Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. november 2015

Operacije z množicami

relacija pripadnosti $\ldots x \in A$

x *pripada* A.

podajanje množic

- z naštevanjem elementov $A = \{0, 1, 2\}$
- z neko izjavno formulo $A = \{x \; ; \varphi(x)\}$
  Velja: $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)$

Zgledi množic

$$A = \{x \,;\, x \neq x\} = \emptyset \qquad \text{prazna množica}$$

$$B = \{x \,;\, x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$R = \{x \,;\, x^2 + 1 \geq 5\}$$

Enakost in vsebovanost

Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Množica A je *podmnožica* množice B,

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

relacija *inkluzije*

Množica A je *prava podmnožica* množice B,

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \,\wedge\, A \neq B$$

relacija *stroge inkluzije*

Enakost in vsebovanost

Trditev

Za poljubne množice A, B in C velja

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- *Če* $A \subseteq B$ *in* $B \subseteq C$, *potem* $A \subseteq C$.

Operacije z množicami

- *unija* $A \cup B = \{x \,;\, x \in A \vee x \in B\}$
- *presek* $A \cap B = \{x \,;\, x \in A \wedge x \in B\}$
- *razlika* $A \setminus B = \{x \,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$
- *simetrična razlika* $A + B = \{x \,;\, x \in A \veebar x \in B\}$

Lastnosti operacij

- $A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica in komplement

Univerzalna množica, označimo jo z S, ustreza področju pogovora v predikatnem računu.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S.

Komplement množice A, označimo ga z A^c, definiramo kot

$$A^c = S \setminus A$$

Lastnosti komplementa

- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Enakosti z množicami

Pokažimo, da velja

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Potenčna množica

Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A.

$$\mathcal{P}A = \{B \,;\, B \subseteq A\}$$

Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

$$\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\} \qquad \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$$

Potenčna množica

Trditev

Če množica A vsebuje natanko n elementov in je n naravno število, potem $\mathcal{P}A$ vsebuje natanko 2^n elementov.

Trditev

Če $A \subseteq B$, potem $\mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$.

Družine množic

Naj bo

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$$

družina množic. Z $\mathcal{I}$ označimo indeksno množico.

Unija družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \exists i \,(i \in \mathcal{I} \wedge x \in A_i)\}$$

Presek družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \forall i \,(i \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in A_i)\}$$

Pokritje in razbitje

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$ je *pokritje* množice B, če je $B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$ je *razbitje* množice B, če je

- $\mathcal{A}$ pokritje množice B
- elementi $\mathcal{A}$ so neprazni in
- elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni.

Urejeni pari

Urejeni par s *prvo komponento (koordinato)* a in *drugo komponento (koordinato)* b označimo z (a, b) in definiramo kot

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Trditev

(osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \textit{ in } b = d$$

Kartezični produkt

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov

$$A \times B = \{(a, b) \; ; \; a \in A \wedge b \in B\}$$

Kartezični produkt

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je urejena n-terica.

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$
- $A \times B \subseteq C \times D \;\wedge\; A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies$ $A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.