

Geometrical Optics

几何光学

Jerry Ling

2024 年 8 月 4 日

上一篇笔记中讨论了作为波的光的基本形式，也介绍了导出波前的惠更斯原理和光线最短路径传播的费马原理。本篇我们将重点放在**近轴 (coaxial) 系统**的研究中。该系统中不同界面的入射角度接近 0 度，因而斯涅尔定律简化为如下形式：

Law 1 (Snell's Law in Coaxial System).

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2$$

定律1将极大简化对光学系统的分析，因为其将之简化为一个线性的问题。另外，为了避免混淆，接下来的讨论中我们规定零点左边的坐标为负；向左边凸起的半径/曲率为正；光线总是由左边射入右边。

单个透镜在空气中的成像

考虑一个半径为 R_1 的球面，界面近似位于 0 点。按照图1的几何关系和定律1可以得到：

$$-\frac{n}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{R_1}(1 - n) \quad (1)$$

其中 u 是物距（负数）， v 是 u 经过界面后折射的虚像位置。再考虑另一个半径为 R_2 （负数）的球面，界面同样近似在 0 点，与前者构成一个凸透镜。那么上式中的 v 可以作为新的物距代入自身；折射率显然也变成 $1/n$ ：

$$-\frac{1/n}{v'} + \frac{1}{v} = \frac{1}{R_2}(1 - 1/n) \quad (2)$$

v' 是新的像距。连立两式得到：

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (3)$$

定义右边半边表达式为 $1/f$ ，则得到透镜公式：

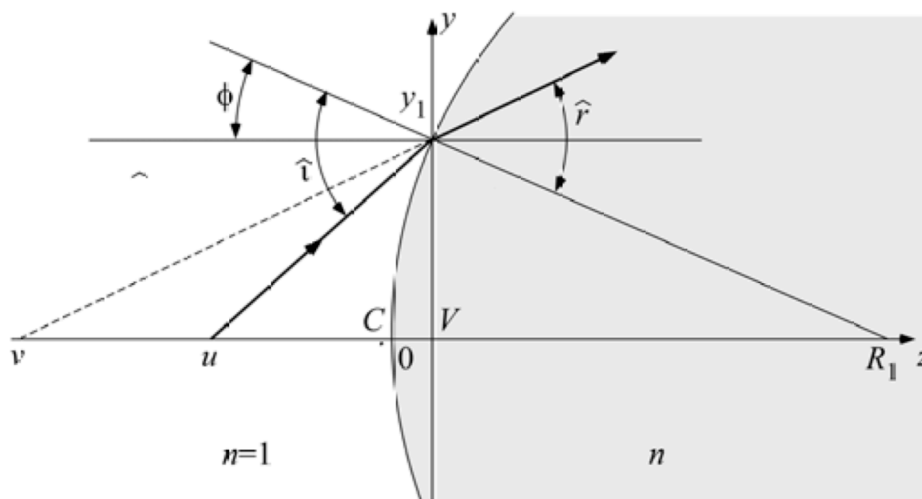


图 1: Geometric of Refraction

Law 2 (Lens Makers' Equation).

$$-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

注意该公式的使用条件为凸面半径远远大于入射高度，即透镜应为**薄透镜 (thin lens)**。f 称为**焦距 (focal length)**， $1/f$ 称为**power of lens**；焦距为负数的薄透镜称为**diverging lens**。过距离原点长度为焦距的两个点 (F1,F2) 与轴的垂面称为**焦平面 (focal plane)**。取轴上一点 u 以角度 θ 入射，其像为 v。则入射高度为 $y = -u\theta$ ，从像发出的光同焦平面的交点高度为 $d = \frac{y}{v}(-v + f)$ 。则代入透镜公式得到：

$$d = \theta f \quad (4)$$

换言之，任何以角度 θ 入射薄透镜的光都汇聚在焦平面上高度为 $d = \theta f$ 的一点上。因为 u 接近零点时 v 也接近零，即等效于没有改变位置，故任何透过中心的光线都不发生折射。最后，因为 u 趋向无限时 $v=f$ ，所以平行于轴的入射光过焦点 F1。根据这三条法则，即可用尺规作图来对任何点光源进行**光线追踪 (Ray Tracing)**。

Note 1 (Fresnel lens). 菲涅尔透镜实质上保留了圆弧表面的弧度而舍弃了光滑性。通过切割的方法可以制造重量很轻的薄透镜用于大型聚光或投影装置。但由于反射和散射的增加不适合用于高分辨的成像。

简单放大镜

首先考虑一个用于放大物像的凸透镜。在几何光学中，物体上的每一点发出的光通过透镜汇聚在某点即称为成像，当物体没有厚度时可定义相互**共轭**的物平面和像平面。人眼的晶状体通过变厚来使近处的非平行光线汇聚到视网膜上，而能够聚焦的最近距离称为人眼的**近点 (near point)**，

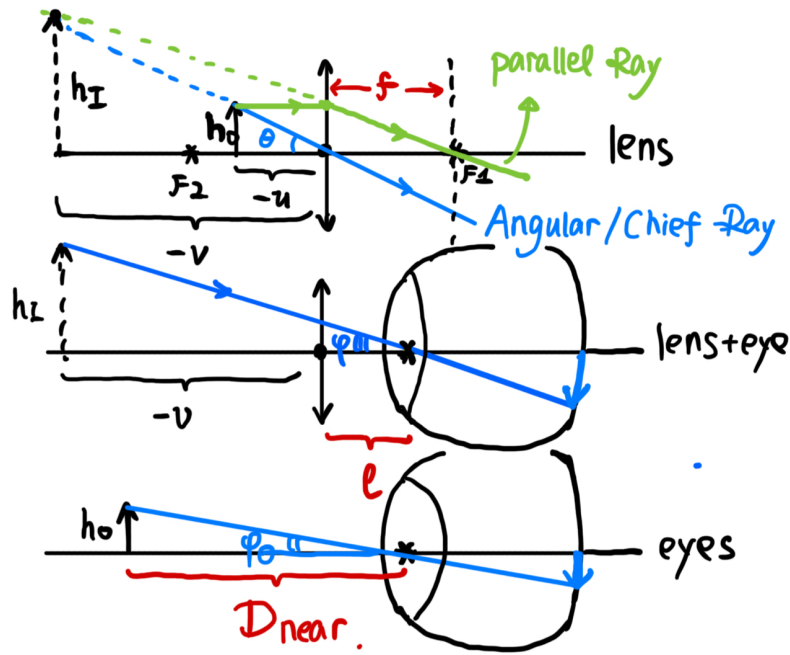


图 2: Lens Ray Tracing

见图2“eyes”图。当使用凸透镜后，焦距内物体不成实像，而是在后方成一个较大的虚像，可将像搬到近点以外，见图2前两副图。

观察蓝色主射线 (**chief ray**) (顶点向透镜中心)。不难发现，在晶状体调节范围内，视网膜成像大小同该射线入射角度 φ 成正比。因而定义 **magnifying power** 或角放大率 (**angular magnification, M_A**) 为放大后主射线角度与近点处主射线角度之比，或放大后视网膜上像线性大小与近点处物体在视网膜上像线性大小之比。设凸透镜离眼距离 l ，近点距眼 D ，物高 h_0 ，像高 h_I ；放大和近点入射角度分别为 φ 和 φ_0 。可列：

$$\varphi = \frac{h_I}{-v + l} \quad (5)$$

$$\varphi_0 = \frac{h_0}{D} \quad (6)$$

其中透镜成虚像高 h_I 和实像高 h_0 比例为 v/u 。简化后得到：

$$M_A = \varphi/\varphi_0 = \frac{D}{f} * \frac{f - v}{l - v} \quad (7)$$

取 $l=0$ ，放大率最大化 ($-v$ take min)，则 $v=D$ ， $M_A = 1 + D/f$ 。取 v 为负无穷，即物距 $u=-f$ ，则 $M_A = D/f$ 。

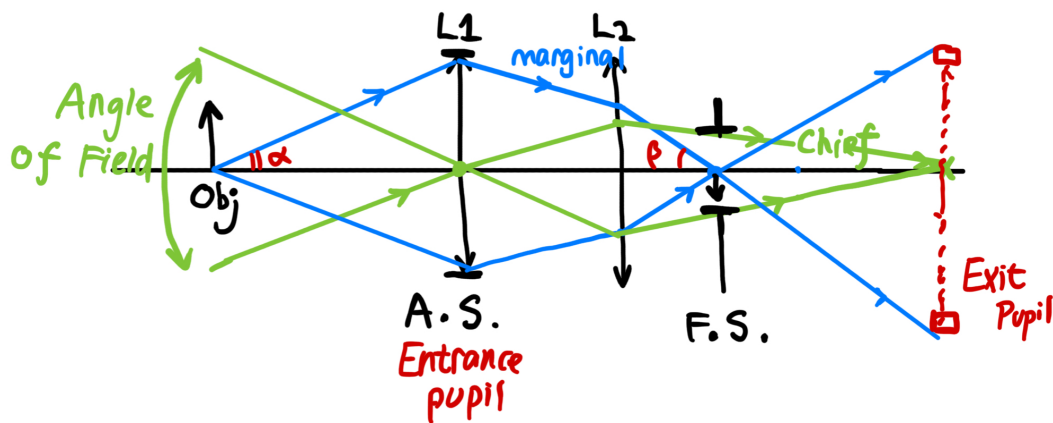


图 3: Rays, Stops and Pupils

简单镜片组系统

光阑，光瞳和重要射线

多个透镜可实现更多功能。为方便讨论，考虑两条重要的射线。近轴系统只对光线的角度和高度进行线性变换，因而通过设置高度为 0 的射线即可直观得到系统对角度的操作。由于透镜尺寸有限，轴上 (on-axis) 光源的入射角度将存在最大值。称限制体系总光线进量（即 O 点射线的角度）的实体为孔径光阑 (aperture stop, A.S.)，O 点出发过其边沿的光线为边沿射线 (marginal ray)，见图3蓝色线 (L1 是孔径光阑)。易见 O 点的射线最大智能以 α 角度入射，角放大率 β/α 。在不确定 A.S. 时候可不断增加角度来判断充当之的部件。

因 0 角度的射线包含信息太少，另一条射线并不设为 0 角度，而是希望有一条独立于孔径光阑大小的射线。显然，过 A.S. 中心的射线满足该要求，称为主射线 (chief ray)。同样，由于有限性，主射线角度也存在最大值。称限制视野大小的实体为视场光阑 (field stop, F.S.)，过起边沿的主射线为图3中绿色线。F.S. 可用相似方法确认。注意，边沿射线的角度仅和亮度相关，而主射线的角度直接限制视角 (field of view)。

光瞳 (pupils) 是 A.S. 的像。图3中入射光瞳即 A.S. 本身，而出射光瞳是其关于后续透镜 L2 的像。注意到主射线汇聚在 L1 的像位置，故用两条线即可判断入射（如前方还有透镜可进行类似光线追踪）和出射光瞳位置。事实上，这两条射线完全定义任一近轴光学系统。

望远镜和显微镜

望远镜 (telescope) 系统能将一束角度为 α 的平行光放大为角度为 β 的平行光。其实现利用两个焦点重合点凸透镜，见图4。由于远处物体近似于平行光，角放大率（放大前后角度比）是我们关心的参数：

$$M_A = \frac{f_1}{f_2} \quad (8)$$

远处的物体仍在无穷远处成虚像，或亦可理解为 L1 成的实像被放大镜 L2 成虚像（见上节）。

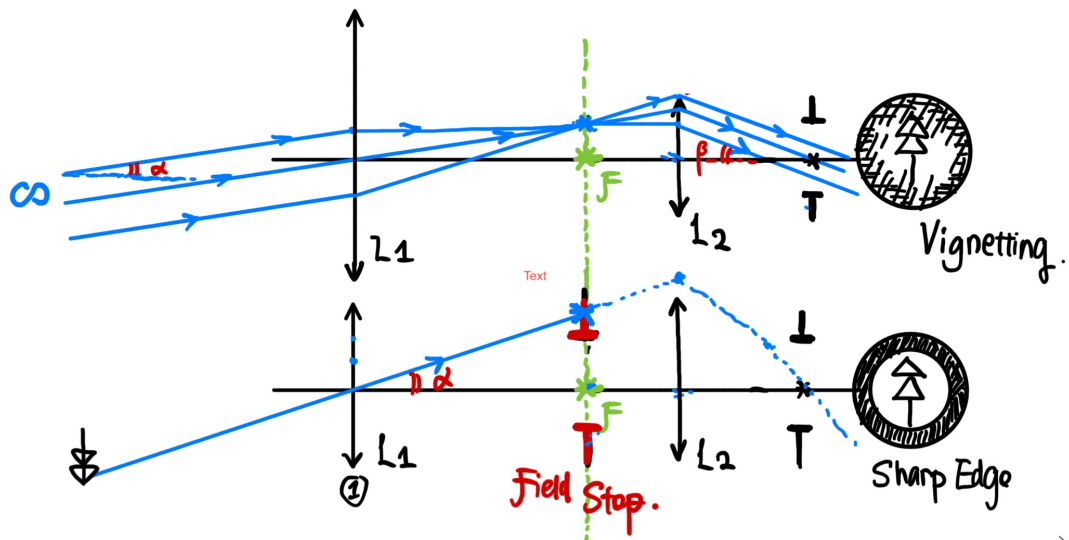


图 4: Ray Tracing of Telescope

注意，当 L_2 孔径较小时，离轴较远的点光源 (F 平面上的实像上部) 进入 L_2 的角度很小，其像在离轴方向将逐渐变暗。该现象称为晕影 (**vignetting**) (图4上)。减少晕影的方法之一是在 F 处设一人为的孔径使之小于 L_2 尺寸 (图4下)。由于焦平面 F 上成实像，新的孔径充当 $F.S.$ 。进入 L_2 的光都相对近轴，因而其像成锐利边框。该处亦常用透镜充当 $F.S.$ 同时进一步放大角度，称为 **Field Lens**，常与 L_2 一同构成目镜 (**eyepiece**)，用于放大物镜成的实像。

而显微镜 (**microscope**) 系统仅在望远镜系统前添加了一块焦距极短的凸透镜将近处物体成一虚像。其后的透镜称为 **tube lens** 用以在目镜前成一实像。在物镜和 **tube lens** 间光线平行，可以添加极化镜片等调制。对显微镜，**线性放大率 (linear magnification)** 是主要参数。市售物镜通常以 [160 或 200mm]tube lens 组合标注放大率，可与目镜放大率相乘得到显微镜放大率。

Note 2 (Depth of Field). 首先考察物平面上离轴 R 光源的的边沿射线 (图5蓝)，发现其光路径长度变化为 $R \sin \alpha$ ，则小于 $\lambda/2$ 时形成干涉无法分辨，该距离 R 称为衍射极限 (**resolution limit**)。显微镜研究中常定义数值孔径 (**Numerical aperture**) $NA \triangleq n \sin \alpha$ ， n 为介质折射率，空气中为 1:

$$R_{lim} \approx \frac{\lambda}{2NA}$$

再考察轴上离中心 d 的光源 (图5绿)，沿轴射线和边沿射线同时变化，其差为 $d(1 - \cos \alpha)$ 。设距离 $A.S.$ 为 L ，孔径半径 D ，容易导出：

$$d \leq \frac{\lambda L^2}{D^2}$$

两倍的 d 称为景深 (**depth of field**)，即可以清晰成像的纵深距离。也常写作：

$$DOF \approx 2.4 \frac{\lambda L^2}{D^2}$$

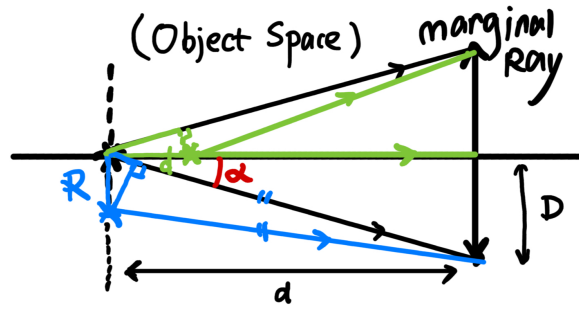


图 5: Radius and Depth of Imaging

另一边，即像空间的纵深称为焦深 (*depth of focus*)，只需将 L 改成 f ，或写作

$$DOF^* \approx 2.4\lambda(f/\#)^2$$

其中 $f/\# \triangleq f/D$ 是摄影中常用的镜头参数，称焦比 (*focal ratio*)，无量纲。其倒数称为相对孔径 (*relative aperture*)，其平方与进光的辐照密度正比。

正常显微镜在对离轴、焦内物体成像时，其放大率和位置都会偏移。远心镜 (*Telecentric Microscope*) 通过在物镜焦距处添加额外孔径来限制焦内离轴光的线路，使之与焦面光产生的光锥形状一致。其成像没有透视关系，各距离物体放大率相等，适合进行距离测量。其光路见图6。

基于矩阵的几何光学

前面的讨论基于薄透镜的近似。为了处理更复杂的体系，我们考虑分析的方法。由于我们的体系关于 z 轴对称，只要指定了距离 z 的距离 y 和同 z 轴的角度 θ 即可确定任一条近轴的光线点。记某点所在介质为 n_1 ，用列向量表示为 $(y, n_1\theta)^T$ 。则在均匀介质中其传播距离 t 的转移矩阵 T 为：

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

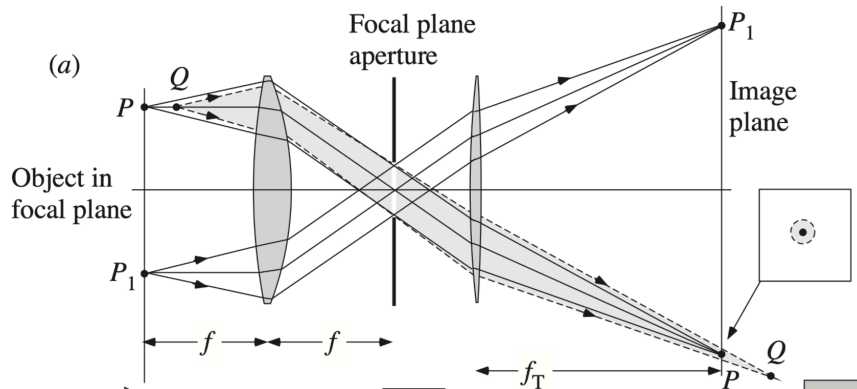


图 6: Rays of Telecentric Microscope

其构造即高度变化而角度（第二行）不变。而在界面处的折射亦可用一个转移矩阵 \mathbf{R} 描述：

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

同理，高度保持不变而角度发生变化（射入透镜时角度变小）。两个操作结合以描述 1 点经过折射传播到 2 点的矩阵：

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{R}\mathbf{T} \quad (11)$$

注意到 \mathbf{R} 和 \mathbf{T} 点行列式都是 1，因为透镜体系中所有操作都可以由这两种矩阵组合而成，转移矩阵都有单位行列式。

透镜的矩阵表示

考虑一个由两个曲面构成的凸透镜，曲面间距为 t ，折射率为 n 。两边介质折射率为 1，则其转移矩阵可算出：

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t(1-n)}{nR_1} & t/n \\ (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) - \frac{t(1-n)^2}{R_1 R_2 n} & 1 + \frac{(n-1)t}{R_2 n} \end{pmatrix} \quad (12)$$

当 t 远小于凸面半径时，化简为：(f 与式 (3) 定义一致)

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

当两边介质不同时：

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n_2}{R_2} - \frac{n_1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

当两个凸面半径相同时，焦距是无穷，但应当代入完整的展开式 (12) 计算。

当多个镜片构成镜组时，其实体总是被左右两边的**顶点 (vertex)** V_1, V_2 限制。称其左右边为**物空间 (object space)** 和**像空间 (image space)**。则在物空间总出现虚像，像空间出现实像。这对概念将助于接下来对成像的讨论。

成像过程的矩阵表示

设事件平面内有从 (z_O, y_1) 以 θ 发射的光线，其在 z_I 点的状态可以由中间体系的矩阵 \mathbf{M}_{21} 完全表达：

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2 \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

然而，若要求成像，那么该点发出的任意角度光线应也在 y_2 点，即算得的 y_2 应与角度无关，也就是 $B=0$ 。 \mathbf{M}_{21} 显然和物距相距相关，故 $z_O - z_I$ 关系可以从中解出。此时称两点 z_O, z_I 所在平面称为**共轭面 (conjugate planes)**。因为汇聚一点，易算出线性放大率 (利用 $B=0$):

$$M_L = \frac{y_2}{y_1} = A \quad (16)$$

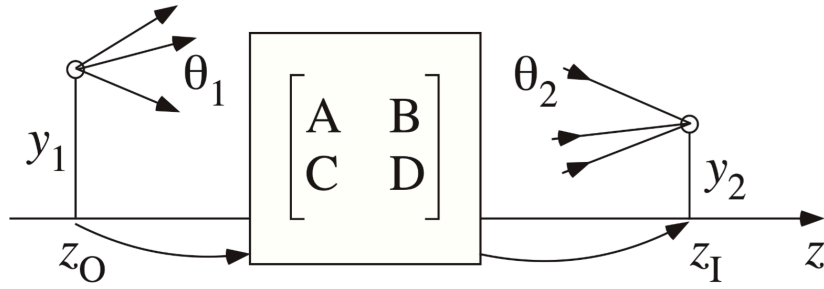


图 7: Matrix Method for Imaging

同样易算出角放大率 (令 $y_1=0$, 利用 $AD=1$):

$$M_A = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{Dn_1\theta_1}{n_2\theta_1} = D\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{M_L}\frac{n_1}{n_2} \quad (17)$$

考虑薄透镜的 1 到 2 点转移矩阵:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1 - v/f & -u + v + vu/f \\ -1/f & 1 + u/f \end{pmatrix} \quad (18)$$

故令 $B=0$, 容易给出透镜制作公式 2。此外, 利用 $AD=1$ 可以导出如下公式:

Law 3 (Newton's Equation).

$$(f + u)(f - v) = f^2$$

注意该式仅需要物、像与焦点的相对位置, 而不需要明确 $V1, V2$ 。因而在薄透镜体系外也广泛适用。

当转移矩阵中 $C=0$ 时, 出射角度同入射高度无关, 即平行光仍会是平行光, 但角度不同。这类系统称为**无焦系统 (afocal/telescopic)**, 平行光在无穷远处成虚像。

基点和基面

为了发展一套适用于任何镜组系统的模型, 我们将薄透镜的矩阵替换为小写字母的矩阵, 并引入 $V1, V2$ 两个顶面 (坐标 z_1, z_2) 表示其占据的空间 (见图8)。物距 u 和像距 v 都以之为基准。注意图7中大写字母阵表示 O 到 I 所有路程的转移矩阵, 而小写字母矩阵仅代表 $V1$ 到 $V2$ 间的某特殊系统。因而不难算出总的转移矩阵形式 (两边介质折射率为 1):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + vc & b - au + vd - vcu \\ c & d - cu \end{pmatrix} \quad (19)$$

引入成像条件得到一下两个等式:

$$b - au + vd - vcu = 0 \quad (20)$$

$$(a + vc)(d - cu) = 1 \quad (21)$$

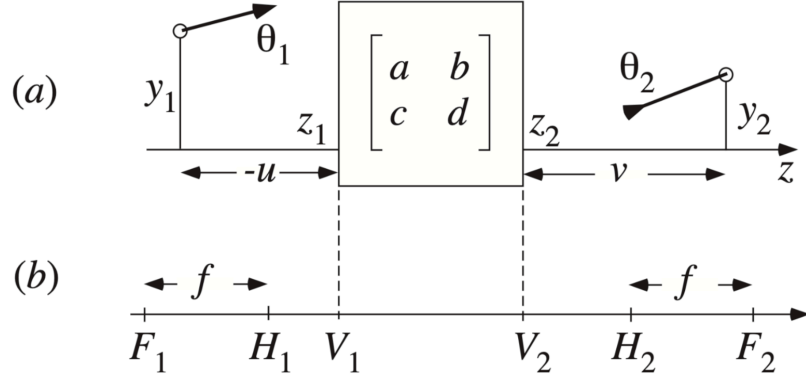


图 8: Matrix Method for General System

同公式3比较发现，如定义 $-1/c$ 为等效焦距 (effective focal length) f_e 则可得到相似的形式：

$$(f_e - d/c + u + 1/c)(f_e - a/c - v + 1/c) = f_e^2 \quad (22)$$

定义主平面 (principle planes) $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 坐标为：

$$H_1 = \frac{d-1}{c} + V_1 = u_p + V_1 \quad (23)$$

$$H_2 = \frac{1-a}{c} + V_2 = v_p + V_2 \quad (24)$$

则上式可代入物体到主平面距离以完全符合 Newton 方程的形式：

$$(f_e + (u - u_p))(f_e - (v - v_p)) = f_e^2 \quad (25)$$

进一步考察无穷远处的物和像不难得到与主平面间隔一个等效焦距 f_e 的焦点 F_1, F_2 坐标：

$$F_1 = d/c + V_1 \quad (26)$$

$$F_2 = -a/c + V_2 \quad (27)$$

换言之，如果知道了主平面和等效焦距，那么 V_1 - V_2 间的系统可以等效为一个薄透镜。其物-像公式中距离用以主平面为参考的距离代替。这四个点称为基点 (cardinal points)。通过主平面的光必定以相同的位置射出，或言两主平面相互共轭且线性放大率为 1。当两边折射率相同时，角放大率也是 1，不然则可定义一组节点 (nodal points) N_1, N_2 ，从之出发的光必定以相同的角度在另一点射出。根据这六个点可以描述任一系统。普遍的形式如下给出：

$$H_{1/2} = \frac{d-1}{c} n_1 \left[\text{or } \frac{1-a}{c} n_2 \right] + V_{1/2} \quad (28)$$

$$N_{1/2} = \frac{n_1 - n_2 a}{c} \left[\text{or } \frac{n_1 d - n_2}{c} \right] + V_{1/2} \quad (29)$$

用基点的概念可简化照相机的模型。长焦系统中，凸透镜和凹透镜的组合让两个主平面都处于机身左侧，从而使较长的有效焦距仍能聚焦在 cmos 上。见图9。

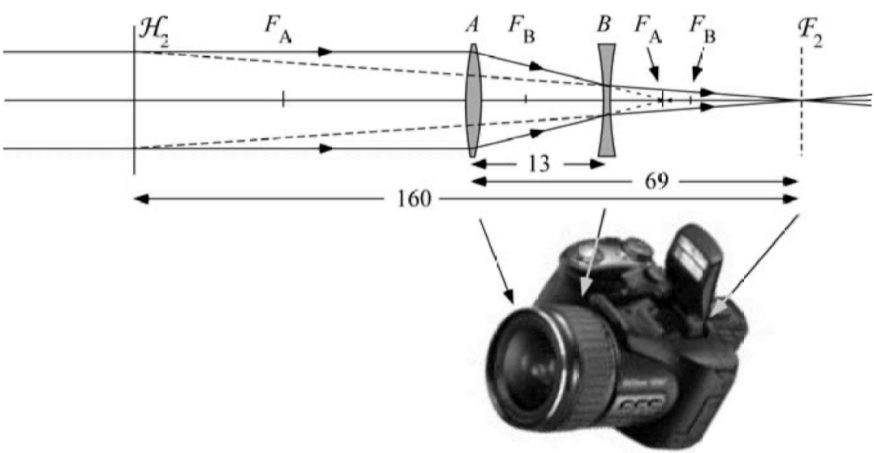


图 9: Cardinal Points of Camera

畸变

在