

**Rešitve izpita iz Osnov verjetnosti in statistike, ki jih  
ne najdete na zapiskih s predavanj  
2. julij 2010**

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Rezultate lahko puščate v obliki  $\frac{8^3}{35! \binom{16}{4}} \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{14}}\right)$ .
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [16 točk] Dvofazni poskusi

(a) Kdaj je množica dogodkov  $H_1, H_2, H_3$  popoln sistem dogodkov?

(b) Če je  $A$  poljubni dogodek in  $H_1, H_2, H_3$  popoln sistem dogodkov ter poznamo verjetnosti  $P(H_1), P(H_2), P(H_3), P(A|H_1), P(A|H_2), P(A|H_3)$ , potem je

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3)}$$

Četrtnina vseh moških ima težave s srcem. Verjetnost, da je moški, ki ima težave s srcem, kadilec, je dvakrat večja od verjetnosti, da je moški, ki nima težav s srcem, kadilec.

(c) Verjetnost, da naključno izbrani moški nima težav s srcem, je enaka  $\frac{3}{4}$

(d) Verjetnost, da ima moški težave s srcem pri predpostavki, da je kadilec, je enaka

Označimo dogodke  $H_1$ ... moški ima težave s srcem,  $H_2$ ... moški nima težav s srcem,  $K$ ... moški je kadilec. Označimo še  $P(K|H_1) = 2P(K|H_2) = 2p$

$$\text{Potem je } P(H_1|K) = \frac{P(K|H_1)P(H_1)}{P(K|H_1)P(H_1)+P(K|H_2)P(H_2)} = \frac{2p \frac{1}{4}}{2p \frac{1}{4} + p \frac{3}{4}} = \frac{2}{5}.$$

2. [20 točk] Upanje in disperzija

(a) Za slučajno spremenljivko  $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$  je njeno matematično upanje enako: (izrazite z  $x_i, p_i$ )

(b) Za slučajno spremenljivko  $X$  je njena disperzija enaka: (izrazite z  $x_i, p_i$ )

Naj za slučajno spremenljivko  $X$  velja  $E(X) = 3$  in  $E(X^2) = 13$ . Izračunajte:

(c)  $\sigma(X) = 2$

(d)  $E(4X + 5) = 17$

(e)  $D(4X + 5) = 64$

3. [12 točk] Zvezne slučajne spremenljivke

(a) Kaj mora veljati za funkcijo  $g$ , da bo gostota zvezne slučajne spremenljivke?

Od kraja A do kraja B vodita 2 cesti. Čas, ki ga potrebujemo, da pridemo od A do B po prvi poti, je porazdeljen normalno s povprečnim časom 10 minut in standardnim odklonom 8 minut. Čas, ki ga potrebujemo, da pridemo od A do B po drugi poti, je porazdeljen normalno s povprečnim časom 14 minut in standardnim odklonom 2 minuti.

(b) Nahajam se v kraju A in moram prej kot v 18 minutah priti v kraj B. Katero od obeh poti izberem? Odgovor utemeljite.

Naj bo  $X$  čas, ki ga potrebujemo za pot po prvi poti,  $Y$  pa za pot po drugi poti,  $Z \sim N(0, 1)$ . Potem je  $P(X \leq 18) = P(Z \leq 1)$  in  $P(Y \leq 18) = P(Z \leq 2) > P(Z \leq 1)$ . Zatorej imamo večjo verjetnost, da pridemo pravočasno, če izberemo drugo pot.

(c) Denimo, da se bom vsako jutro, 25 dni v mesecu, vozil **po prvi poti** iz kraja A v kraj B. Kolikšen je predvideni skupni čas, ki ga bom potreboval v 25 vožnjah iz kraja A v kraj B? Kolikšen je standardni odklon skupnega časa?

predviden skupni čas: 250 minut, standardni odklon: 40 minut.

4. [20 točk] Vzorčenje

(a) Kaj je enostavno slučajni vzorec?

(b) Zapišite povprečje in popravljen standardni odklon vzorca  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Tovarna žarnic izdeluje vrsto žarnic, katere življenjska doba je porazdeljena normalno s povprečjem 10 mesecev in standardnim odklonom 2 meseca. Naključno jih pakirajo v pakete po 100 žarnic. Denimo, da slučajna spremenljivka  $Y$  meri povprečno življenjsko dobo žarnic v posameznih paketih.

(c)  $E(Y) = 10$ .

(d)  $\sigma(Y) = 0,2$ .

(e)  $Y \sim N(10, 0.2)$ .

5. [12 točk] Intervali zaupanja

(a) Kaj je interval zaupanja za populacijsko povprečje  $\mu$  pri stopnji zaupanja  $\gamma$ ?

(b) Koliko intervalov zaupanja za populacijsko povprečje  $\mu$  pri stopnji zaupanja  $\gamma$  pokrije  $\mu$ ?

(c) Opazujemo slučajno spremenljivko, za katero poznamo njen standardni odklon na populaciji. Na nekem vzorcu določimo interval zaupanja za populacijsko povprečje, ki se nam zdi prevelik. Kaj lahko storimo, da zmanjšamo interval zaupanja?  
Povečamo vzorec.

6. [20 točk] Statistični testi

(a) Kaj je stopnja značilnosti testa?

(b) Kaj je kritično območje testa?

Skupina znanstvenikov želi testirati, ali se nivo glukoze v krvi po zaužitju 50g čokolade dvigne enako pri ženskah in moških.

(c) Kateri statistični test bodo izvedli? Mann-Whitneyjev test

(d) Kaj bo ničelna in kaj alternativna hipoteza?

$H_0$ : Nivo glukoze se po zaužitju 50g čokolade enako dvigne pri ženskah in moških

$H_A$ : Nivo glukoze se po zaužitju 50g čokolade ne dvigne enako pri ženskah in moških

(e) Za določitev kritičnega območja testne statistike bodo uporabili tabelo

(standardne) normalne porazdelitve.