Računalniška grafika - Matematične osnove

1 Matrike

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^T$

1.1 Osnovne operacije

1.1.1 Enakosti

Preverjamo enakost istoležnih elementov.
$\mathbf{A} \neq \mathbf{A}_1, \mathbf{B} = \mathbf{B}_1$

1.1.2 Transponiranje

$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$
$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

1.1.3 Seštevanje, odštevanje, enota za seštevanje

Seštevamo oz. odštevamo istoležne elemente matrike:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

1.1.4 Množenje s skalarjem

Vsak element pomnožimo s skalarjem:

$$4 * \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 32 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}, 1 * \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1.1.5 Množenje matrik

Ni komutativno, ravnamo se po spodnjem postopku:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,1} & a_{1,1} * b_{1,2} + a_{1,2} * b_{2,2} \\ a_{2,1} * b_{1,1} + a_{2,2} * b_{2,1} & a_{2,1} * b_{1,2} + a_{2,2} * b_{2,2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 60 & 21 \\ 43 & 20 \end{bmatrix}, \mathbf{B} * \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 57 \\ 11 & 66 \end{bmatrix}$$

Enota za množenje matrik je enotina matrike (ali identiteta $\mathbf{I}$)
$\mathbf{A} * \mathbf{I} = \mathbf{I} * \mathbf{A} = \mathbf{A}$

1.2 Iskanje inverza

Praviloma obstajata 2 inverza (levi in desni), ki sta v določenih primerih enaka:

1.2.1 Desni inverz

$\mathbf{A} * \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \mathbf{A} * \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Za naš primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 * a + 8 * c = 1 \\ 2 * a + 5 * c = 0 \\ 2 * b + 5 * d = 1 \\ 1 * b + 8 * d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a = -\frac{5}{11} \\ b = \frac{8}{11} \\ c = \frac{2}{11} \\ d = -\frac{1}{11} \end{array}$$

Podobno velja za levi inverz le da je potrebno rešiti sistem:

$\mathbf{A}^{-1} * \mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Vektorji

Vektorji so posebna oblika matrik z enim samim stolpcem.

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}^T$

2.1 Osnovne operacije

2.1.1 Enakost

Velja enako kot za matrike. Primerjati je potrebno istoležne elemente, vektroji pa se morajo ujemati tudi v dimenziji.

2.1.2 Seštevanje, odštevanje, enota

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 17 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

Enota za seštevanje in odštevanje je ničelni vektor.

2.1.3 Produkt s skalarjem

$2 * \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 16 \end{bmatrix}^T$

2.1.4 Skalarni produkt

Rezultat skalarnega produkta dveh vektorjev je skalar:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i (a_i * b_i) = 1 * 7 + 4 * 2 + 8 * 9 = 87$

2.1.5 Norma

Kadar govorimo o normi največkrat mislimo 2. normo, ki je definirana kot:

$||\mathbf{a}|| = \sqrt{\sum_i a_i^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$

Prva norma (tudi Manhattan norma) je kar vsota elementov vektorja:

$||\mathbf{a}||_1 = \sum_i |a_i| = 1 + 4 + 8 = 13$

P-ta norma je:

$||\mathbf{a}||_p = (\sum_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Neskončna norma je enaka maksimalnemu elementu vektorja:

$||\mathbf{a}||_\infty = max_i\{|a_i|\} = max\{1, 4, 8\} = 8$

2.1.6 Kosinus kota med vektorjema

$\cos \Phi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{a}|| * ||\mathbf{b}||} = \frac{87}{9\sqrt{134}}$

2.1.7 Normalizacija ali normiranje vektorja

Je postopek, ki nam vrne vektor v smeri originalnega a dolžine 1.
$\mathbf{a}_u = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}^T$

2.2 Vektorski produkt

Pomagamo si lahko s shemo:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} (a_y * b_z - a_z * b_y) & (a_z * b_x - a_x * b_z) & (a_x * b_y - a_y * b_x) \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} (4 * 9 - 8 * 2) & (8 * 7 - 9) & (1 * 2 - 7 * 4) \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 47 & -26 \end{bmatrix}^T$$

3 Transformacije

3.1 2D transformacije

x, y ... stare vrednosti koordinat pred transformacijo
x', y' ... nove vrednosti koordinat po transformaciji

3.1.1 Pomik:

t_x ... pomik v smeri x
t_y ... pomik v smeri y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

3.1.2 Razteg:

s_x ... razteg v smeri osi x
s_y ... razteg v smeri osi y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1.3 Zasuk:

α ... kot za katerega želimo zarotirati element okrog izhodišča koordinatnega sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1.4 Zrcaljenje:

preko osi $x = 0$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

preko osi $y = 0$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

preko osi $y = x$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1.5 Strig:

α ... kot za katerega želimo izvesti strig:

Strig v smeri osi x:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{ctg}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Strig v smeri osi y:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \operatorname{ctg}\alpha & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$