1. IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR VSP

ponedeljek, 7. junij 2004

1. Dokaži, da velja naslednji sklep, ali pa poišči protiprimer:

$$s \vee r, p \vee q, \neg q, r \Rightarrow \neg p \models s.$$

2. Na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je definirana relacija R:

$$(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z} : (a+n, b+5m) = (c,d).$$

   Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija. Kaj so ekvivalenčni razredi in koliko jih je?

3. Naj bo $G = \{a, b, c, d\}$, kjer so

$$a = (1,0), b = (0,1), c = (-1,0), d = (0,-1).$$

   Definirana je operacija $\circ$ na G s pravilom

$$(x,y) \circ (u,v) = (xu - yv, xv + yu).$$

   Zapiši Cayley-evo tabelo za $(G, \circ)$. Ali je G grupa za to operacijo? Ali je operacija komutativna? Utemelji!

4. Določi a tako, da bo sistem rešljiv:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 11x_4 & = & a \end{array}$$

   in poišči rešitev.

2. IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR
16. junij 2004

1. Na množici $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ je podana relacija

$$R = \{(a,a),(a,f),(b,g),(c,b),(d,c),(e,d),(g,a),(g,e),(g,e)\}.$$

   a) Nariši graf relacije.
   b) Ali je relacija refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična?
   c) Določi R^{2004}.

2. Dana je permutacija

$$\alpha = (2\ 4)(3\ 2\ 1)(7\ 4\ 1\ 5).$$

   (a) Zapiši α kot produkt disjunktnih ciklov in določi njen red.
   (b) Izračunaj α^{2004}.
   (c) Poišči β, da bo veljalo $\alpha^2\beta = (2\ 3)(7\ 5\ 1)$.

3. Katera točka iz ravnine $x + 3y - 2z = 5$ je najbližja točki $(2, 0, -1)$?

4. Nariši grafa podana z matrikama

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Na obeh grafih ugotovi ali obstajata Eulerjev sprehod in obhod in ju določi. Ali sta grafa izomorfna?

4. IZPIT IZ DISKRETNIH STRUKTUR VSP

sreda, 15. september 2004

1. Dokaži, da velja naslednji sklep, ali pa poišči protiprimer:

$$p \vee \neg q, \neg r, s \Rightarrow q, p \Rightarrow r \models \neg s.$$

2. Za realna števila definiramo naslednje funkcije:

   a) $f(x) = e^{x^2}$

   b) $g(x) = \frac{1}{1+x}$

   c) $h(x) = \sqrt{x^3 - x}$

   d) $k = f \circ g$

   e) $l = g \circ f$

   Za vsako funkcijo od naštetih funkcij določi (največjo možno) definicijsko območje, zalogo vrednosti in ugotovi ali je funkcija injektivna.

3. Premica p je določena s točko $T(0,1,0)$ in vektorjem $\vec{p} = (2,3,4)$, ravnina Σ pa je določena z enačbo

$$3x + 2y + z = 12.$$

   a) Izračunaj presečišče premice p in ravnine Σ.

   b) Pod kakšnim kotom se sekata premica in ravnina?

4. Reši matrično enačbo

$$AXB = XB + C^T,$$

   kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 11 & -20 & 14 \\ 17 & -26 & 11 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Uporabi Gaussovo metodo, ne računaj inverzov matrik!

1. Izpit iz diskretnih struktur VSP
6. junij 2005

1. Dokaži ali ovrzi naslednji sklep:

$$p \vee r, r \Rightarrow s, \neg p, q \vee \neg s \models q \wedge s.$$

2. Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiramo relacijo

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff |x_1| + 2|y_1| = |x_2| + 2|y_2|$$

   a) Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija!
   b) Določi in v ravinini nariši ekvivalenčna razreda točk $T_1(2, -1)$ in $T_2(-1, 3)$. Kakšni so ekvivalenčni razredi v splošnem?

3. Dan je trikotnik $\triangle ABC$. Naj točka P leži na stranici AB, tako da velja $AP : BP = 4 : 1$ in naj Q leži na stranici BC, tako da velja $BQ : QC = 2 : 5$. Naj bo T presečišče daljic CP in AQ.

   a) V kakšnem razmerju se sekata CP in AQ?
   b) Izračunaj koordinate točke T, če imaš dane koordinate $A(0, 0, 0)$, $B(3, -1, 0)$ in $C(2, 3, 1)$.

4. Dan je graf G na točkah

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

   s povezavami

$$E(G) = \{ae, af, ag, bf, bd, bh, ce, cd, ch, dh, de, eh, fg\}$$

   a) Nariši G.
   b) Ali ima G Eulerjev ali Hamiltonov sprehod (obhod)?
   c) Ali je G ravninski? Izračunaj kromatično število grafa G.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba štirih listov z obrazci.
Odgovore dobro utemelji!!

2. Izpit iz diskretnih struktur VSP
15. junij 2005

1. Dane so naslednje izjave:

   (a) Ali je Peter zadel na lotu ali pa je na lotu zadela Tina.

   (b) Na lotu sta zadela Peter ali Rok (lahko tudi oba).

   (c) Če je na lotu zadel Rok, je zadela tudi Simona.

   (d) Ni res, da sta Tina in Simona obe zadeli.

   Ali lahko iz predpostavk (a)-(d) sklepamo, da je Peter zadel na lotu?

2. Dana je permutacija

$$\alpha = (3\ 1\ 7\ 4) * (3\ 2\ 6) * (2\ 6\ 1\ 8)^{-1}$$

   (a) Zapiši α kot produkt disjunktnih ciklov.

   (b) Določi njen red ter parnost.

   (c) Izračunaj α^{-2005}.

3. Ugotovi pri katerih vrednostih parametra a je naslednji sistem enolično rešljiv, ter ga reši.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3a\,x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -2a\,x & - & 3y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

4. Iščemo graf G

   (a) na 6 točkah

   (b) z 9 povezavami,

   (c) ki ima minimalno stopnjo točke vsaj 2 in

   (d) nima Eulerjevega sprehoda.

   Poišči vsa grafična zaporedja (zaporedja stopenj točk grafa) grafov, ki ustrezajo lastnostim (a)-(d). Koliko je takšnih zaporedij? Za vsako izmed njih poišči vsaj en graf s tem zaporedjem stopenj točk. Vsaj enega izmed njih nariši v ravnini (ni nujno, da so vsi ravninski!).

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba štirih listov z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!!

3. Izpit iz diskretnih struktur, VSP
29. avgust 2005

1. Na policijsko postajo so privedli tri osumljence A, B in C v zvezi z strmoglavljenim letalom. Povedali so naslednje:
   - A: Če je terorist A, je terorist tudi C.
   - B: Jaz nisem terorist, vendar vsaj eden izmed preostalih dveh je terorist.
   - C: B je terorist, C pa je nedolžen.

   Odgovori:

   (a) Ali so lahko vse izjave resnične?

   (b) Če so vsi nedolžni, kdo je lagal?

   (c) Kdo je terorist, če teroristi lažejo, nedolžni pa govorijo resnico?

2. Funkcija $f : \{0, 1, \ldots, 6\} \to \{0, 1, \ldots, 6\}$ je podana z naslednjim predpisom:
$$f(i) = i^{100} \pmod 7$$
   Ali je funkcija injektivna, surjektivna, bijektivna?

3. Ravnina R je opisana z enačbo $2x+3y-z=8$, obravnavamo pa tudi premice p_1, p_2, p_3:

   (a) premica p_1 je določena z enačbo $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

   (b) premica p_2 je določena z vektorsko enačbo $\overrightarrow{r} = (1, 0, 1) + t(-1, 2, 1)$

   (c) premica p_3 gre skozi točki $A(7, 2, 1)$ in $B(6, 1, -4)$.

   Katera izmed premic p_1, p_2, p_3 je vzporedna ravnini R? Določi razdaljo med R in premico, ki ji je vzporedna.

4. Nariši graf G, ki ima naslednje lastnosti:

   (a) G ima deset točk, ki so oštevilčene s števili od 1 do 10,

   (b) točki grafa G sta sosedni, če je njuna razlika liho praštevilo.

   Ali je graf G ravninski? Odgovor utemelji.
   OPOMBA: Majhna liha praštevila so $3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba štirih listov z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!!

4. Izpit iz diskretnih struktur, VSP
14. september 2005

1. Dokaži ali ovrzi naslednji sklep:

$$p \Rightarrow q, s \vee \neg q, t \Rightarrow s, \neg t, t \Rightarrow p \models p$$

2. Na množici $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ je relacija R definirana s predpisom:

$$aRb, \text{ natanko tedaj ko } a^2 \equiv b^2 (\text{mod } 5)$$

Ali je R antisimetrična relacija? Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede.

3. Reši matrično enačbo

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

kjer so

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -10 \\ -11 & 22 & -29 \\ 18 & 14 & 8 \end{bmatrix}$$

Ne računaj inverzov matrik!

4. Graf G je podan z množico točk in povezav:

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,6\}, \{1,8\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{2,9\}, \{3,5\}, \{3,9\}, \{4,7\}, \{4,9\}, \{5,6\}, \{6,8\}, \{6,9\}, \{7,9\}\}$$

a) Nariši G in zapiši matriko sosednosti.
b) Ali ima Eulerjev obhod? Ali ima Hamiltonov cikel?
c) Ali je G ravninski graf?
d) Določi kromatično število grafa.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba štirih listov z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!!

2. Izpit iz diskretnih struktur VSP
23. junij 2006

1. Določi sestavljeno izjavo A, tako da naslednja izjava protislovna:

$$((a \Rightarrow b) \vee c \Rightarrow \neg A) \wedge (A \vee c \vee (a \Rightarrow b))$$

Zapiši A v čim krajši obliki.

2. Naj bo $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ množica preslikav na realnih številih, ki so definirane na naslednji način:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ f_3(x) = |x|,\ f_4(x) = -|x|$$

a) Katere izmed naštetih preslikav so bijektivne?

b) Zapiši Cayleyevo tabelo za $(G, \circ)$, kjer je operacija $\circ$ kompozitum preslikav?

c) Ali je $(G, \circ)$ polgrupa, monoid, grupa? Ali obstaja absorbcijski element?

3. Dane so točke v prostoru $A(1, 0, 1)$, $B(0, -1, 2)$, $C(1, -2, 0)$.

a) Izračunaj kot $\measuredangle ABC$.

b) Zapiši enačbo premice skozi A in B.

c) Zapiši enačbo ravnine skozi A, B in C.

4. Naj bo G graf brez ciklov, ki ima 22 točk. Vse stopnje točk so 5 ali 1.

a) Kolikšno je najmanjše možno število povezav grafa G?

b) Ali lahko G vsebuje natanko 20 povezav?

c) Kolikšno je največje možno število povezav grafa G?

d) Kolikšno je največje možno število točk stopnje 5 v grafu G?

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba štirih listov z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!!

Ogled bo v ponedeljek 26. 06. ob 12 uri v kabinetu.

2. Izpit iz diskretnih struktur VSP
22. junij 2007

1. Dana je izjava $A = (X \uparrow X) \uparrow (X \uparrow X) \uparrow c$.
   (a) Naj bo $X = (a \vee b) \uparrow c$. Zapiši izjavo A v disjunktivni normalni obliki.
   (b) Določi izjavo X tako, da bo izjava A tavtologija.
2. Izračunaj ostanek pri deljenju števila 2006^{2007} s 27?
3. Dane so permutacije
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 2 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 2 & 8 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
   in
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$
   a) Zapiši permutacije α, β in γ z disjunktnimi cikli in določi njihovo parnost.
   b) Izračunaj γ^{2007}.
   c) Reši naslednjo enačbo:
$$\alpha * x * \beta = \gamma$$
4. Dani sta točki
$$A(0,1,2) \text{ in } B(-1,0,1)$$
   ter vektorja
$$\overrightarrow{a} = (1,1,1) \text{ in } \overrightarrow{b} = (-1,0,1).$$
   Ravnina Σ_a je določena s točko A in normalo $\overrightarrow{a}$, ravnina Σ_b pa s točko B in normalo $\overrightarrow{b}$.
   (a) Zapiši enačbi ravnin Σ_a in Σ_b.
   (b) Pod kakšnim kotom se sekata ravnini Σ_a in Σ_b?
   (c) Presek ravnin Σ_a in Σ_b je premica. Zapiši enačbo te premice v kanonični obliki.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba štirih listov z obrazci.

Odgovore dobro utemelji!!

Ogled bo v torek 26.6. ob 12. uri v kabinetu.

2. izpit iz Diskretnih struktur, VSP

23. 6. 2008

1. Dokaži ali ovrzi naslednji sklep

$$\neg a \wedge b \Rightarrow c,\ a \Rightarrow d,\ b \vee c \ \models\ c \vee d.$$

2. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R kot

$$a \ R \ b \quad \Leftrightarrow \quad 3a + 5b \text{ je deljivo z } 8.$$

   (a) Pokaži, da je dana relacija ekvivalenčna.

   (b) Določi njene ekvivalenčne razrede.

3. Dana je premica

$$y = -\frac{5}{12}x + \frac{13}{4}.$$

   (a) Poišči na njej vse točke s celoštevilskimi koordinatami.

   (b) Koliko točk na premici ima za koordinate naravni števili?

   (c) Izračunaj razdaljo koordinatnega izhodišča od dane premice.

4. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Izračunaj determinante matrik A, B in AB.

   (b) Reši matrični sistem enačb $BXA = A$.

Vse odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci in forlulami. Rezultati bodo objavljeni na naslovu `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

3. izpit iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 26. avgust 2008

1. Med dobitniki medalj na letošnjih olimpijskih igrah so bili tudi trije bratje trojčki (med njimi ni bil nobeden tretji). Ker je organizatorjem dobro znano, da se radi pošalijo, so imeli pred podelitvijo nemalo težav. Na srečo pa so vedeli, da na isti dan vsi trije govorijo resnico ali pa vsi trije lažejo. Ko so jih povprašali katero mesto so osvojili, so dobili naslednje izjave

   A: "Če jaz nisem zmagal, potem je zmagal C."

   B: "S C-jem sva si razdelila drugo mesto."

   C: "Jaz vedno zmagam."

   Ali lahko določiš katere medalje pripadajo kateremu bratu?

2. Na letošnjih olimpijskih igrah so sodelovale 204 države. Od tega 117 držav ni osvojilo nobene medalje, kar 37 držav pa je osvojilo vsaj en komplet (zlata, srebrna in bronasta) medalj. 68 držav je osvojilo vsaj eno srebrno in 66 vsaj eno bronasto medaljo. 14 držav je osvojilo le bronasto in srebrno, šest držav pa le zlato in bronasto. 12 dobitnic zlate medalje ni osvojilo nobene bronaste medalje. Koliko držav je osvojilo vsaj eno zlato medaljo?

3. Dane so točke $A(1,0,-1)$, $B(4,6,5)$ in $C(-1,2,7)$.

   (a) Zapiši enačbo premice p skozi točki A in B.

   (b) Za koliko je točka C oddaljena od premice p.

   (c) Določi kot med vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.

   (d) Izračunaj ploščino trikotnika ABC.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

4. izpit iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 15. september 2008

1. V poznih nočnih urah se je zgodil rop Ljubljanske banke. Na policijsko postajo so privedli 5 osumljencev z imeni: Janez, Borut, Zmago, Sašo ter Katarina. Učinkoviti kriminalisti so prišli do naslednjih izjav:

   - Kriva sta Janez ali Borut.
   - Če je kriv Borut, je kriv tudi Zmago a nedolžna Katarina.
   - Če je kriv Zmago, je kriv tudi Sašo.
   - Sašo je nedolžen.

   Ali lahko kriminalisti sklepajo, da je kriv Janez? Ali lahko sklepajo na krivdo še katerega izmed osumljencev?

2. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je podana relacija R takole:

   $$aRb \quad \text{natanko takrat, ko je} \quad 2008^{a+b} \equiv 1 \pmod 7$$

   (a) Nariši graf relacije R.

   (b) Katerim izmed naslednjih lastnosti zadošča relacija R: refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost, asimetričnost, antisimetričnost, sovisnost.

   (c) Določi matriko relacije R^{502}. Najmanj koliko povezav moramo dodati v graf relacije R, da bo graf relacije R^{502} vseboval vse možne povezave?

3. Poišči vse celoštevilske točke na premici

   $$y = \frac{91x + 2210}{156}.$$

   Izmed dobljenih rešitev določi tiste točke za katere velja $x < 0$, $y > 0$.

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh A4 listov z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.