KOMBINATORIKA

OSNOVNI IZREK KOMBINATORIKE [PRAVILO PRODUKTA]

Proces odločanja poteka v k zaporednih neodvisnih fazah. Število vseh možnih različnih izborov je n:

$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

V omari imamo 3 hlače, 2 puloverja in 5 majic. Na koliko različnih načinov se lahko oblečemo?

$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{5} = \underline{30}$ Toliko je različnih kombinacij

oblečemo 1 hlače, izbiramo med tremi

KRAT uporabimo, ko uporabimo vse možnosti: oblečemo

hlače IN pulover IN majico

PRAVILO VSOTE

Če pri odločanju izberemo eno ALI drugo možnost (ne obe!)

Na izbiro imamo 3 kape in 4 klobuke. Na koliko različnih načinov se lahko pokrijemo?

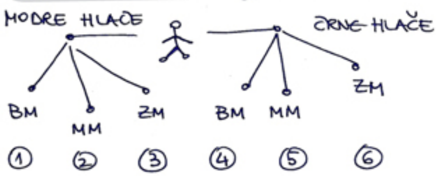
$\underline{3} + \underline{4} = \underline{7}$

na glavo ne damo klobuka in kapo, ampak izberemo klobuk ali kapo!

KOMBINATORIČNO DREVO

pokaže vse možne izbore

Izbiramo med modrimi ali črnimi hlačami in belo (B), modro (M) ali zeleno (Z) majico (M).



Imamo 6 možnih kombinacij.

PERMUTACIJE: uporabimo vse elemente

- brez ponavljanja: $P_n = n!$ (črtice)
- s ponavljanjem: $P_n^{k_1,k_2,k_3\ldots} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}$ (formula)

VARIACIJE: uporabimo del elementov (črtice)

- brez ponavljanja: $V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- s ponavljanjem: ${}^{(p)}V_n^r = n^r$

Če je pri računanju pomemben VRSTNI RED uporabimo ČRTICE:

___ · ___ · ___ · ___ ...

(variacije in permutacije)

KOMBINACIJE:

Če vrstni red ni pomemben so kombinacije:

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

$\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

VRSTNI RED JE POMEMBEN:

Podane so črke G, A, L, E, B. Črke naj se ne ponavljajo.

a) Koliko različnih besed lahko sestavimo?

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = \underline{120}$

za prvo mesto izbiramo med 5 črkami, uporabimo samo 1

za drugo mesto imamo na izbiro še 4 črke in tako naprej

vseh možnih besed je 120

b) G mora stati na prvem mestu:

$\underline{1} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = \underline{24}$

G

ostanejo še 4

c) SAMOGLASNIK mora stati na zadnjem mestu:

tu začnemo!

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{2} = \underline{48}$

A, E

izbiramo med 2 možnostmi, vendar izberemo samo 1

zato ostanejo še 4 možne črke

d) G in A morata stati SKUPAJ:

ne delamo več s črticami, ampak s skupinami:

(G, A) 1 skupina
L 1 skupina
E 1 skupina
B 1 skupina
4 skupine

$N = 4! \cdot 2! = \underline{48}$

število skupin dodamo fakulteto (klicaj)

če je v skupini več elementov, se lahko med sabo mešajo, zato množimo še s tem in dodamo fakulteto

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$
$2! = 2 \cdot 1$
to pomeni fakulteta (klicaj)

e) Samoglasniki morajo stati skupaj; soglasniki pa skupaj:

(A, E) 1 skupina → 2 elementa

(G, L, B) 1 skupina → 3 elementi

$N = 2! \cdot 2! \cdot 3! = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{24}$

št. skupin

f) če moramo sestaviti besedo GALEB:

$\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{1}$

G A L E B

g) Na zadnjem mestu ne sme biti L:

začnemo tu

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{4} = \underline{96}$

G, A, E, B

izberemo 1, zato ostanejo še 4 črke

h) Beseda se ne sme končati na EB.

___ · ___ · ___ · E · B

Ker sta 2 črki → uporabimo NEGACIJO

zanikamo trditev: se mora končati na EB:

$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{6}$

E B

Od vseh možnosti odštejemo negacijo:

N = vse − negacija

Vse možnosti: $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120$

$N = 120 - 6 = \underline{114}$

PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

Koliko je permutacij besede BARBAPAPA:

B = 2, A = 4, R = 1, P = 2, n = 9

$P_9^{2,4,1,2} = \frac{9!}{2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2!} = \underline{3780}$ digitron

VRSTNI RED JE običajno POMEMBEN pri:

- besedah, črkah
- številkah
- če je omejena VRSTA

KOMBINACIJE

VRSTNI RED NI pomemben:

- KROGLICE (če jih HKRATI vlečemo) oz. če vlečemo le ENO
- KOCKE
- KARTE
- SKUPINE LJUDI

$\binom{n}{r}$

n je število vseh UGODNIH elementov

r je število elementov, ki jih izbiramo iz ugodnih (n)

KOCKE

↳ če mečemo samo 1 kocko, so možni izidi:

1, 2, 3, 4, 5, 6

↳ če mečemo 2 kocki, je možnih 36 izidov. ZAPIŠI JIH!

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

nato izbiraj ustrezne izide

KARTE

Najprej moramo podano število kart razdeliti. Npr. 32 kart

32

16 RDEČIH: 8 ♥, 8 ♦

16 ČRNIH: 8 ♠, 8 ♣

← BARVE so:
- SRCE
- KARA
- PIK
- KRIŽ

(ne rdeča, črna!)

8 ♥	8 ♦	8 ♠	8 ♣
A	A	A	A
K	K	K	K
Q	Q	Q	Q
J	J	J	J
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

ASI so štirje (♡ ◇ ♤ ♧)
KRALJI so štirje

Iz škatle v kateri je 5 belih, 4 rdeče in 3 modre kroglice hkrati vlečemo:

a) 3 raznobarvne kroglice

1B, 1R IN 1M

$N = \binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1} = 5\cdot4\cdot3 = \underline{60}$

1 izmed 5 belih; 1 izmed 4 rdečih; 1 izmed 3 modrih

b) 3 kroglice enake barve:

3B ali 3R ali 3M

$N = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} =$

$= \frac{5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} + \frac{4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} + 1 = 10+4+1 =$

$= \underline{15}$

c) 3 kroglice, od katerih sta 2 enake barve:

2B IN 1 DRUGA (R ali M) 7
ali
2R IN 1 DRUGA (B ali M) 8
ali
2M IN 1 DRUGA (R ali B) 9

$N = \binom{5}{2}\cdot\binom{7}{1} + \binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1} + \binom{3}{2}\binom{9}{1} =$

$= \frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot1}\cdot7 + \frac{\cancel{4}^{2}\cdot3}{\cancel{2}\cdot1}\cdot8 + \frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot1}\cdot9 =$

$= 70 + 48 + 27 = \underline{145}$

d) 3 kroglice, ki $\boxed{\text{ne smejo}}$ biti vse enake:

NEGACIJA: vse so enake barve

⇓

b) N = 15

VSE MOŽNOSTI: $\binom{12}{3} = \frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1} = 220$

N = VSE MOŽNOSTI − NEGACIJA

$N = 220 - 15 = \underline{205}$

Izmed 20 kart vlečemo 3 karte.

10 RDEČIH → 5 ♡, 5 ◇

10 ČRNIH → 5 ♧, 5 ♤ [barve]

Koliko je vseh izborov, da bodo izbrane:

a) vse črne karte: $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = \underline{120}$

b) vse iste barve:

♡ ali ◇ ali ♧ ali ♤

$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 4\cdot\binom{5}{3} =$

$= 4\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = \underline{40}$

c) vse iste vrednosti:

A ali K ali Q ali J ali 10

$5\cdot\binom{4}{3} = 5\cdot\binom{4}{4-3} = 5\cdot\binom{4}{1} = 5\cdot4 = \underline{20}$

3 izmed 4 asov
3 izmed 4 kraljev
⋮

pravilo

d) 2 kralja in 1 druga

$\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{1} = \frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot16 = \underline{96}$

16 je drugih kart, kralje odštejemo

e) piki ali dame

5 pikov + 4 dame − pikova dama (ker je šteta 2x)

$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = \underline{56}$

Izmed 20 učencev izbiramo tričlansko delegacijo. Na koliko načinov lahko to storimo, če:

a) ni dodatnih omejitev:

$\binom{20}{3} = \frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1} = \underline{1140}$

b) če mora biti Jure član delegacije:

$\binom{1}{1}\cdot\binom{19}{2} = 1\cdot\frac{19\cdot18}{2\cdot1} = \underline{171}$

Jure; 2 izmed ostalih

BINOMSKI IZREK

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0\cdot b^n$$

k-ti člen po razvoju binoma:

$$k = \binom{n}{r}\cdot a^{n-r}\cdot b^r$$

n = potenca r = k−1

a, b = člena v binomu

Razvijte potenco binoma $(\underbrace{3a}_{a} + \underbrace{\sqrt[5]{b^3}}_{b})^{\overset{n}{4}}$.

$a = 3a,\ b = \sqrt[5]{b^3} = b^{\frac{3}{5}},\ n = 4$

$(3a + \sqrt[5]{b^3})^4 = \binom{4}{0}(3a)^4(b^{\frac{3}{5}})^0 +$

$+ \binom{4}{1}(3a)^3(b^{\frac{3}{5}})^1 + \binom{4}{2}(3a)^2(b^{\frac{3}{5}})^2 +$

$+ \binom{4}{3}(3a)^1(b^{\frac{3}{5}})^3 + \binom{4}{4}(3a)^0(b^{\frac{3}{5}})^4 =$

$= 1\cdot81a^4\,1 + 4\cdot27a^3\sqrt[5]{b^3} + \frac{\cancel{4}^{2}\cdot3}{\cancel{2}\cdot1}\cdot9a^2b^{\frac{6}{5}} +$

$+ \binom{4}{1}3ab^{\frac{9}{5}} + 1\cdot1\cdot b^{\frac{12}{5}} =$

$= \underline{\underline{81a^4 + 108a^3\sqrt[5]{b^3} + 54a^2b\sqrt[5]{b} +}}$

$\underline{\underline{+ 12ab\sqrt[5]{b^4} + b^2\sqrt[5]{b^2}}}$

$b^{\frac{6}{5}} = b^{1\frac{1}{5}} = b^1\cdot b^{\frac{1}{5}} = b\sqrt[5]{b}$

$b^{\frac{9}{5}} = b^{1\frac{4}{5}} = b^1\cdot b^{\frac{4}{5}} = b\sqrt[5]{b^4}$

$b^{\frac{12}{5}} = b^{2\frac{2}{5}} = b^2\cdot b^{\frac{2}{5}} = b^2\sqrt[5]{b^2}$

Določi x tako, da bo sedmi člen v razvoju binoma $(2^x\cdot\sin x + \sqrt[3]{x})^8$ enak 0.

$k = 7$ $a = 2^x\sin x$

$r = k-1 = 6$ $b = \sqrt[3]{x}$

$n = 8$ $k_7 = 0$

$k_7 = \binom{n}{r}\cdot a^{n-r}\cdot b^r$

$0 = \binom{8}{6}\cdot(2^x\sin x)^2\cdot(\sqrt[3]{x})^{6\cdot2}$

$0 = \binom{8}{2}\cdot4^x\cdot\sin^2x\cdot x^2 \quad /:\binom{8}{2}$

$0 = 4^x\cdot\sin^2x\cdot x^2$

$4^x \neq 0$, $\sin^2x = 0$, $x^2 = 0 \to \underline{\underline{x_{3,4} = 0}}$

$\sin x = 0$

$x = 0 + k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\underline{\underline{x_{1,2} = k\pi, k\in\mathbb{Z}}}$

to je del te rešitve, zato je skupna:

$\underline{\underline{x = k\pi, k\in\mathbb{Z}}}$