Algoritmi in podatkovne strukture 1

Visokošolski strokovni študij Računalništvo in informatika

Asimptotična zahtevnost

Jurij Mihelič, UniLj, FRI

Zahtevnost algoritmov

- Težavno računanje *natančne zahtevnosti*
  - Upoštevanje podrobnosti
  - Poznavanje cen (konstante) posameznih ukazov
  - Upoštevanje dejanskih podatkov
- Omejena uporabnost
  - Različni modeli / arhitekture / programski jeziki imajo različne konstante
  - Veliko različnih modelov
  - V praksi na čas izvajanja vpliva tudi operacijski sistem in druga programska oprema

Zahtevnost algoritmov

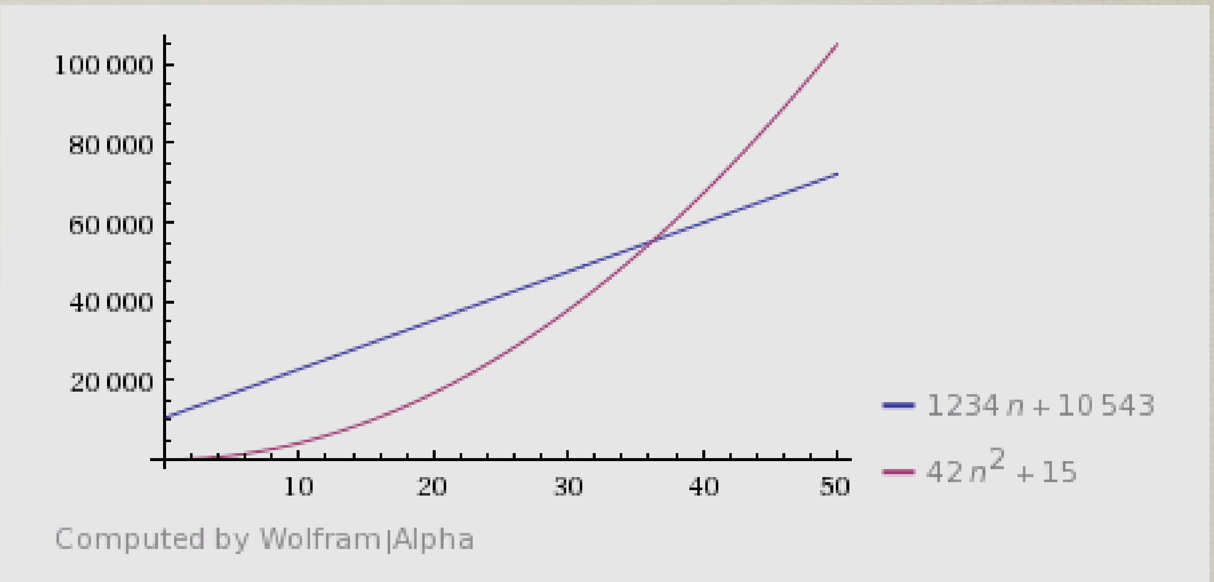
- Poenostavitev
  - Zanima nas *ocena zahtevnosti* algoritma
  - Kako se spremeni zahtevnost, če se spremeni velikost naloge
  - Velikost naloge $n \to \infty$
- Natančna zahtevnost je pogosto »*grda*« funkcija
  - $T(n) = 4/3n^3 + 2\sqrt{n} \lg n - 16 \lg n$
- Ocena zahtevnosti pa »*lepa*«
  - $T(n)$ je reda n^3

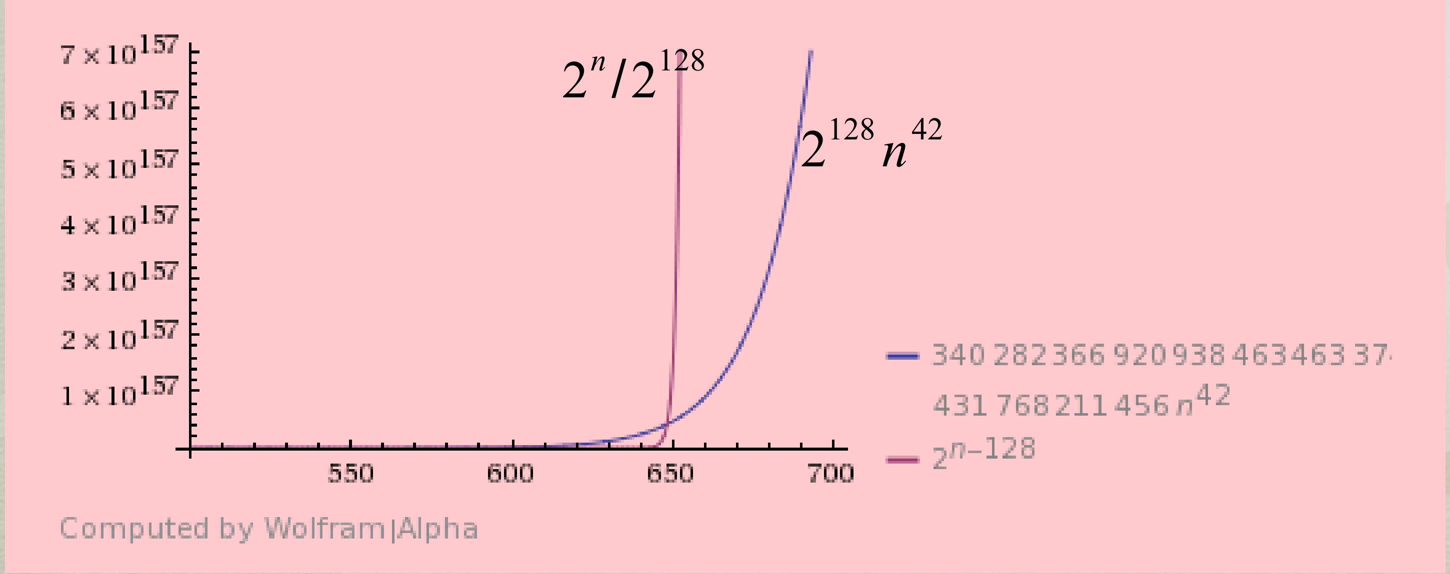
Asimptotična zahtevnost

- Zanima nas le najhitreje naraščajoči člen
  - $42 \log n$ je reda $\log n$
  - $15\, n - 16$ je reda n
  - $3\, n \log n + 4\, n - \log n$ je reda $n \log n$
  - $105\, n^2 - n/3 + 123$ je reda n^2
  - $1.001^n + n^{150}$ je reda 1.001^n
  - $2\, 2^n + 123\, n^{30}$ je reda 2^n

Asimptotična zahtevnost

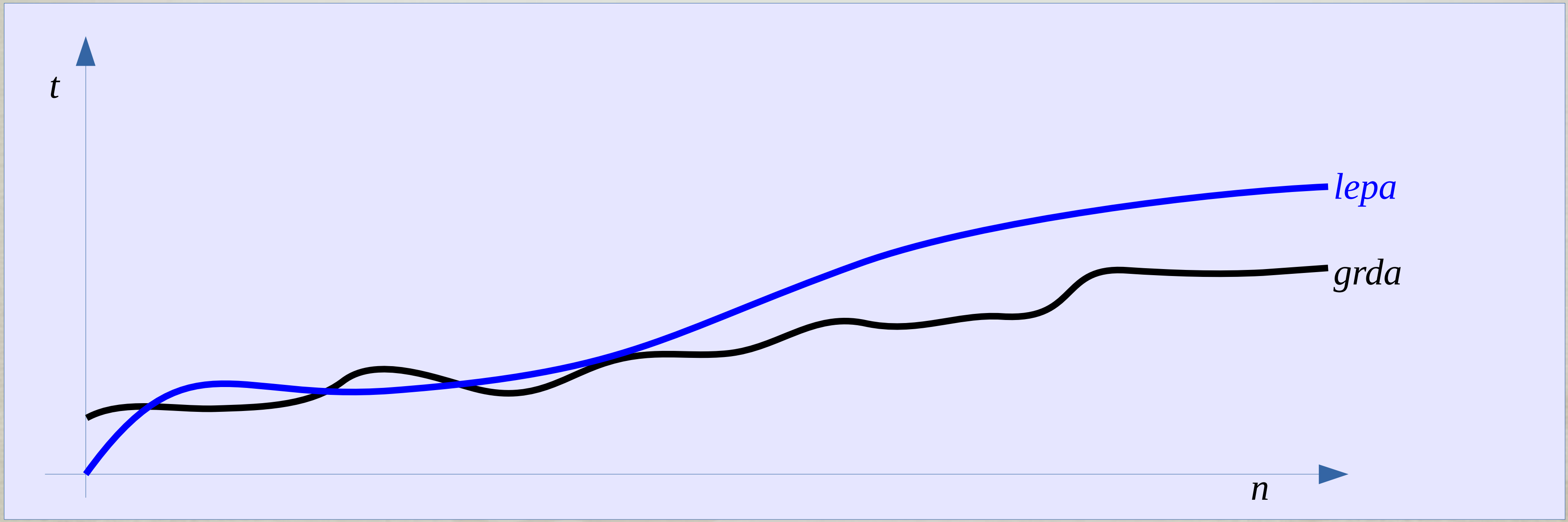
- $n \to \infty$





Asimptotična zahtevnost

- Zahtevnost lahko ocenjujemo od:
  - zgoraj,
  - spodaj,
  - od zgoraj in spodaj.

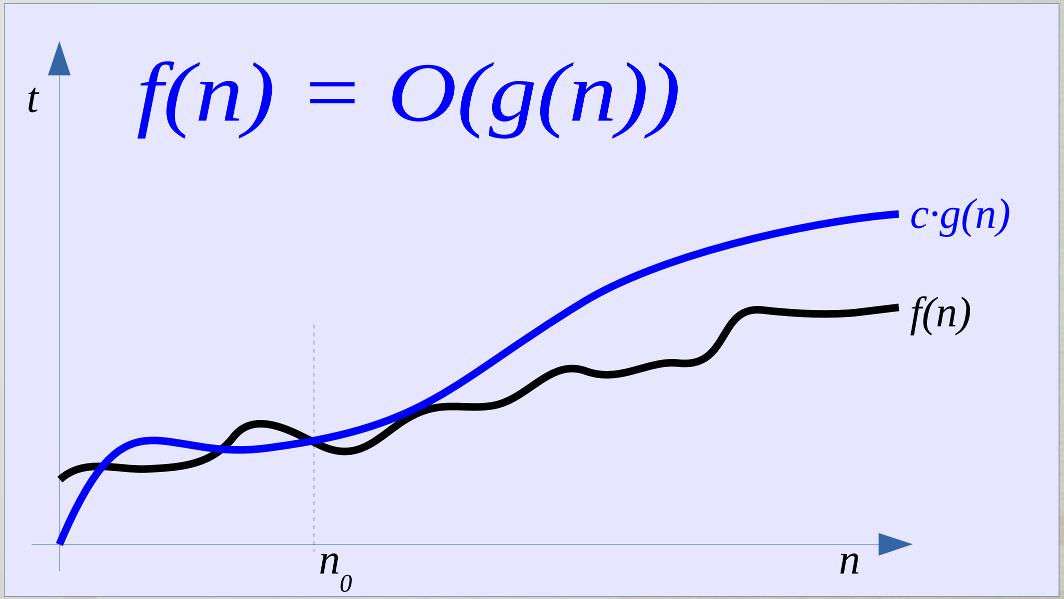


Asimptotska notacija

- O-notacija – **zgornja** asimptotična meja
  - f je od zgoraj omejena z g
  - f ne raste hitreje kot g
  - f je kvečjemu reda g

$$
\begin{aligned}
5n^2 + 3 \quad & \neq O(\log n) \\
& \neq O(n) \\
& \neq O(n^{1.9}) \\
& \mathbf{= O(n^2)} \\
& = O(n^3) \\
& = O(1.001^n) \\
& = O(2^n)
\end{aligned}
$$

*Katera izmed zgornjih mej je **tesna**?*



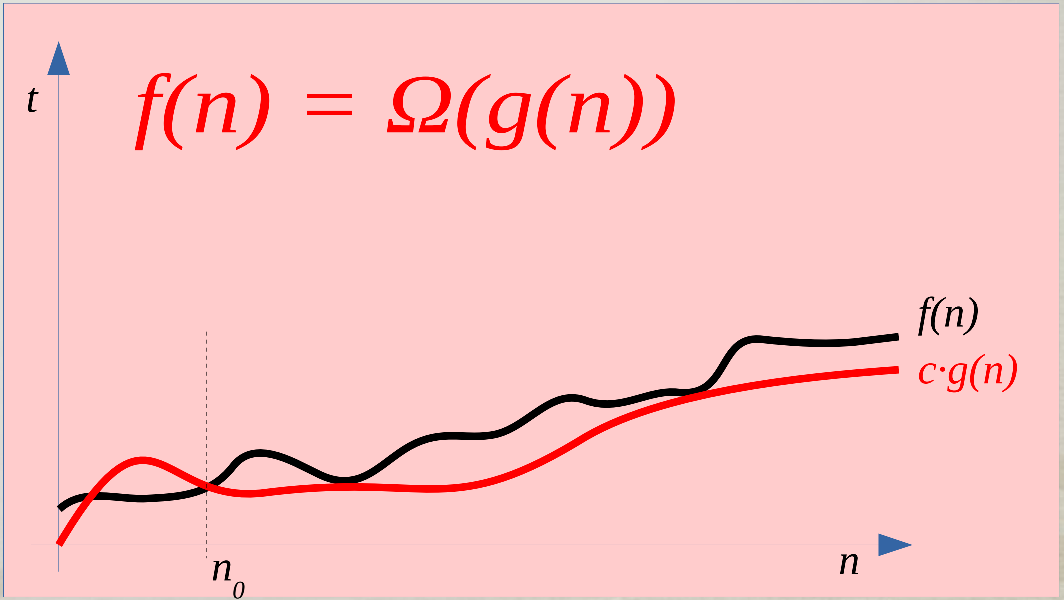
Omega

Asimptotska notacija

- *Ω*-notacija – **spodnja** asimptotična meja
  - f je od spodaj omejena z g
  - f ne raste počasneje kot g
  - f je vsaj reda g

$$
\begin{aligned}
5n^2 + 3 \quad &= \Omega(\log n) \\
&= \Omega(n) \\
&= \Omega(n^{1.9}) \\
&\mathbf{= \Omega(n^2)} \\
&\neq \Omega(n^3) \\
&\neq \Omega(1.001^n) \\
&\neq \Omega(2^n)
\end{aligned}
$$

*Katera izmed spodnjih mej je **tesna**?*

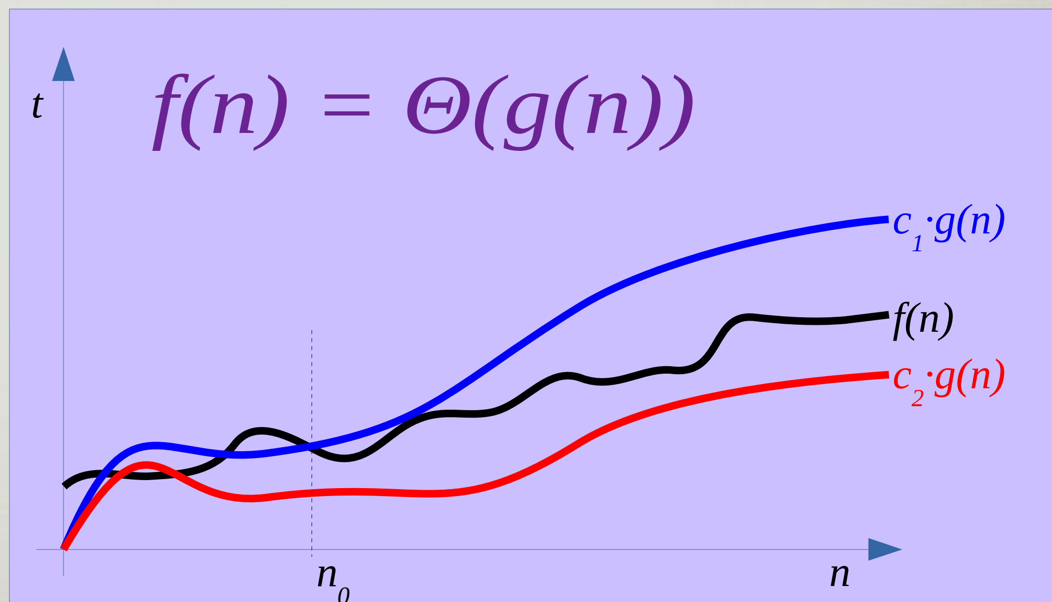


Téta

Asimptotska notacija

- Θ-notacija – **tesna** asimptotična meja
  - f je od zgoraj in od spodaj omejena z g
  - f je reda g

$$
\begin{aligned}
5n^2 + 3 \quad &\neq \Theta(\log n) \\
&\neq \Theta(n) \\
&\neq \Theta(n^{1.9}) \\
&= \Theta(n^2) \\
&\neq \Theta(n^3) \\
&\neq \Theta(1.001^n) \\
&\neq \Theta(2^n)
\end{aligned}
$$



Asimptotska notacija

Množice

Donald E. Knuth

- Formalne definicije
  - *Bonus: *o* in *ω* notacija

$<$ $$o(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c g(n) \}$$

$\leq$ $$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n) \}$$

$=$ $$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$

$\geq$ $$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) \leq f(n) \}$$

$>$ $$\omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) < f(n) \}$$

Opomba: vse funkcije so nenegativne.

Asimptotska notacija

- Ustaljena (zlo-)raba
  - Namesto $\in$ uporabljamo $=$

$$f(n)=O(g(n)) \equiv f(n)\in O(g(n))$$

  - Leva za vse / desna za enega

$$2n^2+3n+1=2n^2+\Theta(n)=\Theta(n^2)$$

Asimptotska notacija

- Primera uporabe definicij
  - Dana je $T(n) = 5n^2 + 12n$
    - Naštej nekaj funkcij $g(n)$, za katere velja $T(n) = O(g(n))$
    - Katera $g(n)$ tesno omejuje $T(n)$?
    - Pokaži veljavnost s pomočjo definicije
  - Enako za $3n^3 + 5n^2 - 6n$ in $\Theta(g(n))$

*Notacija s ~ (tildo)

- f(n) ~ g(n)

$$f(n) \sim g(n) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

- Intuitivno
  - ujemanje v redu velikosti
  - ujemanje v konstanti
  - kot Θ-notacija s konstanto
  - npr.: $5n^3 + 2n^2 + n + \lg n \sim 5n^3$

Asimptotska notacija

- Z limitami

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

namig	notacija	limita
$<$	o	$L = 0$
$\leq$	O	$0 \leq L < \infty$
$=$	Θ	$0 < L < \infty$
$\geq$	Ω	$0 < L \leq \infty$
$>$	ω	$L = \infty$
$\sim$	$\sim$	$L = 1$

Asimptotska notacija

- Primeri uporabe limit
  - Dana je $T(n) = 5n^2 + 12n$.
    - V kakšnem odnosu je $T(n)$ z n, n^2 in n^3?
    - V kakšnem odnosu je $T(n)$ z $\ln n$ in e^n?
      - Se kaj spremeni, če vzamemo $\lg n$ in 2^n?
  - Pokaži, da so počasnejše:
    - potence logaritma od polinomov,
    - polinomi od eksponentnih funkcij,
    - torej: $o(\ln^a n) = o(n^b) = o(c^n)$

Razredi asimptotske zahtevnosti

Funkcija	**Razred zahtevnosti**
1	konstantna
$\lg n$	logaritemska
n	linearna
$n \lg n$	linearitmična, n-log-n
n^2	kvadratna
n^3	kubična
2^n	eksponentna
$n!$	faktoriela

Izračunaj

- Moorov zakon
  - 2x več tranzistorjev vsakih 18 mesecev
- Podvojimo hitrost: $T_2(n) = ½T_1(n)$
  - kako veliko nalogo lahko rešimo v enakem času?
  - $T_2(n_2) = T_1(n_1)$, izračunaj n_2=?

    Podvoji se število izvedenih operacij v danem času

  - polinomska zahtevnost: $T(n) = O(n^k)$
    - multiplikativno povečevanje velikosti naloge
  - eksponentna zahtevnost: $T(n) = O(2^n)$
    - aditivno povečevanje velikost naloge

Izračunaj

- Čas pri podvojeni nalogi
- Velikost naloge pri podvojeni hitrosti

$T(n)$	$T(2n)$	velikost za $2v$
lg n	$T(n) + 1$	n^2
n	$2\ T(n)$	$2n$
$n \lg n$	$2\ T(n) + 2n$	$\sim 2n$
n^2	$4\ T(n)$	$\sqrt{2}n = 1{,}41n$
n^3	$8\ T(n)$	$\sqrt[3]{2}n = 1{,}26n$
2^n	$2^n\ T(n)$	$n + 1$

Kaj pa pri 10×?

Računanje z asimptotsko notacijo

- Izrek (simetrija):

$$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=\Omega(g(n)) \wedge f(n)=O(g(n))$$

- Izrek (transponirana simetrija):

$$f(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Omega(f(n))$$

- Izrek (tranzitivnost):
  - Velja za vse O, Ω, Θ, o in ω

$$f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(h(n)) \Rightarrow f(n)=O(h(n))$$

Računanje z asimptotsko notacijo

- Eliminacija konstante:
  - če velja za Θ, potem velja tudi za O in Ω

$$c>0: c\cdot f(n)=\Theta(f(n))$$

- Produkt:

$$f(n)\cdot g(n)=\Theta(f(n)\cdot g(n))$$

- Vsota:

$$f(n)+g(n)=O(max(f(n),g(n)))$$

$$f(n)+g(n)=\Omega(min(f(n),g(n)))$$

Povzetek

- Natančna zahtevnost je zahtevna
- Asimptotska notacija
  - definicije
  - zloraba
- Notacija s tildo
- Z limitami
- Razredi asimptotične zahtevnosti
- Računanje z asimptotično notacijo