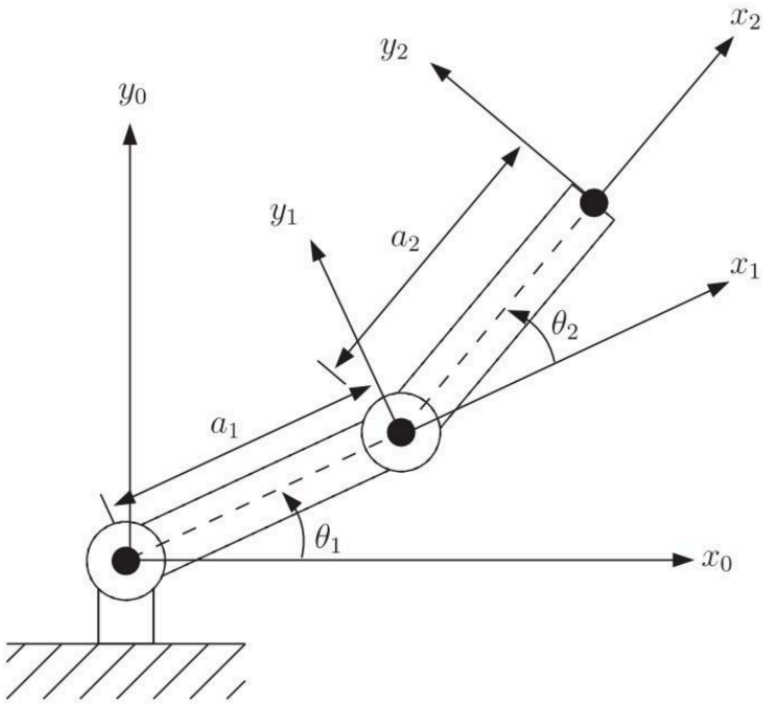
UNCUYO UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO | FACULTAD DE INGENIERÍA

Trabajo Práctico n°5 - Cinemática Inversa A

Grupo n°: 10			**Año: 2025**
Nombre y Apellido:	**Legajo:**	**Carrera:**	**E-mail:**
Bergamin Mikael	14201	MEC	mikabergamin@gmail.com
Gantus Gonzalo	14076	MEC	gonzalogantus@gmail.com
Garcia Sad Tomas	14077	MEC	tomasagustingarciasad@yahoo.com.ar
Squartini Jeronimo	14145	MEC	jerosquartini123@gmail.com

Ejercicio 1 (**obligatorio**): considere el robot de planar de 2 g.d.l. de la figura a continuación:



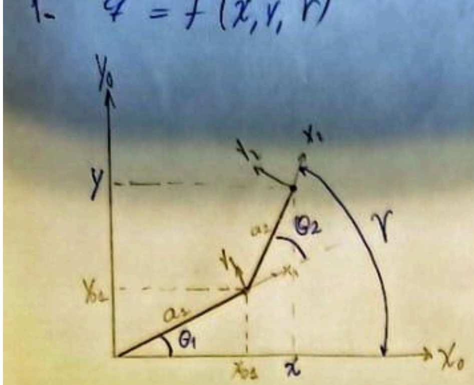
1. Utilice el método geométrico para hallar un conjunto de ecuaciones cerradas que resuelvan el siguiente problema:

$$\bar{q} = f(x, y, \gamma)$$

   Donde:
   a. x: es la coordenada en x_0 del origen del $S\{2\}$.
   b. y: es la coordenada en y_0 del origen del $S\{2\}$.
   c. γ: es el ángulo formado entre x_0 y x_2 alrededor de z_0.

1)

1- $\bar{q} = f(x, y, \gamma)$



Llamo X_{01} y Y_{01} a las coordenadas del origen de $S\{1\}$ en el sistema $X_0 - Y_0$.

$X_{01} = x - a_2 \cos \gamma$

$Y_{01} = y - a_2 \operatorname{sen} \gamma$

Luego $\boxed{\begin{array}{l} \theta_1 = \operatorname{atan2}(Y_{01}, X_{01}) \\ \theta_2 = \gamma - \theta_1 \end{array}}$

Debe cumplirse: $X_{01}^2 + Y_{01}^2 = a_1^2$.

Así:

$$q_1 = atan2(y - a_2 sin(\gamma),\ x - a_2 cos(\gamma))$$

$$q_2 = \gamma - q_1$$

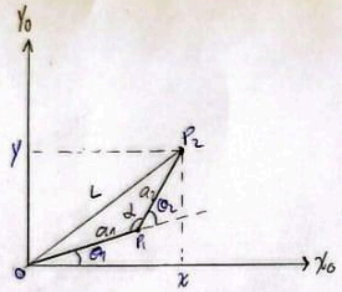
2. Utilice el método geométrico para hallar un conjunto de ecuaciones cerradas que resuelvan el siguiente problema:

$$\bar{q} = f(x, y)$$

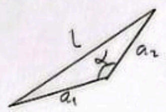
Donde:

  a. x: es la coordenada en x_0 del origen del $S\{2\}$.
  b. y: es la coordenada en y_0 del origen del $S\{2\}$.

2- $\bar{q} = f(x, y)$



Tomamos el triángulo $\overset{\Delta}{OP_1P_2}$:



Si $L^2 = x^2 + y^2$, entonces

$$L^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1^2 + a_2^2 - L^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2} \quad (I)$$

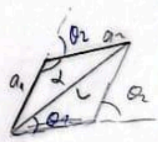
Se observa que $\underline{\theta_2 = \pi - \alpha}$

Aplicando coseno a ambos miembros y usando una propiedad trigonométrica

$$\cos(\theta_2) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Reemplazando en (I)

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}\right)$$



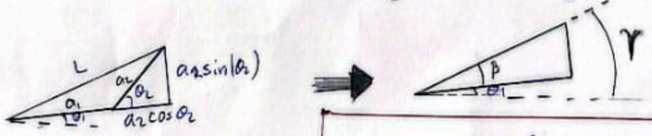
Si ahora consideramos la situación con el codo arriba:

~~Se observa que $\theta_2 = \alpha - \pi \rightarrow \cos(\theta_2) = \cos(\alpha - \pi)$~~

Se observa que ahora θ_2 tiene la misma magnitud pero distinto signo.

Entonces, el caso más general: $\boxed{\theta_2 = \pm \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 \cdot a_1 \cdot a_2}\right)}$

Para θ_1, consideramos el siguiente triángulo:



Vemos que $\theta_1 = \gamma - \beta$

Así: $\boxed{\theta_1 = atan2(y, x) - atan2(a_2 \sin(\theta_2),\ a_1 + a_2 \cos(\theta_2))}$

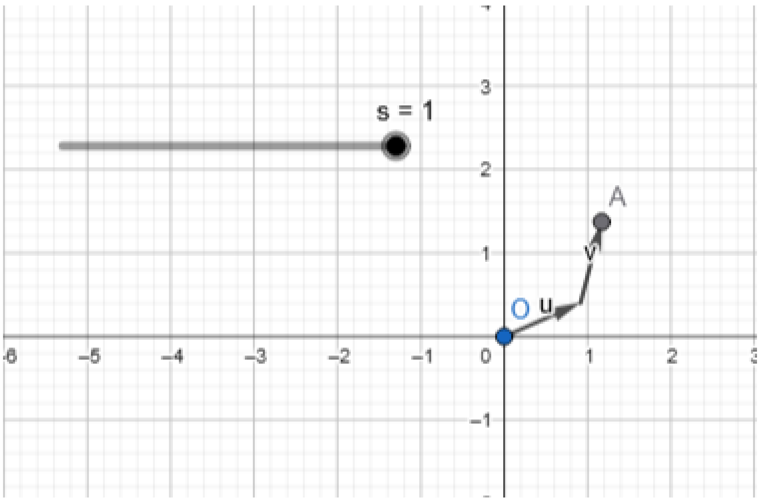
Así:

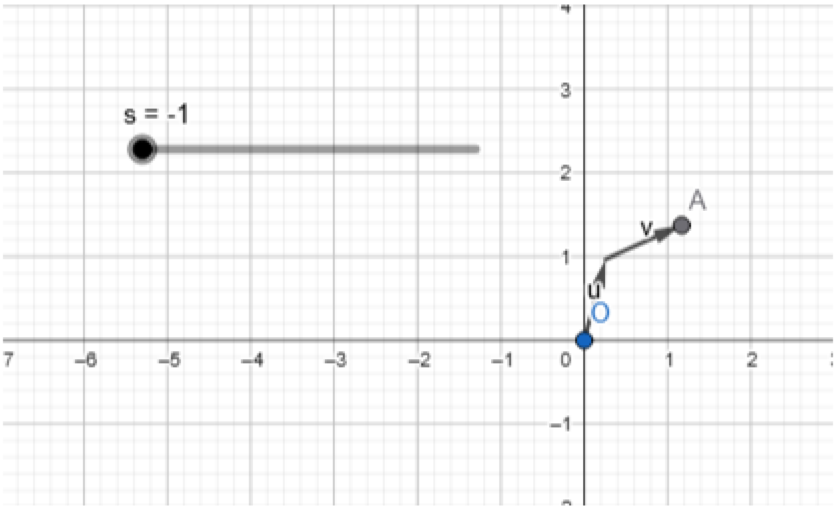
$$q_2 = \ \pm\, cos^{-1}(\frac{x^2+y^2-a_1^{\,2}-a_2^{\,2}}{2a_1a_2})$$

$$q_1 = \ atan2(y,\ x)\ -\ atan2(a_2sin(q_2),\ a_1 + a_2cos(q_2))$$

Para verificar los resultados, hemos usado GeoGebra:

https://www.geogebra.org/calculator/f8yw2b53





Al arrastrar el punto *A*, los vectores (eslabones) se mueven. Con el deslizador *s*, se puede cambiar de la configuración *codo arriba* a *codo abajo*.

3. Indique la cantidad de soluciones posibles que tendría cada conjunto de ecuaciones anterior, si los límites articulares fueran los siguientes:
   a. $\pm 90°$
   b. $\pm 180°$
   c. $\pm 225°$
   d. $\pm\infty$

   Ejemplo: para el caso **a.**, con articulaciones limitadas a $\pm 90°$, la ecuación 1 tendrá solo una solución por cada vector de entrada x, y, γ válido (hay puntos no alcanzables que no tendrán ninguna solución), mientras que la ecuación 2 tendrá dos soluciones para varios puntos x, y del primer y cuarto cuadrante, por la paridad "codo arriba y codo abajo", pero cuando el punto de entrada se acerque al segundo o tercer cuadrante, e implique que una de las soluciones "codo arriba y codo abajo" ponga a $q1$ fuera de sus límites, en tal caso puede haber solo una solución, que será única. Por lo tanto:
   a. $\pm 90°$:
      a. Ecuación 1: solo una solución para cada x, y, γ
      b. Ecuación 2: dos soluciones en general, pero solo una cuando x, y se acerca al 2º y 3º cuadrante.

Para la ecuación 1 (x, y, γ), siempre hay una o ninguna solución válida. No es posible que haya dos soluciones, para cualquier límite articular.

Para la ecuación 2 (x, y), ocurre lo siguiente:

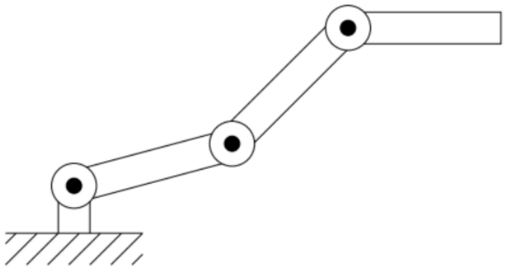
a) ±90°: en general 2 soluciones (codo arriba/codo abajo) pero muchas posiciones del 2º y 3º cuadrante dejan a q1 fuera de ±90°, con lo que queda una sola solución.

b) ±180°: en general 2 soluciones. Hay una solución cuando el punto está en el extremo de la frontera de trabajo (θ_2= 0).

c) ±225°: igual que b)

d) ±∞: geométricamente hay dos soluciones. Matemáticamente, hay infinitas $(q = \theta + 2k\pi)$

Ejercicio 2: analice los 3 robots que se muestran a continuación y plantee el problema de cinemática inversa de la forma $\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\dots)$ de una forma que implique infinitas soluciones, y de otra que implique un número finito de soluciones. Considere límites de $\pm 180°$ para articulaciones rotacionales y $\pm\infty$ para las prismáticas.

1. 

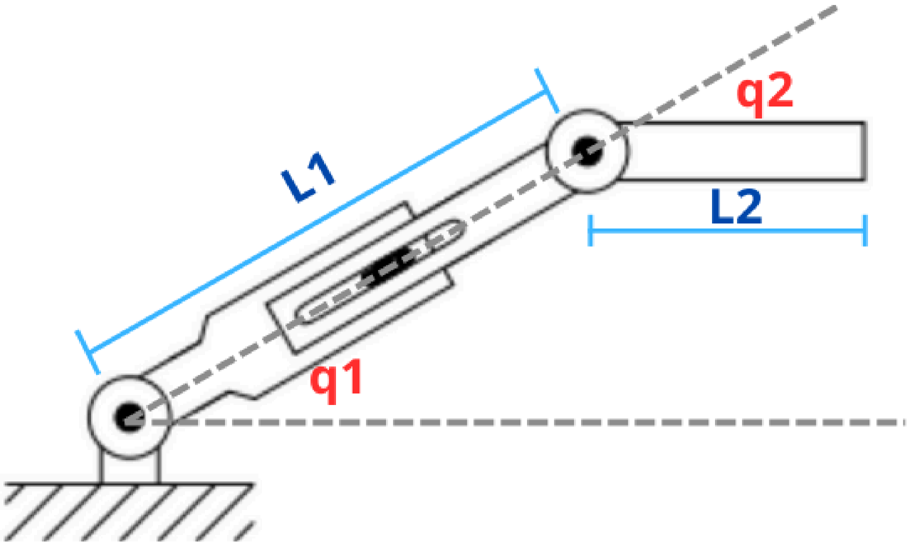
Cinemática inversa con infinitas soluciones:

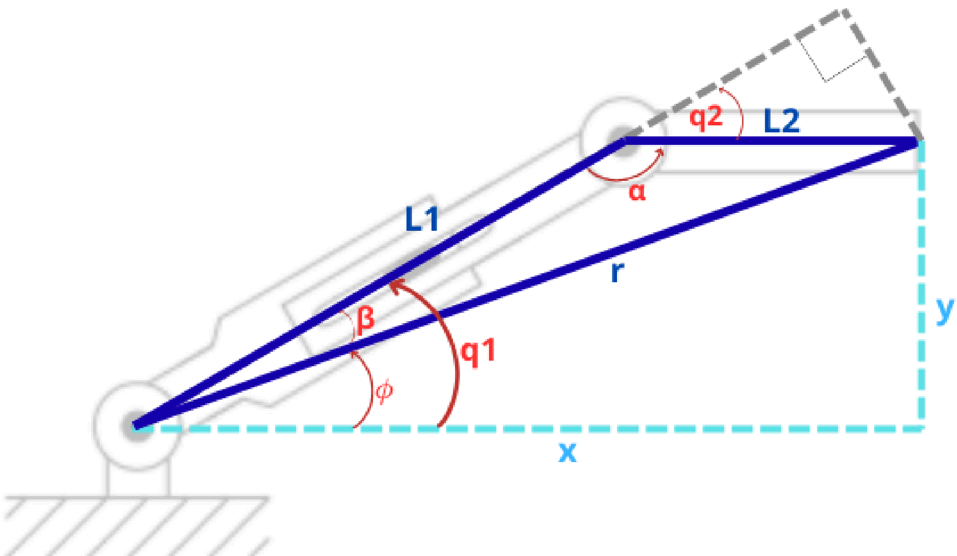
Si se plantea el problema de cinemática inversa únicamente en función de la posición del extremo, es decir q=f(x,y), la orientación del efector γ(gamma) no queda restringida. En este caso, el tercer eslabón puede rotar libremente una vez alcanzado el punto (x,y), lo que genera que existan infinitas configuraciones articulares posibles, ya que q3 queda indeterminado mientras q1 y q2 garantizan la posición deseada del extremo.

Cinemática inversa con finitas soluciones:

Cuando se especifica tanto la posición (x,y) del extremo como la orientación γ (gamma) del efector respecto a la base, el sistema cartesiano del robot queda completamente definido. En este escenario, la cinemática inversa sólo admite un número finito de soluciones: típicamente dos, correspondientes a las configuraciones geométricas de "codo arriba" y "codo abajo". Cada una de estas soluciones asigna valores concretos a los tres ángulos articulares (q1,q2,q3). La existencia de una o dos soluciones válidas dependerá de que dichas configuraciones se encuentren dentro de los límites articulares y del alcance geométrico del manipulador.

Ejercicio 3 (***obligatorio***): halle un conjunto de ecuaciones cerradas que resuelvan el problema cinemático inverso del robot 2.2 por el método geométrico. Seleccione una formulación con cantidad finita de soluciones. Establezca la cantidad de soluciones y analice si es necesario contemplar límites finitos en la segunda articulación.





- Al ser prismático el eslabón L1 lo consideramos incógnita.
- Eslabón L2 de longitud constante

$$\tan\beta = \frac{L2\ sen(q2)}{L1+L2\cos(q2)} \quad \rightarrow \quad \beta = atan2(L2\ sen(q2), L1 + L2\cos(q2))$$

$$q_1 - \beta = \phi \quad \rightarrow \quad q_1 = \phi + \beta$$

$$q_1 = atan2(y, x) + atan2(L2\, sen(q_2), L1 + L2\, cos(q_2))$$

$$q_2 + \alpha = 180° \quad \rightarrow \quad q_2 = 180° - \alpha$$

$$cos(q_2) = cos(180 - \alpha) = -cos(\alpha)$$

$$cos(q_2) = \frac{x^2+y^2-L1^2-L2^2}{2\, L1\, L2} = K \quad cos(q_2)^2 + sen(q_2)^2 = 1$$

$$sen\,(q_2) = +- \sqrt{1 - K^2}$$

$$\frac{sen\,(q_2)}{cos\,(q_2)} = tan(q_2) = \frac{+-\sqrt{1-K^2}}{K}$$

$$q_2 = atan2(+- \sqrt{1 - K^2}\,,\, K\,)$$

$$\gamma = q_1 + q_2$$

- El método geométrico permite obtener un conjunto cerrado de ecuaciones para q1 y q2, existiendo en general dos soluciones para cada punto alcanzable. Sin embargo, la validez práctica depende de los límites de q1, q2 y del rango del actuador prismático, los cuales pueden reducir la cantidad de soluciones efectivas.
- Es necesario considerar límites finitos en q2, para que la solución del problema sea físicamente realizable.

Ejercicio 5 (*obligatorio*): Implemente las ecuaciones de cinemática inversa del robot 2.1 en un script de Matlab aislado. La implementación debe resolver el problema entregando todos los posibles vectores de solución en el espacio articular, considerando límites articulares de $\pm 180°$.

Considere que el ejercicio será aprobado cuando se puedan obtener resultados correctos al variar los parámetros de entrada.

Para obtener la **cinemática inversa**, se procede así:

$$^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & a_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & a_1 \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & a_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & a_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & a_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & a_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la multiplicación se obtiene la cinemática directa total:

$$x = a_1 \cdot cos(q_1) + a_2 \cdot cos(q_1 + q_2) + a_3 \cdot cos(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$y = a_1 \cdot sin(q_1) + a_2 \cdot sin(q_1 + q_2) + a_3 \cdot sin(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$\gamma = q_1 + q_2 + q_3$$

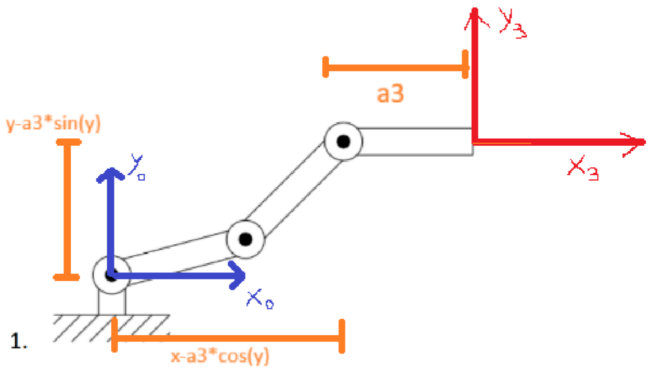
Planteo geométrico de la cinemática inversa

1. Centro de muñeca:

   Cómo γ(gamma) = $q_1+q_2+q_3$, el extremo está a una distancia a_3 en la dirección de γ(gamma).

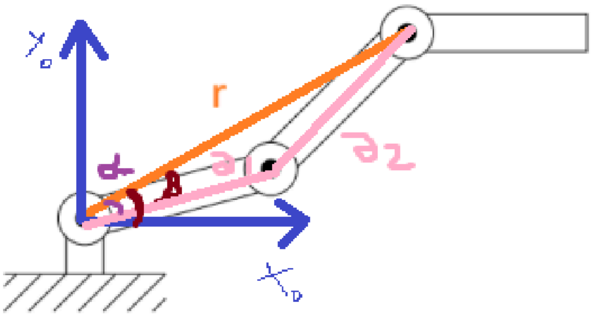
   El punto alcanzado por los dos primeros eslabones (origen de S{2}) es:

   $x_2=x-a_3\cos(\gamma)$, $y_2=y-a_3\sin(\gamma)$.



2. Ángulo q_1 (geometría de triángulo):

$$r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \qquad \beta = atan2(y_2, x_2) \qquad \alpha = acos\left(\frac{a_2^2 - a_1^2 - r^2}{2 \cdot a_1 \cdot r}\right)$$



De aquí resultan dos soluciones para la primera articulación:

$$q_1 = \beta + \alpha\,(codo\ abajo) \qquad q_1 = \beta - \alpha\,(codo\ arriba)$$

3. Ángulo q_2:

Conocido q_1, el segundo ángulo se obtiene de la ley de cosenos o equivalentes:

$$q_2 = atan2(y_2 - a_1 \cdot sin(q_1), x_2 - a_1 \cdot cos(q_1)) - q_1$$

4. Ángulo q_1:

Finalmente, se impone la orientación total:

$$q_3 = \gamma - q_1 - q_2$$