Robotika in računalniško zaznavanje (RRZ)

Geometrijski model robota

Danijel Skočaj

Univerza v Ljubljani

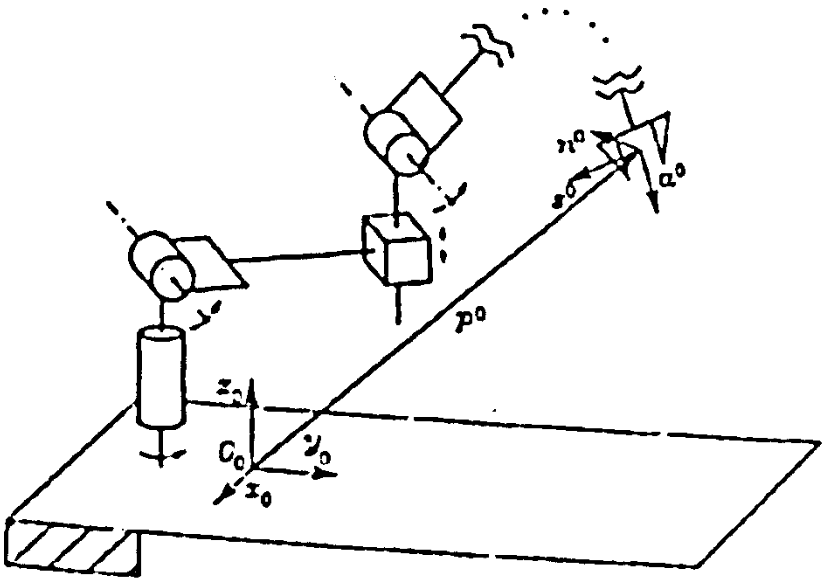
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Literatura: Tadej Bajd (2006).
Osnove robotike, poglavje 4

v7.0

Geometrijski model robota

- Robotski manipulator = veriga togih segmentov povezanih s sklepi
- Sklep je lahko rotacijski ali translacijski
  - 1DOF – 1 spremenljivka



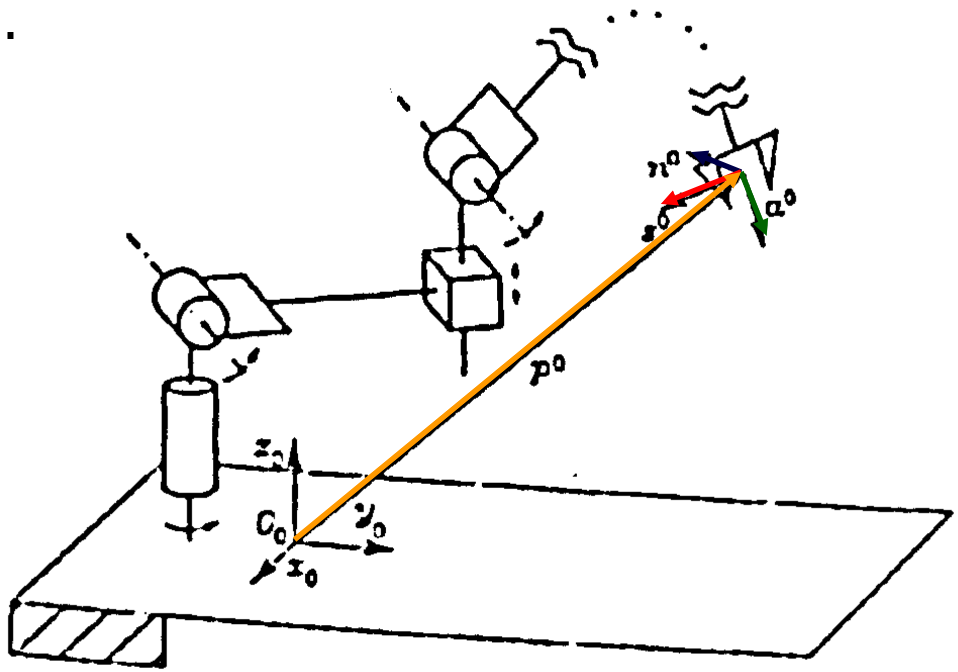
  - Geometrijski model robota določa lego (pozicijo in orientacijo) prijemala v odvisnosti od spremenljivk sklepov

Geometrijski model robota

- Geometrijski model izrazimo s homogeno transformacijo:

$$\mathbf{T}^o(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^o(\mathbf{q}) & \mathbf{s}^o(\mathbf{q}) & \mathbf{a}^o(\mathbf{q}) & \mathbf{p}^o(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

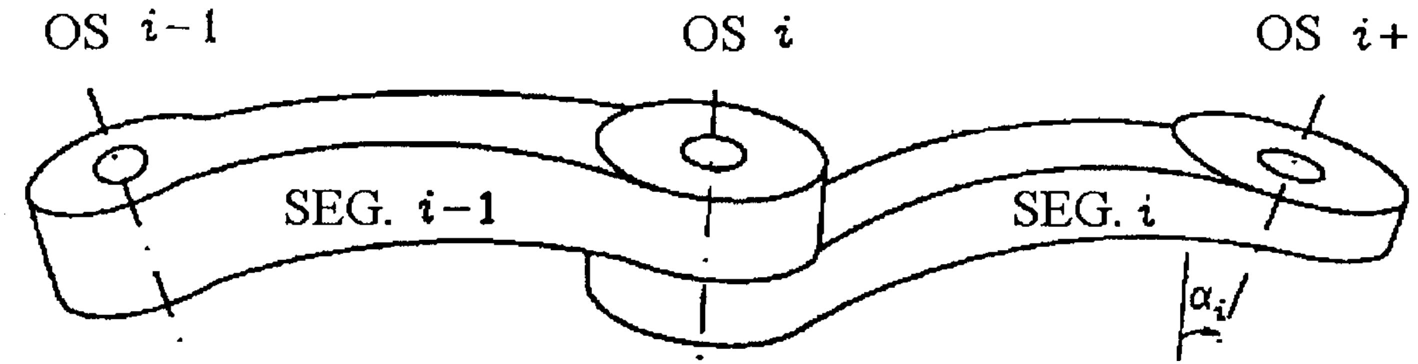
  - **p** : pozicija prijemala v referenčnem koordinatnem sistemu
  - **n**, **s**, **a** : enotski vektorji k.s. na prijemalu (vrha robota):
    - **a**: approach
    - **s**: sliding
    - **n**: normal
  - **q** : vektor s spremenljivkami sklepov



Lege koordinatnih sistemov segmentov

- Vsak sklep povezuje dva zaporedna segmenta
  - Določimo zvezo med dvema segmentoma in potem rekurzivno zgradimo celoten model
- Koordinatne sisteme lahko poljubno postavljamo na posamezne segmente

- Denavit – Hartenbergova pravila poenostavijo računanje geometrijskega modela robota
  - Določimo lego i-tega k.s. glede na lego (i-1). k.s.
  - Os i povezuje segmenta (i-1) in i



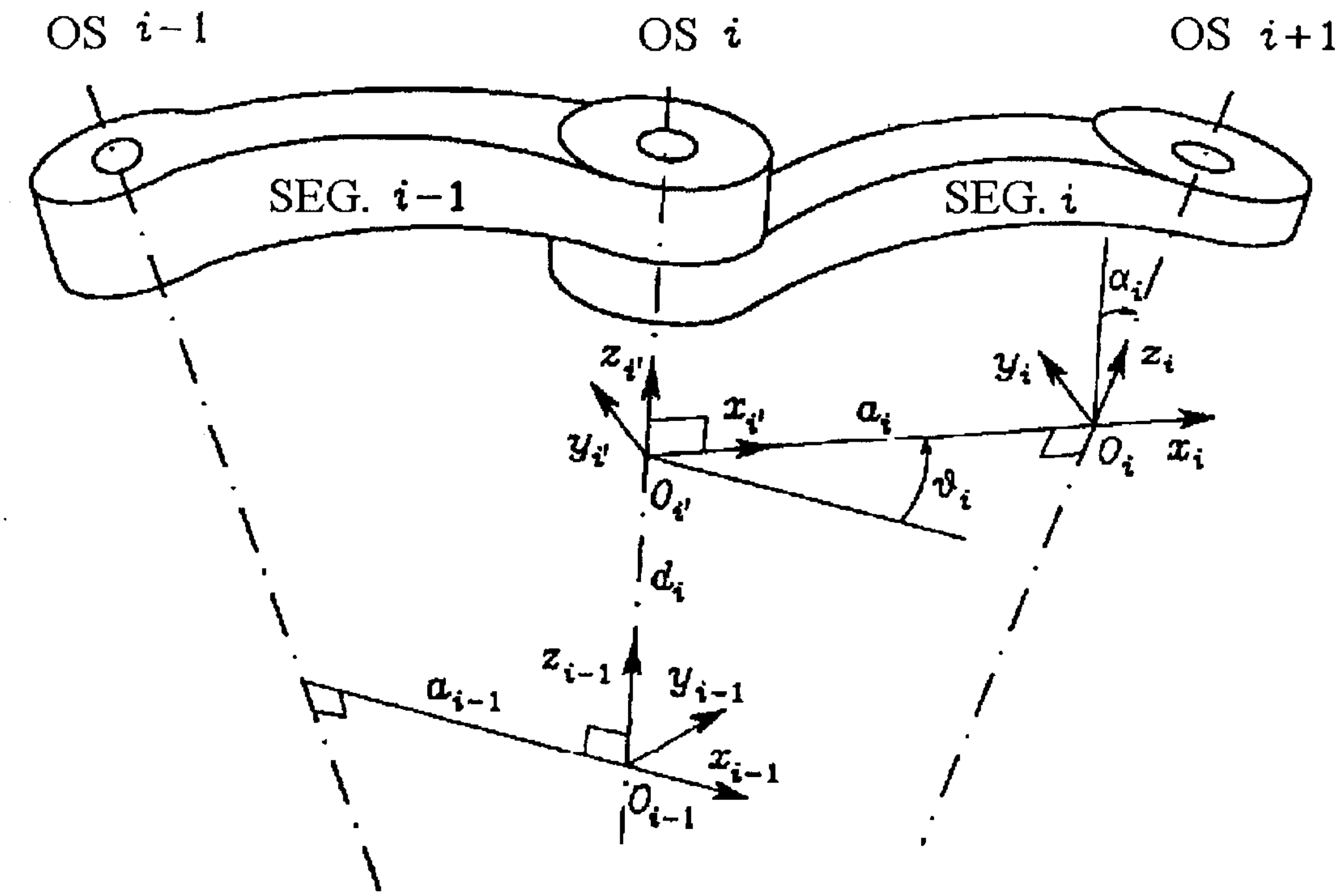
Denavit – Hartenbergova pravila

- Opiši koordinatni sistem i-tega segmenta (s sklepom i+1):

1. Izberi os z_i vzdolž osi sklepa (i+1)
2. Poišči skupno normalo na osi z_{i-1} in z_i
   - Postavi izhodišče O_i na presečišče osi z_i s skupno normalo
   - Postavi izhodišče O_i` na presečišče osi z_{i-1} s skupno normalo
   - Če sta osi vzporedni, postavi izhodišče kamorkoli
3. Postavi os x_i na skupno normalo, tako, da je usmerjena od sklepa i k sklepu i+1
   - Če se osi z_{i-1} in z_i sekata, postavimo os x_i pravokotno na ravnino, ki jo določata osi z_{i-1} in z_i
4. Izberi os y_i tako, da dobiš desnosučni k.s.

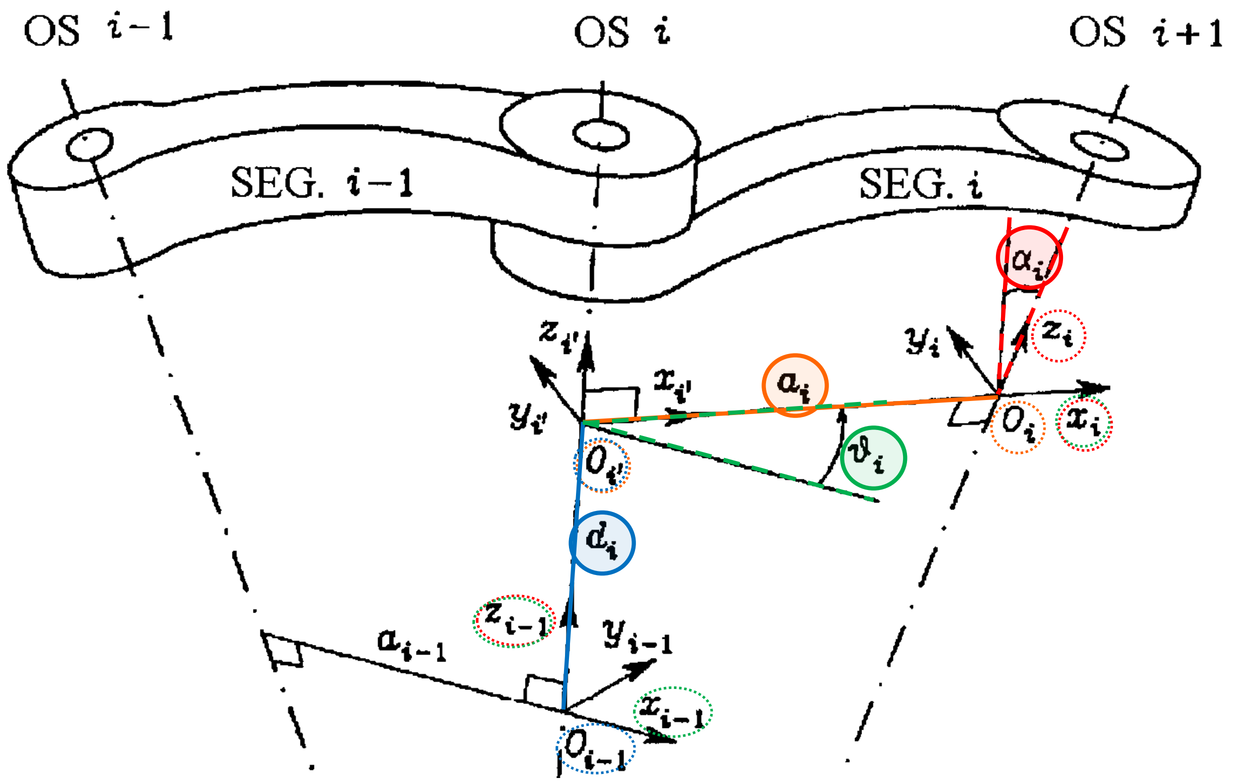
- Na podoben način opišemo (oz. smo že opisali) koordinatni sistem segmenta (i-1)
  - Izhodišče O_{i-1} je določeno s presečiščem skupne normale na osi i-1 in i
  - Os z_{i-1} poteka vzolž i-te osi sklepa
  - Os x_{i-1} poteka vzdolž skupne normale od sklepa i-1 proti sklepu i

Grafična ponazoritev DH zapisa

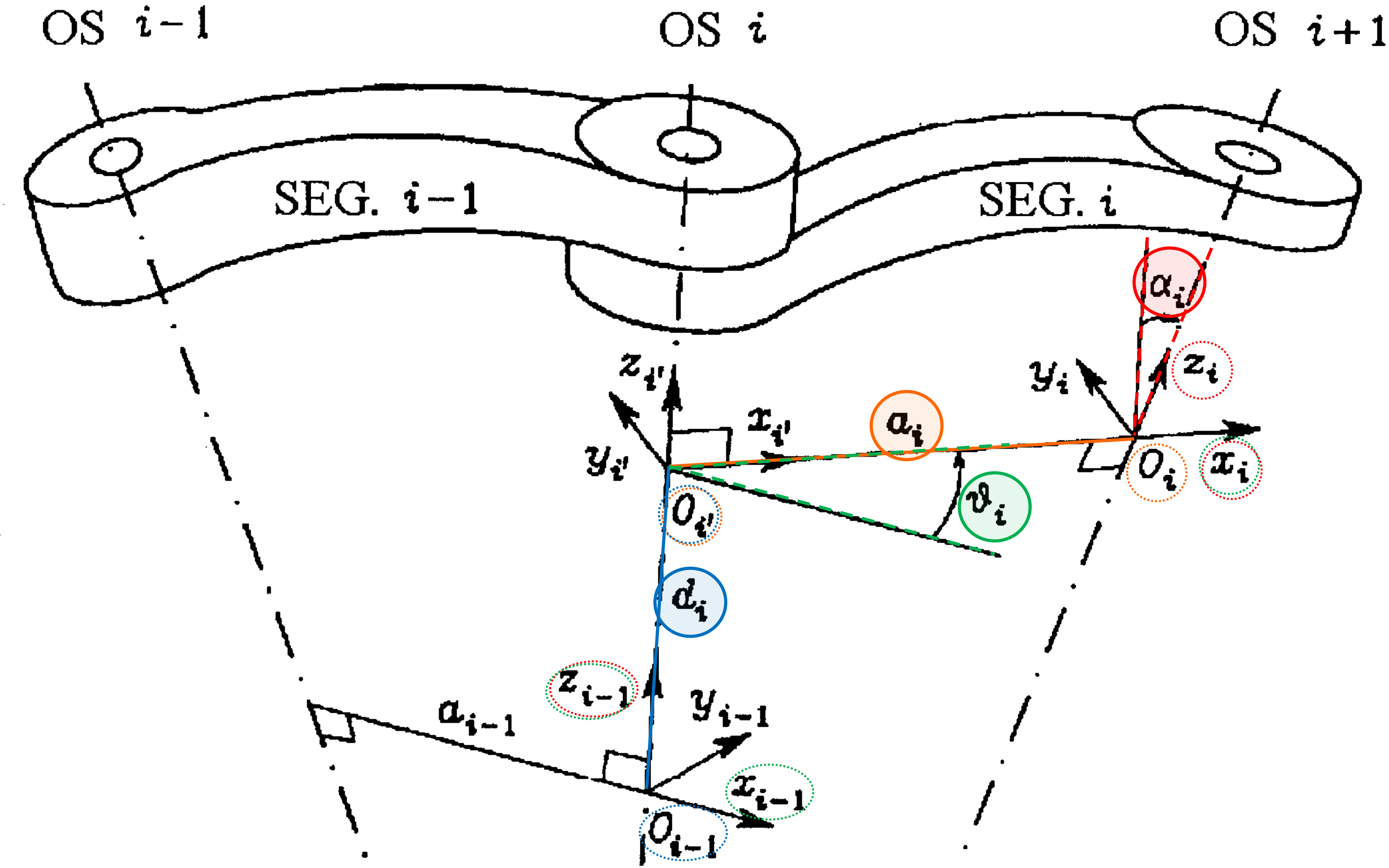


Denavit – Hartenbergovi parametri

- Lega i-tega k.s. glede na (i-1). k.s. je določena s 4 parametri:
  1. a_i – razdalja med O_i in $O_{i'}$ vzdolž osi x_i
  2. d_i – razdalja med O_{i-1} in $O_{i'}$ vzdolž osi z_{i-1}
  3. α_i – kot med osema z_{i-1} in z_i okrog x_i
  4. θ_i – kot med osema x_{i-1} in x_i okrog osi z_{i-1}



Grafična ponazoritev DH parametrov

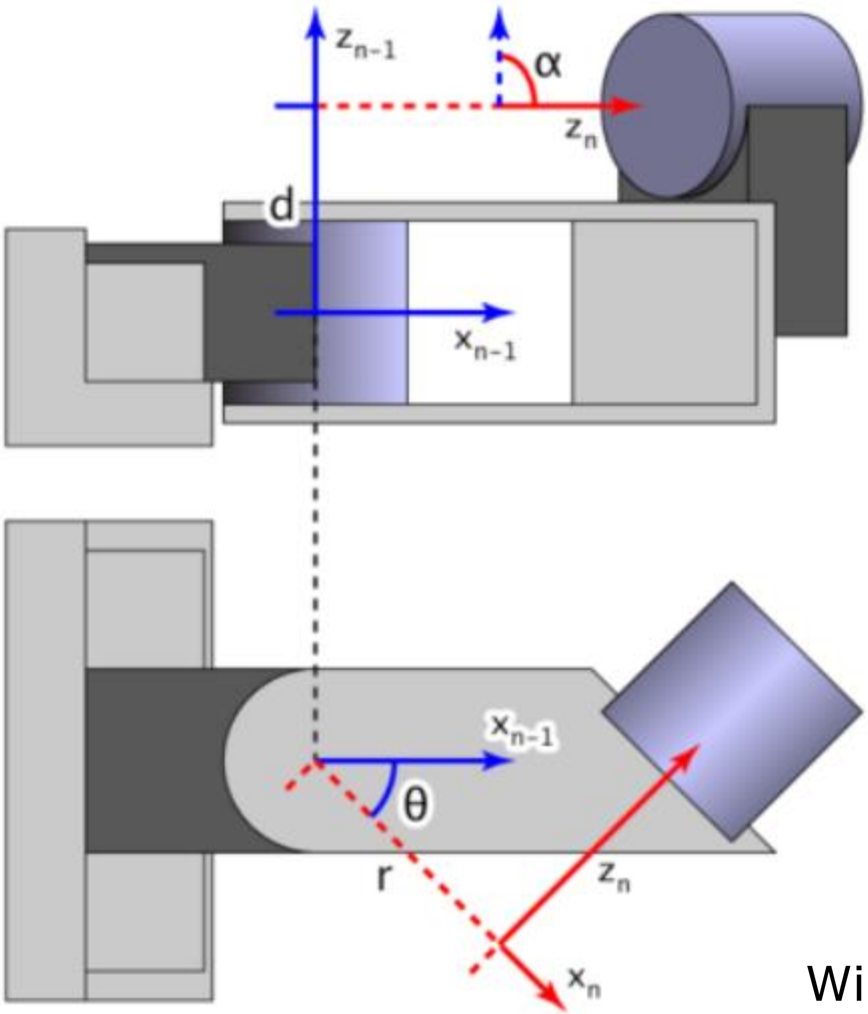


Denavit – Hartenbergovi parametri

- a_i in α_i sta vedno konstantna
  - Odvisna sta od geometrije in povezav med sklepoma, ki povezujeta i-ti segment
  - Se ne spreminjata med delovanjem robota
- Od ostalih dveh parametrov je le en spremenljivka
  - Θ_i, če je i-ti sklep rotacijski
  - d_i, če je i-ti sklep translacijski

Denavit – Hartenbergovi parametri

- Drugi pogled
  - r=a
  - n=i



Wikipedia

Denavit – Hartenbergovi parametri

- Video:

http://en.wikipedia.org/wiki/Denavit-Hartenberg_Parameters

Izjeme

- Nekatere nedoločenosti in izjeme lahko izkoristimo, da postopek poenostavimo:
  - Osi z_i in z_{i-1} sta vzporedni -> $d_i=0$
  - Osi z_i in z_{i-1} se sekata -> O_i je v presečišču
  - V primeru baznega (0-tega) segmenta: določena je le os z_0
    -> postavi izhodišče O_0 v prvi sklep
    -> poravnaj x_0 in x_1
  - V primeru vrha robota (n-ti k.s.):
    določena je samo os x_n pravokotna na z_{n-1},
    -> z_n naj bo vzporeden z z_{n-1}
  - Če imamo translacijski sklep:
    -> smer osi z_{i-1} vzdolž translacije
    -> O_{i-1} postavimo na začetek translacije

Denavit – Hartenbergova transformacija

- Transformacija med i-tim k.s. in (i-1)-im k.s.:

1. Izberi koordinatni sistem povezan s segmentom (i-1) O_{i-1}
2. Premakni ga za d_i in zavrti za Θ_i vzdolž in okrog z_{i-1}, da se poravna s k.s. $O_{i`}$

$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Premakni k.s. $O_{i`}$ za $a_i$ in ga zavrti za $\alpha_i$ vzdolž in okrog $x_{i`}$, da se poravna z O_i

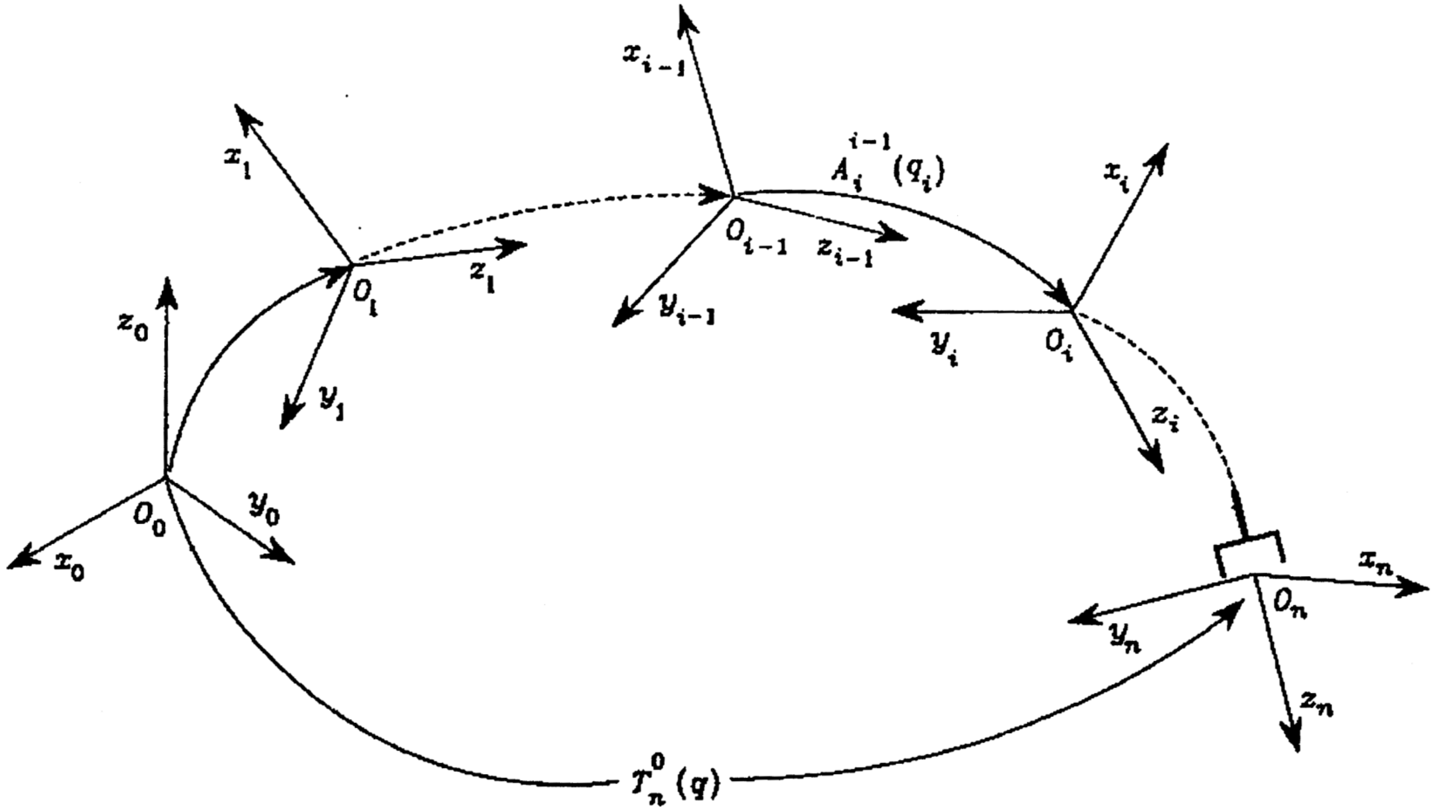
$$\mathbf{A}_{i}^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. DH transformacijo dobimo s postmultiplikacijo obeh transformacij
   - funkcija ene spr.:
     - Θ_i za rotacijski sklep
     - d_i za translacijski sklep

$$\mathbf{A}_{i}^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{A}_{i}^{i'} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

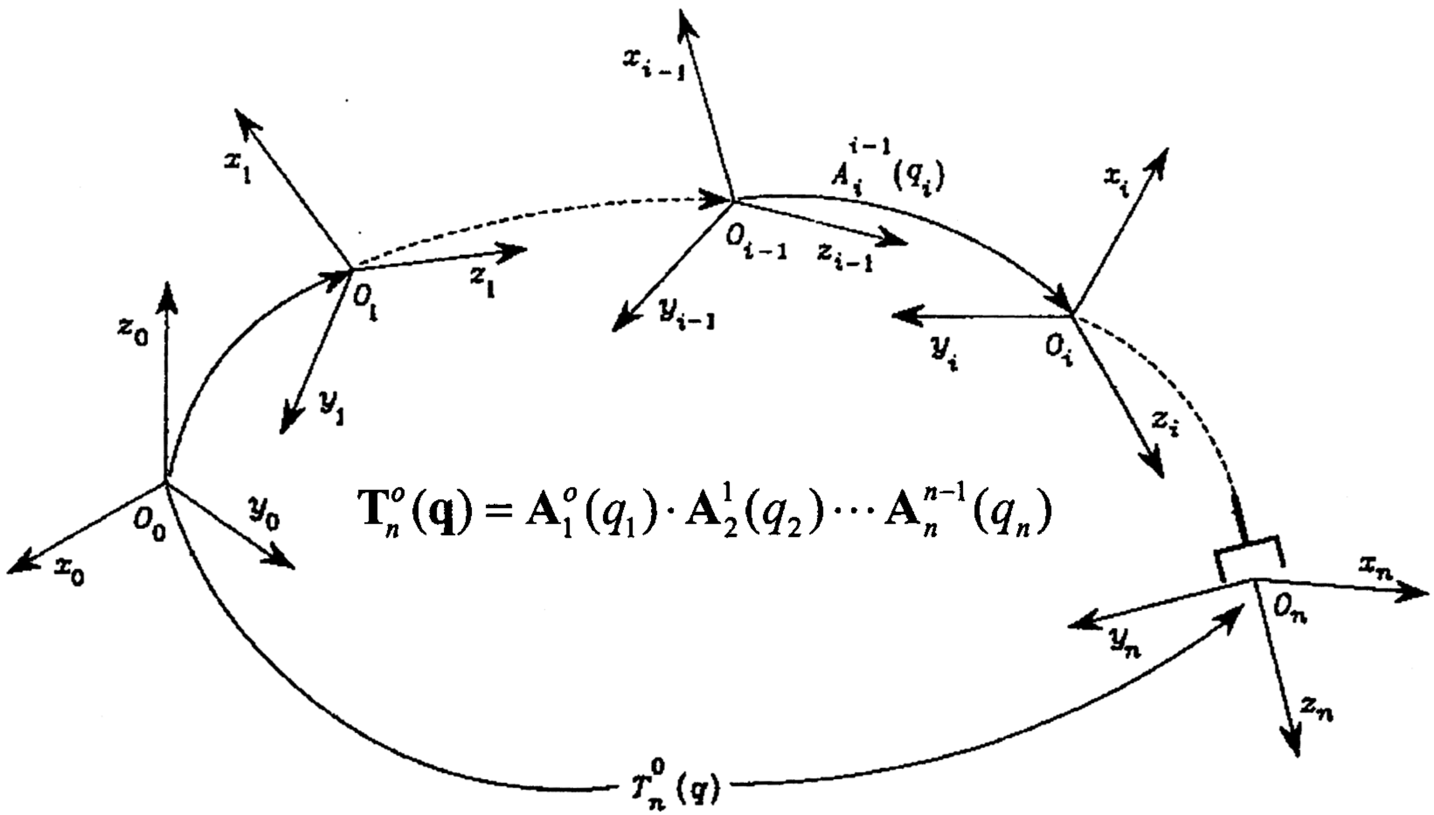
Izračun geometrijskega modela

1. Postavi koordinatne sisteme za vse segmente
2. Napiši tabelo DH parametrov a_i, d_i, α_i in θ_i za $i=1,2,\ldots,n$
3. Izračunaj DH transformacije $\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$ za $i=1,2,\ldots,n$
4. Izračunaj geometrijski model: $\mathbf{T}_n^o(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^o(q_1)\cdot\mathbf{A}_2^1(q_2)\cdots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$

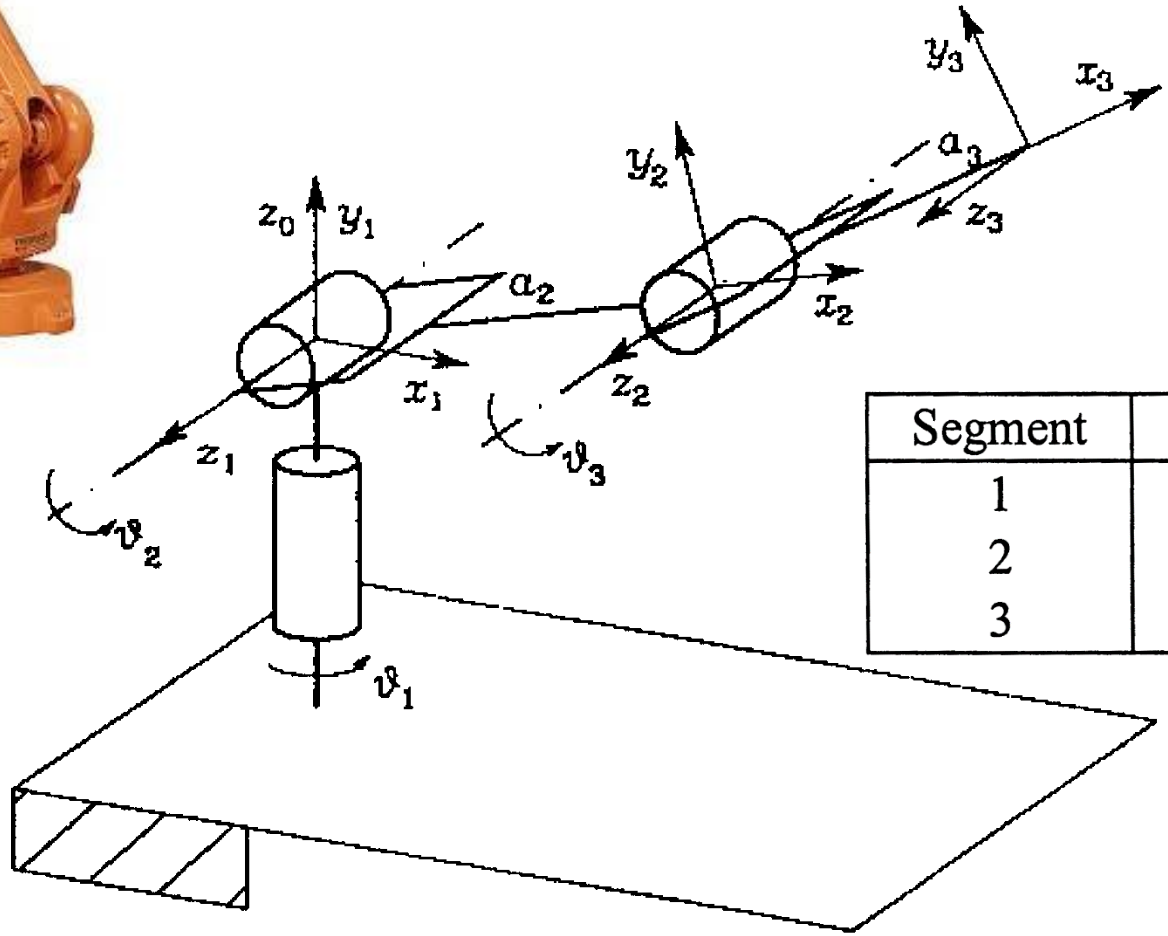


Uporaba geometrijskega modela

- Geometrijski model robota določa lego (pozicijo in orientacijo) prijemala v odvisnosti os spremenljivk sklepov **q**
- Poda lego koordinatnega sistema n glede na osnovni koordinatni sistem



Antropomorfni robotski manipulator



Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$

Antropomorfni robotski manipulator

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

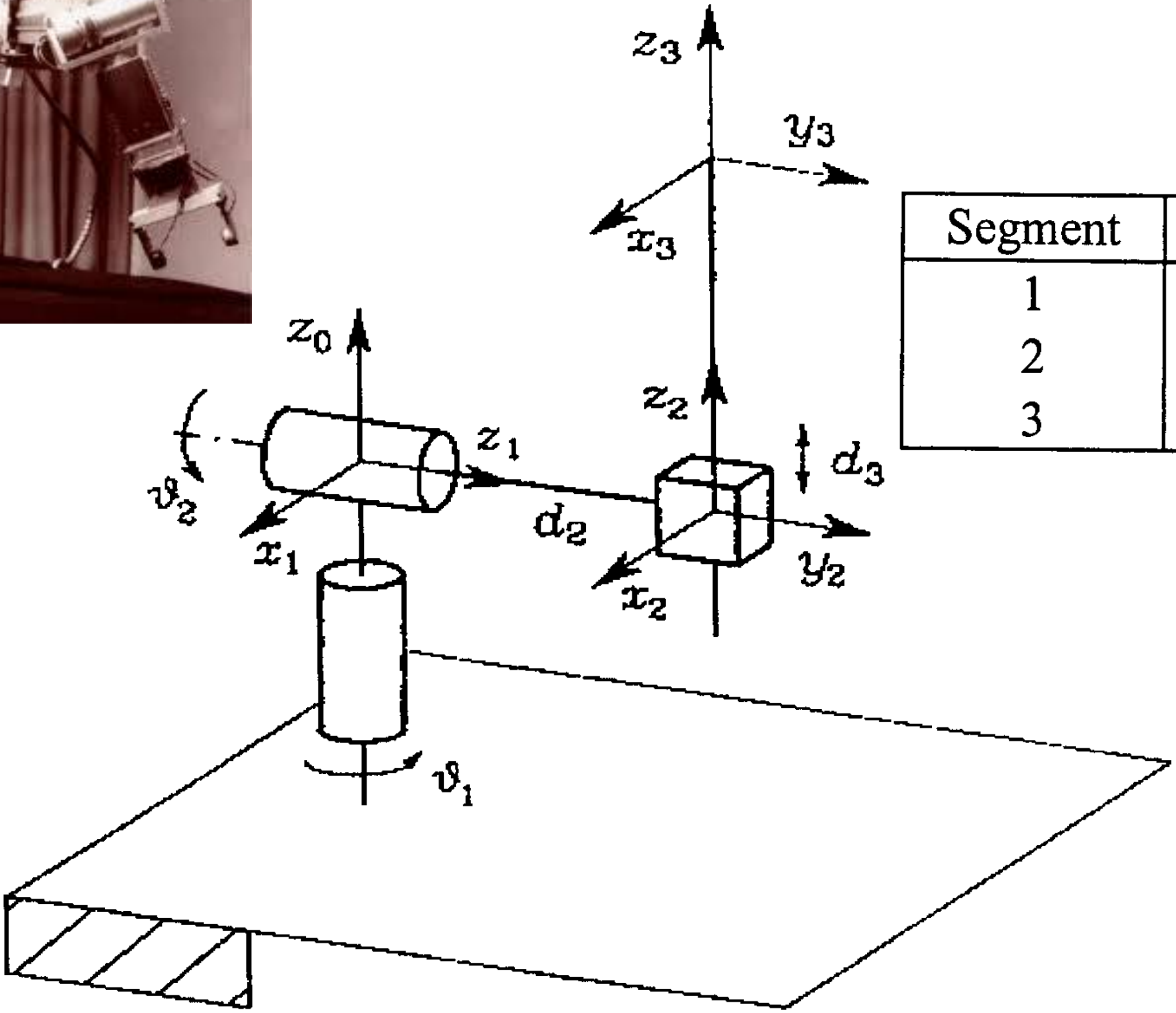
$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1^o(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i=2,3$$

$$\mathbf{T}_3^o(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^o \cdot \mathbf{A}_2^1 \cdot \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stanfordski robotski manipulator



Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$$

Stanfordski robotski manipulator

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	θ_2
3	0	0	d_3	0

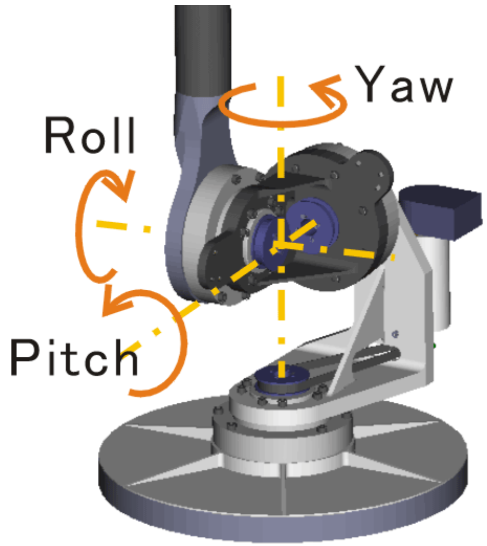
$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$$

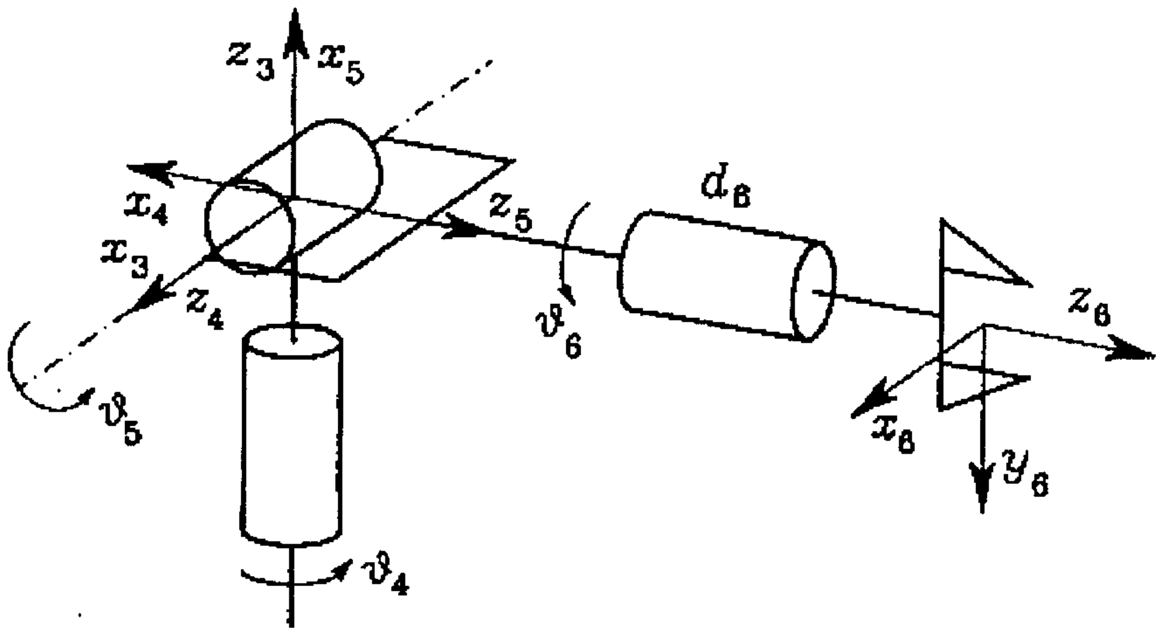
$$\mathbf{A}_1^o(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2^1(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^o(\underline{q}) = \mathbf{A}_1^o \cdot \mathbf{A}_2^1 \cdot \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sferično robotsko zapestje

- Ponavadi je pričvrščeno na vrh robotske roke





- Vse tri osi rotacijskih sklepov se sekajo v isti točki

$$\mathbf{q} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$$

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

Sferično robotsko zapestje

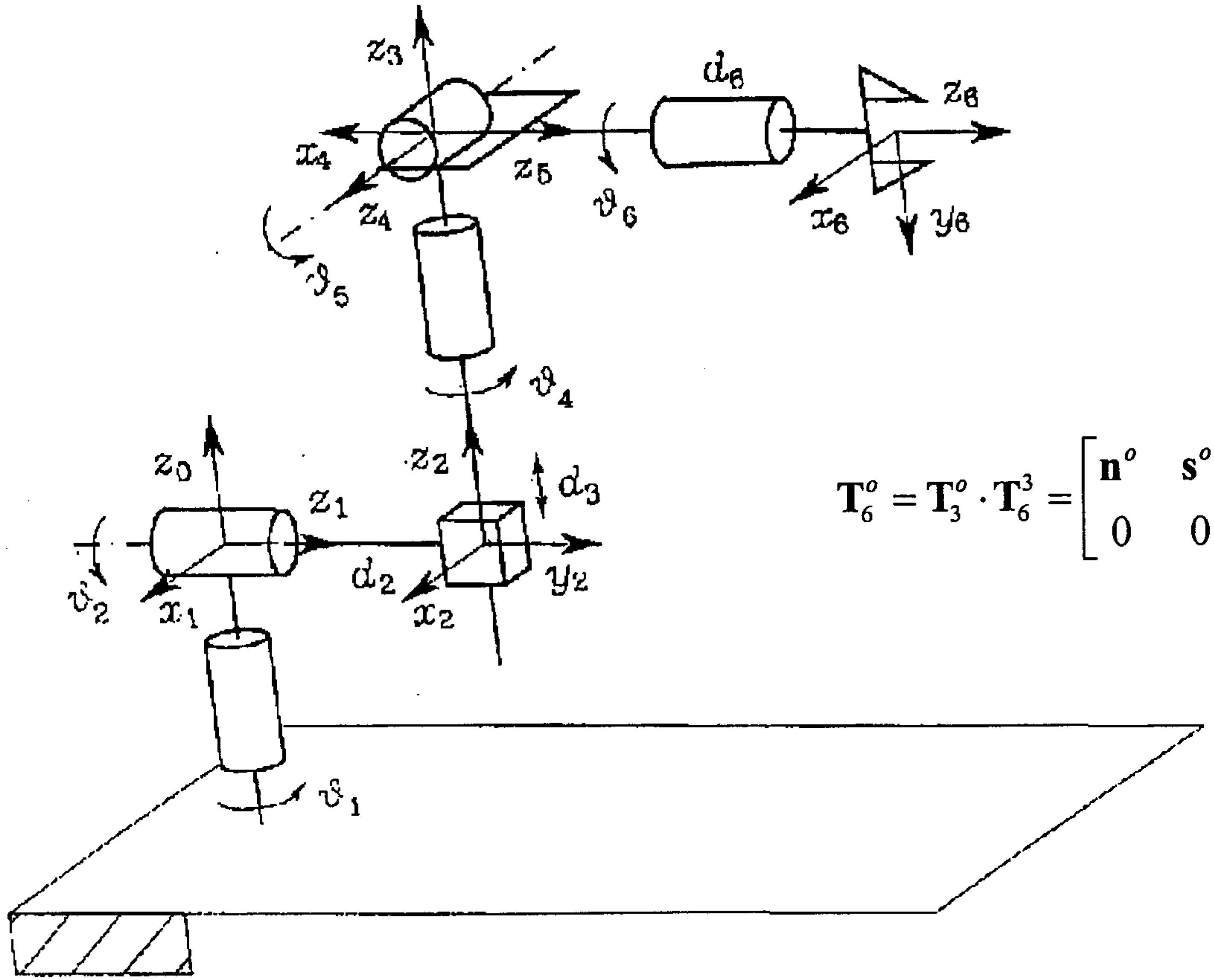
Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

$$\mathbf{q} = [\theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$$

$$\mathbf{A}_4^3(\theta_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_5^4(\theta_5) = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_6^5(\theta_6) = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_6^3(\underline{q}) = \mathbf{A}_4^3 \cdot \mathbf{A}_5^4 \cdot \mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stanfordski manipulator z zapestjem



$$T_6^o = T_3^o \cdot T_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^o & \mathbf{s}^o & \mathbf{a}^o & \mathbf{p}^o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stanfordski manipulator z zapestjem

$$\mathbf{p}^o = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + \left(c_1\left(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5\right) - s_1 s_4 s_5\right) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + \left(s_1\left(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5\right) + c_1 s_4 s_5\right) d_6 \\ c_2 d_3 + \left(-s_2 c_4 s_5 - c_2 c_5\right) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^o = \begin{bmatrix} c_1\left(c_2\left(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6\right) - s_2 s_5 c_6\right) - s_1\left(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6\right) \\ s_1\left(c_2\left(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6\right) - s_2 s_5 c_6\right) + c_1\left(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6\right) \\ -s_2\left(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6\right) - c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^o = \begin{bmatrix} c_1\left(-c_2\left(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6\right) + s_2 s_5 s_6\right) - s_1\left(-s_4 c_5 c_6 + c_4 c_6\right) \\ s_1\left(-c_2\left(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6\right) + s_2 s_5 s_6\right) + c_1\left(-s_4 c_5 c_6 + c_4 c_6\right) \\ s_2\left(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6\right) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^o = \begin{bmatrix} c_1\left(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5\right) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1\left(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5\right) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Inverzni geometrijski model robota

- Geometrijski model robota določa lego prijemala v odvisnosti od spremenljivk sklepov
  - Kako se bo prijemalo premaknilo, če premaknem posamezne segmente za določen kot oz. razdaljo

$$\mathbf{T}(\mathbf{q})$$

  - Lega prijemala je enoumno določena
- Inverzni model pomeni določiti spremenljivke sklepov, ki ustrezajo dani legi prijemala
  - Kako naj premaknemo posamezne segmente, da bo prijemalo prišlo v dano lego
  - Zahteven problem:

$$\mathbf{q}(\mathbf{T})$$

    - Enačbe, ki jih rešujemo so nelinearne
    - Rešitev ni enoumno določena
      - Lahko dobimo več rešitev
      - V nekaterih primerih dobimo tudi neskončno rešitev
      - V nekaterih primerih rešitev sploh ni možna
  - Pri računanju upoštevamo razne kriterije, ki določijo katera rešitev je optimalna
  - Včasih lahko izračunamo analitično rešitev, včasih pa lahko rešitev dobimo le na numerični način