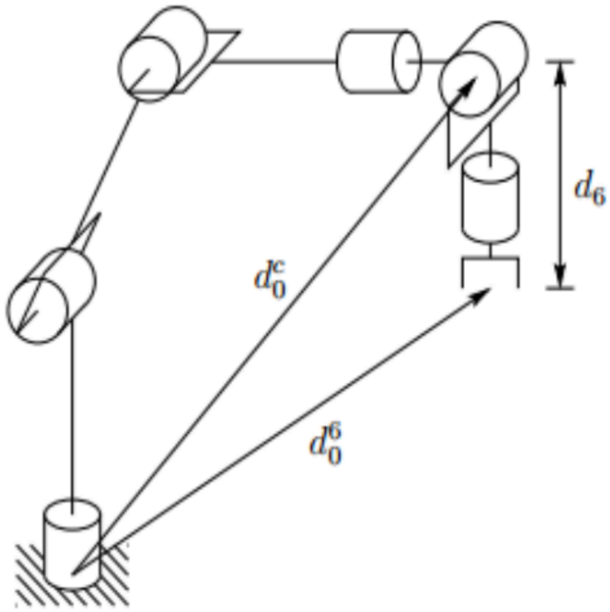
Trabajo Práctico n°5 - Cinemática Inversa B			
Grupo n°: 10			**Año: 2025**
Nombre y Apellido:	**Legajo:**	**Carrera:**	**E-mail:**
Bergamin Mikael	14201	MEC	mikabergamin@gmail.com
Gantus Gonzalo	14076	MEC	gonzalogantus@gmail.com
Garcia Sad Tomas	14077	MEC	tomasagustingarciasad@yahoo.com.ar
Squartini Jeronimo	14145	MEC	jerosquartini123@gmail.com

Ejercicio 1: primer problema de Pieper.

Una gran cantidad de los robots industriales tipo serie comerciales tienen una estructura cinemática similar a la de la figura siguiente (Spong 2005). Es decir, 6 GDL rotacionales con los últimos 3 ejes articulares cruzándose en un punto (muñeca, articulación esférica).



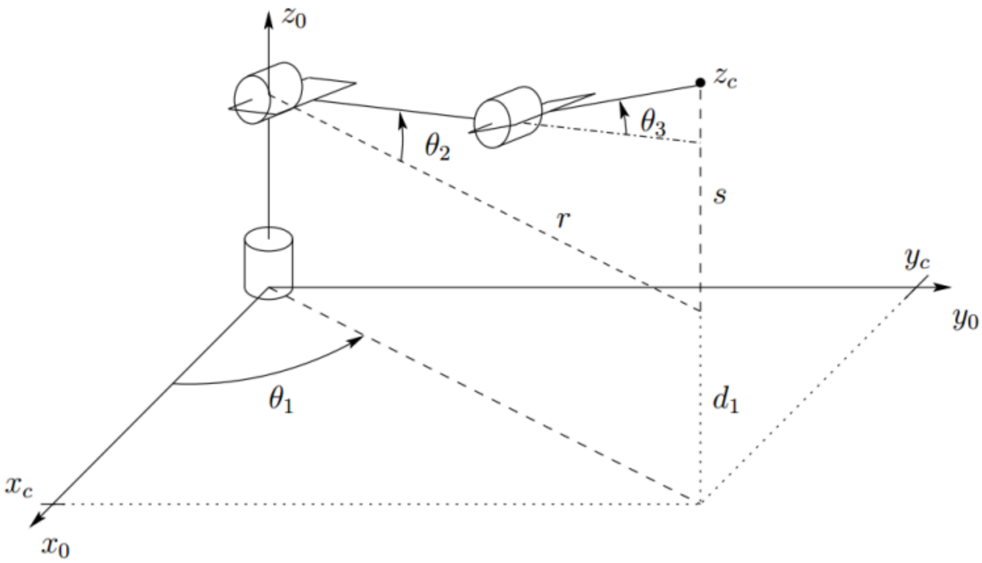
El método de Pieper consiste en desacoplar el robot y resolver dos problemas por separado. El punto d_0^c (muñeca) se puede conocer (pero no su orientación) a partir del conocimiento de la matriz T mediante:

$$\bar{p}_c = \bar{d}_0^6 - d_6 \bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{6}}$$

Donde:

- $\bar{p}_c$: vector de posición de la muñeca respecto del origen
- $\bar{d}_0^6$: vector de posición del extremo final respecto del origen (dato de la matriz de transformación homogénea del extremo)
- d_6: parámetro de DH que indica la distancia entre el extremo y la muñeca.
- $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{6}}$: versor que indica la dirección del extremo, y por lo tanto, la dirección entre el extremo y la muñeca (dato de la matriz de transformación homogénea del extremo).

Por lo tanto, el primer problema de Pieper consiste en determinar todas las posibles combinaciones de θ_1, θ_2 y θ_3 que permiten colocar la muñeca del robot en ese punto específico. En la figura siguiente se presenta el esquema para esta parte del problema.



Donde:

$$\bar{p}_c = (x_c, y_c, z_c)$$

Trabajando con esta estructura de 3GDL:

1. Halle una expresión para calcular geométricamente el valor de θ_1 usando arcotangente.
2. Considere que las articulaciones tienen una amplitud de $\pm 180°$. Observe que en este caso pueden existir dos valores de θ_1 para llegar a una posible solución. Halle la expresión para el cálculo del segundo valor.
3. Trabajando en papel dibuje las 4 posibles soluciones del problema mediante gráficos de 2 dimensiones en el plano $x_1 - y_1$.
4. Para el cálculo de θ_2 y θ_3 trabaje en el plano $x_1 - y_1$. Para esto, referencia el punto (x_c, y_c, z_c) al sistema $\{1\}$ mediante la matriz de transformación homogénea dada por el conocimiento de θ_1. Tenga en cuenta que para cada valor de θ_1 deberá realizar un nuevo planteo.
5. Implemente adecuadamente las ecuaciones en Matlab para poder determinar los 4 conjuntos de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ que cumplen con un determinado punto c.
6. Aplique la convención de Denavit Hartenberg a todo el robot, considere longitud unitaria en eslabones y escriba una rutina en Matlab para poder trabajar con un objeto de la clase SerialLink.
7. Proponga una configuración articular del robot y calcula la matriz final con la cinemática directa. Luego, aplicando correctamente las ecuaciones desarrolladas, calcule las primeras 3 articulaciones y verifique que todas las soluciones dan como resultado la misma posición en la muñeca del robot, y que una de ellas corresponde al vector articular propuesto inicialmente.

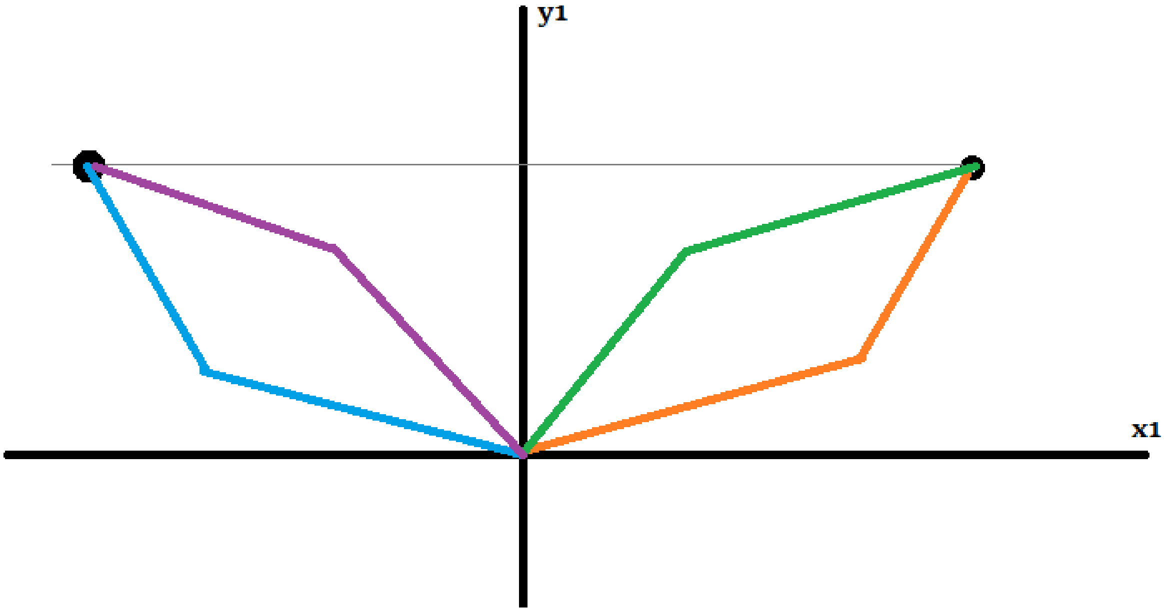
1. La primera articulación rota alrededor de z0. Para apuntar hacia el punto proyectado en el plano x0 − y0, el ángulo "natural" es el ángulo polar del vector (xc,yc).

$$\theta_{1A} = \ atan2\ (y_c\ ,\ x_c)$$

2. Geométricamente, el mismo plano puede obtenerse si el eslabón 1 se rota 180° en sentido opuesto. Esto da lugar a un segundo valor válido de θ_1:

$$\theta_{1B} = \theta_{1A} + \pi$$

3. En el plano x1−y1 se representan las cuatro posibles configuraciones del manipulador: dos con θ_{1A} (codo arriba y codo abajo) y dos con θ_{1B} (codo arriba y codo abajo). Todas alcanzan el mismo punto del centro de la muñeca."



Solución 1: configuración θ_{1A} con codo abajo
Solución 2: configuración θ_{1A} con codo arriba
Solución 3: configuración θ_{1B} con codo abajo
Solución 4: configuración θ_{1B} con codo arriba

4. Queremos encontrar θ_2 y θ_3 sabiendo ya un valor de θ_1 y la posición del centro de la muñeca $p_c=(x_c,y_c,z_c)$.

   Al mirar el esquema p_c se puede observar que esta expresado en función de la base {0}, por lo que lo primero que debemos hacer es realizar el cambio de base.

$$p^{\{1\}} = T_1^{-1} p^{\{0\}} \qquad T_1 = A_1(\theta_1), \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_1^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De acá obtuvimos (x_1,y_1), que es la proyección del punto en el plano de trabajo.

Ahora, en el plano $x_1 - y_1$, definimos:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad B = \operatorname{atan2}(y_1, x_1).$$

Considerando la longitud del primer eslabon como L_2 y la longitud del segundo eslabon como L_1, pór el triángulo formado con estos dos y la longitud r, obtenemos por teorema del coseno:

$$G = \arccos\left(\frac{L_2^2 + r^2 - L_3^2}{2rL_2}\right).$$

Quedando de esta manera las dos posibles soluciones de θ_2 en función de la posición del codo de la manera:

$$\theta_2^{(1)} = B - G, \qquad \theta_2^{(2)} = B + G.$$

Ahora, para cada θ_2 tenemos que obtener θ_3, que sería el ángulo del segundo eslabón para alcanzar correctamente el punto.

Para hacer esto volvemos a referenciar al sistema {2} $p^{\{2\}} = T_2^{-1} p^{\{1\}}$ y gracias a esto podemos obtener θ_3 con la ecuación: $\theta_3 = \operatorname{atan2}(y_2, x_2) - \frac{\pi}{2}.$ (apareciendo el $-\pi/2$ porque el eje x_3 está girado 90° respecto del eslabón real.

5. El objetivo de este ejercicio es determinar las cuatro configuraciones articulares posibles para las tres primeras articulaciones del robot que posicionan el centro de muñeca en una ubicación deseada $p_c=[x_c\ y_c\ z_c]^T$

   En primer lugar, se calcula el ángulo q_1 a partir de la proyección de p_c sobre el plano x_0-y_0. Esto da lugar a dos soluciones:

$$q_{1A} = \operatorname{atan2}(y_c, x_c), \qquad q_{1B} = q_{1A} \pm \pi$$

   lo que refleja que el plano de trabajo puede obtenerse con dos orientaciones de la base.

A continuación, para cada valor de q_1 se transforma el punto al sistema de referencia {1} mediante el cambio de base p{1}=T1^{-1}p{0}. En este nuevo sistema se define:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad B = \operatorname{atan2}(y_1, x_1)$$

donde (x_1,y_1) son las coordenadas de p{1}

Aplicando la ley de cosenos sobre el triángulo formado por L2=a2, L3 (dependiendo de la convención DH, a3 o bien d4) y la distancia r, se obtienen dos posibles valores para q2:

$$q_2^{(\downarrow)} = B - G, \qquad q_2^{(\uparrow)} = B + G$$

con

$$G = \arccos\left(\frac{L_2^2 + r^2 - L_3^2}{2L_2 r}\right)$$

Finalmente, para cada par (q_1, q_2) se determina el valor correspondiente de q_3. Para ello, se lleva el punto p_c al sistema $\{2\}$ mediante $p^{\{2\}} = T_2^{-1} T_1^{-1} p^{\{0\}}$, y se calcula:

$$q_3 = \operatorname{atan2}(p_y^{\{2\}}, p_x^{\{2\}}) - \frac{\pi}{2}$$

De este modo, se obtienen en total **cuatro ternas** (q_1, q_2, q_3): dos por cada valor de q_1 (codo arriba/codo abajo). Todas las soluciones se normalizan al intervalo $(-\pi, \pi]$.

6. En este ejercicio se construyó un modelo genérico de robot de seis grados de libertad con longitudes unitarias, a fin de contar con un caso de prueba para verificar los algoritmos desarrollados.

Se utilizó la convención de Denavit–Hartenberg estándar, obteniéndose la siguiente tabla:

$$DH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los tres primeros eslabones corresponden al manipulador principal, mientras que los tres últimos conforman la muñeca esférica. Se tomaron longitudes unitarias ($a_2 = a_3 = a_4 = 1$, $d_1 = d_6 = 1$) para simplificar.

Para verificar el modelo, se propuso una postura de prueba ($q = [0, 40, -30, 20, 15, 0]^\circ$) y se graficó el robot en MATLAB. Esto permitió confirmar que la definición del modelo DH es consistente.

Finalmente, se realizó una verificación del procedimiento aplicado en el Ejercicio 1.5 utilizando el robot definido en el Ejercicio 1.6 y una postura de referencia q_{true}.

En primer lugar, se obtuvo la cinemática directa T_6^0. A partir de esta matriz homogénea se calculó el centro de muñeca desacoplando la orientación:

$$p_c = p_6^0 - d_6\,\hat{z}_6$$

donde p_6^0 es la posición del efector final y $\hat{z}_6$ el eje z de la herramienta.

Con este centro de muñeca se aplicó el algoritmo de la Sección 1.5, obteniendo cuatro soluciones posibles para (q_1, q_2, q_3). A continuación se realizaron dos verificaciones:

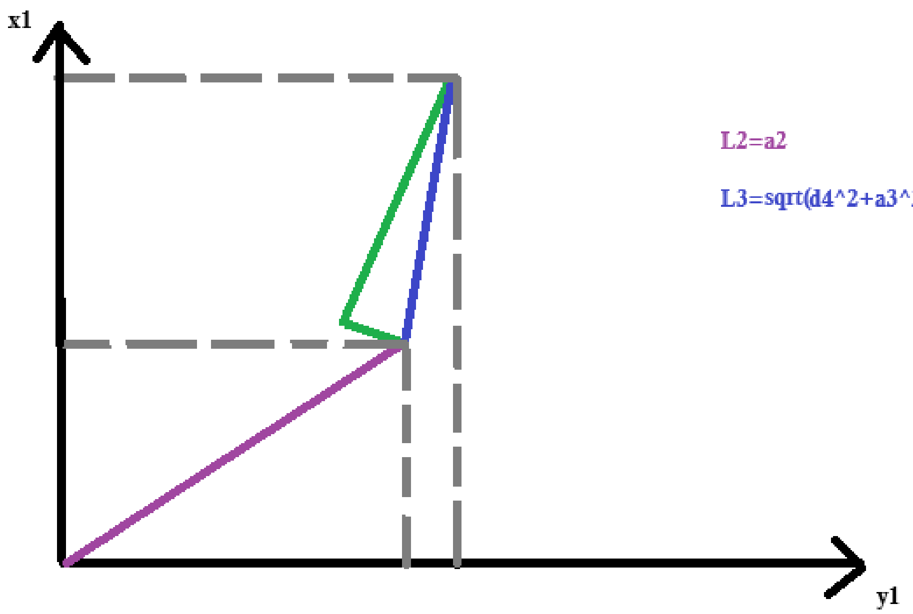
1. **Consistencia geométrica:** todas las soluciones reproducen exactamente el mismo centro de muñeca, con errores en norma $\|p_{03} - p_c\|$ del orden de 10^{-12} a 10^{-15}, atribuibles únicamente a redondeo numérico.
2. **Consistencia con la postura de referencia**: una de las cuatro soluciones coincide, dentro de la tolerancia numérica, con la terna (q_1, q_2, q_3) correspondiente a la postura q_{true}.

Conclusión. El método propuesto permite recuperar de manera correcta las cuatro configuraciones posibles de las tres primeras articulaciones que posicionan el centro de muñeca, y entre ellas se encuentra siempre la correspondiente a la postura real. Esto valida tanto el desacople posición/orientación como el uso de la ley de cosenos y los cambios de base en el cálculo de la cinemática inversa. Además, se confirmó que la adopción de la convención DH modificada (Craig) es totalmente compatible con el procedimiento desarrollado.

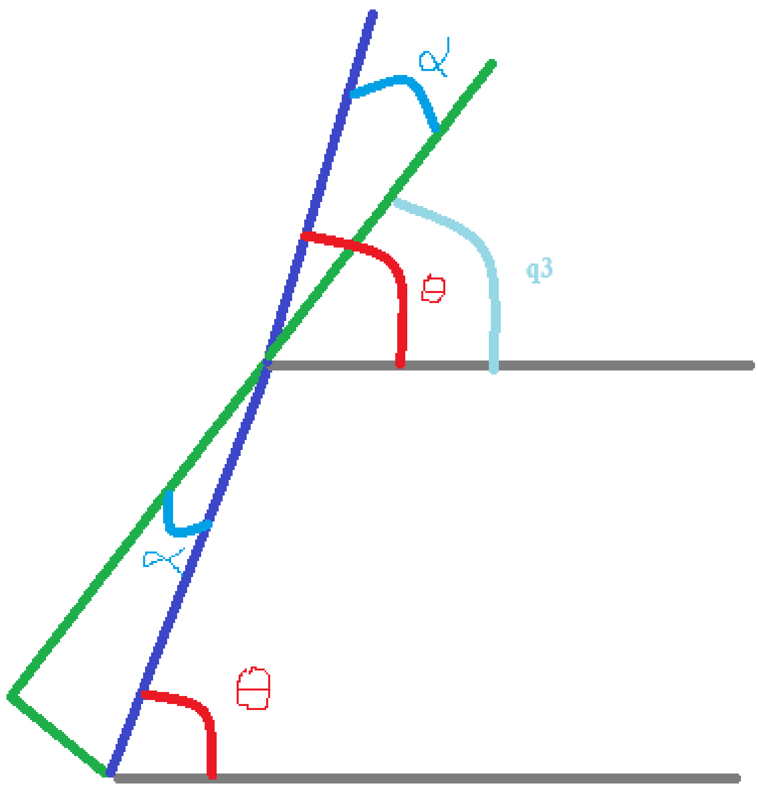
<u>Ejercicio TF (***obligatorio***):</u> escriba una función de cinemática inversa específica para su robot, con las siguientes características:

1. Debe recibir el objeto SerialLink de su robot, los parámetros cartesianos que considere necesarios (pudiendo ser una matriz de transformación homogénea u otro conjunto de valores), un booleano “q_mejor”, y también un vector de posiciones articulares “q0” en el que se encuentra el robot actualmente.
2. Dependiendo del valor de “q_mejor” debe devolver una única solución (en caso de true): la más cercana al “q0” pasado; o debe devolver todas las soluciones halladas (caso de false).
3. Se recomienda tomar como guía el material propuesto por la cátedra, con el ejemplo del IRB140.

Para el código de cinemática inversa seguimos la guía provista por la cátedra, pero tuvimos que considerar que nuestro robot tiene un codo y el parámetro de DH *a3* es distinto de 0. Para ello, en la función que calcula q2, definimos L3 como la hipotenusa formada por los catetos *a3* y *d4*.



En cuanto al cálculo de q3, corregimos el desfase geométrico del “tramo equivalente” restando β=atan2(d4,a3). Así, el eje x3 apunta exactamente hacia el centro de la muñeca incorporando el offset del codo.



alfa=arctan(d4/a3)

q3=tita-alfa