Matematika

Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Zaporedja: prvo orodje za delo z neskončnostjo

Zaporedje je preslikava

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Pišemo tudi:

$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

n ... *indeks*
a_n ... *n-ti člen*

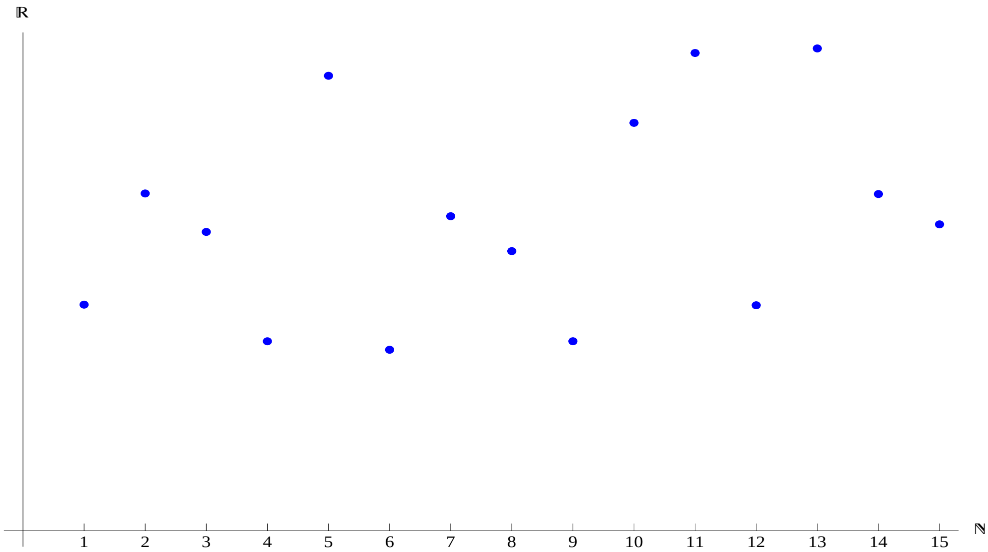
Zaporedja

Zaporedje lahko opišemo

- *eksplicitno*: $a_n = f(n)$
- *rekurzivno*:
  - $a_0,\ a_{n+1} = f(a_n)$ za $n \geq 0$
  - $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1},\ a_{n+k} = f(a_n, \ldots, a_{n+k-1})$ za $n \geq 0$

Geometrijski prikaz

- Kot točke na številski premici,
- kot točke (n, a_n) v ravnini,

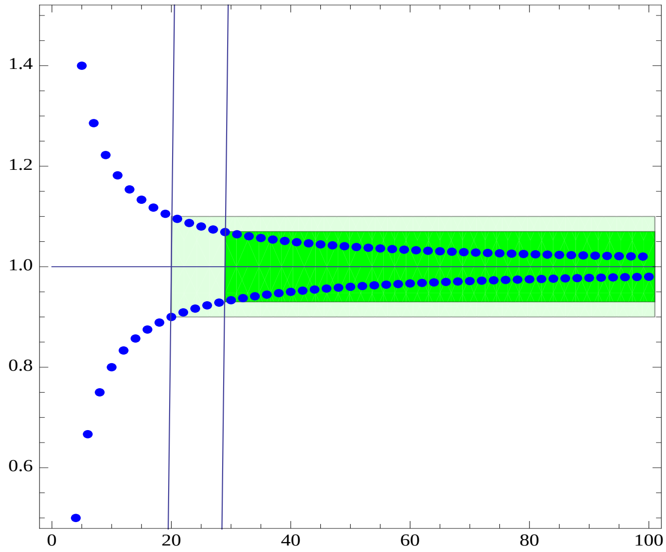


Limita zaporedja

Število a je *limita* zaporedja (a_n)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $|a - a_n| < \varepsilon$.



Limita zaporedja

Zaporedje (a_n) je *konvergentno*, če ima limito. Sicer je *divergentno*.

Kaj to pomeni (s stališča računanja)?

- ε – računska natančnost
- N – od tu dalje so vsi členi pri tej natančnosti enaki a

Naraščanje ter padanje preko vseh meja

Zaporedje (a_n) narašča prek vsake meje, če za vsak $M \in \mathbb{N}$ obstaja indeks $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $a_n \geq M$.Oznaka:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

POZOR: tako zaporedje ni konvergentno saj nima limite!!!

Zaporedje (a_n) pada prek vsake meje, če za vsak $M \in \mathbb{N}$ obstaja indeks $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $a_n \leq -M$. Oznaka:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

POZOR: tako zaporedje ni konvergentno saj nima limite!!!

Primeri

1. Za $a \in \mathbb{R}$ določimo $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{če je} \quad a > 1 \\ 1 & \text{če je} \quad a = 1 \\ 0 & \text{če je} \quad -1 < a < 1 \\ \text{ne obstaja} & \text{če je} \quad a \leq -1 \end{cases}$$

Primeri

2. Za $a \in \mathbb{R}$ določimo $\lim_{n\to\infty} n^a$.

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty & \text{če je} \quad a > 0 \\ 1 & \text{če je} \quad a = 0 \\ 0 & \text{če je} \quad a < 0 \end{cases}$$

Primeri

3. $b_n = (1 + 1/n)^n$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Računanje limit

Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

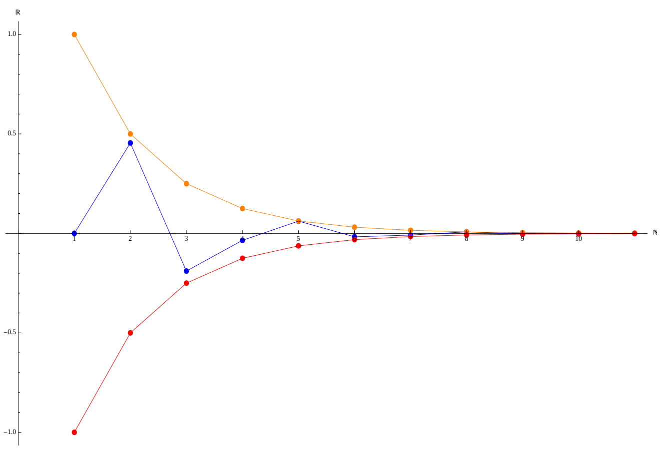
- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- Če je $b_n \neq 0$ za vsak n in $b \neq 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$
- Zgled:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1}$$
- Če je $a_n > 0$ za vsak n in $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

V primerih ∞ ter deljenja z 0 lahko dobimo nedoločene izraze. Pri njih je potrebna opreznost.

Najbolj slasten matematični izrek

Izrek (o sendviču)

Če za vsak n velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, je tudi
$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$



Izračunajmo $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)}{2^n}$

Pogoji za konvergenco zaporedij

Potreben pogoj za konvergenco zaporedja je *omejenost*: vsako konvergentno zaporedje je omejeno:

Definicija

Zaporedje $(a_n)_n$ *je navzgor omejeno, če ima* zgornjo mejo, *to je tako število* $M \in \mathbb{R}$, *da je* $a_n \leq M$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje $(a_n)_n$ *je navzdol omejeno, če ima* spodnjo mejo, *to je tako število* $m \in \mathbb{R}$, *da je* $a_n \geq m$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$.

Omejeno zaporedje je navzgor in navzdol omejeno.

Pogoji za konvergenco zaporedij

Zaporedje je *naraščajoče*, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak n, in je *padajoče*, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vsak n.

Izrek

Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno.

Izrek

Padajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzdol omejeno.

Vrste

Vrsta je simbolična vsota:

$$a_0 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Vrste

- m-ta *delna vsota vrste*: $S_m = a_0 + \cdots + a_m$,
- rekurzivna definicija zaporedja delnih vsot:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_{m+1} &= S_m + a_{m+1} \end{aligned}$$

- Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje delnih vsot S_m.
- *Vsota* vrste je limita $\lim_{m\to\infty} S_m = S$.
- Vrsta, ki ni konvergentna, je *divergentna*.

Geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

- Konvergenca je odvisna od *kvocienta* q:
  - konvergira, če je $|q| < 1$,
  - divergira, če je $|q| \geq 1$.

- Za $|q| < 1$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=M}^{\infty} a \cdot q^n = aq^M + aq^{M+1} + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{aq^M}{1-q}$$

Potreben pogoj za konvergenco vrste

Če je vrsta konvergentna, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Pazi! Pogoj ni zadosten.
- Zgled: *harmonična vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ni konvergentna.
- *Leibnizov kriterij*: če zaporedje a_n monotono pada proti 0 in so vsi členi a_n pozitivni potem je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergentna.