Problema 1.

Sean a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinco números positivos en progresión aritmética de razón d. Probar que

$$a_2^3 \le \frac{1}{10}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Solución 1 (del autor de la propuesta).
La desigualdad dada puede escribirse como

$$10a_2^3 \le a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3.$$

y sumando $6a_2^3$ a ambos miembros se convierte en

$$a_2^3 \le \frac{1}{16}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 6a_2^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Por otro lado como a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 están en progresión aritmética, entonces

$$\binom{4}{0}a_0 + \binom{4}{1}a_1 + \binom{4}{2}a_2 + \binom{4}{3}a_3 + \binom{4}{4}a_4 = \left(a_0 + a_4\right)\binom{4}{0} + \left(a_1 + a_3\right)\binom{4}{1} + \binom{4}{2}a_2 =$$
$$2a_2\binom{4}{0} + 2a_2\binom{4}{1} + a_2\binom{4}{2} = a_2\left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] = 2^4 a_2.$$

Aplicando la desigualdad de Jensen a la función $f(t) = t^3$, convexa en $(0, +\infty)$, con $p_k = \binom{4}{k}\frac{1}{2^k}, 0 \le k \le 4$ resulta

$$f\left(\sum_{k=0}^{4} p_k a_k\right) \le \sum_{k=0}^{4} p_k f\left(a_k\right)$$

o equivalentemente,

$$a_2^3 \le \frac{1}{2^k}\left[\binom{4}{0}a_0^3 + \binom{4}{1}a_1^3 + \binom{4}{2}a_2^3 + \binom{4}{3}a_3^3 + \binom{4}{4}a_4^3\right] = \frac{1}{16}\left(a_0^3 + 4a_1^3 + 6a_2^3 + 4a_3^3 + a_4^3\right).$$

Obsérvese que la igualdad tiene lugar cuando los cinco números son iguales y hemos terminado.

Solución 2.

Llamando a al término central y d a la diferencia, la progresión es $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ y tenemos:

$$a_0^3 = \left(a-2d\right)^3 = a^3 - 6a^2d + 12ad^2 - 8d^3$$
$$a_4^3 = \left(a+2d\right)^3 = a^3 + 6a^2d + 12ad^2 + 8d^3$$
$$4a_1^3 = 4\left(a-d\right)^3 = 4a^3 - 12a^2d + 12ad^2 - 4d^3$$
$$4a_3^3 = 4\left(a+d\right)^3 = 4a^3 + 12a^2d + 12ad^2 + 4d^3$$

sumando:

$$a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3 = 10a^3 + 48ad^2$$

dividiendo por 10 queda

$$\frac{1}{10}\left(a_0^3+4a_1^3+4a_3^3+a_4^3\right)-a^3=4,8ad^2\geq 0$$

con independencia del valor de d.

Solución 3.

Como se trata de cinco términos en progresión aritmética, se tiene

$$a_0+a_4=2a_2=a_1+a_3$$

o también

$$a_0a_4=\left(a_2-2d\right)\left(a_2+2d\right).$$

Entonces

$$a_0^3+a_4^3=\left(a_0+a_4\right)^3-3a_0a_4\left(a_0+a_4\right)=8a_2^3-6a_0a_4a_2,$$

y

$$4\left(a_1^3+a_3^3\right)=a\left[\left(a_1+a_3\right)^3-3a_1a_3\left(a_1+a_3\right)\right]=4\left(8a_2^3-6a_1a_0a_2\right).$$

Entonces, lo que hay que probar es

$$a_2^3\leq\frac{1}{10}\left(8a_2^3-6a_0a_1a_2+32a_2^3-24a_1a_3a_2\right)$$

cuyo segundo miembro es

$$4a_2^3-\frac{6}{10}a_2\left(a_0a_4+4a_1a_3\right);$$

trasponiendo términos, la desigualdad a probar se escribe como

$$\frac{3}{5}a_2\left(a_2^2-4d^2+4a_2^2-4d^2\right)\leq 3a_2^3\Leftrightarrow 3a_2^3-\frac{24}{5}d^2\leq 3a_2^3\Leftrightarrow -\frac{24}{5}d^2\leq 0$$

la última desigualdad es cierta y hemos terminado.

Problema 2.

Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión $\dfrac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, siendo m y n enteros no negativos tales que $mn\neq 1$.

Solución.

Sea $\dfrac{m^2+mn+n^2}{mn-1}=k,\ k\in N$ (naturales con el 0).

En el caso $m=n,$ el número $k=3+\dfrac{3}{m^2-1}$ es un entero positivo si $m=0$ ó $m=2;$ de donde $k=0$ ó $k=4$ respectivamente.

El caso $n=0$ lleva a que $k=-m^2$ y por tanto $m=k=0.$

Consideremos ahora las soluciones (m,n) tales que $m>n>0.$ Como la relación dada es equivalente a $m^2-(k-1)mn+n^2+k=0,$ observamos que si (m,n) es una solución y

$n > (k-1)n - m > 0$, entonces $(n,(k-1)n-m)$ es también una solución. La desigualdad $(k-1)n - m > 0$ es cierta en todos los casos porque se convierte sucesivamente en una desigualdad obvia:

$$k > \frac{m+n}{n}, \quad \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1} > \frac{m+n}{n}, \quad n^3 > -m-n.$$

Del mismo modo la desigualdad $n > (k-1)n - m$ es sucesivamente equivalente a:

$$k < \frac{m+2n}{n}, \quad \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1} < \frac{m+2n}{n}, \quad m > n + \frac{3n}{n^2-1} \text{ para } n > 1.$$

Si $3n < n^2 - 1$, esto es si $n \geq 4$, la desigualdad anterior es cierta y por tanto para cada solución (m,n) con $m > n \geq 4$ encontramos una solución (n,p) con $n > p > 0$. De este modo, cada solución es tal que $n \leq 3$.

Para $n = 1$, obtenemos $k = m + 2 - \dfrac{3}{m-1}$, $m = 4$ ó $m = 2$, $k = 7$.

Para $n = 2$, obtenemos $4k = 2m + 5 - \dfrac{21}{2m-1}$, $m = 4$ ó $m = 11$, $k = 4$ ó $k = 7$.

Para $n = 3$, obtenemos $9k = 3m + 10 + \dfrac{91}{3m-1}$, que no conduce a ninguna solución.

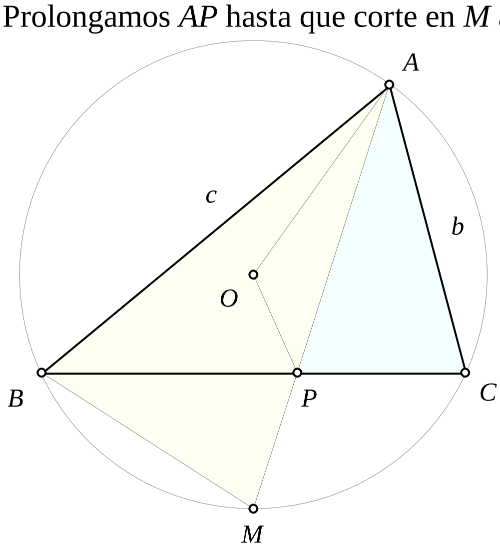
Entonces los posibles valores k enteros no negativos de la expresión del enunciado son 0, 4 y 7.

Problema 3.

Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectriz que parte de A corta al lado opuesto en P. Probar que se cumple:

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = bc$$

Solución:
Prolongamos AP hasta que corte en M al circuncírculo.



Los triángulos ABM y APC son semejantes al tener dos ángulos iguales.($\angle ACB$ = $\angle AMB$ por inscritos en el mismo arco y $\angle BAN$ = $\angle CAN$ por bisectriz).
Entonces:

$$\frac{c}{AM} = \frac{AP}{b} \Leftrightarrow bc = AM \cdot AP$$

como $AM = AP + PM$, queda:

$$bc = AP\left(AP + PM\right) = AP^2 + AP \cdot PM$$

$AP \cdot PM$ es la potencia de P respecto de la circunferencia circunscrita y su valor es $OA^2 - OP^2$ sólo queda sustituir y resulta:

$$bc = AP^2 + OA^2 - OP^2$$

Problema 4.

¿Cuáles son los números enteros positivos que se pueden obtener de exactamente 2007 maneras distintas, como la suma de al menos dos números enteros positivos consecutivos? ¿Cuál es el menor de todos ellos?
Ejemplo: el número 9 se escribe exactamente de dos maneras distintas:

9 = 4 + 5
9 = 2 + 3 + 4

Solución

$$N = a + (a+1) + \ldots + (a+n) = \frac{(n+1)(2a+n)}{2} \Leftrightarrow 2N = (n+1)(2a+n)$$

Si n es par $(n+1)$ es impar y $(2a+n)$ es par.

Si n es impar $(n+1)$ es par y $(2a+n)$ es impar.

Siempre que $2N$ en su descomposición en factores primos tenga un factor impar distinto de uno, existe una descomposición de N en suma de números consecutivos.
En efecto, sea $N = (2q+1)Q$ con q, Q naturales y $q \geq 1$, $Q > 1$, entonces:

a) $2(2q+1).Q = (n+1)(2a+n)$, y hacemos la siguiente descomposición:

$2q+1 = n+1$, es decir $n = 2q$ y $n > 1$

$2Q = 2a + 2q$, de donde $a = Q - q$ Si $a > 0$ ya hemos terminado, en otro caso

$Q - q \leq 0$ y entonces,

b) $2Q = n+1$, de donde $n = 2Q - 1$, es decir $n \geq 1$ y $2a + 2Q - 1 = 2q + 1$ de donde $a = 1 + q - Q$, es decir $a \geq 1$ y ya hemos terminado.
Entonces necesitamos el menor número que en su descomposición tenga 2007 factores impares sin contar el 1.
Si sólo tiene un factor primo es:

$2N = 3^{2007}.2$

Si tiene más de uno $p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma}$.., el número de divisores que tiene es $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)......$, y este producto debe ser 2008 para que excepto l uno tenga 2007 divisores impares distintos.

$2008 = 2^3.251 = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)......$, entonces:

$N = 3^{250}.5^7$, o bien $N = 3^{250}.5^3.7$, o bien $N = 3^{250}.5.7.11$ y este último es el menor.

Problema 5.

Sea $a \neq 1$ un número real positivo y n un entero positivo. Demostrar que $n^2 < \dfrac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$.

Solución.

La desigualdad dada $n^2 < \dfrac{a^n + a^{-n} - 2}{a + a^{-1} - 2}$ es equivalente a $n^2 < \dfrac{\left(a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2}$, que a su vez equivale a que $n < \dfrac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}$, siendo $\alpha = \sqrt{a}$. Entonces, usando la desigualdad aritmético-geométrica, se tiene la desigualdad pedida:

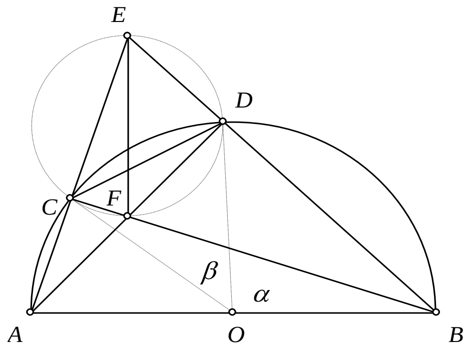
$$\frac{\alpha^n-\alpha^{-n}}{\alpha-\alpha^{-1}}=\alpha^{1-n}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}=\alpha^{1-n}(1+\alpha^2+\alpha^4+...+\alpha^{2n-2})>\alpha^{1-n}n\sqrt[n]{\alpha^{2+4+...+(2n-2)}}=\alpha^{1-n}n\alpha^{n-1}=n.$$

Problema 6.

Dada una semicircunferencia de diámetro $AB = 2R$, se considera una cuerda CD de longitud fija c. Sea E la intersección de AC con BD y F la intersección de AD con BC.
Probar que el segmento EF tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda CD sobre la semicircunferencia.

Solución.
Como los triángulos EFC y EDF son rectángulos, el cuadrilátero EDFC es inscriptible y EF es el diámetro. Llamemos r al radio del circuncírculo de ECD, por el teorema de los senos en ECD:

$$EF=2r=\frac{c}{\operatorname{sen}E} \quad (1)$$



Pongamos $\alpha = \angle BOD$ y $\beta = \angle COD$. Entonces

$$E=\frac{180-\beta}{2}=90-\frac{\beta}{2}$$

expresión que prueba que el ángulo E es constante al serlo β y además el punto E se mueve en el arco capaz de $90-\frac{\beta}{2}$ sobre AB. Sustituyendo en (1) queda:

$EF=2r=\dfrac{c}{\cos\frac{\beta}{2}}\quad(2)$, por otra parte $\operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{c}{2R}\quad(3)$; eliminando β entre (2) y (3) y despejando EF resulta: $EF=\dfrac{2cR}{\sqrt{4R^2-c^2}}$ expresión que muestra que EF es constante al serlo c y R.

Además F es el ortocentro del triángulo ABE como intersección de las alturas AD y BC, por ello EF que está sobre la tercera altura es siempre perpendicular a AB.

También admite solución analítica aunque mucho más larga.