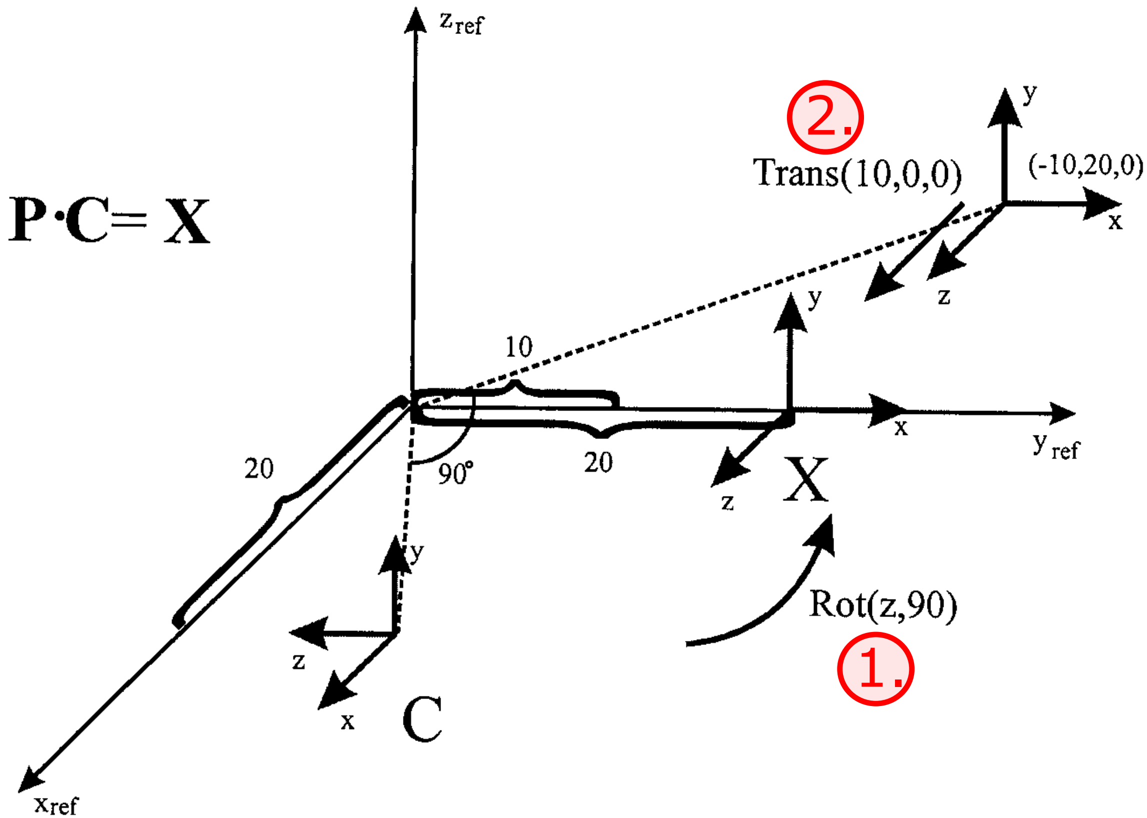
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 10\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{Trans}(10,0,0)\cdot\mathbf{Rot}(z,90)$$

Premultiplikacija

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0&-1&0&10\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&20\\0&0&-1&10\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&20\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- Objekt je preslikan glede na **stalen**, **referenčni**, koordinatni sistem, v katerem smo predočili objekt.
- Vrstni red transformacij:

$$\mathbf{Trans}(10,0,0)\cdot\mathbf{Rot}(z,90)$$



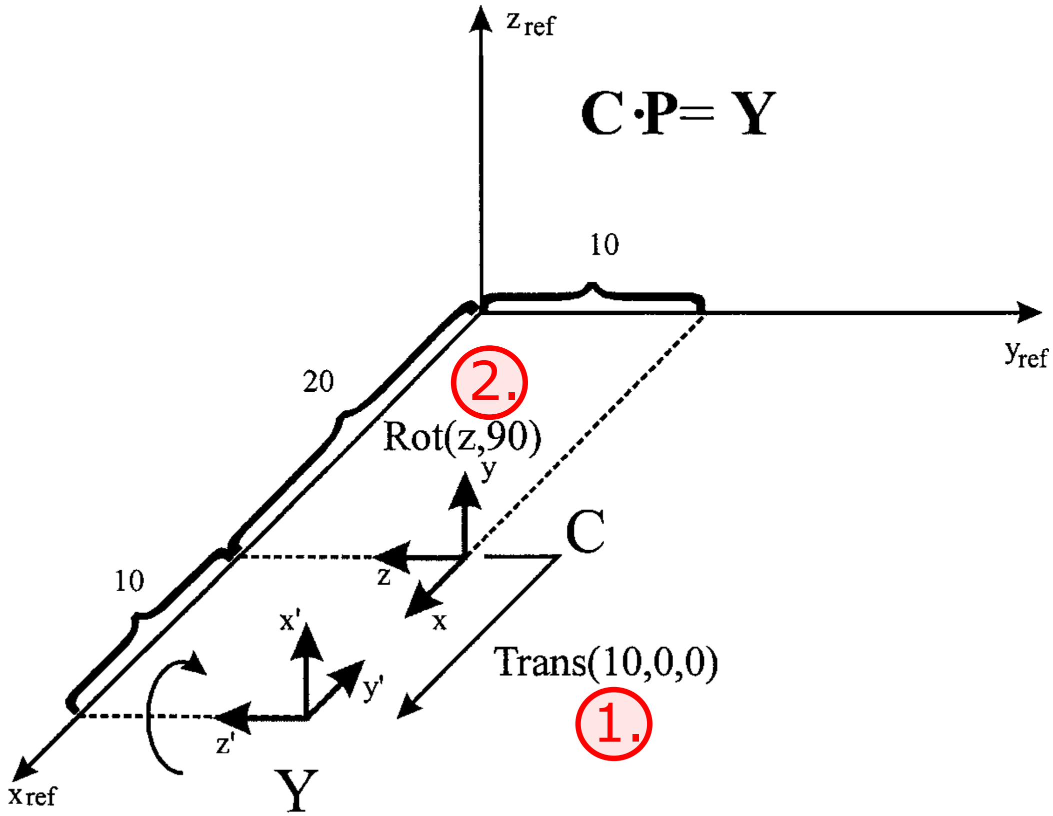
Postmultiplikacija

$$C \cdot P = Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{i}_c & \mathbf{j}_c & \mathbf{k}_c & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ \ \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Objekt je preslikan glede na **lasten**, **relativni**, koordinatni sistem, v katerem smo predočili objekt.

- Vrstni red transformacij:

$$\mathbf{Trans}(10,0,0) \cdot \mathbf{Rot}(z,90)$$



Premik referenčnega k.s.

- Primer: **Trans**(2,1,0)**Rot**(z,90)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

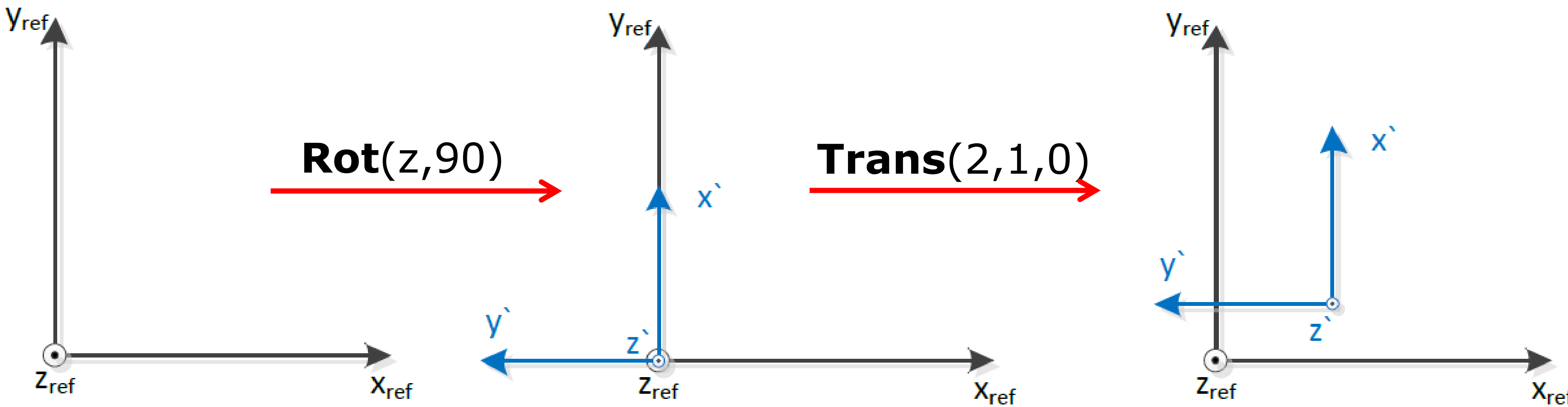
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Premik referenčnega k.s.

- Primer: **Trans**(2,1,0)**Rot**(z,90)

Glede na referenčni koordinatni sistem:



Glede na relativni koordinatni sistem: