

基于 SMC-PHDF 的部分可分辨的群目标跟踪算法

连峰¹ 韩崇昭¹ 刘伟峰² 元向辉¹

摘要 提出一种基于粒子概率假设密度滤波器 (Sequential Monte Carlo probability hypothesis density filter, SMC-PHDF) 的部分可分辨的群目标跟踪算法. 该算法可直接获得群而非个体的个数和状态估计. 这里群的状态包括群的质心状态和形状. 为了估计群的个数和状态, 该算法利用高斯混合模型 (Gaussian mixture models, GMM) 拟合 SMC-PHDF 中经重采样后的粒子分布, 这里混合模型的元素个数和参数分别对应于群的个数和状态. 期望最大化 (Expectation maximum, EM) 算法和马尔科夫链蒙特卡洛 (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 算法分别被用于估计混合模型的参数. 混合模型的元素个数可通过删除、合并及分裂算法得到. 100 次蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 仿真实验表明该算法可有效跟踪部分可分辨的群目标. 相比 EM 算法, MCMC 算法能够更好地提取群的个数和状态, 但它的计算量要大于 EM 算法.

关键词 群目标跟踪, 粒子概率假设密度滤波器, 高斯混合模型, 期望最大化算法, 马尔科夫链蒙特卡洛算法

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00731

Tracking Partly Resolvable Group Targets Using SMC-PHDF

LIAN Feng¹ HAN Chong-Zhao¹ LIU Wei-Feng² YUAN Xiang-Hui¹

Abstract This paper proposes to track the partly resolvable groups using sequential Monte Carlo probability hypothesis density filter (SMC-PHDF). The estimate of the number and the states of the groups, rather than the individuals, are directly derived by the algorithm. The states of a group here consist of their centroid states and shapes. In order to estimate the number and the states of the groups, the proposed algorithm fits the distribution of the resampled particles of the SMC-PHDF via Gaussian mixture models (GMM), whose component number and parameters correspond to the number and the states of the groups. Expectation maximum (EM) and Markov chain Monte Carlo (MCMC) algorithms are respectively used to estimate the parameters of the mixture. The component number of the mixture is derived by the strategy of pruning, merging and splitting. 100 Monte Carlo (MC) simulations show that the proposed approach can track the partly resolvable groups effectively. Besides, the MCMC algorithm outperforms the EM algorithm significantly in extracting the number and the states of the groups, although its computational requirement is larger than the EM algorithm.

Key words Group targets tracking (GTT), sequential Monte Carlo probability hypothesis density filter (SMC-PHDF), Gaussian mixture models (GMM), expectation maximum (EM), Markov chain Monte Carlo (MCMC)

随着传感器分辨率的不断提高, 群目标跟踪 (Group targets tracking, GTT) 问题^[1] 在近几年受到了国内外学者的广泛关注, 它在地面或海面目标监控、多目标编队运动、人群或兽群跟踪等领域^[2] 有巨大的应用价值. 通常在大多数的实际应用中, 由于群内的个体目标较密集, 而传感器的分辨率往往又不够充分, 因此使得群内的个体目标是部分可分辨的 (即每个群所产生的测量个数大于 1, 但又小于群内的个体目标数)^[3]. 在这种情况下再试图对群内

的所有个体进行跟踪显然是不现实的^[4], 并且在很多应用中也是不必要的^[2]. 相反, 这时可以直接对群的整体进行跟踪. 根据这一思想, Koch 等^[4] 提出了一种群目标贝叶斯递推算法. 该算法可直接获得群的质心状态和形状估计. 但它目前仅限于跟踪无杂波条件下的单个群目标.

近年来, 基于随机有限集 (Random finite set, RFS) 的多目标跟踪算法^[5], 例如概率假设密度滤波器 (Probability hypothesis density filter, PHDF)^[6] 和势概率假设密度滤波器 (Cardinalized PHDF)^[7] 等, 受到了广泛的关注. Vo 等给出了 PHDF 的粒子滤波实现: 粒子概率假设密度滤波器 (Sequential Monte Carlo PHDF, SMC-PHDF, 也称为 Particle PHDF)^[8]. Vo 等在线性运动模型和测量模型的假设条件下得到了 PHDF 封闭的递推形式: GM-PHDF (Gaussian mixture PHDF)^[9]. 事实上, Mahler 等最初提出 PHDF 的目的是为了解决非传统条件下的密集多目标跟踪问题, 故它尤其适用于群目标跟

收稿日期 2009-03-06 录用日期 2009-06-24
Manuscript received March 6, 2009; accepted June 24, 2009
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2007CB311006), 国家自然科学基金 (60574033) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB311006) and National Natural Science Foundation of China (60574033)
1. 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所 西安 710049
2. 杭州电子科技大学自动化学院 杭州 310018
1. Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 2. School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018

踪^[10]. 但目前 PHDF 仍主要应用于传统的多个个体(或点)目标的跟踪^[11-12], 而利用 PHDF 进行群目标跟踪的文献和资料并不多见. Clark 等首先将 GM-PHDF 应用于线性条件下的群目标跟踪问题^[13], 但该算法仍着眼于群内个体目标的估计, 而并不是直接对群的整体进行估计, 因此它很难适用于部分可分辨时的群目标跟踪问题.

综上, 本文提出一种基于 SMC-PHDF 的部分可分辨的群目标跟踪算法. 与传统的基于 SMC-PHDF 的个体目标跟踪算法以及文献 [13] 的主要区别在于: 1) 该算法将每个群视为一个整体单元, 其中群的状态可由它的质心状态和形状描述. 通过对群的状态演化方程和测量方程进行建模, 可直接获得群而非个体的个数和状态估计. 2) 由于每个群在每个时刻可能产生不止一个测量, 故这时群目标的个数估计不能再直接由 PHD 的积分获得^[10]. 3) 由于每个群所产生的测量较密集以及传感器分辨率不充分等因素的影响, 使得群目标 SMC-PHDF 中经重采样后的粒子分布相对于传统的个体目标 SMC-PHDF 变得更加复杂. 相应地状态提取的难度也显著增加. 因此, 为了从群目标 SMC-PHDF 中提取群的个数和状态, 本算法利用高斯混合模型 (Gaussian mixture model, GMM)^[14] 拟合重采样后的粒子分布, 这里混合模型的元素个数和参数分别对应于群的个数和状态. 期望最大化 (Expectation maximum, EM) 算法^[14] 和马尔科夫链蒙特卡洛 (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 算法^[15] 分别用于估计混合模型的元素参数. 混合模型的元素个数可通过删除、合并及分裂算法获得. 本文算法可适用于杂波环境, 群的个数和群内的个体目标数随时间变化, 群的运动模型和测量模型非线性, 以及群内的个体目标部分可分辨时的群目标跟踪问题. 100 次蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 仿真实验表明本文算法在上述条件下可有效跟踪群目标. 相比 EM 算法, MCMC 算法能够更好地提取群的个数和状态, 但 MCMC 算法的计算量要大于 EM 算法.

1 问题描述

1.1 群目标状态

假设在所监控的时间段内, 由于个体目标的出生、消亡以及群的分裂、合并等原因, 监控区域内群目标的个数, 群所包含的个体目标数, 以及群的形状均随时间变化. 记时刻 k 监控区域内群目标的个数为 G_k , 单个群目标的状态为 \mathbf{g}_k , 它包括群的质心状态和形状. 类似文献 [4], 本文也采用椭球 (或椭圆) 近似描述群的形状, 则 \mathbf{g}_k 可定义为

$$\mathbf{g}_k = (\mathbf{x}_k, X_k) \quad (1)$$

其中, \mathbf{x}_k 为 n_x 维列向量, 它表示群的质心状态. X_k 为 $n_x \times n_x$ 维的对称正定随机矩阵, 它用于描述群的椭球 (或椭圆) 形状, $n_x = 2$ 或 3 分别对应于 2 维或 3 维空间.

本文的目的是根据直到时刻 k 的传感器测量, 估计群目标的个数 G_k 和群的状态集合 $\mathcal{G}_k = \{\mathbf{g}_k^g\}_{g=1}^{G_k}$.

1.2 群目标状态的时间演化模型

假设时刻 k 第 g ($g = 1, \dots, G_k$) 个群目标状态的时间演化模型满足马尔科夫性, 它可描述为^[4]

$$f_{k|k-1}(\mathbf{g}_k^g | \mathbf{g}_{k-1}^g) = f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k^g | \mathbf{x}_{k-1}^g) f_{k|k-1}(X_k^g | X_{k-1}^g) \quad (2)$$

其中, $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k^g | \mathbf{x}_{k-1}^g)$ 为群的质心状态转移概率密度, 它描述了群的运动行为; $f_{k|k-1}(X_k^g | X_{k-1}^g)$ 为群的形状转移概率密度, 它描述了群的形状变化.

1.3 传感器测量模型

令 n_z 维列向量 \mathbf{z}_k 表示时刻 k 的单个传感器测量, $\mathcal{Z}_k = \{\mathbf{z}_k^m\}_{m=1}^{M_k}$ 为时刻 k 的传感器测量集合, 这里 M_k 为时刻 k 的测量个数. 传感器测量数据通常包括两部分: 源于群目标的量测和杂波 (或虚警), 并且两者是不可区分的. 在未进行特别说明时, 通常认为各个时刻的传感器测量互相独立^[5].

1.3.1 源于群目标的测量

记 M_k^g 表示时刻 k 第 g 个群所产生的测量个数. 本文假设群内的个体目标是部分可分辨的, 故 $M_k^g \leq N_k^g$, 这里 N_k^g 表示时刻 k 第 g 个群所包含的个体目标数. 如果时刻 k 第 m 个测量 \mathbf{z}_k^m 由第 g 个群产生, 则测量似然函数 $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g)$ 可描述为^[16]

$$f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g) = \int f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{p}_k^g) f_{k|k}(\mathbf{p}_k^g | \mathbf{g}_k^g) d\mathbf{p}_k^g \quad (3)$$

其中, \mathbf{p}_k^g 表示第 g 个群目标在时刻 k 产生量测的反射点 (包括可分辨的和不可分辨的个体目标) 的位置; $f_{k|k}(\mathbf{p}_k^g | \mathbf{g}_k^g)$ 描述了 \mathbf{p}_k^g 的分布, 对于传统的点目标, $f_{k|k}(\mathbf{p}_k^g | \mathbf{g}_k^g)$ 退化为质心状态 \mathbf{x}_k^g 处的 δ 函数; $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{p}_k^g)$ 表示传统的单传感器单目标 (此处指点目标) 测量似然函数, 它依赖于传感器的特性. 由于式 (3) 与群的形状矩阵 X_k^g 有关, 故 X_k^g 可由传感器测量估计得到.

1.3.2 源于杂波的测量

假设杂波为泊松点过程, 强度为

$$\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda c(\mathbf{z}_k) \quad (4)$$

其中, λ 为监控区域内平均每个时刻的杂波个数;

$c(\cdot)$ 为杂波空间分布的概率密度, 若第 m 个测量由杂波产生, 则它满足 $\mathbf{z}_k^m \sim c(\cdot)$.

2 基于 SMC-PHDF 的部分可分辨的群目标跟踪算法

2.1 群目标 PHDF 的粒子滤波实现

类似于传统的多个个体 (或点) 目标 PHD, Mahler 将多个群目标的运动过程建模为泊松点过程, 从而得到了群目标的 PHD 为^[10]

$$D_{k|k}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k}) = \int_{\mathbf{g}_k \in \mathcal{G}_k} f_{k|k}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k}) \delta \mathcal{G}_k \quad (5)$$

其中, $f_{k|k}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k})$ 表示 RFS 框架下的多个群目标状态集合的后验概率密度. $\int \cdot \delta \mathcal{G}_k$ 表示集合积分.

相应的群目标 PHDF 的递推公式如下^[10]:

$$D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}) = \gamma_k(\mathbf{g}_k) + \int [p_{S,k|k-1}(\mathbf{g}_{k-1}) f_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1}) + \beta_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1})] D_{k-1|k-1}(\mathbf{g}_{k-1} | \mathcal{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{g}_{k-1} \quad (6)$$

$$D_{k|k}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k}) = (1 - p_{D,k}(\mathbf{g}_k)) D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}) + \sum_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k} \frac{p_{D,k}(\mathbf{g}_k) f_{k|k}(\mathbf{z}_k | \mathbf{g}_k) D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1})}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \int p_{D,k}(\mathbf{g}_k) f_{k|k}(\mathbf{z}_k | \mathbf{g}_k) D_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathcal{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{g}_k} \quad (7)$$

其中, $\gamma_k(\mathbf{g}_k)$ 为群目标出生强度, $\beta_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1})$ 为群目标它生 (或分裂) 强度, $p_{S,k|k-1}(\mathbf{g}_{k-1})$ 为群目标存活概率, $p_{D,k}(\mathbf{g}_k)$ 为传感器对群目标的检测概率.

由于式 (6) 和式 (7) 中含有多个积分, 因此在非线性非高斯条件下, 该群目标 PHDF 没有解析形式. 下面给出它的粒子滤波实现.

需要说明的是, 与传统的个体目标 PHDF 不同, 对于部分可分辨的群目标跟踪问题, 由于单个群目标在每个时刻可产生多个传感器测量, 因此群目标的个数估计不能再直接通过群目标 PHD 的积分获得. 故在时刻 k 需要从群目标 SMC-PHDF 的重采样后的粒子集合中同时提取群目标的个数和状态.

群目标 SMC-PHDF 的具体算法流程见算法 1. 其中上标 “ \sim ” 表示采样值. 此外, 在算法 1 中:

- 1) 建议分布可取为群的状态转移概率密度;
- 2) 在重采样步后可加入 MCMC 移动步, 以增加粒子多样性;

3) 对于群目标 SMC-PHDF, 由于每个群所产生的测量较密集, 群的交叉、合并及分裂, 群的形状变化, 传感器分辨率不充分, 测量噪声和杂波等因素的影响, 使得重采样后的粒子分布相对于传统的个体目标 SMC-PHDF 变得更加复杂. 相应地, 算法 1 中状态提取步的难度也显著增加. 这时如果仍采用以往的 K-均值算法^[17], 群目标的个数和状态提取效

果将严重变差. 这是由于 K-均值属于 “硬聚类” 方法, 即它只能将数据中的一个元素分配给一个类别. 因此当数据所包含的类别中有重叠的边界时, K-均值算法的性能将明显下降. 相反, GMM 属于 “软聚类” 方法, 它可以根据一定的概率将数据中的一个元素分配给多个类别. 故它尤其适用于聚类有重叠边界的数据. 因此, 下面本文采用未知元素个数的 GMM 提取群目标的个数和状态.

算法 1. 群目标 SMC-PHDF 算法

输入. $k-1$ 时刻重采样后的粒子和权重集合

$$\{\tilde{w}_{k-1}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j\}_{j=1}^{J_{k-1}}$$

预测步. 从建议分布 $q_k(\cdot | \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j, \mathcal{Z}_k)$, $p_k(\cdot | \mathcal{Z}_k)$ 中采样预测粒子并计算相应权重, 可得

$$\{\tilde{w}_{k|k-1}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j\}_{j=1}^{J_{k|k-1}}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j \sim \begin{cases} q_k(\cdot | \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j, \mathcal{Z}_k), & \text{for } j = 1, \dots, J_{k-1} \\ p_k(\cdot | \mathcal{Z}_k), & \text{for } j = J_{k-1} + 1, \dots, J_{k|k-1} \end{cases}$$

$$\tilde{w}_{k|k-1}^j \sim \begin{cases} \frac{f_{k|k-1}(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j | \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j) \tilde{w}_{k-1}^j}{q_k(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j | \tilde{\mathbf{g}}_{k-1}^j, \mathcal{Z}_k)}, & \text{for } j = 1, \dots, J_{k-1} \\ \frac{\gamma_k(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j)}{(J_{k|k-1} - J_{k-1}) p_k(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j | \mathcal{Z}_k)}, & \text{for } j = J_{k-1} + 1, \dots, J_{k|k-1} \end{cases}$$

更新步. 根据 \mathcal{Z}_k 更新预测粒子权重, 可得

$$\{\tilde{w}_{k|k}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k|k}^j\}_{j=1}^{J_{k|k}}$$

$$\tilde{w}_{k|k}^j = 1 - p_{D,k}(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j) \tilde{w}_{k|k-1}^j + \sum_{\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k} \frac{p_{D,k}(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j) f_{k|k}(\mathbf{z}_k | \tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j) \tilde{w}_{k|k-1}^j}{\kappa_k(\mathbf{z}_k) + \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}} p_{D,k}(\tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j) f_{k|k}(\mathbf{z}_k | \tilde{\mathbf{g}}_{k|k-1}^j) \tilde{w}_{k|k-1}^j}$$

重采样步. 重采样 $\{\frac{\tilde{w}_{k|k}^j}{W_k}, \tilde{\mathbf{g}}_{k|k}^j\}_{j=1}^{J_{k|k}}$, 可得

$$\{\frac{\tilde{w}_{k|k}^j}{W_k}, \tilde{\mathbf{g}}_{k|k}^j\}_{j=1}^{J_{k|k}}, \text{ 其中 } W_k = \sum_{j=1}^{J_{k|k-1}} \tilde{w}_{k|k-1}^j$$

状态提取步. 通过聚类重采样后的粒子集合 $\{\tilde{\mathbf{g}}_{k|k}^j\}_{j=1}^{J_{k|k}}$, 提取群目标的个数估计 \hat{G}_k 和状态估计 $\{\hat{\mathbf{g}}_{k|k}^g\}_{g=1}^{\hat{G}_k}$, 算法细节可见第 2.2 节 ~ 第 2.4 节.

输出. 重采样后的粒子和权重集合 $\{\tilde{w}_{k|k}^j, \tilde{\mathbf{g}}_{k|k}^j\}_{j=1}^{J_{k|k}}$, 群目标个数估计 \hat{G}_k , 群目标状态估计 $\{\hat{\mathbf{g}}_{k|k}^g\}_{g=1}^{\hat{G}_k}$.

2.2 利用 GMM 提取群目标个数和状态

令 $\tilde{\mathbf{g}}_k$ 表示时刻 k 群目标 SMC-PHDF 中经重采样后的粒子变量. 它可记为如下列向量的形式

$$\tilde{\mathbf{g}}_k = [(\tilde{\mathbf{x}}_k)^T, \tilde{X}_k(1, :), \dots, \tilde{X}_k(n_X, :)]^T \quad (8)$$

其中, $\tilde{X}_k(i, :)$ 表示矩阵 \tilde{X}_k 的第 i 行 ($i = 1, \dots, n_X$).

用 L_k 个元素的 GMM 拟合 $\tilde{\mathbf{g}}_k$ 的分布

$$f_k(\tilde{\mathbf{g}}_k | \psi_k) = \sum_{l=1}^{L_k} \pi_k^l \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k | \boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l), \quad \sum_{l=1}^{L_k} \pi_k^l = 1 \quad (9)$$

其中, $\psi_k = \{\pi_k^l, \boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l\}_{l=1}^{L_k}$ 为混合模型的参数集合. π_k^l , $\boldsymbol{\mu}_k^l$ 和 Σ_k^l 分别为混合模型中第 l 个元素的权重、均值和协方差. 我们用一个正态分布模型拟合由一

个群目标所产生的测量而引起的粒子分布. 这样, 混合模型中正态元素的个数和均值即对应于观测区域中群目标的个数和状态.

给定时刻 k 的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$, 并假设集合中的粒子满足独立性条件, 可得 ψ_k 的似然函数为

$$f_k(\tilde{\mathcal{G}}_k|\psi_k) = \prod_{j=1}^{J_k} f_k(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\psi_k) = \prod_{j=1}^{J_k} \sum_{l=1}^{L_k} \pi_k^l \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l) \quad (10)$$

那么, ψ_k 的极大似然 (Maximum likelihood, ML) 估计为

$$\hat{\psi}_k^{\text{ML}} = \arg \max_{\psi_k} \{\log f_k(\tilde{\mathcal{G}}_k|\psi_k)\} \quad (11)$$

若给定先验密度 $f_k(\psi_k)$, ψ_k 的最大后验 (Maximum a posterior, MAP) 估计为

$$\hat{\psi}_k^{\text{MAP}} = \arg \max_{\psi_k} \{\log f_k(\tilde{\mathcal{G}}_k|\psi_k) + \log f_k(\psi_k)\} \quad (12)$$

最终, 由混合模型的参数估计 $\hat{\psi}_k$ 可得时刻 k 群目标的个数和状态估计为

$$\hat{G}_k = \hat{L}_k, \quad \hat{\mathcal{G}}_k = \{\hat{\boldsymbol{\mu}}_k^l\}_{l=1}^{\hat{L}_k} \quad (13)$$

2.3 利用 EM 算法估计混合模型的参数

给定时刻 k 重采样后的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$, 本节通过 EM 算法得到 ψ_k 的 ML 估计. 令 EM 算法的缺失数据为混合模型的元素标识集合 $\mathcal{E}_k = \{\mathbf{e}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$ [14]. 其中, \mathbf{e}_k^j 为 L_k 维列向量, $e_k^{lj} = 1$ 或 0 对应于粒子 $\tilde{\mathbf{g}}_k^j$ 是或不是由混合模型的第 l 个元素产生. 因此, 完整数据集可记为 $\mathcal{C}_k = \{\tilde{\mathcal{G}}_k, \mathcal{E}_k\}$.

在群目标跟踪问题中, 由于群的个数未知, 相应地, 混合模型的元素个数 L_k 也未知. 本文通过算法 2 来管理混合模型的元素, 算法 2 给出了删除、合并及分裂等管理技术的细节. 在算法 2 中, $\text{cond}(\cdot)$ 表示矩阵的条件数, $\mathcal{B}(\cdot|b_1, b_2)$ 为贝塔分布的概率密度, b_1, b_2 为其参数.

算法 2. 混合模型的元素管理技术算法

输入. 正态元素集合 $\{\pi_k^l, \boldsymbol{\mu}_k^l, \Sigma_k^l\}_{l=1}^{L_k}$,

删除门限 η_T , 合并门限 η_M , 分裂门限 η_S .

删除步. for $l = 1, \dots, L_k$, if $\pi_k^l > \eta_T$, let $l \in \mathcal{I}_k$.
end if; end for l .

合并步. 令 $m = 0$, 重复执行:

$m = m + 1, j = \arg \max_{i \in \mathcal{I}_k} \pi_k^i$

$\mathcal{L}_k = \{i \in \mathcal{I}_k | (\boldsymbol{\mu}_k^i - \boldsymbol{\mu}_k^j)^T (\Sigma_k^i)^{-1} (\boldsymbol{\mu}_k^i - \boldsymbol{\mu}_k^j) < \eta_M\}$

$\bar{\pi}_k^m = \sum_{i \in \mathcal{L}_k} \pi_k^i, \bar{\boldsymbol{\mu}}_k^m = \frac{1}{\bar{\pi}_k^m} \sum_{i \in \mathcal{L}_k} \pi_k^i \boldsymbol{\mu}_k^i$

$\bar{\Sigma}_k^m = \frac{1}{\bar{\pi}_k^m} \sum_{i \in \mathcal{L}_k} \pi_k^i \left(\Sigma_k^i + (\bar{\boldsymbol{\mu}}_k^m - \boldsymbol{\mu}_k^i)(\bar{\boldsymbol{\mu}}_k^m - \boldsymbol{\mu}_k^i)^T \right)$

令 $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k - \mathcal{L}_k$, 直到 $\mathcal{I}_k = \emptyset$. 令 $\bar{L}_k = m$.

分裂步. 令 $m = 0$, for $l = 1, \dots, \bar{L}_k$,

if $\text{cond}(\bar{\Sigma}_k^l) > \eta_S$,

$m = m + 1, u_1 \sim \mathcal{B}(\cdot|2, 2)$,

$u_2 \sim \mathcal{B}(\cdot|2, 2), u_3 \sim \mathcal{B}(\cdot|1, 1)$,

$\bar{\pi}_k^m = \bar{\pi}_k^l u_1, \bar{\pi}_k^{m+1} = \bar{\pi}_k^l (1 - u_1)$,

$\bar{\boldsymbol{\mu}}_k^m = \bar{\boldsymbol{\mu}}_k^l - u_2 \sqrt{\bar{\Sigma}_k^l \frac{1-u_1}{u_1}}$,

$\bar{\boldsymbol{\mu}}_k^{m+1} = \bar{\boldsymbol{\mu}}_k^l - u_2 \sqrt{\bar{\Sigma}_k^l \frac{u_1}{1-u_1}}$,

$\bar{\Sigma}_k^m = \frac{u_3(1-u_2^2)}{u_1} \bar{\Sigma}_k^l$,

$\bar{\Sigma}_k^{m+1} = \frac{(1-u_3)(1-u_2^2)}{1-u_1} \bar{\Sigma}_k^l, m = m + 1$,

else

$m = m + 1, \bar{\pi}_k^m = \bar{\pi}_k^l, \bar{\boldsymbol{\mu}}_k^m = \bar{\boldsymbol{\mu}}_k^l, \bar{\Sigma}_k^m = \bar{\Sigma}_k^l$,

end if; end for l ; 令 $\bar{L}_k = m$.

输出. 经管理后的正态元素集合 $\{\bar{\pi}_k^l, \bar{\boldsymbol{\mu}}_k^l, \bar{\Sigma}_k^l\}_{l=1}^{\bar{L}_k}$.

最终, EM 算法通过求期望步、最大化步和元素管理步交替迭代更新参数估计. EM 算法的完整描述见算法 3. 其中, $\text{round}(\cdot)$ 表示取整运算, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹, I_{n_g} 为 $n_g \times n_g$ 维单位阵, n_g 为向量 \mathbf{g}_k 的维数.

算法 3. EM 算法

输入. 重采样后的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{\mathbf{g}}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$,

收敛门限 ε .

初始化步. 初始化参数集 $\psi_k(0)$.

for $l = 1, \dots, L_k(0)$ do

$\pi_k^l(0) = \frac{1}{L_k(0)}; \boldsymbol{\mu}_k^l(0) = \tilde{\mathbf{g}}_k^i$, 其中 $i = \text{round}(\frac{l \cdot J_k}{L_k(0)})$,

$\Sigma_k^l(0) = \frac{1}{10n_g} \text{tr}(\frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} (\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \bar{\mathbf{g}}_k)(\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \bar{\mathbf{g}}_k)^T) \cdot I_{n_g}$,

其中, $\bar{\mathbf{g}}_k = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \tilde{\mathbf{g}}_k^j$,

end for l ; 令 $t = 0$.

重复执行:

求期望步. 计算缺失数据的条件期望

$\hat{\mathcal{E}}_k(t) = \{\hat{\mathbf{e}}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}$,

for $l = 1, \dots, L_k(t)$ do, for $j = 1, \dots, J_k$ do

$\hat{e}_k^{lj}(t) = \mathbb{E}[e_k^{lj}|\tilde{\mathcal{G}}_k, \psi_k(t)] =$

$$\frac{\pi_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\boldsymbol{\mu}_k^l(t), \Sigma_k^l(t))}{\sum_{i=1}^{L_k(t)} \pi_k^i(t) \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\boldsymbol{\mu}_k^i(t), \Sigma_k^i(t))}$$

end for j ; end for l ;

给定 $\tilde{\mathcal{G}}_k$ 和 $\psi_k(t)$, 计算完整数据对数似然函数的条件期望.

$\mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t)) = \mathbb{E}\{\log f_k(\mathcal{C}_k|\psi_k)|\tilde{\mathcal{G}}_k, \psi_k(t)\} =$

$$\sum_{j=1}^{J_k} \sum_{l=1}^{L_k(t)} \hat{e}_k^{lj}(t) \log \pi_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{g}}_k^j|\boldsymbol{\mu}_k^l(t), \Sigma_k^l(t))$$

最大化步. 全局最大化 $\mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t))$ 以更新参数 $\psi_k(t)$

for $l = 1, \dots, L_k(t)$ do

$\hat{\pi}_k^l(t) = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t)$,

$$\hat{\mu}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t) \hat{g}_k^j}{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t)},$$

$$\hat{\Sigma}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t) (\hat{g}_k^j - \hat{\mu}_k^l(t)) (\hat{g}_k^j - \hat{\mu}_k^l(t))^T}{\sum_{j=1}^{J_k} \hat{e}_k^{lj}(t)}, \text{ end for } l;$$

元素管理步. 详细算法见算法 2.

$$\psi_k(t) = \{\hat{\pi}_k^l(t), \hat{\mu}_k^l(t), \hat{\Sigma}_k^l(t)\}_{l=1}^{L_k(t)} \xrightarrow{\text{Prune, Merge, Split}} \psi_k(t+1) = \{\pi_k^l(t+1), \mu_k^l(t+1), \Sigma_k^l(t+1)\}_{l=1}^{L_k(t+1)}.$$

令 $t = t + 1$.

直到 $|\mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t+1)) - \mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t))| < \varepsilon \mathcal{Q}_k(\psi_k, \psi_k(t))$.

输出. 估计的参数集合 $\hat{\psi}_k = \psi_k(t+1)$.

众所周知, EM 算法有两个缺点: 1) 对初始化敏感; 2) 当似然函数分布相对较复杂时, 参数估计容易收敛到局部极值点. 因此, 对于 EM 算法, 混合模型的初始化元素个数应尽量多, 以便于初始点能够尽可能地覆盖数据域. 根据经验, 时刻 k 的初始化元素个数通常选择 $L_k(0) > \log \varepsilon / \log(1 - \min\{\pi_k\})^{[18]}$, 这里, $\min\{\pi_k\}$ 是设定的最小混合权重, ε 为迭代收敛门限.

2.4 利用 MCMC 算法估计混合模型的元素参数

本节采用 MCMC 算法估计混合模型的参数集合 $\psi_k^{[18]}$. 常用的 MCMC 算法有 Gibbs 采样算法和 Metropolis-Hastings (M-H) 采样算法^[15]. 相比于 EM 算法, MCMC 算法属于随机性算法, 它对初始值不敏感, 并且对于较复杂的参数分布, MCMC 算法更容易收敛到全局最小 (大) 点. 缺点是它的计算量大于 EM 算法, 并且需要预先给定参数的先验分布.

若 k 时刻 ψ_k 的先验概率密度为 $f_k(\psi_k)$, 根据贝叶斯公式, 其后验概率密度为

$$f_k(\psi_k | \tilde{\mathcal{G}}_k) = \frac{\sum_{\mathcal{E}_k} f_k(\mathcal{C}_k | \psi_k) f_k(\mathcal{E}_k | \psi_k) f_k(\psi_k)}{\int \sum_{\mathcal{E}_k} f_k(\mathcal{C}_k | \psi_k) f_k(\mathcal{E}_k | \psi_k) f_k(\psi_k) d\psi_k} \quad (14)$$

其中, $f_k(\mathcal{E}_k | \psi_k)$ 为给定 ψ_k 时缺失数据 \mathcal{E}_k 的条件密度, $f_k(\mathcal{C}_k | \psi_k)$ 为完整数据似然函数. MCMC 算法通过迭代, 可近似获得参数 ψ_k 的后验概率密度 $f_k(\psi_k | \tilde{\mathcal{G}}_k)$, 进而可得到 ψ_k 的 MAP 估计.

我们分别采用 Dirichlet 分布、正态分布和 Wishart 分布作为混合模型的权重、均值和协方差矩阵的逆的先验分布^[14]. 记 $\mathcal{D}(\cdot | n^1, \dots, n^l)$ 表示 Dirichlet 分布的概率密度, n^1, \dots, n^l 为其参数. 记 $\mathcal{W}(\cdot | r, \Sigma)$ 表示 Wishart 分布的概率密度, r, Σ 为其参数.

当混合模型的元素个数未知时, 逆跳变的

MCMC 算法可用于联合估计未知的元素个数和其余参数^[19], 但它的计算量通常较大. 因此本节仍采用第 2.3 节中的删除、合并与分裂算法管理混合模型的元素个数. 本节 Gibbs 采样器被用于估计 ψ_k . 算法 4 给出了 Gibbs 采样算法的完整描述, 其中上标 “ \sim ” 表示采样值. 此外, 在算法 4 中:

1) 迭代次数 t_m 理论上应根据 Markov 链收敛到稳态的速率来确定^[15], 但通常可根据经验选择.

2) r^l 和 κ^l 分别为 Wishart 分布和正态分布的辅助参数, 它们是为了使参数估计对先验分布的合理变化不敏感. 根据经验, 本文选择 $r^l = 5$, $\kappa^l = 1$, $l = 1, \dots, L_k(t)$.

3) 不同于 EM 算法, MCMC 算法对初始化不敏感. 因此, 时刻 k 初始化的元素个数可选为 $L_k(0) = G^{\max}$, 其中 G^{\max} 为区域内群目标个数的最大可能值.

算法 4. Gibbs 采样算法

输入. 重采样后的粒子集合 $\tilde{\mathcal{G}}_k = \{\tilde{g}_k^j\}_{j=1}^{J_k}$,
迭代次数 t_m .

初始化步. 除 $L_k(0)$ 外与算法 3 相同. 令 $t = 0$,

for $t = 1, \dots, t_m$ do, for $l = 1, \dots, L_k(t)$ do,

采样步. 根据下述条件分布, 采样混合模型的权重、均值和协方差.

$$(\tilde{\pi}_k^1(t), \dots, \tilde{\pi}_k^{L_k(t)}(t)) \sim \mathcal{D}(\cdot | n_k^1(t), \dots, n_k^{L_k(t)}(t))$$

$$\tilde{\Sigma}_k^l(t)^{-1} \sim \mathcal{W}(\cdot | n_k^l(t) + r^l, \frac{\Sigma_k^l(t)^{-1}}{n_k^l(t) + r^l})$$

$$\tilde{\mu}_k^l(t) \sim \mathcal{N}(\cdot | \mu_k^l(t), \frac{\Sigma_k^l(t)}{n_k^l(t) + \kappa^l})$$

其中, $n_k^l(t) = \pi_k^l(t) J_k = \sum_{j=1}^{J_k} e_k^{lj}(t)$ 表示属于第 l 个元素的粒子数.

计算缺失数据的条件期望 $\tilde{\mathcal{E}}_k(t) = \{\tilde{e}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}$.
for $j = 1, \dots, J_k$ do,

$$\tilde{e}_k^{lj}(t) = \frac{\tilde{\pi}_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{g}_k^j | \tilde{\mu}_k^l(t), \tilde{\Sigma}_k^l(t))}{\sum_{l=1}^{L_k(t)} \tilde{\pi}_k^l(t) \mathcal{N}(\tilde{g}_k^j | \tilde{\mu}_k^l(t), \tilde{\Sigma}_k^l(t))}$$

end for j ;

根据 $\tilde{\mathcal{E}}_k(t) = \{\tilde{e}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}$, 采样得到

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(t) = \{\tilde{e}_k^j(t)\}_{j=1}^{J_k}.$$

for $j = 1, \dots, J_k$ do, $\tau \sim \text{Mult}_{L_k(t)}(1, \tilde{e}_k^j(t))$,

$$\text{其中, } \tilde{e}_k^j(t) = [\tilde{e}_k^{1j}(t), \dots, \tilde{e}_k^{L_k(t)j}(t)]^T.$$

令 $\tilde{e}_k^j(t) = \underbrace{[0, \dots, 1, 0, \dots, 0]}_{L_k(t)}^{\tau^{\text{th}}}$; end for j ;

更新步. 根据 $\tilde{\mathcal{E}}_k(t)$ 和 $\tilde{\mathcal{G}}_k$, 更新混合模型的权重、均值和协方差.

$$\hat{\pi}_k^l(t) = \frac{1}{J_k} \sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t), \quad \hat{\mu}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t) \tilde{g}_k^j}{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)}$$

$$\hat{\Sigma}_k^l(t) = \frac{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t) (\tilde{g}_k^j - \hat{\mu}_k^l(t)) (\tilde{g}_k^j - \hat{\mu}_k^l(t))^T}{\sum_{j=1}^{J_k} \tilde{e}_k^{lj}(t)}$$

元素管理步. 详细算法见算法 2.

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_k(t) &= \{\hat{\pi}_k^l(t), \hat{\mu}_k^l(t), \hat{\Sigma}_k^l(t)\}_{l=1}^{L_k(t)} \xrightarrow{\text{Prune, Merge, Split}} \\ \psi_k(t+1) &= \{\pi_k^l(t+1), \mu_k^l(t+1), \Sigma_k^l(t+1)\}_{l=1}^{L_k(t+1)} \\ \text{令 } t &= t+1. \text{ end for } l; \text{ end for } t;\end{aligned}$$

输出. 估计的参数集合 $\hat{\psi}_k = \psi_k(t+1)$.

3 仿真实验

3.1 仿真场景设置

考虑一个杂波环境下的 2 维群目标运动场景. 设在所监控的时间段内, 群目标个数及群内个体目标个数均未知且随时间变化. 监控区域范围为 $[-1000, 1000] \times [-1000, 1000] \text{ m}^2$. 监控时间长度 $T = 45 \text{ s}$, 传感器采样间隔 $\Delta t = 1 \text{ s}$. 记时刻 k 第 g 个群的质心状态为 $\mathbf{x}_k^g = [x_k^g, y_k^g, \dot{x}_k^g, \dot{y}_k^g, \ddot{x}_k^g, \ddot{y}_k^g]^T$ ($g = 1, \dots, G_k$). 根据式 (2) 可知, 群目标的质心状态演化模型与形状矩阵演化模型相独立. 设时刻 k 第 g 个群的质心状态转移概率密度为

$$f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k^g | \mathbf{g}_{k-1}^g) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^g | \Phi_{k|k-1}^g \mathbf{x}_{k-1}^g, \Delta_{k|k-1}^g) \quad (15)$$

其中, $\Phi_{k|k-1}^g$ 为质心状态转移矩阵, $\Delta_{k|k-1}^g$ 为质心状态转移协方差阵. 假设过程噪声 ω_k^g 为独立同分布的零均值高斯白噪声, 协方差阵为 $Q_{k|k-1}^g$, 则 $\Phi_{k|k-1}^g$, $\Delta_{k|k-1}^g$ 及 $Q_{k|k-1}^g$ 满足关系^[7]

$$\begin{aligned}\Phi_{k|k-1}^g &= F_{k|k-1}^g \otimes I_2, \Delta_{k|k-1}^g = D_{k|k-1}^g \otimes X_{k-1}^g \\ Q_{k|k-1}^g &= D_{k|k-1}^g \otimes I_2, I_2 = \text{diag}\{1, 1\}\end{aligned} \quad (16)$$

其中, \otimes 表示 Kronecker 乘积, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵. 注意到在式 (16) 中, 群质心状态转移协方差阵 $\Delta_{k|k-1}^g$ 正比于群的形状矩阵 X_{k-1}^g . 它说明群的形状越大, 群的运动不确定性也越大, 群的行为越难以预测. 令群质心状态演化过程满足匀加速模型^[20], 则

$$\begin{aligned}F_{k|k-1}^g &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ & 1 & \Delta t \\ & & 1 \end{bmatrix} \\ D_{k|k-1}^g &= \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中, σ_w 为过程噪声 ω_k^g 的标准差, 本仿真中令 $\sigma_w = 0.05 \text{ m/s}^2$. 其他的模型, 例如 Singer 模型、当前统计模型等^[20] 也可用于描述群质心状态的演化过程.

时刻 k 第 g 个群的形状矩阵 X_k^g 的转移概率密

度可建模为^[4]

$$f_{k|k-1}(X_k^g | X_{k-1}^g) = \mathcal{W}(X_k^g | \delta_{k|k-1}, \frac{X_{k-1}^g}{\delta_{k|k-1}}) \quad (17)$$

上式中, $\delta_{k|k-1} = \delta e^{-\Delta t/\tau}$, 其中 δ 和 τ 为形状演化参数, 本仿真中令 $\delta = 50$, $\tau = 5$.

群内个体目标的真实航迹可根据 Leader-follower 模型^[2] 或 Cucker-smale flocking 模型^[21] 等仿真生成. 由于篇幅限制, 此处不再详述. 群形状的真实拟合椭圆可由该群内所有个体目标的实际位置拟合得到.

令传感器位于 $[0, 0]^T$ 点, 它可获得群目标的距离和角度测量, $\mathbf{z}_k = [r_k, \theta_k]^T$. 假设传感器测量噪声 \mathbf{v}_k 为独立同分布的零均值高斯白噪声. 下面采用传感器分辨率模型^[3] 模拟部分可分辨时的群目标测量.

若时刻 k 第 i 个和第 j 个个体目标分别位于极坐标系下的 $[r_k^i, \theta_k^i]^T$ 和 $[r_k^j, \theta_k^j]^T$ 点, 则它们不可分辨的概率 P_u 满足

$$P_u(\Delta r_k^{ij}, \Delta \theta_k^{ij}) = e^{-(\frac{\Delta r_k^{ij}}{\sqrt{2}\lambda_r})^2} e^{-(\frac{\Delta \theta_k^{ij}}{\sqrt{2}\lambda_\theta})^2} \quad (18)$$

其中, $\Delta r_k^{ij} = r_k^i - r_k^j$, $\Delta \theta_k^{ij} = \theta_k^i - \theta_k^j$. λ_r 和 λ_θ 分别为传感器距离和角度分辨率. 本仿真中令 $\lambda_r = 10 \text{ m}$, $\lambda_\theta = 0.02 \text{ rad}$.

当个体目标未发生分辨率冲突时, 测量噪声协方差为 $R_k = \text{diag}\{\sigma_r^2, \sigma_\theta^2\}$, 其中 σ_r 和 σ_θ 分别为距离和角度测量标准差. 本仿真中令 $\sigma_r = 5 \text{ m}$, $\sigma_\theta = 0.005 \text{ rad}$.

如果 n_k^u 个个体目标发生分辨率冲突, 则它们可用位于其质心位置的不可分辨的单个目标取代

$$r_k^u = \frac{1}{n_k^u} \sum_{i \in \mathcal{P}_k} r_k^i, \theta_k^u = \frac{1}{n_k^u} \sum_{i \in \mathcal{P}_k} \theta_k^i \quad (19)$$

其中, $[r_k^u, \theta_k^u]^T$ 表示该不可分辨的个体目标位置, \mathcal{P}_k 表示这 n_k^u 个发生分辨率冲突的个体目标集合. 此时该不可分辨的个体目标的测量噪声标准差变为

$$\sigma_{r,k}^u = \min(n_k^u \sigma_r, \lambda_r), \sigma_{\theta,k}^u = \min(n_k^u \sigma_\theta, \lambda_\theta) \quad (20)$$

尽管如此, 观测者无法区分第 m 个测量 \mathbf{z}_k^m 由可分辨的还是不可分辨的个体目标产生. 即使已知 \mathbf{z}_k^m 源于不可分辨的个体目标, 由于相应的不可分辨的个体目标数 n_k^u 未知, 因此该测量的方差仍未知. 对此, 文献 [3] 通过多假设法来判断测量源及相应的测量方差, 以获取部分可分辨条件下的测量似然函数. 但该方法仅适用于个体目标数较少 (文献 [3] 中仅为 2 个) 且已知的情况, 并且计算复杂, 因此它不适用于本文场景.

综上所述, 为了给出第 1.3.1 节中部分可分辨的群目标测量似然函数 $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g)$ 的具体形式, 需要做如下近似:

步骤 1. 设群目标的反射点 (此处指可分辨的或不可分辨的个体目标) 在笛卡尔坐标系下的位置 $\mathbf{p}_k^g = [p_{x,k}^g, p_{y,k}^g]^T$ 满足以群质心位置 $H_k \mathbf{x}_k^g$ 为中心, 以群形状矩阵 X_k^g 为方差的正态分布. $\mathbf{p}_k^g \sim \mathcal{N}(\cdot | H_k \mathbf{x}_k^g, X_k^g)$, 其中 H_k 为系数矩阵

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

步骤 2. 记 R_k^e 为等效测量噪声协方差阵, $R_k^e = \text{diag}\{(\kappa_r \sigma_r)^2, (\kappa_\theta \sigma_\theta)^2\}$, 其中参数 κ_r, κ_θ 分别满足 $1 \leq \kappa_r \leq \lambda_r / \sigma_r, 1 \leq \kappa_\theta \leq \lambda_\theta / \sigma_\theta$. R_k^e 用于折中可分辨的和不可分辨的测量噪声协方差. 根据经验, 在本仿真中令 $\kappa_r = 1.5, \kappa_\theta = 2$.

最终, $f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g)$ 可近似建模如下

$$f_{k|k}(\mathbf{z}_k^m | \mathbf{g}_k^g) \approx \int \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^m | h_k(\mathbf{p}_k^g), R_k^e) \mathcal{N}(\mathbf{p}_k^g | H_k \mathbf{x}_k^g, X_k^g) d\mathbf{p}_k^g \quad (22)$$

其中, $h_k(\cdot)$ 为传感器测量模型

$$h_k(\mathbf{p}_k^g) = \begin{bmatrix} \sqrt{(p_{x,k}^g)^2 + (p_{y,k}^g)^2} \\ \arctan(\frac{p_{y,k}^g}{p_{x,k}^g}) \end{bmatrix} \quad (23)$$

由式 (23) 可知传感器测量模型 $h_k(\cdot)$ 非线性, 故似然函数式 (22) 没有解析的表达形式. 因此, 在建议的群目标 SMC-PHDF 的粒子更新步, 需要采用 Monte Carlo 方法^[15] 近似计算每个粒子的似然概率, 由于篇幅限制此处不再详述.

假设杂波为泊松点过程, 强度为 $\kappa_k(\mathbf{z}_k) = \lambda c(\mathbf{z}_k)$. 本文仿真中令 $\lambda = 100$, 它表示平均每个时刻监控区域内有 100 个杂波点. 令 $c(\mathbf{z}_k) = \mathcal{U}(\mathbf{z}_k)$, 它表示杂波在监控区域内满足均匀分布.

设单个群内的个体目标数为 8~14 个, 在本仿真所给定的分辨率条件下, 单个群在每个时刻只能产生 4~6 个传感器测量. 显然在这种条件下很难对群内的所有个体分别进行跟踪, 故本文只关注于群的整体行为.

既然将每个群目标视为一个整体单元, 那么传感器对群目标的检测概率可定义为单个群目标在每个时刻至少产生一个传感器测量的概率. 因此, 根据上述定义, 在部分可分辨的群目标跟踪问题中, 尽管传感器对于群内个体目标的检测概率较低, 但它对于群的整体检测概率通常较高. 本仿真中令传感器对群目标的检测概率为 $p_{D,k}(\mathbf{g}_k) = 0.95$.

群目标质心的真实航迹和每个时刻群的真实形状如图 1 所示. 在图 1 中, 群 1 (Group 1) 产生于第 1 秒, 消亡于第 25 秒; 群 2 (Group 2) 产生于第 1 秒, 在第 18 秒左右与群 1 相交, 在第 30 秒时并入群 3 (Group 3); 群 3 在第 10 秒时从群 1 中分裂产生, 在第 30 秒时与群 2 相合并, 在第 35 秒时消亡; 群 4 (Group 4) 产生于第 20 秒, 消亡于第 45 秒.

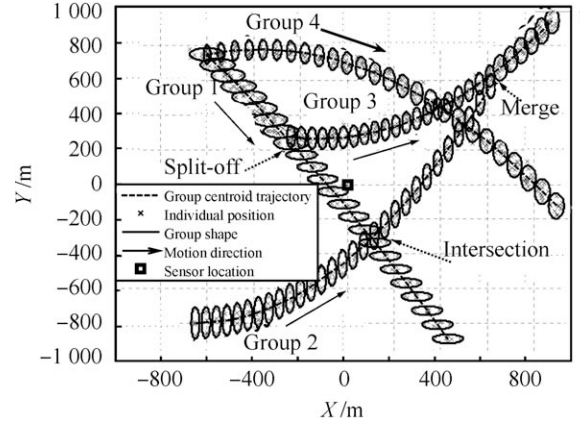


图 1 群目标质心的真实航迹和形状

Fig. 1 True centroid trajectories and shapes of groups

3.2 群目标 SMC-PHDF 以及 EM 和 MCMC 状态提取算法的性能分析

在群目标 PHDF 中, 时刻 k 群目标出生强度为

$$\gamma_k(\mathbf{g}_k) = \gamma_k(\mathbf{x}_k) \gamma_k(X_k) \quad (24)$$

其中, $\gamma_k(\mathbf{x}_k)$ 和 $\gamma_k(X_k)$ 分别为群质心状态和形状矩阵出生强度. 在本仿真中两者分别建模为

$$\begin{cases} \gamma_k(\mathbf{x}_k) = 0.5 \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \boldsymbol{\mu}_\gamma^1, \Sigma_\gamma^1) + 0.5 \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \boldsymbol{\mu}_\gamma^2, \Sigma_\gamma^2) \\ \gamma_k(X_k) = 0.1 \mathcal{W}(X_k | \delta_\gamma, \frac{X_\gamma}{\delta_\gamma}) \end{cases} \quad (25)$$

相应的参数为 $\boldsymbol{\mu}_\gamma^1 = [-600, 750, 0, 0, 0, 0]^T$, $\boldsymbol{\mu}_\gamma^2 = [-650, -800, 0, 0, 0, 0]^T$, $\Sigma_\gamma^1 = \Sigma_\gamma^2 = \text{diag}\{900, 900, 2500, 2500, 25, 25\}$, $\delta_\gamma = 20$, $X_\gamma = \text{diag}\{400, 400\}$.

时刻 k 群目标它生 (分裂) 强度为

$$\beta_{k|k-1}(\mathbf{g}_k | \mathbf{g}_{k-1}) = \beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{g}_{k-1}) \beta_{k|k-1}(X_k | X_{k-1}) \quad (26)$$

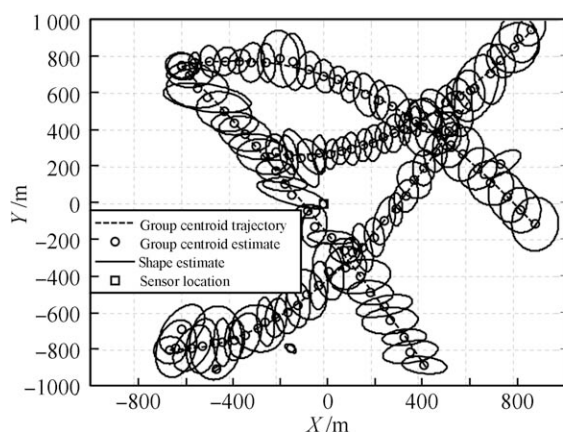
其中, $\beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{g}_{k-1})$ 和 $\beta_{k|k-1}(X_k | X_{k-1})$ 分别为群质心状态和形状矩阵它生强度. 在本仿真中两者分别建模为

$$\begin{cases} \beta_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{g}_{k-1}) = 0.25 \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, X_{k-1}) \\ \beta_{k|k-1}(X_k | X_{k-1}) = 0.25 \mathcal{W}(X_k | \delta_\beta, \frac{X_{k-1}}{\delta_\beta}) \end{cases} \quad (27)$$

其中, 参数 $\delta_\beta = 25$.

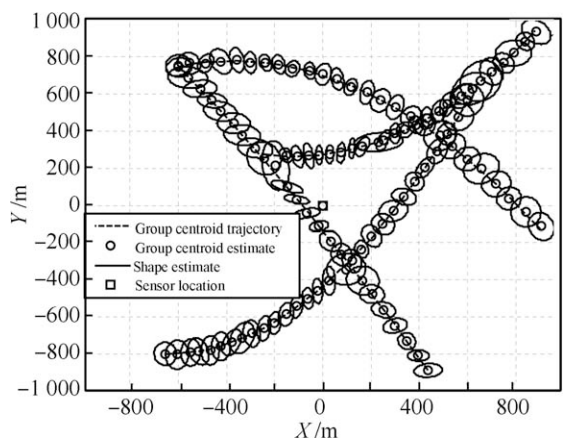
在本文建议的群目标 SMC-PHDF 中, 每个群平均采用 1000 个粒子点进行跟踪. EM 算法和 MCMC 算法分别被用于从群目标 SMC-PHDF 的重采样后的粒子点中提取群的个数和状态. 令元素删除门限为 $\eta_T = 0.01$, 合并门限为 $\eta_M = 5$, 分裂门限为 $\eta_S = 20$. 在 EM 算法中, 时刻 k 混合模型的初始元素个数设为 $L_k(0) = 15$, 收敛门限为 $\varepsilon = 10^{-5}$. 在 MCMC 算法中, 设 $L_k(0) = 4$, Gibbs 采样器的迭代次数设为 $t_m = 25$. 分别进行 100 次 MC 仿真实验.

图 2 展示了其中一次仿真实验得到的群的质心位置及形状估计. 由图 2(a) 和图 2(b) 可以看出, 当群相距较远时, 两算法的群质心位置估计和形状估计



(a) 由 EM 算法提取的群质心位置及形状估计

(a) Estimates of group centroid positions and shapes extracted by EM



(b) 由 MCMC 算法提取的群质心位置及形状估计

(b) Estimates of group centroid positions and shapes extracted by MCMC

图 2 群质心位置及形状估计 (单次实验)

Fig. 2 Estimates of group centroid positions and shapes in one trial for group SMC-PHDF

接近于真实值. 然而, 当群正在分裂、合并和交叉时, 由于群相距太近甚至重叠, 故这时两算法均不能正确估计出群目标的个数、质心位置和形状. 这一现象与传统的用于多个个体目标跟踪的 PHDF 不同. 这是由于在群目标 SMC-PHDF 中, 群目标个数由元素管理技术获得, 而在传统的个体目标 SMC-PHDF 中, 个体目标个数可直接由 PHD 积分得到.

尽管如此, 通过比较图 2(a) 与图 2(b), 我们可以清楚地看到 MCMC 算法相比于 EM 算法能够更好地提取群目标的个数、质心位置及形状. 尤其在群相距较近时, 前者明显优于后者. 原因是 MCMC 算法相比 EM 算法更适于拟合复杂的分布.

图 3 展示了经 100 次 MC 仿真实验平均后得到的群目标个数估计随时间变化曲线. 由图 3 可见, 当群相距较远时, 两算法的群目标个数估计接近真实值. 但是在群出现交叉、分裂和合并时, 两算法的群目标个数估计会出现偏差. 由图 3 还可进一步看出, 由于 MCMC 算法在拟合较复杂的分布时通常比 EM 算法更加有效, 因而它的群目标个数估计要优于 EM 算法. 尤其在群相距较近时, MCMC 算法比 EM 算法更容易分辨出群的个数.

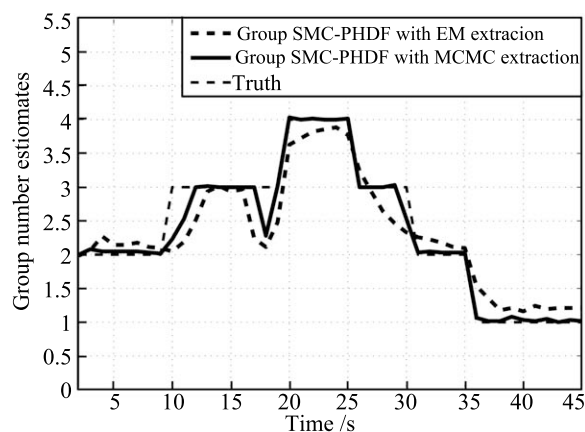


图 3 群目标的个数估计随时间变化曲线 (经 100 次 MC 平均)

Fig. 3 100 MC run average of group number estimates for both methods vs. time

下面通过 Wasserstein 距离 (Wasserstein distance, WD)^[8] 和椭圆位置误差概率 (Circular position error probability, CPEP)^[9] 来定量地分析两算法的估计误差.

由群的椭圆形状矩阵 X_k 可得, 该椭圆的轴为 $d_k = [d_k^{\text{maj}}, d_k^{\text{min}}]^T$, 方向角为 φ_k . 其中, d_k^{maj} , d_k^{min} 分别为椭圆的长轴和短轴; 方向角定义为椭圆长轴与坐标 X 方向之间的夹角 ($0^\circ \leq \varphi_k \leq 90^\circ$). 则给定实际的和估计的群目标状态集合 \mathcal{G}_k 和 $\hat{\mathcal{G}}_k$, 可得

时刻 k 群的质心状态估计以及形状估计的轴和方向角的 WD 为

$$\begin{cases} D_k^{\mathbf{x}}(\hat{\mathcal{G}}_k, \mathcal{G}_k) = \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} \|\hat{\mathbf{x}}_k^i - \mathbf{x}_k^j\|_2^2} \\ D_k^{\mathbf{d}}(\hat{\mathcal{G}}_k, \mathcal{G}_k) = \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} \|\hat{\mathbf{d}}_k^i - \mathbf{d}_k^j\|_2^2} \\ D_k^{\varphi}(\hat{\mathcal{G}}_k, \mathcal{G}_k) = \min_{C_k} \sqrt{\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} \sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} \|\hat{\varphi}_k^i - \varphi_k^j\|_2^2} \end{cases} \quad (28)$$

其中, G_k 和 \hat{G}_k 分别为实际的和估计的群目标个数; 矩阵 C_k 满足 $C_k^{ij} > 0$, $\sum_{j=1}^{G_k} C_k^{ij} = 1/\hat{G}_k$, $\sum_{i=1}^{\hat{G}_k} C_k^{ij} = 1/G_k$; $\|\cdot\|_2$ 表示 2 范数; WD 惩罚目标个数估计错误时的结果。

图 4~6 分别展示了经 100 次 MC 仿真实验平均后得到的群目标质心位置估计以及形状估计的轴和方向角的 WD。

在图 4~6 中, 虽然两者的 WD 在群目标个数估计错误的时刻均出现峰值, 但在整个监控时间内, 可以看到由 MCMC 算法提取的群质心位置和形状矩阵的 WD 明显小于由 EM 算法提取的结果。这是由于: 1) MCMC 算法的群目标个数估计优于 EM 算法; 2) MCMC 算法对较复杂的分布拟合效果更好, 因此它在抽取群的状态时, 抗杂波干扰的能力强于 EM 算法, 所得到的群质心位置和形状估计相对更精确。此外, 正如图 6 所示, 两算法群目标形状的方向角 φ_k 的估计精度都不高, MCMC 算法的估计误差为 20° 左右, EM 算法更差, 为 30° 左右。这可能是由于每个群所产生的测量个数较少, 以至于不能充分反映出群目标形状的方向角。

时刻 k 群目标的 CPEP 定义为

$$\text{CPEP}_k(r) = \frac{1}{G_k} \sum_{\mathbf{x}_k \in \mathcal{G}_k} \text{Prob}\{\|H_k \hat{\mathbf{x}}_k - H_k \mathbf{x}_k\|_2 > r, \forall \hat{\mathbf{x}}_k \in \hat{\mathcal{G}}_k\} \quad (29)$$

其中, r 为椭圆半径, $H_k \mathbf{x}_k$, $H_k \hat{\mathbf{x}}_k$ 分别表示笛卡尔坐标系下真实目标和估计目标的位置向量。本仿真中选择半径 $r = 25$ m。

图 7 展示了经 100 次 MC 仿真实验平均后得到的群目标质心位置估计的 CPEP。

CPEP 反映了目标估计丢失的概率。CPEP 越小说明目标估计丢失的概率越小。由图 7 可清楚地看出, 当群目标分裂、交叉和合并时, MCMC 算法和 EM 算法的 CPEP 都较大, 说明在这些时刻两者均容易丢失群目标估计。然而, 正如图 7 所示, 在整

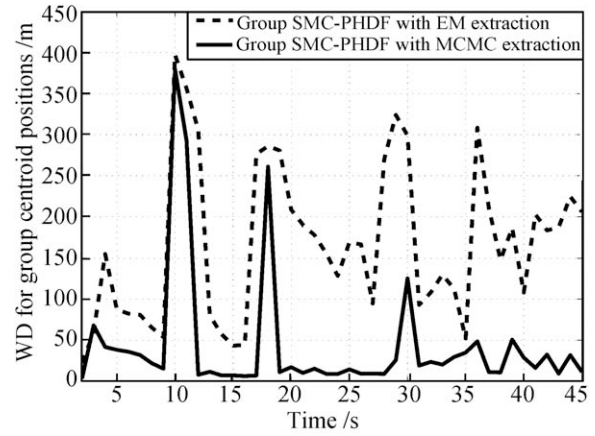


图 4 群目标质心位置估计的 WD (经 100 次 MC 平均)
Fig. 4 100 MC run average of WD for estimates of group centroid positions vs. time

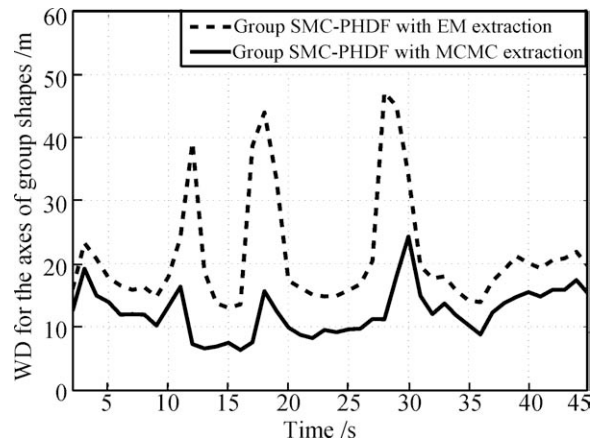


图 5 群目标形状估计的轴的 WD (经 100 次 MC 平均)
Fig. 5 100 MC run average of WD for estimates of major and minor axes of group shapes vs. time

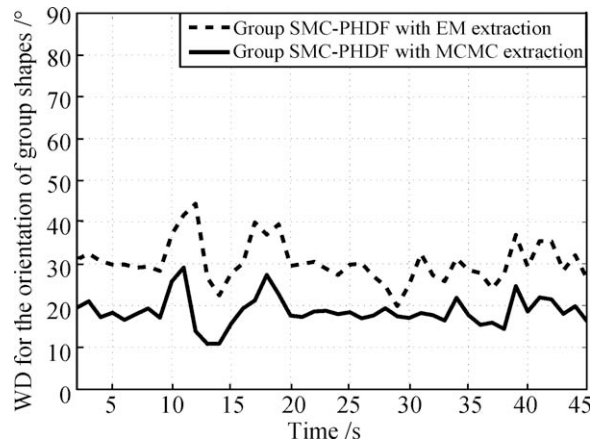


图 6 群目标形状估计的方向角的 WD (经 100 次 MC 平均)
Fig. 6 100 MC run average of WD for estimates of orientations of group shapes vs. time

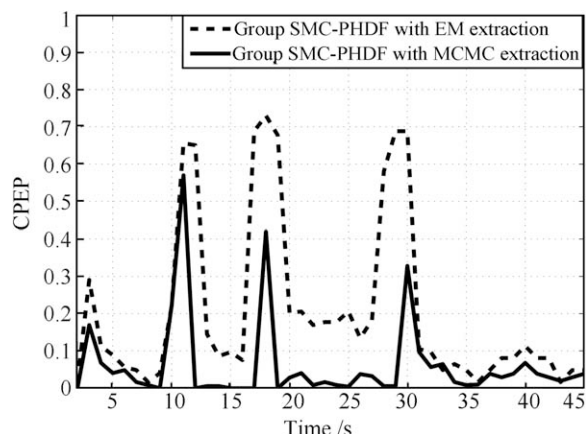


图7 群目标质心位置估计的 CPEP (经 100 次 MC 平均)
Fig.7 100 MC run average of CPEP for estimates of group centroid positions vs. time

个监控时间内, MCMC 算法的 CPEP 均明显小于 EM 算法, 这说明了 MCMC 算法相对于 EM 算法能够更精确地提取群目标的个数和状态。

我们采用平均每步所耗费的 CPU 时间比较 EM 算法和 MCMC 算法在提取群目标个数和状态时的计算量大小。用于测试算法的 PC 机的 CPU 为 1.83 GHz AMD Athlon (tm) XP 2500+, RAM 为 512 MB。通过 100 次 MC 仿真, 可得 EM 算法平均耗时 1.79 秒/步; MCMC 算法平均耗时 6.63 秒/步。显然 MCMC 算法比 EM 算法需要耗费更多的计算时间。因此, 尽管在群相距较近时 MCMC 算法相比 EM 算法能够更好地估计群的个数、质心状态和形状信息, 但 MCMC 算法的计算量要大于 EM 算法。

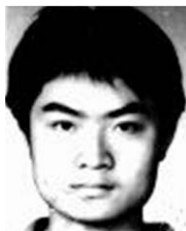
4 结论

本文针对杂波环境下部分可分辨的群目标跟踪问题, 提出了一种基于 SMC-PHDF 的群目标跟踪算法。该算法利用 GMM 拟合重采样后的粒子分布, 通过估计混合模型参数可直接获得群的个数、质心状态和形状估计。其中, EM 算法和 MCMC 算法分别被用于估计混合模型的参数。混合模型的元素个数可通过删除、合并及分裂算法获得。仿真实验表明, 本算法在群内个体目标部分可分辨时可有效跟踪群目标。尤其在群相距较近时, 用 MCMC 算法提取群目标个数和状态相对于用 EM 算法效果更好。

References

- 1 Waxmann M J, Drummond O E. A bibliography of cluster (group) tracking. In: Proceedings of the International Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. Orlando, USA: SPIE, 2004. 551–560
- 2 Salmond D J, Gordon N J. Group and extended object tracking. In: Proceedings of IEE Colloquium on Target Tracking. London, UK: IEE, 1999. 1611–1614
- 3 Koch W, van Keuk G. Multiple hypothesis track maintenance with possibly unresolved measurements. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, **33**(3): 883–892
- 4 Koch W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, **44**(3): 1042–1059
- 5 Mahler R. *Statistical Multisource Multitarget Information Fusion*. Norwood: Artech House, 2007
- 6 Mahler R. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4): 1152–1178
- 7 Mahler R. PHD filters of higher order in target number. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1523–1543
- 8 Vo B N, Singh S, Doucet A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, **41**(4): 1224–1245
- 9 Vo B N, Ma W K. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **51**(11): 4091–4104
- 10 Mahler R. Detecting, tracking, and classifying group targets: a unified approach. In: Proceedings of the International Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. Orlando, USA: SPIE, 2001. 217–228
- 11 Maggio E, Taj M, Cavallaro A. Efficient multitarget visual tracking using random finite sets. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2008, **18**(8): 1016–1027
- 12 Clark D, Ruiz I, Petillot Y, Bell J. Particle PHD filter multiple target tracking in sonar image. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(1): 409–416
- 13 Clark D, Godsill S. Group target tracking with the Gaussian mixture probability hypothesis density filter. In: Proceedings of the International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing. Melbourne, AU: IEEE, 2007. 149–154
- 14 McLachlan G J, Peel D. *Finite Mixture Models*. New York: Wiley, 2000
- 15 Robert C P, Casella G. *Monte Carlo Statistical Methods*. New York: Springer-Verlag, 1999

- 16 Vermaak J, Ikoma N, Godsill S J. Sequential Monte Carlo framework for extended object tracking. *IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation*, 2005, **152**(5): 353–363
- 17 Clark D, Bell J. Multi-target state estimation and track continuity for the particle PHD filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1441–1453
- 18 Liu W F, Han C Z, Lian F. A clustering algorithm for multi-target state extraction based on probability hypotheses density. In: *Proceedings of the International Colloquium on Information Fusion*. Xi'an, China: ICIF, 2007. 22–25
- 19 Oh S, Russell S, Sastry S. Markov chain Monte Carlo data association for multi-target tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(3): 481–497
- 20 Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking, part I: dynamic models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4): 1333–1364
- 21 Cucker F, Smale S. Emergent behavior in flocks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(5): 852–862



连 峰 西安交通大学综合自动化研究所讲师. 主要研究方向为信息融合与目标跟踪. 本文通信作者.

E-mail: lianfeng1981@gmail.com

(**LIAN Feng** Lecturer at the Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest

covers information fusion and target tracking. Corresponding author of this paper.)



韩崇昭 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授. 主要研究方向为多源信息融合, 随机控制与自适应控制, 非线性频谱分析.

E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn

(**HAN Chong-Zhao** Professor, Ph.D. in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers multisource information fusion, stochastic control and adaptive control, and nonlinear spectral analysis.)



刘伟峰 杭州电子科技大学自动化学院讲师. 主要研究方向为信息融合与目标跟踪.

E-mail: dashan000.liu@gmail.com

(**LIU Wei-Feng** Lecturer at the School of Automation, Hangzhou Dianzi University. His research interest covers information fusion and target tracking.)



元向辉 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系讲师. 主要研究方向为信息融合与目标跟踪.

E-mail: xhyuan@mail.xjtu.edu.cn

(**YUAN Xiang-Hui** Lecturer in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University. His research interest covers

information fusion and target tracking.)