Electrodynamic Landscape of Light
电磁理论视角下的光学图景

Jerry Ling

2025 年 4 月 7 日

前两篇笔记中讨论了简单的物理光学和几何光学。本篇笔记将从 Maxwell 方程作为第一性原理，从头导出全波动光学、物理光学和几何光学的图景。同时将较详细地处理折射、反射、偏振等问题。

电磁波理论

经典电磁理论中，电和磁可描述为三维空间中的矢量场。高斯制下，其满足 4 个微分方程：

Law 1 (Maxwell's Equation)**.**

$$\text{curl H} - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{1}$$

$$\text{curl E} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{2}$$

$$\text{div D} = 4\pi\rho \tag{3}$$

$$\text{div B} = 0 \tag{4}$$

可以表述为：变化的电位移产生涡旋的磁场，变化的磁感应产生涡旋的电场；电位移有源，磁感应无源。电位移和磁感应强度是介质中的“有效”场，所以在方程中作为动力的一项中都取有效场，作为输出的一项都取正常场。其由本构方程联系:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \tag{5}$$

由 (1) 取散度得**连续性方程**:

$$\text{div}\,\mathbf{j} = -\partial_t \rho \tag{6}$$

再对一个围面积分得**高斯定理** (增加电荷等于流入电荷):

$$\partial_t \int \rho \,\mathrm{dV} = -\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS} \tag{7}$$

这些方程基本上完全描述了电磁的行为，接下来要做的就只是一些矢量分析和近似。

能量

首先引入矢量分析中的恒等式:

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{curl}\,\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=-\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{8}$$

由式 (1)(2) 进行两边取点积操作，不难得到:

$$\frac{1}{c}(\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}+\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}})+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0 \tag{9}$$

注意到每一项都变成**标量场**。其中电场和磁场的自点积可以理解为场的**能量密度**，于是第一项就是能量密度的变化率，第二项可以分解为焦耳热和场对电荷做的功，最后一项则代表流出的能量。这也是功-能量守恒的结果。对任一体积积分获得能量守恒方程:

$$\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\delta\mathrm{A}}{\delta t}-\mathrm{Q}-\int\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{dS} \tag{10}$$

当不存在电荷和电流做功时候，能量变化即流出的项。高斯制下能量密度、**能流密度**可如下定义:

$$w_e=\frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\qquad w_m=\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \tag{11}$$

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{12}$$

波动方程

对 (1)(2) 作一些处理，将所有场量换成原场 (E 和 H)，并令电流、电荷为 0:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\mathrm{curl}\,\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}&=0\\ \mathrm{curl}\,\mathbf{H}-\frac{\epsilon}{c}\mathrm{curl}\,\dot{\mathbf{E}}&=0\end{aligned} \tag{13}$$

显然我们可以通过一些操作消掉其中一个场，注意物性标量是坐标的函数，并使用恒等式:

$$\mathrm{curl}\,u\mathbf{v}=u\,\mathrm{curl}\,\mathbf{v}+(\nabla u)\times\mathbf{v} \tag{14}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})-\nabla^2\mathbf{v} \tag{15}$$

经过计算得到普遍的波动方程:

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}+(\nabla\ln\mu)\times\mathrm{curl}\,\mathbf{E}+\nabla(\mathbf{E}\cdot\nabla\ln\epsilon)=0 \tag{16}$$

在媒质均匀的情况下，上式简化为二阶齐次偏微分方程:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}&=0 \quad (17)\\ \nabla^2\mathbf{H}-\frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{H}}&=0 \quad (18)\end{aligned}}$$

Note 1 (Condition of Scalar Approximation)**.** 所有的麻烦源于不均匀的媒介——也就是常见的孔径边沿处。在距离边沿几个波长的区域内，电场和磁场及他们的各个分量之间产生 *[耦合]*，光波与边沿介质相互作用，于是破坏了各个分量的独立性。不过，当我们只考虑大孔径、或者小的衍射角的时候，这些边沿行为就可以忽略不计（孔径尺寸远大于波长）。在大部分我们感兴趣的问题中，这个条件是很容易满足的。

标量波和亥姆霍兹方程

注意到在式 (17) 中各个矢量的分量相互独立，而又可以证明磁场总是和电场垂直，因而，不妨用一个单一的标量 V(x,y,z,t) 来代替这两个矢量偏微分方程:

$$\nabla^2 \mathrm{V} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

这就是我们在第一章中使用的三维空间中的波动方程。规定不同的对称性给出不同的特解，如平移对称性-平面波；球对称-球面波；柱对称-柱面波。

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k} - vt) + \mathrm{V}_2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k} + vt) \tag{20}$$

注意上式对波形尚未规定，是方程的通解。鉴于单色光的重要性，我们常研究每一点都**随时间周期变化**的场，其标量波称为**时谐波函数**，可以如下表示:

$$\mathrm{V}(x,y,z,t) = \mathrm{a}(x,y,z)\cos(\omega t - g(x,y,z)) \tag{21}$$

其中唯一的含时量由角频率 ω 规定，cos 内含时的部分规定了周期中的位置，也就是第一章中定义的**相位**。标量函数 g 则代表“初始”相位情况。

一个方便的做法是把这个不含时的初始相位折算进振幅分布 A 中，只需用 e 复指数代替 cos 表示相位即可:

$$\mathrm{V}(x,y,z,t) = \mathbb{R}\mathrm{e}\{\mathrm{U}(x,y,z)\exp(i\omega t)\},\ \ \mathrm{U}(x,y,z) = \mathrm{a}(x,y,z)\exp\{ig(x,y,z)\} \in \mathbb{C} \tag{22}$$

这样一来，对某个角频率的波，**复振幅** $\mathrm{U}(x,y,x)$ 就完全规定了波函数。将式 (22) 代回式 (19)，则得到复振幅 U 应满足的方程，一个不含时的二阶齐次偏微分方程:

> **Law 2** (Helmholtz's Equation)**.**
> $$\nabla^2\mathrm{U} + k^2\mathrm{U} = 0,\ \ k = \frac{\omega}{v}$$

这个方程是**标量衍射理论**的基本方程，而时谐波函数和相位的概念则是**干涉理论**的基本概念。

标量波的相速度和群速度

显然，**相速度** $v^{(p)}$ 只在相位良定义的波有意义。在时谐波中，相速度即等相面前进的速度，可用角频率和相位梯度之比求出:

$$v^{(p)}(x,y,z) = \frac{\omega}{|\nabla g(x,y,z)|} \tag{23}$$

注意 $v^{(p)}$ 并非矢量，且会随位置变化 (平面波的相速度不变)。实际上相速度并不能直接测量，也没有直接的物理意义。

真实的波总是有一定带宽，也不会在无限的空间上延伸。因而，考虑一个中心为 $\bar{\omega}$、带宽为 $\Delta\omega$ 的波包:

$$\mathrm{V}(x,y,z,t)=\int_{\bar{\omega},\ \Delta\omega}\mathrm{a}(x,y,z,\omega)\exp\{-i[\omega t-g(x,y,z,\omega)]\}\mathrm{d}\omega \tag{24}$$

选取 z-平面波作为叠加的基元 ($\mathrm{a}=\mathrm{a}(\omega)$, $g=kz$)。把被积函数中的中心频率提出来:

$$\mathrm{V}(z,t)=\mathrm{A}(z,t)\exp\{-i[\bar{\omega}t-\bar{k}z]\}\quad \bar{k}=n(\bar{\omega})\frac{\bar{\omega}}{c} \tag{25}$$

其中:

$$\mathrm{A}(z,t)=\int_{\bar{\omega},\ \Delta\omega}\mathrm{a}(\omega)\exp\{-i[(\omega-\bar{\omega})(t-\frac{k-\bar{k}}{\omega-\bar{\omega}})]\}\mathrm{d}\omega \tag{26}$$

注意到在**窄带**条件下比例项可用写成波数对角频率的微分。显然，该式中的指数项变化要远小于 (25) 的指数项 ($\Delta\omega << \bar{\omega}$)，因而可以认为 $\mathrm{A}(z,t)$ 是一个施加在以中心频率振荡的平面波上的一个**包络**。被其调制的波形也以一定速度运动，只需要另 $\mathrm{A}(z,t)$ 中相位为 0:

$$t=\frac{k-\bar{k}}{\omega-\bar{\omega}}\rightarrow v^{(g)}=(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k})_{\bar{k}} \tag{27}$$

这个速度即称为**群速度**。非色散介质中不同频率的光具有相同的色散关系，因而导数和比例相同，但在色散介质中其群速度将别于相速度。

边沿处的电磁场

从 (1) 的积分表达式出发，选取介质交界处薄薄的一层作为积分范围，不难导出如下的**边界条件**:

$$\mathbf{n}_{12}\cdot(\mathbf{B}^{(2)}-\mathbf{B}^{(1)})=0 \tag{28}$$

$$\mathbf{n}_{12}\cdot(\mathbf{D}^{(2)}-\mathbf{D}^{(1)})=4\pi\hat{\rho} \tag{29}$$

$$\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)})=0 \tag{30}$$

$$\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)})=\frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{j}} \tag{31}$$

前两个式子和后两个式子分别对应了法向和切向的连续性/突变性。不过，在导出折射定律时，只需要令电场和磁场都满足连续条件即可。再加上交界处相位步调一致的条件，我们即可一步步导出边界的电磁场行为。

反射和折射定律