

EM 算法多模型时延多率 FIR 模型参数辨识

李论^{1,3,4}, 陈晶^{1,2}, 荣英姣²

(1. 江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122; 2. 近地面探测技术国家重点实验室, 无锡 214028; 3. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190; 4. 中国科学院大学, 北京 100049)



摘 要: 以多速率系统(MR)为对象, 使用多模型方法对带有不确定随机时延的系统参数辨识问题进行研究。其中, 局部模型假设为有限脉冲响应(FIR)结构, 在每一采样点所出现的未知时延均不是固定的。为了解决这种辨识问题, 基于期望最大(EM)算法的框架, 给出了辨识该问题的算法。最后, 给出仿真例子验证上述方法的有效性。仿真结果表明该算法有较好的辨识精度和较快的收敛速度。

关键词: 多速率系统; 系统辨识; EM 算法; 随机时延; 多模型方法

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Multiple-model Based EM Algorithm for Multirate FIR Model with Varying Time-delay

LI Lun^{1,3,4}, CHEN Jing^{1,2}, RONG Ying-jiao²

(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Science and Technology on Near-surface Detection Laboratory, Wuxi 214000, China; 3. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 4. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Based on multiple-model approach, the identification problem of multirate system (MR) with uncertain random time-delay is concerned. The local models are assumed to have a finite impulse response (FIR) structure, and the unknown delay at each sampling point is not fixed. In order to handle this identification problem, the mathematical formulation of the algorithm to solve this problem is given, which is based on expectation-maximization (EM) algorithm. The simulation example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: Multirate systems; system identification; EM algorithm; random delays; multiple-model approach

1 引 言

多速率(Multi-Rate, MR)系统由于输入和输出存在多个采样频率, 因而广泛应用于生工与化工反应过程观测数据的建模中。例如, Gudi^[1]等通过使用扩展卡尔曼滤波器的多速率公式, 针对生物反应器的多速率采样过程, 对它的状态与参数进行估计。Tatiraju等^[2]提出了一种多速率非线性状态观测器设计方法, 该方法可直接在观测器设计中直接使用非线性过程模型, 无需线性近似, 并被用于苯乙烯自由基溶液聚合反应的聚合反应器的建模分析。

针对MR系统的有效辨识与控制问题, 近年来国内外学者进行了许多研究。Raghavan等^[3]将期望最大(EM)算法与卡尔曼滤波结合, 用来在不规则采

样输出下研究MR的状态空间模型辨识。Xie等^[4]考虑未知的时延对系统辨识的影响, 通过使用EM方法, 对带有未知时延和不规则输出样本的MR系统进行了研究, 给出了解决这种辨识问题的有效方法; 郁洋等^[5]对多速率系统慢采样输出控制系统进行了研究, 并给出了其多变量预测控制策略。

在工业过程中, 多模型方法常被用来处理变参数的线性系统或者非线性系统。其基本的思想是将系统在所选取的工作点进行局部线性化处理, 在每个工作点的附近构建局部的线性化模型; 然后用权重值将所辨识的局部线性模型组合, 进而对原系统进行逼近。使用多模型方法进行系统辨识, 这几年已

收稿日期: 2018-05-21; 修回日期: 2018-09-11

基金项目: 国家自然科学基金(61403165, 61973137), 近地面探测技术国家实验室基金(TCGZ2019A001); 中央高校基本科研业务费专项资金(JUSRP22016)

作者简介: 李论(1995-), 男, 河南郑州人, 研究生, 主要研究方向为应用统计、机器学习等; 陈晶(1981-), 男, 江苏泰州人, 博士, 副教授, 主要从事控制理论与控制工程等方面的教学与科研工作(本文通讯作者); 荣英姣(1979-), 女, 江苏无锡人, 硕士, 高级工程师, 主要从事模式识别与机器学习算法等方面的研究工作。

经取得很大的进展。一方面,基于EM框架,Jin等^[6]使用多模型LPV方法对非线性过程进行辨识;Yang等^[7]对带有时延的多模型线性系统问题进行研究;Xiong等^[8]对带有时延和缺失数据的情况给出了辨识方法;陈磊^[9]对工业过程中和非线性系统中的多模型辨识问题进行了一系列研究。通过使用广义EM算法,Yang等^[13]对带有时延的LPV模型的鲁棒辨识进行了研究。此外,Lu等^[15]还对满足混合t-分布的情况进行了研究。另一方面,基于变分贝叶斯(VB)方法,Lu等^[16]对ARX多模型问题进行了鲁棒辨识,Chen等^[17]对带有时延的冗余模型进行了讨论。

本文针对MR系统,使用多模型方法对带有时延的问题进行研究。其中,时延假设为变化的,即在每一个采样点都有不确定的随机时延,而现有的一些工作(如文献[6~8])对每一阶段的时延假设为固定的,相比之下对变化时延进行研究有更好的前景;此外,局部模型将选用有限脉冲响应(FIR)结构。对不同的局部模型,选取对应的工作点以及每个工作点的有效宽度,并设置调度变量对工作点进行检测。最后,通过算法的迭代,辨识出模型参数、方差以及工作点的有效宽度。

2 问题陈述

考虑下列的FIR模型:

$$x_k = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_f} z^{-n_f}) u_k \quad (1)$$

$$y_t = x_{t-\tau_t} + e_t \quad (2)$$

式中, $\{u_k, k=1,2,\dots,L\}$ 为系统输入; $\{x_k\}$ 为不可测的无噪声输出; $\{y_t, t=1,2,\dots,N\}$ 为不规则的取样输出,且此时刻的时延为 τ_t ; e_t 为相关的噪声,且服从未知的高斯分布 $N(0, \sigma_e^2)$ 。为了简化问题,假设模型的阶数 n_f 是已知的。时延 τ_t 是一个随机的整数,且服从 $[\alpha, \beta]$ 间的均匀分布。在本文中,假设其概率为:

$$p(\tau_t = d) = \frac{1}{\beta - \alpha + 1}, \quad d = \alpha, \dots, \beta \quad (3)$$

假设一共考虑 M 个局部模型,并将模型整理为下面的形式:

$$y_t = \phi_{\tau_t}^T(t) \theta_m + e_t \quad (4)$$

式中,

$$\phi_{\tau_t} = [u_{t-\tau_t}, u_{t-\tau_t-1}, \dots, u_{t-\tau_t-n_f}]^T \quad (5)$$

$$\theta_m = [a_0, a_1, \dots, a_{n_f}]^T \quad (6)$$

全局模型可以由局部模型得到:

$$\hat{y}_t = \sum_{m=1}^M \mu_m \phi_{\tau_t}^T(t) \hat{\theta}_m \quad (7)$$

式中, μ_m 为相应的权重。

在这里,采用高斯化权重函数作为权值:

$$\mu_m = \frac{\exp(-\frac{(H_t - H_m)^2}{2(o_m)^2})}{\sum_{m=1}^M \exp(-\frac{(H_t - H_m)^2}{2(o_m)^2})} \quad (8)$$

式中, H_t 为可测的工作点变量,表示过程的操作模式, $\{H_m\}_{m=1,\dots,M}$ 为预先选取好的工作点, $\{o_m\}_{m=1,\dots,M}$ 为局部模型的有效宽度,在 $[o_{\min}, o_{\max}]$ 范围内取值。第 m 个模型的有效宽度,表示局部模型沿着操作轨线的有效范围。一个大的 o_m 表示第 m 个模型在操作域内有一个大的有效范围,这使得相邻局部模型间有大的间隔。

因此,该模型要辨识的未知参数是 $\Theta = \{\theta_m, o_m^2, \sigma^2\}_{m=1,\dots,M}$, 时延 $\tau = \{\tau_t\}_{t=1,\dots,N}$, 已知的数据有输出 $Y = \{y_t\}_{t=1,\dots,N}$, 输入 $U = \{u_t\}_{t=1,\dots,N}$, 以及调度变量的数据 $H = \{H_t\}_{t=1,\dots,N}$ 。

3 EM 算法框架

EM算法是一种常用的迭代优化算法。在很多情况下,我们无法得到完全的数据集,因此,传统的极大似然算法难以处理这种问题。然而在EM算法中,通过引入合适的隐变量,并极大化完全数据的似然函数的条件期望,我们便可以得到参数的极大似然估计。这样极大简化了参数的辨识问题。

在EM算法中,迭代过程分为 E -步和 M -步。把缺失数据集记为 C_{mis} , 观测到的数据集记为 C_{obs} 。给未知参数 Θ 赋初值,那么对参数 Θ 的估计可总结如下:

1. E -步: 计算完全数据对数似然函数关于 C_{mis} 的条件期望 (Q -函数), 其中 C_{obs} 和先前的未知参数估计值 Θ^S 为已知条件

$$Q(\Theta | \Theta^S) = E_{C_{\text{mis}} | C_{\text{obs}}, \Theta^S} \{\log p(C_{\text{mis}}, C_{\text{obs}} | \Theta)\} \quad (9)$$

2. M -步: 通过极大化 Q -函数, 更新参数估计值为 Θ^{S+1} :

$$\Theta^{S+1} = \arg \max_{\Theta} Q(\Theta | \Theta^S) \quad (10)$$

E -步和 M -步不断迭代,直到EM算法收敛。虽然对数似然函数在每一轮迭代中不断增大,但EM算法对极大化的对数似然函数的收敛性由文献[18]保证。

4 算法推导

在EM算法里,观测数据集为 $C_{\text{obs}} = \{Y, U, H\}$, 这里引入隐变量 I_t 表示输出 y_t 的模型标识,并将 $\{I_t\}$ 记作 I 。为了对系统的时延进行处理,时延 $\tau = \{\tau_t\}_{t=1,\dots,N}$ 被当做缺失变量。那么,缺失数据集 $C_{\text{mis}} = \{I, \tau\}$ 。基于概率链原理,完全数据似然函数

可以分解成:

$$\begin{aligned} \log p(C_{\text{mis}}, C_{\text{obs}} | \Theta) &= \log p(Y, I, \tau, H, U | \Theta) = \\ &= \log p(Y | I, \tau, H, U, \Theta) + \log p(I, \tau, H, U | \Theta) = \\ &= \log p(Y | I, \tau, H, U, \Theta) + \log p(I | \tau, H, U, \Theta) + \\ &+ \log p(\tau | H, U, \Theta) + \log p(H, U | \Theta) \end{aligned} \quad (11)$$

因为假设任意一个局部模型的时延满足均匀分布, 且独立于调度变量 H 、输入数据 U 以及其它模型的参数 Θ , 所以 $\log p(\tau | H, U, \Theta)$ 在以下的推导中不会起到作用。由于 H 和 U 是整个过程中的可测数据, 且它们独立于模型的参数 Θ , 所以 $\log p(H, U | \Theta)$ 是一个常数。因此, 完全数据似然函数可以写成:

$$\log p(C_{\text{mis}}, C_{\text{obs}} | \Theta) = \log p(Y | I, \tau, H, U, \Theta) + \log p(I | \tau, H, U, \Theta) + C \quad (12)$$

式中, $C = \log p(\tau | H, U, \Theta) + \log p(H, U | \Theta)$ 。

$\log p(Y | I, \tau, H, U, \Theta)$ 可以进一步分解为:

$$\begin{aligned} \log p(Y | I, \tau, H, U, \Theta) &= \\ &= \log p(y_{N:1} | I_{N:1}, \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) = \\ &= \log p(y_N | y_{N-1:1} I_{N:1}, \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) + \\ &+ \log p(y_{N-1:1} | I_{N:1}, \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) = \\ &= \sum_{t=1}^N \log p(y_t | y_{t-1:1}, I_{N:1}, \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) \end{aligned} \quad (13)$$

由 y_t 的表达式可知, y_t 依赖于 $u_{t-1:1}$, 时延 τ , 模型标识 I_t , 以及模型参数 Θ 。把 t 时刻前的数据定义为信息向量 $Z_t = \{u_{t-1:1}\}$ 。更进一步, 给定模型标识 I_t , 只有与根据 I_t 选定的局部模型相关的局部模型参数以及 t 时刻的局部时延 τ_t 和输出 y_t 相关。也就是说输出 y_t 依赖于 τ_t 和 Θ_{I_t} 。因此, 以上的公式可以简化为:

$$\log p(Y | I, \tau, H, U, \Theta) = \sum_{t=1}^N \log p(y_t | Z_t, I_t, \tau_t, \Theta_{I_t}) \quad (14)$$

似然函数中的 $\log p(I | \tau, H, U, \Theta)$ 可以进一步分解成:

$$\begin{aligned} \log p(I | \tau, H, U, \Theta) &= \log p(I_{N:1} | \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) = \\ &= \log p(I_N | I_{N-1:1}, \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) + \\ &+ \log p(I_{N-1:1} | \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) = \\ &= \sum_{t=1}^N \log p(I_t | I_{t-1:1}, \tau, H_{N:1}, u_{N:1}, \Theta) \end{aligned} \quad (15)$$

基于式(7)和式(8), 模型标识 I_t 只依赖于测得的调度变量 H_t 以及模型参数 Θ 。因此, 以上的式子可以简化成:

$$\log p(I | \tau, H, U, \Theta) = \sum_{t=1}^N \log p(I_t | H_t, \Theta) \quad (16)$$

所以, 完全数据似然函数最终可以写成:

$$\begin{aligned} \log p(C_{\text{mis}}, C_{\text{obs}} | \Theta) &= \\ &= \sum_{t=1}^N \log p(y_t | Z_t, I_t, \tau_t, \Theta_{I_t}) + \sum_{t=1}^N \log p(I_t | H_t, \Theta) + C \end{aligned} \quad (17)$$

那么, 就可以通过计算完全数据似然函数的条件期望得到 Q -函数:

$$\begin{aligned} Q(\Theta | \Theta^S) &= E_{C_{\text{mis}} | C_{\text{obs}}, \Theta^S} \{ \log p(C_{\text{mis}}, C_{\text{obs}} | \Theta) \} = \\ &= E_{\tau_t, I_t | C_{\text{obs}}, \Theta^S} \left\{ \sum_{t=1}^N \log p(y_t | Z_{t-1}, I_t, \tau_t, \Theta_{I_t}) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{t=1}^N \log p(I_t | H_t, \Theta) + C \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

对 Q -函数做关于 $\{\tau_t\}_{t=1, \dots, N}$ 和 $\{I_t\}_{t=1, \dots, N}$ 的条件期望, 可得

$$\begin{aligned} Q(\Theta | \Theta^S) &= \sum_{t=1}^N \sum_{d=\alpha}^{\beta} p(\tau_t = d | C_{\text{obs}}, \Theta^S) \times \\ &\quad \sum_{m=1}^M p(I_t = m | C_{\text{obs}}, \tau_t = d, \Theta^S) \times \\ &\quad \log p(y_t | Z_t, I_t = m, \tau_t = d, \Theta_m) + \\ &\quad \sum_{t=1}^N \sum_{d=\alpha}^{\beta} p(\tau_t = d | C_{\text{obs}}, \Theta^S) \times \\ &\quad \sum_{m=1}^M p(I_t = m | C_{\text{obs}}, \tau_t = d, \Theta^S) \times \\ &\quad \log p(I_t = m | H_t, \Theta) + C \end{aligned} \quad (19)$$

为了计算 Q -函数, 应该首先计算上式中的未知概率。 $\{\tau_t\}_{t=1, \dots, N}$ 在设定的范围内取值, 并计算其先验概率可得:

$$\begin{aligned} p(\tau_t = d | C_{\text{obs}}, \Theta^S) &= p(\tau_t = d | Y, U, H, \Theta^S) = \\ &= \frac{p(Y | U, H, \tau_t = d, \Theta^S) p(\tau_t = d | U, H, \Theta^S)}{\sum_{d'=\alpha}^{\beta} p(Y | U, H, \tau_t = d', \Theta^S) p(\tau_t = d' | U, H, \Theta^S)} \end{aligned} \quad (20)$$

因为时延 $\{\tau_t\}_{t=1, \dots, N}$ 服从平均分布, 并且它们独立于变量 U, H 以及模型参数 Θ^S , 所以概率 $p(\tau_t = d | U, H, \Theta^S)$ 是常数, 因此可以从分子和分母中约去, 可得

$$\begin{aligned} p(\tau_t = d_t | C_{\text{obs}}, \Theta^S) &= \frac{p(y_t | Z_t, H_t, \tau_t = d_t, \Theta^S)}{\sum_{d'=\alpha}^{\beta} p(y_t | Z_t, H_t, \tau_t = d', \Theta^S)} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^M p(y_t, I_t = m | Z_t, H_t, \tau_t = d_t, \Theta^S)}{\sum_{d'=\alpha}^{\beta} \sum_{m=1}^M p(y_t, I_t = m | Z_t, H_t, \tau_t = d', \Theta^S)} = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^M p(y_t | Z_t, I_t = m, H_t, \tau_t = d_t, \Theta_m^S) p(I_t = m | H_t, \Theta^S)}{\sum_{d'=\alpha}^{\beta} \sum_{m=1}^M p(y_t | Z_t, I_t = m, H_t, \tau_t = d', \Theta_m^S) p(I_t = m | H_t, \Theta^S)} \triangleq \\ &= w^S(t, d_t) \end{aligned} \quad (21)$$

式中,

$$\begin{aligned} p(y_t | Z_t, I_t = m, \tau_t = d_t, \Theta_m^S) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^S)^2}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \phi_{d_t}^T(t) \theta_m^S)^2}{2(\sigma^S)^2} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$p(I_t = m | H_t, \Theta^S) = \frac{\exp(-\frac{(H_t - H_m)^2}{2(o_m^S)^2})}{\sum_{m'=1}^M \exp(-\frac{(H_t - H_{m'})^2}{2(o_{m'}^S)^2})} \quad (23)$$

若输出数据 y_t 是由第 m 个模型产生, 那么其发生的概率计算如下:

$$p(I_t = m | C_{obs}, \tau_t = d_t, \Theta^S) = p(I_t = m | y_{N:1}, u_{N:1}, H_{N:1}, \tau_t = d_t, \Theta^S)$$

令

$$R = \sum_{m'=1}^M p(y_{N:1} | u_{N:1}, H_{N:1}, \tau_t = d_t, I_t = m', \Theta^S) \times$$

$$p(I_t = m' | H_t, \Theta^S)$$

$$S = p(y_{N:1} | u_{N:1}, H_{N:1}, \tau_t = d_t, I_t = m, \Theta^S) \times$$

$$p(I_t = m | H_t, \Theta^S)$$

那么

$$p(I_t = m | y_{N:1}, u_{N:1}, H_{N:1}, \tau_t = d_t, \Theta^S) = \frac{S}{R} = \frac{p(y_t | Z_t, \tau_t = d_t, I_t = m, \Theta_m^S) p(I_t = m | H_t, \Theta^S)}{\sum_{m'=1}^M p(y_t | Z_t, \tau_t = d_t, I_t = m', \Theta_{m'}^S) p(I_t = m' | H_t, \Theta^S)} \triangleq (24)$$

$$\mu^S(t, m, d_t)$$

因此, Q -函数最终可以被写成如下形式:

$$Q(\Theta | \Theta^S) = \sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t) \left\{ -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{(y_t - \phi_{d_t}^T(t)\theta_m)^2}{2\sigma^2} \right\} + \sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t) \times$$

$$\log p(I_t = m | H_t, \Theta) + C$$

为了计算参数的估计, 需要对 Q -函数关于未知参数 $\{\theta_m\}_{m=1, \dots, M}$ 和 σ^2 求梯度。对 $Q(\Theta | \Theta^S)$ 关于 θ_m 求梯度并令其等于零, 那么就能得到 θ_m 的估计:

$$\theta_m^{S+1} = \frac{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \mu^S(t, m, d_t) \phi_{d_t}(t) y_t}{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \mu^S(t, m, d_t) \phi_{d_t}(t) \phi_{d_t}^T(t)} \quad (26)$$

通过对 $Q(\Theta | \Theta^S)$ 关于 σ^2 求梯度并令其等于零, 可以得到噪声方差的估计:

$$(\sigma^{S+1})^2 = \frac{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t) (y_t - \phi_{d_t}^T(t)\theta_m^{S+1})^2}{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t)} \quad (27)$$

为了得到有效宽度 $\{o_m\}_{m=1, \dots, M}$ 的参数估计, 可以求解如下的非线性优化问题:

$$\max_{o_m, m=1, \dots, M} \sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t) \times \log p(I_t = m | H_t, \Theta)$$

$$\text{s.t. } o_{\min} \leq o_m, m=1, \dots, M \leq o_{\max}$$

求解这个问题, 可以通过使用 MATLAB 软件提供的 'fmincon' 函数来实现。模型参数 $\{\theta_m\}_{m=1, \dots, M}$ 和噪声方差 σ^2 的估计, 以及有效宽度 $\{o_m\}_{m=1, \dots, M}$ 的估计每次迭代进行更新, 直到 EM 算法收敛。记最终得到的估计参数为 $\hat{\Theta}$ 。时延的估计可以通过下面的式子得到:

$$\hat{\tau}_t = \arg \max_{\{\alpha, \dots, \beta\}} p(\tau_t = d_t | C_{obs}, \hat{\Theta}) \quad (28)$$

综上, 基于 EM 算法的多模型变时延 FIR 模型辨识算法总结如下:

$$\theta_m^{S+1} = \frac{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \mu^S(t, m, d_t) \phi_{d_t}(t) y_t}{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \mu^S(t, m, d_t) \phi_{d_t}(t) \phi_{d_t}^T(t)}$$

$$(\sigma^{S+1})^2 = \frac{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t) (y_t - \phi_{d_t}^T(t)\theta_m^{S+1})^2}{\sum_{t=1}^N \sum_{d_t=\alpha}^{\beta} w^S(t, d_t) \sum_{m=1}^M \mu^S(t, m, d_t)}$$

$$\hat{\tau}_t = \arg \max_{\{\alpha, \dots, \beta\}} p(\tau_t = d_t | C_{obs}, \hat{\Theta})$$

5 模拟仿真

考虑如下的 FIR 模型:

$$y_t = \phi_{\tau_t}^T(t)\theta_m + e_t$$

$$\theta_1 = [0.20, -0.15, 0.50]^T$$

$$\theta_2 = [0.29, -0.22, -0.51]^T$$

$$\theta_3 = [0.10, -0.30, 0.60]^T$$

输入数据 $\{u(t)\}$ 采用在 $[-1, 1]$ 服从均匀分布的的可测随机序列, $\{v(t)\}$ 采用均值为零, 方差为 $\sigma^2 = 0.1^2$ 的正态白噪声序列。工作点的有效宽度设置为 $o_1 = o_2 = o_3 = 1.5$ 。调度变量的取值、随机的噪声与输出, 如图 1 所示。

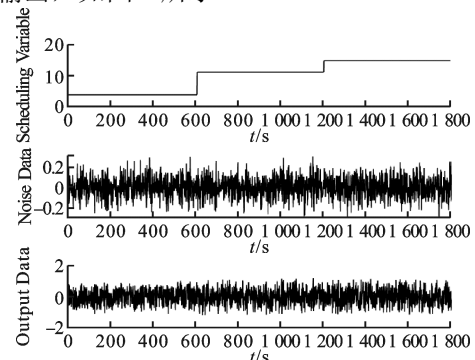


图 1 仿真例子的调度变量、噪声数据以及输出数据
Fig. 1 The scheduling data, noisy data and output data of the example

使用上述算法进行辨识，得到的参数估计结果，如图 2 所示。

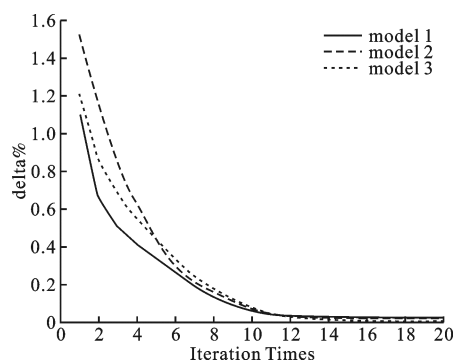


图2 三个模型参数辨识结果
Fig. 2 The parameter estimation results

每一次迭代的情况见表 1、表 2 和表 3，方差的估计，见表 4。

表 1 模型 1 辨识结果 Tab. 1 The EM algorithm estimation and errors of model 1				
<i>t</i>	<i>a</i> ₁	<i>a</i> ₂	<i>a</i> ₃	δ (%)
2	0.275 715 2	0.187 303 3	0.354 355 2	67.104 390 7
5	0.177 509 9	-0.047 565 71	0.338 236 6	34.486 390 7
10	0.196 032 5	-0.153 626 59	0.463 476 39	6.603 918 99
15	0.208 872 1	-0.155 678 74	0.489 406 51	2.672 428 41
20	0.210 433 5	-0.155 505 52	0.490 644 4	2.693 375 28
真值	0.200 000 0	-0.150 000 0	0.500 000 00	0.000 000 00

表 2 模型 2 辨识结果 Tab. 2 The EM algorithm estimation and errors of model 2				
<i>t</i>	<i>a</i> ₁	<i>a</i> ₂	<i>a</i> ₃	δ (%)
2	0.197 024 6	0.167 034 81	0.073 614 91	112.744 53
5	0.153 318 3	-0.067 931 86	-0.336 769 61	42.769 443
10	0.257 229 9	-0.220 615 30	-0.471 772 08	8.036 517 4
15	0.287 929 2	-0.232 561 68	-0.498 528 02	2.735 077 8
20	0.289 263 0	-0.231 997 53	-0.499 442 79	2.553 246 9
真值	0.290 000 0	-0.220 000 0	-0.510 000 0	0.000 000 0

表 3 模型 3 辨识结果 Tab. 3 The EM algorithm estimation and errors of model 3				
<i>t</i>	<i>a</i> ₁	<i>a</i> ₂	<i>a</i> ₃	δ (%)
2	0.328 680 5	0.193 302 56	0.378 479 69	86.566 563
5	0.196 683 5	-0.119 060 19	0.387 733 41	43.525 108
10	0.117 461 6	-0.279 295 59	0.554 403 96	7.819 401 3
15	0.105 041 9	-0.301 911 99	0.593 681 87	1.224 698 8
20	0.104 152 1	-0.301 387 65	0.595 558 28	0.919 529 9
真值	0.100 000 0	-0.300 000 00	0.600 000 00	0.000 000 0

表 4 方差的辨识结果 Tab. 4 The EM algorithm estimation and errors of variance					
<i>t</i>	5	10	15	20	真值
δ	13.840 8	2.023 8	0.051 8	0.001 4	0.000 0
var	0.148 4	0.030 2	0.010 5	0.010 0	0.010 0

前 200 个采样点的时延的估计，如图 3 所示。

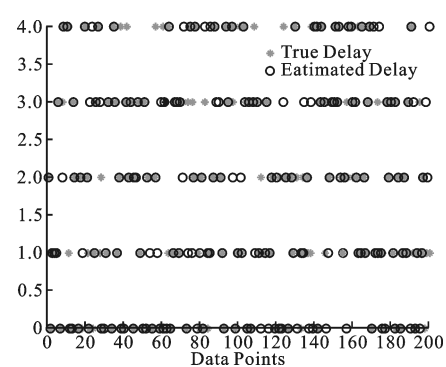


图3 前200个采样点随机时延的辨识结果
Fig. 3 The estimation of random delays of the first 200 sampling points

由表 1、表 2、表 3 可知，通过 EM 算法，辨识出的三个模型的参数估计分别为：

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &= [0.210\ 433\ 5, -0.155\ 505\ 52, 0.490\ 644\ 4]^T \\ \tilde{\theta}_2 &= [0.289\ 263\ 0, -0.231\ 997\ 53, -0.499\ 442\ 79]^T \\ \tilde{\theta}_3 &= [0.104\ 152\ 1, -0.301\ 387\ 65, 0.595\ 558\ 28]^T\end{aligned}$$

3 个模型的辨识误差分别为： $\delta_1=2.693\ 375\ 28\%$ ， $\delta_2=2.553\ 246\ 9\%$ ， $\delta_3=0.919\ 529\ 9\%$ ，其中，误差的计算公式为 $\delta=\|\tilde{\theta}-\theta\|/\|\theta\|$ 。

由以上的结果可知，通过 EM 算法，对带有随机未知时延的多模型 MR 系统进行辨识，不仅可以辨识出模型参数、未知方差以及各采样点的随机时延，而且有很好的辨识精度和较快的收敛速度。

6 结 论

针对 MR 系统，以 FIR 模型为局部模型，使用多模型方法，研究带有未知随机时延的参数辨识问题。为了解决这个问题，本文使用 EM 算法为基本框架。以此为基础，通过理论推导，得到了辨识这种模型的算法，而后通过仿真实验，验证了算法的有效性，并得到了模型参数，方差以及时延的估计值。本文考虑的未知时延在各个采样点都是随机的。相比固定时延，这种思路不仅可以适用于更广泛的系统辨识问题，同时也可以避免在计算时出现大量数据进行累乘的情况，降低算法的复杂性。

参考文献(References)

[1] Gudi RD, Shah SL, Gray MR. Adaptive Multirate State and Identification Strategies with Application to A Bioreactor[J]. AICHE Journal, 1995, 41: 2451-2464.
[2] Tatiraju S, Soroush M, Ogunnaike B A. Multirate Nonlinear State Estimation with Application to A Polymerization Reactor[J]. AICHE Journal, 1999, 45(4): 769-780.
[3] Raghavan H, Tangirala AK, Gopaluni RB, et al. Identification of Chemical Processes with Irregular Out-put Sampling[J]. Control Engineer Practice, 2006, 14: 467-480.
[4] Xie L, Yang H, Huang B. FIR Model Identification of Multirate

- Processes with Random Delays Using EM Algorithm[J]. AIChE Journal, 2013, 59(11): 4124-4132.
- [5] 郁洋, 张鑫, 梁涛, 等. 输出慢采样控制系统的多变量预测控制策略[J]. 信息与控制, 2017, 46(5): 571-578.
Yu Y, Zhang X, Liang T, et al. Multi-variable Predictive Control Strategy for A Slow Sampling Output Control System[J]. Information and Control, 2017, 46(5): 571-578.
- [6] Jin X, Huang B, Shook D S. Multiple Model LPV Approach to Nonlinear Process Identification with EM Algorithm[J]. Journal of Process Control, 2011, 21(1): 182-193.
- [7] Yang X, Gao H. Multiple Model Approach to Linear Parameter Varying Time-delay System Identification with EM Algorithm[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(12): 5565-5581.
- [8] Xiong W, Yang X, Huang B, et al. Multiple-model Based Linear Parameter Varying Time-delay System Identification with Missing Output Data Using an Expectation-maximization Algorithm[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2014, 53(27): 11074-11083.
- [9] Chen L, Tulsyan A, Huang B, et al. Multiple Model Approach to Nonlinear System Identification with an Uncertain Scheduling Variables Using EM Algorithm[J]. Journal of Process Control, 2013, 23(10): 1480-1496.
- [10] Xiong W, Chen L, Liu F, et al. Multiple Model Identification for a High Purity Distillation Column Process based on EM Algorithm[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(pt. 2), 1-9.
- [11] Chen, L, Huang, B., Liu, F. Nonlinear System Identification with Multiple and Correlated Scheduling Variables[C]. 10th International Symposium on Dynamics and Control Process Systems, Mumbai, India, Dec 18-20, 2013: 319-324.
- [12] Chen, L, Huang, B., Liu, F. Multi-model Approach to Nonlinear System Identification with Unknown Time Delay[C]. 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, Aug 24-29, 2014.
- [13] Yang X, Yin S, Kaynak, O. Robust Identification of LPV Time-delay System with Randomly Missing Measurements[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 9: 1-11.
- [14] Yang X, Yin S. Robust Global Identification and Output Estimation for LPV Dual-rate Systems Subjected to Random Output Time-delays[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics 2017, 13(6): 2876-2885.
- [15] Lu Y, Huang B. Robust Multiple-model LPV Approach to Nonlinear Process Identification Using Mixture t Distributions[J]. Journal of Process Control 2014, 24(9): 1472-1488.
- [16] Lu Y, Huang B, Khatibisepehr S. A Variational Bayesian Approach to Robust Identification of Switched ARX Models[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(12): 3195-3208.
- [17] Chen J, Ma J, Liu Y, et al. Identification Methods for Time-delay Systems based on the Redundant Rules[J]. Signal Processing, 2017, 137: 192-198.
- [18] G.J. McLachlan, T. Krishnan. The EM Algorithm and Extensions (2nd Edition) [M]. John Wiley & Sons, Hoboken New Jersey, 2007.