Digitalna vezja
UL, FRI

P2 - Logične funkcije

Vsebina

- Logične funkcije (n=2)

- Zapis logičnih funkcij
  - Popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO)
  - Popolna konjunktivna normalna oblika (PKNO)
  - Nepopolne logične funkcije

- Vir:
  - Trebar, Osnove logičnih vezij (Poglavje 4 Logične funkcije, str. 31-44)

Logične funkcije - osnovni pojmi

- 0, 1 - konstanti
- x, y, z, A,..., - spremenljivke, ki zavzamejo vrednosti 0 ali 1: $x \in \{0,1\}$,…
- f, g, h, - so funkcije ((f,g,...), ki dobijo vrednosti 0 ali 1: $f \in \{0,1\}$,…
- Vsaka spremenljivka ima svoj **komplement ali negacijo**, to je x, x‘, ..
- **Pravilnostna tabela** za funkcijo z *n* spremenljivkami: $f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$
  - 2^n vrstic ali **vhodnih kombinacij** w_i, $i = 0,1, , 2^n-1$
  - vsaki vrstici pripada ena vrednost funkcije: $w_i \rightarrow f(w_i) = f_i \in \{0,1\}$
- **Minterm** – konjunkcija vseh vhodov podane funkcije
- **Maksterm** - disjunkcija vseh vhodov podane funkcije
- **Vsota produktov** ali disjunkcija konjunkcij

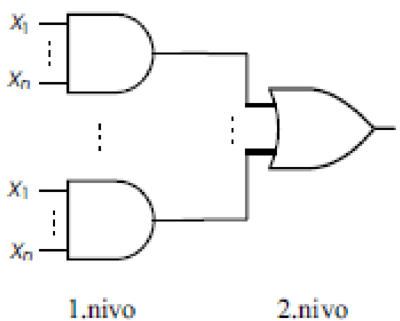
  $x.y \vee y.z$

- **Produkt vsot** ali konjunkcija disjunkcij

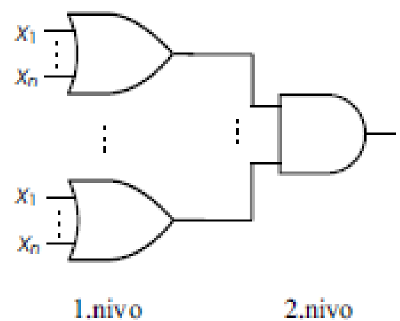
  $(x \vee y). (x \vee z)$

- Tabelarični zapis (pravilnostna tabela)
- Analitični zapis
  - **Normalna oblika**: največ dva nivoja logičnih operatorjev
    (1 ali 2 nivojska funkcija)
  - **Popolna oblika**: v 1.nivo vstopajo vse vhodne spremenljivke

Popolna disjunktivna normalna oblika



Popolna konjunktivna normalna oblika



  - **Minimalna oblika**: najkrajša možna oblika zapisa funkcije
    (število operatorjev/vrat in vhodov vanje)
- Grafičen zapis: Veitchev diagram, Karnaughov diagram
- Logična shema (povezava logičnih vrat, elementov)

Zapis funkcij (n=2)

b_i	x	y		0	1	y	y‘	x	x‘	&	&‘	V	V‘	∇	$\equiv$				
b_0	0	0		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
b_1	0	1		0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
b_2	1	0		0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
b_3	1	1		0	1	1	0’	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
				f_0	f_{15}	f_{10}	f_5	f_{12}	f_3	f_8	f_7	f_{14}	f_1	f_6	f_9	f_2	f_4	f_{13}	f_{11}

Zapis vseh 16 funkcij v odvisnosti od dveh spremenljivk x, y:

Konstanta 0 - $f_0 = f(x,y) = 0$

Konstanta 1 - $f_{15} = f(x,y) = 1$

...

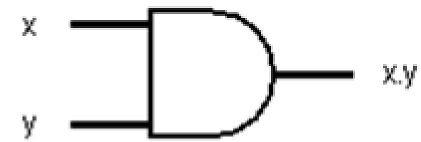
Vir: Trebar, Osnove logičnih vezij, str. 34

- Negacija (NOT): $\bar{x}$

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

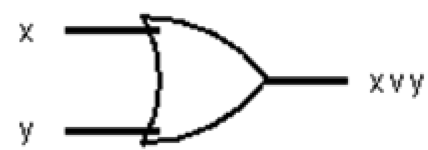
- Konjunkcija (AND): x . y

x	y	x . y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



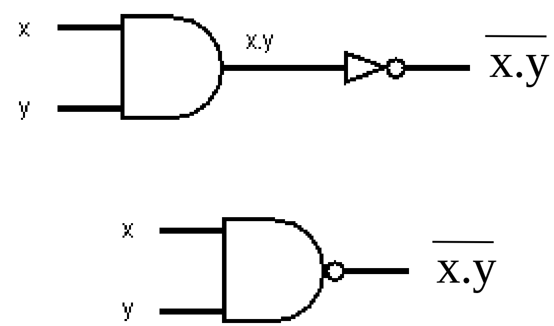
- Disjunkcija (NOR): x v y

x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



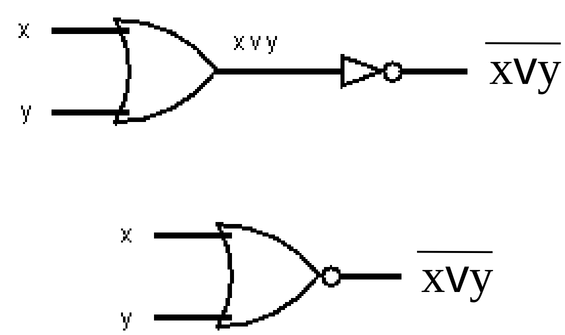
- Negirana konjunkcija (NAND): $x \uparrow y = \overline{x . y}$

x	y	x.y	$\overline{x.y}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



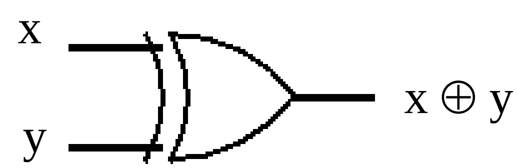
- Negirana disjunkcija (NOR): $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$

x	y	xvy	$\overline{xvy}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0



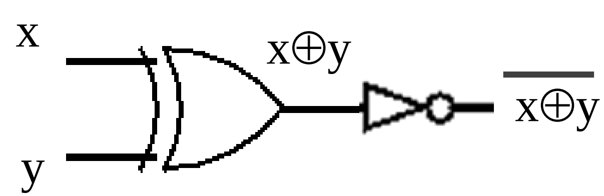
- Ekskluzivni OR (XOR): $x \nabla y = x \oplus y = \overline{x} \,.\, y \; v \; x \,.\, \overline{y}$

x	y	$X \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- Negirani XOR (NXOR): $\overline{x \oplus y} = \overline{x}.\overline{y} \; v \; x.y = x \equiv y$ (Ekvivalenca)

x	y	$(\overline{x \oplus y})$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Zapis funkcij v PDNO

- Tabela → Mintermi

i	x	y	Mintermi - m_i
0	0	0	$m_0 = \overline{x}.\overline{y}$
1	0	1	$m_1 = \overline{x}.y$
2	1	0	$m_2 = x.\overline{y}$
3	1	1	$m_3 = x.y$

- Minterm $m_i = 1$ (true), če je konjunkcija vhodov 1 (true).
- Zapis konjunkcija spremenljivk x=0 – spr. negirana, x=1 – spr. ni negirana

x=0 in y=0 -> minterm – $m_0 = \overline{0} . \overline{0} = 1.1 = 1$ ($\overline{x}.\overline{y}$)

x=0 in y=1 -> minterm – $m_1 = \overline{0} . 1 = 1.1 = 1$ ($\overline{x}.y$)

x=1 in y=0 -> minterm – $m_2 = 1 . \overline{0} = 1.1 = 1$ ($x.\overline{y}$)

x=1 in y=1 -> minterm – $m_3 = 0 . 0 = 1.1 = 1$ ($x.y$)

- Mintermi → Vsota produktov

x	y	f	$m_i . f_i$
0	0	$0 = f_0$	$\bar{x} . \bar{y} . 0$
0	1	$1 = f_1$	$\bar{x} . y . 1$
1	0	$1 = f_2$	$x . \bar{y} . 1$
1	1	$1 = f_3$	$x . y . 1$

1. minterme m_i in f_i konjuntivno povežemo
2. vse člene med seboj disjunktivno povežemo
3. poenostavimo funkcijo (Boole-ova algebra)

- Zapišimo funkcijo iz pravilnostne tabele v enačbo:

$$f = \bar{x}.\bar{y}.0 \vee \bar{x}.y.1 \vee x.\bar{y}.1 \vee x.y.1 = \vee_{i=0}^{2^n-1} m_i.f_i$$

$$f = \bar{x}.y \vee x.\bar{y} \vee x.y$$

- Rezultat: DISJUNKTIVNO povezani mintermi, kjer je izhod funkcije f_i=1
- Dobimo zapis, ki ga imenujemo:
  - Vsota produktov
  - Popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO)

Primer: Funkcija (n=3) → PDNO

Vsota produktov ali **popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO)**.

- Disjunktivna povezava mintermov m_i, kjer ima funkcija f_i vrednost 1.

i	x	y	z		f	g
0	0	0	0	m_0	0	1
1	0	0	1	m_1	1	0
2	0	1	0	m_2	0	0
3	0	1	1	m_3	1	1
4	1	0	0	m_4	1	1
5	1	0	1	m_5	1	0
6	1	1	0	m_6	0	0
7	1	1	1	m_7	0	0

$$f =$$
$$m_0.0 \vee m_1.1 \vee m_2.0 \vee m_3.1 \vee$$
$$m_4.1 \vee m_5.1 \vee m_6.0 \vee m_7.0 =$$
$$= m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 =$$
$$= \overline{x}.\overline{y}.z \vee \overline{x}.y.z \vee x.\overline{y}.\overline{z} \vee x.\overline{y}.z$$

$$g =$$
$$m_0.1 \vee m_3.1 \vee m_4.1 =$$
$$= \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} \vee \overline{x}.y.z \vee x.\overline{y}.\overline{z}$$

Zapis funkcij v PKNO

- Tabela → Makstermi

i	$j=2^n-1-i$	x	y	Makstermi - M_j
0	3	0	0	$M_3 = x \vee y$
1	2	0	1	$M_2 = x \vee \overline{y}$
2	1	1	0	$M_1 = \overline{x} \vee y$
3	0	1	1	$M_0 = \overline{x} \vee \overline{y}$

- Makstermi $M_j = 0$ (false), če je disjunkcija vhodov 0 (false).
- Zapis disjunkcije spremenljivk x=1 – spr. negirana, x=0 – spr. nenegirana

x=0 in y=0 -> maksterm – $M_3 = 0 \vee 0 = 0$ ($x \vee y$)

x=0 in y=1 -> maksterm – $M_2 = 0 \vee \overline{1} = 0$ ($x \vee \overline{y}$)

x=1 in y=0 -> maksterm – $M_1 = \overline{1} \vee 0 = 0$ ($\overline{x} \vee y$)

x=1 in y=1 -> maksterm – $M_0 = \overline{1} \vee \overline{1} = 0$ ($\overline{x} \vee \overline{y}$)

- Makstermi → Produkt vsot

x	y	f	$M_j \vee f_i$
0	0	$0 = f_0$	$x \vee y \vee 0$
0	1	$1 = f_1$	$x \vee \overline{y} \vee 1$
1	0	$1 = f_2$	$\overline{x} \vee y \vee 1$
1	1	$1 = f_3$	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee 1$

1. maksterm M_j in f_i disjuntivno povežemo
2. vse člene med seboj konjunktivno povežemo
3. poenostavimo funkcijo (Booleova algebra)

- Zapišimo funkcijo iz pravilnostne tabele v enačbo:

$$f = (x \vee y \vee 0)(x \vee \overline{y} \vee 1)(\overline{x} \vee y \vee 1)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee 1) = \&_{i=0}^{2^n-1}(M_j \vee f_i) = \prod_{i=0}^{2^n-1}(M_j \vee f_i)$$

$$f = x \vee y$$

- Rezultat:

  KONJUNKTIVNO povezani makstermi, kjer je izhod funkcije $f_i=0$.
- Dobimo zapis, ki ga imenujemo:
  - Produkt vsot
  - Popolna konjunktivna normalna oblika (PKNO)

Primer: Funkcija (n=3) → PKNO

Produkt vsot ali **popolna konjunktivna normalna oblika (PKNO)**.

- Konjunktivna povezava makstermov M_j, kjer ima funkcija f_i vrednost 0.

j	x	y	z		f	g
7	0	0	0	M_7	0	1
6	0	0	1	M_6	1	0
5	0	1	0	M_5	0	0
4	0	1	1	M_4	1	1
3	1	0	0	M_3	1	1
2	1	0	1	M_2	1	0
1	1	1	0	M_1	0	0
0	1	1	1	M_0	0	0

$$f =$$
$$(M_7 \vee 0)(M_6 \vee 1)(M_5 \vee 0)(M_4 \vee 1)$$
$$(M_3 \vee 1)(M_2 \vee 1)(M_1 \vee 0)(M_0 \vee 0) =$$
$$= M_7 . M_5 . M_1 . M_0 =$$
$$= (x \vee y \vee z).(x \vee \bar{y} \vee z).$$
$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

$$g =$$
$$= M_6 . M_5 . M_2 . M_1 . M_0 =$$
$$= (x \vee y \vee \bar{z}).(x \vee \bar{y} \vee z).$$
$$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

Nepopolna logična funkcija

- Imenujemo jo tudi funkcija z redundancami.
- Pri vhodnih kombinacijah x=y=1 izhodi niso določeni (označeni so z X)
- f(x,y,z):
  - Funkcijska vrednost f_6= X -> vrednost je lahko 0 ali 1
  - Funkcijska vrednost f_7= X -> vrednost je lahko 0 ali 1

x	*y*	*z*	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	X

$PDNO:$

$$f = m_0 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7 =$$

$$= \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} \vee \overline{x}.y.\bar{z} \vee \bar{x}.y.z \vee$$

$$x.\bar{y}.\bar{z} \vee \boxed{x.y.\bar{z} \vee x.y.z}$$

Redundanci
f_6= 1 in f_7 =1

$PKNO:$

$$f = M_6.M_2.M_1.M_0 =$$

$$= (x \vee y \vee \bar{z}).(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

$$\boxed{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})}$$

Redundanci
f_6= 0 in f_7 =0

Povzetek

- Analitični zapis
  - Minterm: konjunkcija vseh spremenljivk

$$m_i = x_1^{w_{1,i}} \cdot x_2^{w_{2,i}} \cdots x_n^{w_{n,i}} \quad , \quad i = 0,1,\ldots,2^n - 1$$

$$x^w = \begin{cases} x; w = 1 \\ \bar{x}; w = 0 \end{cases}$$

  - Maksterm: disjunkcija vseh spremenljivk

$$M_{2^n-1-i} = x_1^{\bar{w}_{1,i}} \vee x_2^{\bar{w}_{2,i}} \vee \cdots \vee x_n^{\bar{w}_{n,i}} \quad , i = 0,1,\ldots,2^n - 1$$

  - PDNO: popolna disjunktivna normalna oblika

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vee_0^{2^n-1} m_i f_i$$

  - PKNO: popolna konjunktivna normalna oblika

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \&_0^{2^n-1} (M_{2^n-1-i} \vee f_i)$$

  - Dualnost med m_i in M_{2^n-1-i}:
    - zamenjan operator in negirane spremenljivke

- Tabela, funkcija, mintermi, makstermi

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	m_i		i	M_{2^n-1-i}		j
0	0	0	1	m_0	$\bar{x}_1.\bar{x}_2.\bar{x}_3$	0	M_7	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	7
0	0	1	0	m_1	$\bar{x}_1.\bar{x}_2.x_3$	1	M_6	$x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$	6
0	1	0	1	m_2	$\bar{x}_1.x_2.\bar{x}_3$	2	M_5	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	5
0	1	1	1	m_3	$\bar{x}_1.x_2.x_3$	3	M_4	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	4
1	0	0	1	m_4	$x_1.\bar{x}_2.\bar{x}_3$	4	M_3	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$	3
1	0	1	0	m_5	$x_1.\bar{x}_2.x_3$	5	M_2	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$	2
1	1	0	0	m_6	$x_1.x_2.\bar{x}_3$	6	M_1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$	1
1	1	1	1	m_7	$x_1.x_2.x_3$	7	M_0	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	0

Priprava za laboratorijske vaje

- Tabela logičnih funkcij za n=2:

  AND, OR, NAND, NOR, XOR, XNOR
- Zapis zgoraj podanih logičnih funkcij n=2 z operatorji:

  NOT, AND, OR
- Analitičen zapis logičnih funkcij v PDNO
- Analitičen zapis logičnih funkcij v PKNO

Zapiske obvezno prinesete na 2. laboratorijske vaje.

Naloge

- Podani sta funkciji F in G:

  F=1, če sta vhoda A=1 in B=0 in če sta vhoda A=0 in C=1

  F=0, sicer

  G=1, če sta po dva vhoda enaka 1 in če so vsi trije vhodi 0

  G=0, sicer

A	B	C	F	G
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

- Zapišite F in G v pravilnostno tabelo
- Zapišite PDNO za F in G
- Zapišite PKNO za F in G