Análisis Numérico

Trabajo Práctico 5

Segundo cuatrimestre 2024

Instrucciones:

- Fecha de presentación: 15/11/24.
- Los grupos se conforman de 4 o 5 personas.
- Utilice todas las herramientas informáticas, lenguajes o herramientas en línea que considere convenientes (Mathematica, Wolfram Alpha, Qucs, Xcos, Sympy, Scilab, Octave, Scipy, Matplotlib, ImageJ, etc).
- Elabore un informe lo mas detallado posible, mencionando los problemas con los que se encontró intentando obtener las respuestas a las consignas.
- Subir al campus en un archivo comprimido único, **el informe en formato .pdf** y cualquier otro archivo que considere útil, como códigos u otros.
- Elaborar un video de no más de 3 minutos de duración sobre los aspectos más importantes del proceso y las conclusiones del trabajo. Subir el video al grupo de TEAMS.

1 El problema de los tres cuerpos

El problema de los tres cuerpos consiste en predecir la posición y velocidad, de tres cuerpos en el espacio sometidos a atracción gravitacional mutua y partiendo de ciertas posiciones y velocidades iniciales. Las ecuaciones de movimiento para los tres cuerpos se basan en la Ley de Gravitación Universal de Newton, dada entre dos cuerpos i y j de masas m_i y m_j, y posiciones $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$:

$$\mathbf{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^2}\hat{\mathbf{r}}_{ij}$$

Donde $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza gravitacional entre los cuerpos i y j, G es la constante de gravitación universal, m_i y m_j son las masas de los cuerpos i y j, $\mathbf{r}_{ij}$ es el vector de posición que va del cuerpo i al cuerpo j y $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}_{ij}$. Teniendo en cuenta que el movimiento de cada cuerpo está gobernado por la suma de las fuerzas gravitacionales de los otros dos cuerpos y aplicando la segunda ley de Newton:

1. Derivar las ecuaciones diferenciales de posicion y velocidad para cada cuerpo i con masa m_i.
2. Resolver el sistema con el método de **Euler** y **Runge-Kutta** de cuarto orden y variar parámetros del sistema para notar diferencias entre cada simulación. Determinar las condiciones iniciales que permitan obtener un sistema estable y otro caótico. Obtener conclusiones acerca de las diferencias entre los métodos. Graficar las trayectorias de los tres cuerpos en función del tiempo en un sistema de coordenadas centrado en la masa.

Energía Total del Sistema

En un sistema de tres cuerpos, la energía total del sistema es la suma de la energía cinética de cada cuerpo y la energía potencial gravitacional entre los cuerpos, siendo:

Energía Cinética de un cuerpo i:

$$E_{\text{cin},i} = \frac{1}{2}m_i\left(v_{ix}^2 + v_{iy}^2\right) = \frac{1}{2}m_i\|\mathbf{v}_i\|^2$$

Energía Potencial Gravitatoria entre dos cuerpos i y j:

$$E_{\text{pot},ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

Energía Total del sistema

$$E_{\text{total}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}$$

Energía Acumulada a lo largo del tiempo:

$$E_{\text{acumulada}}(t) = \int_0^t E_{\text{total}}(t)\, dt$$

3. Calcular la energía total del sistema en cada paso y verificar si se conserva a lo largo de la simulación. Comparar cómo el método de Euler y el de Runge-Kutta afectan la conservación de la energía.

4. Calcular la energia acumulada en el sistema a lo largo del tiempo utilizando 3 métodos distintos: **Trapecio**, **Newton-Coates** y **Cuadratura de Gauss**. Explicar las diferencias que encuentra entre ambos.