1.- Se consideran conjuntos A de cien números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si a, b y c son elementos cualesquiera de A (iguales o distintos), existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden a, b y c unidades.
Se denomina S(A) a la suma de los perímetros considerados en la definición de A. Calcula el valor mínimo de S(A).
Solución:
Si n es el menor de los elementos de A y m el mayor, al tener A cien elementos distintos, será $m \geq n + 99$. Para que el triángulo isósceles de lados n, n, m sea no obtusángulo debe ocurrir que $m^2 \leq 2\, n^2$; si m es lo menor posible, $m = n + 99$ deberá ser $(n + 99)^2 \leq 2n^2$, o sea:

$$n^2 - 198n - 99^{2}{}^{3}0\hat{U}n^{3}99 + \sqrt{99^2 + 99^2}\hat{U}n^{3}99\left(1 + \sqrt{2}\right)\hat{U}n^{3}240.$$

Si $n < 240$, es seguro que el conjunto no cumple la condición del enunciado pues

$$m^2 \geq (n+99)^2 \geq 2n^2$$

y el triángulo de lados n, n, m no puede ser no obtuságulo. En particular la condición se cumple para el conjunto:

$$A = \{240, 241, 242, ..., 339\}$$

Cualquier otro conjunto que cumpla la condición, tendrá sus elementos respectivamente iguales o mayores que los de éste. Este es, por tanto el que da lugar al mínimo S(A).
El número de triángulos que debe considerarse es el de variaciones ternarias con repetición de los elementos de A, que es $100^3 = 1000000$, con lo que el número de lados en total será de 3000000; de ellos habrá 30000 de longitud 240, otros tantos de longitud 241, etc. Luego

$$S(A) = 30000\cdot(240 + 241 + 242 + ... + 339) = 30000\cdot\frac{100\cdot(240+339)}{2} = 868500000\, unidades.$$

Este es el valor mínimo buscado.

2.- Recortamos varios círculos de papel (no necesariamente iguales) y los extendemos sobre una mesa de modo que haya algunos solapados (con parte interior común), pero de tal forma que no haya ningún círculo dentro de otro.
Prueba que es imposible ensamblar las piezas que resultan de recortar las partes no solapadas y componer con ellas círculos distintos.
Solución:

La frontera de las piezas recortadas (que no sean círculos completos) está formada por arcos cóncavos y convexos (vistos desde fuera) que se cortan en puntos que llamaremos vértices. En un vértice pueden concurrir dos arcos cóncavos o uno cóncavo y otro convexo, pero nunca dos convexos ya que éstos únicamente provienen de la frontera de los círculos iniciales. Además, los ángulos que forman los arcos en cada vértice no son de 0º ni de 180º ya que excluimos las tangencias interiores.

Supongamos que tenemos un círculo obtenido ensamblando piezas recortadas. Existe al menos un punto P de la frontera de dicho círculo en el que concurren tres o más arcos de la frontera de las pieza ensambladas (P es vértice de dos o más piezas). La tangente al círculo en P deja a todos los arcos en un mismo semiplano. Elegido un sentido de rotación en P a partir de la tangente, y avanzando en este sentido, el primer arco que encontramos es convexo y el último cóncavo. Por lo tanto es necesario que existan dos arcos consecutivos uno convexo y el otro cóncavo los cuales forman parte de la frontera de una de las piezas ensambladas. Como el arco que forman dichas piezas no puede ser ni 0º ni 180º, el punto P es un vértice de la pieza. Esto es contradictorio pues en ningún vértice pueden concurrir dos arcos convexos vistos desde fuera.
Nota. Hay que entender en el enunciado.que quedan excluidas las tangencias interiores. De no ser así pueden encontrarse contraejemplos como el "despiece" que se muestra en la figura:

3.- Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA}\cdot\frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

Solución:

Dupliquemos el triángulo trazando AD paralela a BC y CD paralela a BA como muestra la figura y tomemos la longitud del lado AB como unidad. Llamando M a la intersección de CD con la recta PQ y x = PB; 1-x = AP, tenemos:

Por semejanza de ΔAQP y ΔQMC: $\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{AP} = \frac{MC}{1-x}$

Por semejanza de ΔGPB y ΔGMD: $\frac{PB}{MD} = \frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}$.

Luego: MD = 2x y MC = 1 - 2x.
Sustituyendo en el primer miembro de la relación del enunciado queda:

$$\frac{PB}{PA}\cdot\frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4} \text{Û} \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \leq \frac{1}{4} \text{Û} 9x^2 - 6x + 1 {}^3 0 \text{Û} (3x-1)^2 {}^3 0$$

Relación válida para cualquier x.

La igualdad se alcanza para $PB = x = \frac{1}{3}$Û$MC = \frac{1}{3}$ ⇔ PQ paralela al lado BC.

4.- Halla las soluciones enteras de la ecuación:

$$p\cdot(x + y) = x\cdot y$$

siendo p un número primo.

Solución:

Ya que p es primo, $p \neq 0$ y $p \neq 1$. De la ecuación resulta que p divide a x o p divide a y. Como la ecuación es simétrica respecto de x e y, si (α, β) es solución, también lo será (β, α).

Si p divide a x, $x = p\cdot a$, $(a \in Z)$ la ecuación se puede poner como:

$$p(pa + y)) = pay \Rightarrow pa + y = ay \Rightarrow y = \frac{pa}{a-1} \quad ya\ que\ a\ es\ entero$$

además a y a - 1 son primos entre sí, luego a - 1 divide a p. Al ser p primo sólo hay cuatro posibilidades: $a - 1 = \pm 1$ y $a - 1 = \pm p$.

Examinemos todos los casos.

i) $a - 1 = -1$, entonces $a = 0$, $x = 0$, $y = 0$

ii) $a - 1 = 1$, entonces $a = 2$, $x = 2p \Rightarrow y = \frac{2p}{2-1} = 2p$.

iii) $a - 1 = p$, entonces $a = p + 1$, $x = p(p + 1) \Rightarrow y = \frac{p(p+1)}{p+1-1} = p + 1$.

iiii) $a - 1 = -p$, entonces $a = 1 - p$, $x = p(1 - p) \Rightarrow y = \frac{p(1-p)}{1-p-1} = p - 1$.

En resumen las soluciones son: (0, 0); (2p, 2p); (p(p+1), p+1); (p(1-p), p-1); y por la simetría añadimos (p+1, p(p+1)); (p-1, p(1-p)).

5.- Demuestra que en el caso de que las ecuaciones:

$x^3 + mx - n = 0$, $nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$ $(n \neq 0)$

tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales y determina entonces las raíces de las dos ecuaciones en función de n.

Solución:

Sea α la raíz común de ambas ecuaciones. Entonces

$$\alpha^3 + m\alpha = n \qquad (1)$$

y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene, tras hacer operaciones:

$$6m\,\alpha^4 + 8m^2\,\alpha^2 + 2m^3 = 0$$

Supongamos $m \neq 0$, entonces simplificando la relación anterior queda:

$$3\,\alpha^4 + 4m\,\alpha^2 + m^2 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo (2) respecto de m obtenemos Analicemos cada caso.
(i) Si $m = -\alpha^2$, sustituyendo en la primera ecuación y despejando n queda: $n = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$ en contra de lo supuesto. Por tanto (i) queda descartado.
(ii) Si $m = -3\alpha^3$, sustituyendo en la primera ecuación y despejando n queda:
$n = \alpha^3 - 3\,\alpha^3 = -2\,\alpha^3$ y la primera ecuación queda:

que, efectivamente, tiene la raíz α doble.
de $n = -2\,\alpha^3$ obtenemos .
Entonces la segunda ecuación es de la forma

,

y, dividiendo por $(x - \alpha)$ resulta ,
cuyas raíces son α y $-5\,\alpha$ siendo doble la última.
Si $m = 0$, las dos ecuaciones son iguales y sus tres raíces son las mismas pero la primera no tiene dos raíces iguales por lo que en el enunciado debería haberse añadido $m \neq 0$.

6.- En la figura, AB es un segmento fijo y C un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros de lados AC y CB, ACB’ y CBA’ en el mismo semiplano definido por AB, y otro de lado AB, ABC’ en el semiplano opuesto. Demuestra:

a) Las rectas AA’, BB’ y CC’ son concurrentes.

b) Si llamamos P al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de P cuando C varía en el segmento AB.

c) Los centros A’’, B’’ y C’’ de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.

d) Los puntos A’’, B’’, C’’ y P están sobre una circunferencia.

Solución:

a) Se traza la circunferencia circunscrita al triángulo ABC’ y se llama P a la intersección de CC’ con ella.

Evidentemente (arco capaz) ∠APB=120º y PC’ es su

bisectriz con lo que ∠APC=∠CPB=60º y P ha de estar en las circunferencias circunscritas a los triángulos ACB’ y BCA’. Por tanto las tres circunferencias se cortan en P.

Como ∠CPB’=120º y ∠CPB=60º sumando queda:

∠BPB’=180º y P está alineado con BB’.

De modo análogo se ve que P está alineado con AA’.

b) Como P está definido por la intersección de la recta CC’ con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC’ el lugar pedido es el arco APB de esa circunferencia.

c) Los lados del triángulo son perpendiculares a las cuerdas PA , PB y PC que forman ángulos de 60º o 120º. por ello, entre sí forman ángulos iguales de 60º.

d) Basta comprobar que los centros C’’, B’’, A’’ y P verifican el teorema de Tolomeo:

$$\overline{PC''A''B''} = \overline{PA''B''C''} + \overline{PB''A''C''}\text{Û}\overline{PC''} = \overline{PA''} + \overline{PB''}\text{Û}\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

siendo la última igualdad evidente por construcción.