Matematika

Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Kaj je funkcija?

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz *definicijskega območja* $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Če $\mathcal{D}_f$ ni podano, je največja množica, kjer ima predpis f smisel.

- x neodvisna spremenljivka
- $y = f(x)$ odvisna spremenljivka
- $f(A) = \{f(x) \,;\, x \in A\}$ *slika* množice $A \subset \mathcal{D}_f$
- $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f)$ *zaloga vrednosti* funkcije f

Graf

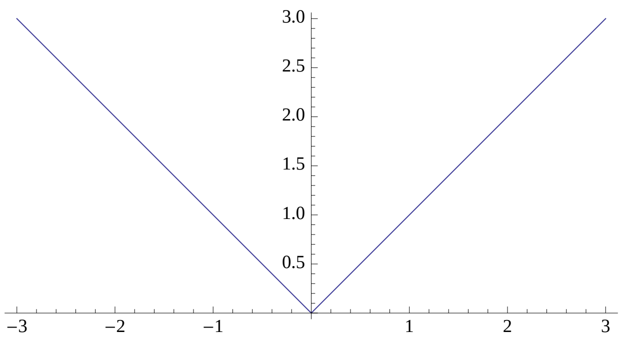
Graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ je krivulja v ravnini:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x))\ ;\ x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- Graf funkcije f je krivulja v ravnini.
- Graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki.
- Projekcija grafa na os x je $\mathcal{D}_f$, projekcija grafa na os y pa je $\mathcal{Z}_f$.

Primera

1. $f(x) = |x|$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$

2. $g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = \{-1, 0, 1\}$

Sode in lihe funkcije

Funkcija $f(x)$ je

- *soda*, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D$
- *liha*, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D$.

Primeri:

- $f(x) = |x|$, $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$ $h(x) = \cos x$ so sode funkcije
- $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \sin x$ so lihe funkcije
- $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 + 2x + 1$ niso ne sode in ne lihe funkcije

Sode in lihe funkcije

Velja:

- graf sode funkcije je simetričen glede na os y, graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče
- vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih je liha funkcija
- produkt dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt lihe in sode funkcije je liha funkcija

Injektivne in surjektivne funkcije

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *injektivna*, če različni točki $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in \mathcal{Z}_f$.

- Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *surjektivna*, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

- Vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki.

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Kompozitum ali sestavljena funkcija

Naj bo $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$. Če je $Z_f \subseteq \mathcal{D}_g$, potem funkcijo $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

in imenujemo *kompozitum* funkcij g in f.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Inverzna funkcija

Naj bo $f: \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija. Potem funkcijo $f^{-1}: \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero velja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, imenujemo *inverzna funkcija* funkcije f.

- Ekvivalentno: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.
- Definicijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata: $D_{f^{-1}} = Z_f, \quad Z_{f^{-1}} = D_f$.
- Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.