***Primera sesión***

***Mañana del viernes 19 de enero de 2007***

## Problema 1.

Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuantos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

**Solución**: Sea $V$ el número de vértices, $A$ el número de aristas, $D$ el número de diagonales sobre las caras, e $I$ el número de diagonales interiores.

Puesto que cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada, debe haber

$$V = 4 \cdot 12 = 48 \text{ vértices.}$$

(Obtendríamos el mismo resultada contando con hexágonos o con octógonos).

Puesto que de cada vértice salen exactamente 3 aristas, hay $A = 3V/2 = 72$ aristas.

Como que cada cuadrado tiene 2 diagonales, cada hexágono tiene 9 y cada octógono tiene 20, resulta $D = 12 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 20 = 216$ diagonales sobre las caras.

Finalmente, el número pedido $I$ será igual al total de pares de segmentos que se pueden formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, y restando las aristas y las diagonales sobre las caras.

$$I = \binom{48}{2} - A - D = 840.$$

## Problema 2.

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{array}\right\}$$

**Solución**. Dado que $3t^2 - 6t + 4 \geq 0$ para todo $t \in R$, entonces cualquier solución $(x_0, y_0, z_0)$ del sistema verifica que $x_0^3 > 0,\ y_0^3 > 0,\ z_0^3 > 0$. Es decir, $x_0, y_0, z_0$ son números positivos.

Además, sumando las tres ecuaciones resulta

$$\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) + \left(y^3 - 6y^2 + 12y - 8\right) + \left(z^3 - 6z^2 + 12z - 8\right) = 0$$

o equivalentemente,

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0 \quad (1)$$

Ahora distinguiremos dos casos: (a) $x_0 \geq 2$ y (b) $0 < x_0 < 2$.

(a) Si $x_0 \geq 2$, de la última ecuación obtenemos

$$x_0^3 = 6z_0^3 - 12z_0 + 8 \geq 8 \Leftrightarrow 6z_0\left(z_0 - 2\right) \geq 0$$

lo cual solo puede ocurrir si $z_0 = 0$ (imposible) o $z_0 \geq 2$.

Análogamente, resulta que $y_0 \geq 2$ y de (1) se deduce que $x_0 = 2,\ y_0 = 2,\ z_0 = 2$ es la única solución en este caso.

(b) $0 < x_0 < 2$, entonces tenemos

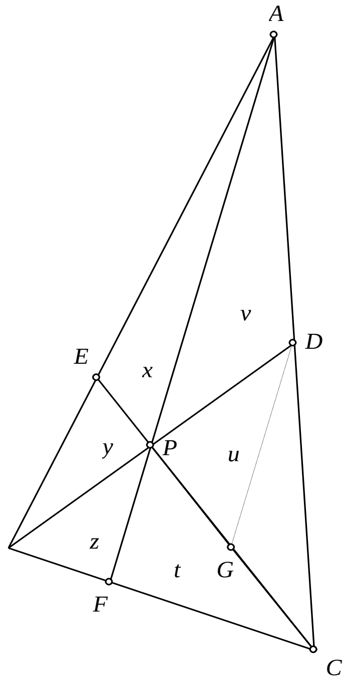
$$x_0^3 = 6z_0^3 - 12z_0 + 8 < 8 \Leftrightarrow 6z_0\left(z_0 - 2\right) < 0$$

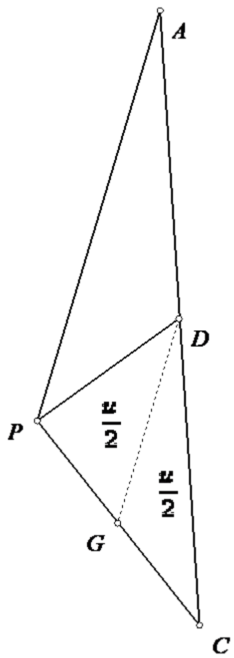
lo cual solo es posible, al ser $z_0 > 0$ , si $z_0 < 2$. Análogamente se obtiene que $y_0 < 2$ lo que contradice la igualdad (1). En consecuencia, la única solución real del sistema es (2, 2, 2) y hemos terminado.

**Problema 3.**

Sea *ABC* un triangulo y *D*, *E* y *F* puntos situados en los segmentos *AC*, *BA* y *CB* respectivamente, de forma que los segmentos *AF*, *BD*, *CE* concurren en un punto *P* interior al triángulo. Sabemos que *BP* = 6, *PD* = 6, *PC* = 9, *PE* = 3 y *AF* = 20. Hallar el área del triángulo *ABC*.

Solución.




Utilizamos varias veces que las áreas de dos triángulos de la misma base son proporcionales a las alturas y que las de dos triángulos de la misma altura son proporcionales a las bases.

Las letras *x*, *y*, *z*, . . . de la figura de la izquierda indican las áreas de los triángulos pequeños donde están situadas. Indicaremos por *S* el área total del triangulo *ABC* pedida. Tenemos

$$\frac{u+v}{S} = \frac{PD}{BD} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x+y}{S} = \frac{EP}{EC} = \frac{1}{4}.$$

También se cumple

$$\frac{PF}{AF} = \frac{PF}{20} = \frac{z+t}{S} = \frac{S-\left(x+y\right)-\left(u+v\right)}{S} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

de donde *PF* = 5 y *AP* = 15.

Comparando las áreas de los triángulos *ABD* y *BDC* y de *PDA* y *PDC* resulta

$$\frac{CD}{AD} = \frac{z+t+u}{x+y+v} = \frac{u}{v} = \frac{z+t}{x+y} = \frac{\frac{1}{4}S}{\frac{1}{4}S} = 1,$$ de donde *CD* = *AD* y $u = v$; por lo que $S = 4u$.

Trazamos ahora una paralela *DG* a *AF* (figura de la derecha). Los triángulos *CAP* y *CDG* son semejantes con razón 1/2. Por tanto $DG = \frac{1}{2}AP = \frac{15}{2}$ y $PG = GC = \frac{9}{2}$.

Puesto que $PD^2 + PG^2 = DG^2$ resulta que el triangulo *DPG* es rectángulo con ángulo recto en *P* indicado en la figura. Su área es *u*/2 = 27/2 de donde *u* = 27 y *S* = 4*u* = 108.

### *Segunda sesión*

### *Tarde del viernes 19 de enero de 2007*

## Problema 4.

Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Solución.

Un tetraedro regular de lado *c* tiene volumen $\frac{\sqrt{2}}{12}c^3$ y cada una de sus caras tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Supongamos (sin perder generalidad) que un cubo de lado 1 se puede obtener uniendo N tetraedros regulares de lado *c*. Entonces se satisface

$$Nc^3\frac{\sqrt{2}}{12}=1$$

Por otro lado, cada cara del cubo estará formada por un número entero, digamos *k*, de caras de tetraedros. Como que el área de una cara del cubo es 1, tenemos

$$kc^2\frac{\sqrt{3}}{4}=1$$

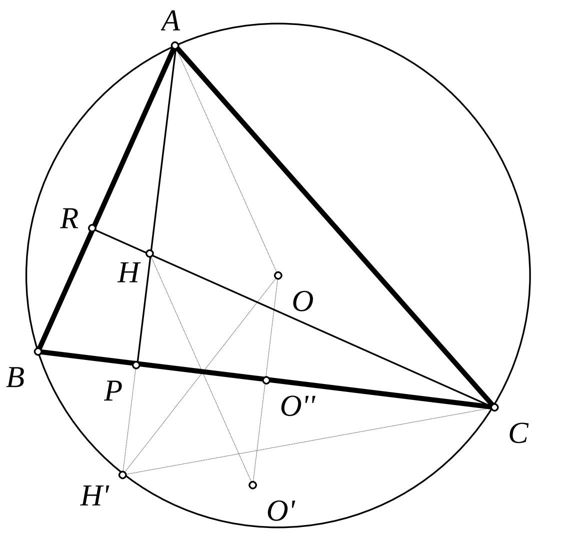
Dividiendo la primera igualdad por la segunda podemos despejar *c* y en particular deducimos que $c^2$ es un número racional. Pero esto es incompatible con la segunda de las ecuaciones.

## Problema 5.

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

**Solución 1**.

Sean el triángulo $\triangle ABC$, su ortocentro *H* y su circuncentro *O*. Sean *H'* y *O'* sus simétricos respecto del lado *BC*.




*i)* Puesto que los triángulos $\triangle BPA$ y $\triangle BCR$ son rectángulos y comparten el ángulo $CBA$, son semejantes y, por lo tanto $BAH' = HCP$.

Pero por ser *H*' simétrico de *H*,

$$HCP = PCH' \text{ y } BAH' = BCH'$$

Cosa que prueba que H' está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$.

*ii)* Nuevamente por ser *H*' simétrico de *H*, $OH'H = H'HO'$ y, por ser *HH*' y *OO*' dos paralelas cortadas por la secante *HO*', $H'HO' = OO'H$, obteniendo

$$OH'H = OO'H$$

*iii)* Pero *OA* y *OH*' sor radios de la circunferencia circunscrita y, en consecuencia, el triángulo $\triangle H'OH$ es isósceles, por lo que $OH'H = HAO$ y, finalmente,

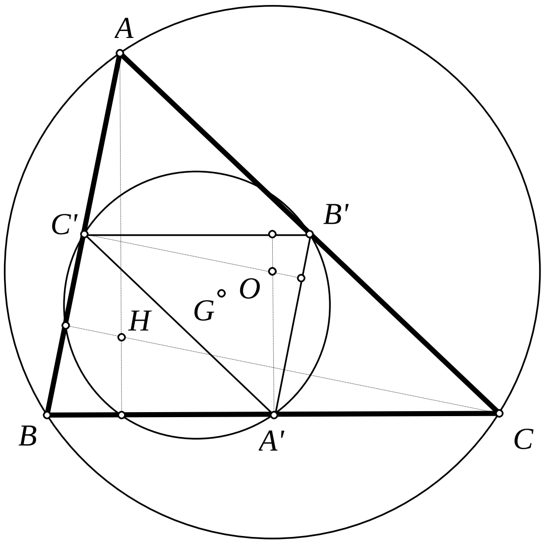
$$OO'H = HAO$$

y el cuadrilátero *AHO'O* es un paralelogramo. Resulta:

$$AH = OO' = 2OO''.$$

**Solución 2.** (Aportada por Arnau Messegué Buisan, clasificado en la Fase Local de Cataluña).

Sean *A*', *B*', *C*' los puntos medios de los lados *BC, CA* y *AB* respectivamente.
La circunferencia que pasa por *A*', *B*', *C*' (circunferencia medial) es la imagen de la circunscrita a *A, B, C* en la semejanza de centro el baricentro *G* y razón $-\frac{1}{2}$.




Obviamente el circuncentro *O* de *ABC* es el ortocentro de *A*'*B*'*C*' y se sigue el resultado al corresponderse los segmentos *AH* y *A'O* en la semejanza anterior.

## Problema 6.

Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$$

**Solución**. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-x-x} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} = 3^{\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z\right)+1}$$

$$= 3^{\frac{1}{3}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]} \geq 3^0 = 1$$

La igualdad se verifica cuando *x* = *y* = *z* = 1. Por tanto, la única solución es (*x*, *y*, *z*) = (1, 1, 1) y hemos terminado.

***Primera sesión***

***Mañana del sábado 20 de enero de 2007***

## Problema 1.

Para cuatro puntos no coplanarios, un plano ecualizador es un plano tal que las distancias respectivas de cada uno de los puntos a ese plano son todas iguales. Dado un conjunto de cuatro puntos no coplanarios, ¿cuántos planos ecualizadores hay?

**Solución**:

Sean A, *B*, *C* y *D* cuatro puntos no coplanarios. Sea *p* un plano ecualizador de esos puntos y examinemos las posibilidades:

*i)* Si *A, B, C* y *D* están en el mismo semiespacio en que *p* divide al espacio, está claro que uno de los dos planos paralelos a *p*, a la misma distancia que están los cuatro puntos de *p*, contiene a todos esos puntos, contra la hipótesis de no coplanariedad. Por lo tanto, los puntos no pueden estar todos en el mismo lado del plano ecualizador.

*ii)* Sea *A* en un lado del plano y *B, C* y *D* en el otro. Es obvio que *p* es paralelo al plano *q* determinado por los puntos *B, C* y *D* y corta al segmento que proyecta A sobre el plano q en su punto medio. Por lo tanto, en esas condiciones, el plano ecualizador existe y es único. Ahora, tomando cada vez uno cualquiera de los otros puntos como "punto aislado" en un lado del plano, obtenemos otros tantos planos ecualizadores. En consecuencia, con un punto en un lado y los otros tres en el otro, hay exactamente cuatro planos ecualizadores.

*iii)* Sean ahora *A* y *B* en un lado del plano *p* y *C* y *D* en el otro. Consideremos el plano *r* que contiene a *A* y *B* y es paralelo al segmento *CD* y el plano s que contiene a *C* y *D* y es paralelo al segmento *AB.*

Entonces, los planos *r* y *s* son paralelos y el plano ecualizador *p* es el plano equidistante de los planos *r* y s, que también está determinado de forma única. Dado el punto *A*, la elección de su "pareja" en uno de los lados de *p* determina otros tantos planos ecualizadores, tres en total.

Así, pues, para cuatro puntos no coplanarios dados, hay exactamente siete planos ecualizadores.

## Problema 2.

Encontrar todas las soluciones enteras posibles, *x* e *y*, de la ecuación:

$$p\left(x+y\right)=xy$$

siendo *p* un cierto número primo.

**Solución**:

De $p\left(x+y\right)=xy$ y del hecho que *p* es un número primo se deduce que *p* divide a *x* o a *y*. Puesto que, en el enunciado, los papeles de *x* e *y* son completamente simétricos, se puede, sin pérdida de generalidad, suponer que p divide a *x* y que, en consecuencia, hay un número *k* tal que

$$x=kp$$

Entonces, la ecuación propuesta queda

$$p\left(kp+y\right)=kpy$$

o sea,

$$kp+y=ky$$

Ahora, unas cuantas manipulaciones:

$$kp+y=ky\Rightarrow 0=ky-kp-y=k\left(y-p\right)-y\Rightarrow p=k\left(y-p\right)-y+p=\left(k-1\right)\left(y-p\right)$$

Ponen de manifiesto que $k-1$ es un divisor de $p$ y, dado que $p$ es primo, hay cuatro posibilidades:
*i)* Que $k-1=-p$. Obtenemos que $k=1-p$ y, por lo tanto,

$$x=(1-p)\,p,\quad y=p-1$$

*ii)* Que $k-1=-1$. Resulta que $k=0$, o sea,

$$x=0,\quad y=0$$

*iii)* Que $k-1=1$. Entonces $k=2$ y resulta:

$$x=2p,\quad y=2p$$

*iiii*) Que $k-1=p$. Entonces $k=p+1$ y resulta:

$$x=p(p+1),\quad y=p+1$$

que son todas las posibles soluciones de la ecuación propuesta.

## Problema 3.

Sea $a_n=1+n^3$ la sucesión {2, 9, 28, 65, . . .} y $\delta_n=\text{mcd}(a_{n+1},a_n)$ Hallar el máximo valor que puede tomar $\delta_n$.

**Solución**: $\delta_n$ divide a $a_{n+1}$ y a $a_n$ , y por tanto a su diferencia $b_n=a_{n+1}-a_n=3n^2+3n+1$.
También divide a $c_n=3a_n-nb_n=3-n-3n^2$ y a la suma $d_n=b_n+c_n=4+2n$. Pero entonces $\delta_n$ también divide a $e_n=2b_n-3nd_n=2-6n$. Finalmente, divide a $3d_n+e_n=14$.
Pero $b_n=3n^2+3n+1=3n(n+1)+1$ es un número impar, luego $\delta_n$ solamente puede ser 1 o 7. El máximo es 7 ya que mcd ($5^3$ + 1, $6^3$ + 1) = 7.

***Segunda sesión***

***Tarde del sábado 20 de enero de 2007***

## Problema 4.

Sean *a, b, c, d* números enteros positivos que satisfacen *ab* = *cd*. Demostrar que *a* + *b* + *c* + *d* no es un número primo.

**Solución**:

Usando la hipótesis *ab* = *cd* se escribe

$$a(a+b+c+d) = (a+c)(a+d)$$

de donde se obtiene que si *a* + *b* + *c* + *d* fuese primo debería dividir a *a* + *c* o *a* + *d* que son menores que él.

## Problema 5.

Dado un entero $k \geq 1$, definimos $a_k$ como el número entero que en base diez se escribe

$$a_k = \overset{k}{11\ldots1}$$

(es decir, un 1 repetido *k* veces). Demostrar que $a_k$ divide a $a_l$ si y sólo si *k* divide a *l*.

**Solución**:

Si $l = dk + r$ donde *r* es más pequeño que *k*, entonces

$$a_l = a_k 10^r \left(1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{(d-1)k}\right) + a_r$$

(Pondremos $a_0 = 0$.) Si *k* divide a *l* será *r* = 0 y es evidente que $a_r = 0$ de forma que $a_k$ divide a $a_l$. Recíprocamente, si $a_k$ divide a $a_l$ entonces debe ser $a_r = 0$ y por tanto *r* = 0.

## Problema 6.

Sea *P* un punto interior a un triángulo *ABC*. Por *P* se trazan paralelas *KP*, *MP* y *NP* a los lados *AB*, *AC* y *BC* que dividen el triángulo inicial en tres triángulos y tres paralelogramos. Sean $S_1$, $S_2$, $S_3$ las áreas de los nuevos triángulos y *S* el área del triángulo *ABC*. Probar que

$$S \leq 3(S_1 + S_2 + S_3)$$

Solución. Sea *L* el punto de intersección de *KP* con el lado *BC* y sean $h_i, i = 1,2,3$ las alturas de los nuevos triángulos y *h* la altura de $\triangle ABC$. Dado que cada uno de los triángulos son semejantes con *ABC*, se tiene

$$\frac{S_1}{S} = \frac{KP \cdot h_1}{AB \cdot h} = \frac{KP^2}{AB^2}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{MN \cdot h_2}{AB \cdot h} = \frac{MN^2}{AB^2}$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{PL \cdot h_3}{AB \cdot h} = \frac{PL^2}{AB^2}$$

De donde resulta

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{KP + MN + PL}{AB} = 1$$

y

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática resulta

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \le 3\sqrt{\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}}$$

con lo que

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2 \le 3\left(S_1 + S_2 + S_3\right)$$

Finalmente, obsérvese que la igualdad tiene lugar cuando $P$ coincide con el baricentro $G$ del triángulo.