Logique - Ensembles

1. Ecrire les tables de vérités pour les propriétés de cours non démontrées.
2. Démontrer les propositions ensemblistes suivantes, où A, B et C sont des ensembles :
   - $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$.
   - $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$.
   - $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
   - $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - $((A \cup C \subset B \cup C) et (A \cap C \subset B \cap C)) \Rightarrow A \subset B$.
3. Transformer les phrases suivantes en propositions mathématiques à l'aide de quantificateurs :
   - Pour tout nombre complexe z, il existe un nombre complexe y tel que $y^2 - 3y = z$
   - Pour tout x réel, le carré de x est positif.
   - Si un nombre réel est négatif, alors on obtient un nombre positif en le multipliant par -2.
   - si un nombre réel admet une racine carrée, alors ce nombre est positif.
4. On considère une suite réelle définie par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} + 3$
5. Ecrire la négation des propositions suivantes et dire laquelle des deux versions est vraie[1] .
   - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$.
   - $\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ et $y \leq 0$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^{+*}, x = y^2$.
   - $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - 1| \leq \varepsilon$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.
7. On considère neuf pièces d'apparence identique. Huit de ces pièces ont le même poids et on dispose d'une balance à deux plateaux(permettant donc de comparer les poids des objets mis sur les deux plateaux). Comment déterminer quelle pièce a un poids différent en trois pesées ?
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ croissante
   (à savoir : $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$).
   Montrer[2] que f admet un point fixe, à savoir : $\exists x \in [\![1, n]\!], f(x) = x$.
9. Soit n un entier supérieur à 3. On considère une planche horizontale munie de n encoches. 2 joueurs s'affrontent ensuite avec les règles suivantes(on suppose que la planche est cachée à la vue du joueur 2)
   * Le joueur 1 choisit un emplacement et y dépose une bille

1. la dernière est plus délicate, c'est en fait la traduction mathématique d'une notion importante concernant les fonctions
2. on pourra procéder par récurrence

* Le joueur 2 demande à voir une des encoches : si la bille y est il a gagné, sinon le jeu continue

Le jeu se poursuit ensuite en répétant le processus suivant :

* Le joueur 1 change l'emplacement de la bille pour une position adjacente.
* Le joueur 2 choisit ensuite une encoche adjacente à celle qu'il a regardé la dernière fois ou bien choisit de garder la même encoche : si la bille y est, il a gagné et sinon le jeu continue

La question : le joueur 2 a-t-il une stratégie gagnante à coup sûr ? On peut commencer par traiter le cas n=3 ou n=4 au début.

10. Déterminer toutes les fonctions f définies et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et vérifiant :
$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$

Elements de correction :

9. Technique simple : on commence à partir de la 2ème encoche la plus à gauche et à chaque coup on choisit l'encoche immédiatement à droite, et ce jusqu'à la deuxième encoche la plus à droite.
   On reste alors un coup sur cette deuxième encoche la plus à droite et on repart ensuite en choisissant à chaque fois l'encoche immédiatement à gauche. La bille est alors trouvée au plus tard en arrivant sur la deuxième encoche la plus à gauche, ce qui demande donc $2(n-2)$ essais au plus.
   Dans le cas $n = 3$ cette technique revient donc à essayer deux fois de suite l'encoche du milieu ce qui est clairement gagnant puisque le joueur 1 doit changer de place.

10. On raisonne par analyse-synthèse :
    On considère une éventuelle solution f
    Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a : $f(2) + 2f(x) = f(f(1+x)) = f(0) + 2f(1+x)$
    En posant $\alpha = \frac{f(2)-f(0)}{2}$, on a donc $f(x+1) = f(x) + \alpha$ et $f(x) = f(x+1) - \alpha$
    f étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on en déduit que $\alpha \in \mathbb{Z}$
    On obtient alors successivement :

    - Par récurrence : $\forall x \in \mathbb{N}, f(x) = f(0) + \alpha x$ avec le première relation
    - Par récurrence : $\forall x \in \mathbb{N}, f(-x) = f(-0) - \alpha x$

    En posant $\beta = f(0)$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = \alpha x + \beta$
    On remplace alors cette expression de f dans l'équation initiale de l'énoncé et on trouve que l'on a :
    $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, 2\alpha a + \beta + 2\alpha b + 2\beta = \alpha(\alpha(a+b)+\beta) + \beta$
    En considérant le cas $a = b = 0$, on obtient $2\beta = \alpha\beta$ et donc $\alpha = 2$ ou $\beta = 0$
    Si $\beta = 0$, on trouve alors $\alpha^2 = 2\alpha$ en considérant $a = b = 1$ par exemple et donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$
    Synthèse :
    On vérifie que $f = 0$ et toute fonction de la forme $x \mapsto 2x + \beta$ où $\beta \in \mathbb{Z}$ est solution
    Au final l'ensemble des solutions est donc : $\{x \mapsto 0\} \bigcup \{x \mapsto 2x + \beta | \beta \in \mathbb{Z}\}$