Problema 1
Sean a y b enteros. Demostrar que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$$

admite a lo sumo una solución entera.
Solución.
Sea el entero p una raíz, entonces: $(x-a)(x-b)(x-3)+1$ se anula para $x = p$, es decir

$$(p-a)(p-b)(p-3)=-1$$

Distingamos varios casos
1.- $(p-3)=1 \Rightarrow p=4$
entonces para los otros factores tenemos dos posibilidades:
$\left.\begin{array}{r}(p-a)=-1 \Rightarrow a=p+1=5 \\ (p-b)=1 \Rightarrow b=p-1=3\end{array}\right\}$ sustituyendo queda la ecuación

$$(x-3)^2(x-5)+1=x^3-11x^2+39x-44=0$$

y una vez separada la raíz 4 resulta la ecuación $x^2-7x+11=0$ que no tiene raíces enteras.
$\left.\begin{array}{r}(p-a)=1 \Rightarrow a=p-1=3 \\ (p-b)=-1 \Rightarrow b=p+1=5\end{array}\right\}$ idéntico al anterior.
2.- $(p-3)=-1 \Rightarrow p=2$
entonces para los otros factores tenemos dos posibilidades:
$\left.\begin{array}{r}(p-a)=1 \Rightarrow a=p-1=1 \\ (p-b)=1 \Rightarrow b=p-1=1\end{array}\right\}$ sustituyendo queda la ecuación

$$(x-1)^2(x-3)+1=x^3-5x^2+7x-2=0$$

y después de separar la raíz 2 resulta $x^2-3x+1=0$ que no tiene raíces enteras.
Finalmente,
$\left.\begin{array}{r}(p-a)=-1 \Rightarrow a=p+1=3 \\ (p-b)=-1 \Rightarrow b=p+1=3\end{array}\right\}$ sustituyendo queda la ecuación

$$(x-3)^3+1=x^3-9x^2+27x-26=0$$

y después de separar la raíz 2 resulta $x^2-7x+13=0$ que no tiene raíces.

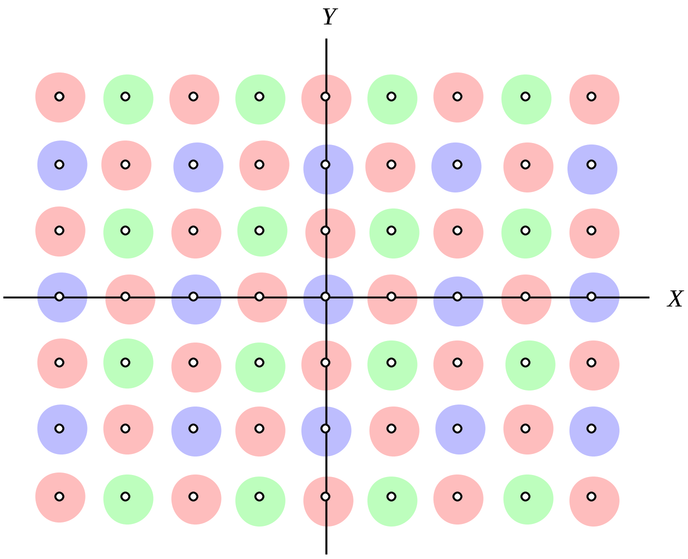
Problema 2
¿Es posible colorear los puntos del plano cartesiano Oxy de coordenadas enteras con tres colores, de tal modo que cada color aparezca infinitas veces en infinitas rectas paralelas al eje Ox y tres puntos cualesquiera, cada uno de distinto color, no estén alineados? Justificar la contestación.

Solución oficial.
Probemos que tal coloración es posible. Pintemos el punto (x, y) de rojo si $x+y$ es par, de blanco si x es impar e y es par y de azul si x es par e y es impar.
Claramente se satisface la condición de que cada color aparezca infinitas veces en infinitas rectas paralelas al eje OX.
Supongamos ahora que (x_1, y_1) sea rojo, (x_2, y_2) sea blanco y (x_3, y_3) sea azul. Entonces x_2-x_1 e y_2-y_1 tienen paridad opuesta y x_3-x_2 e y_3-y_2 son ambos impares. Por tanto:

$(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \neq (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)$, con lo cual : $\dfrac{(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)} \neq \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$, lo que significa que tres puntos cualesquiera, cada uno de distinto color, no están alineados.

Solución de Miguel Teixidó Román

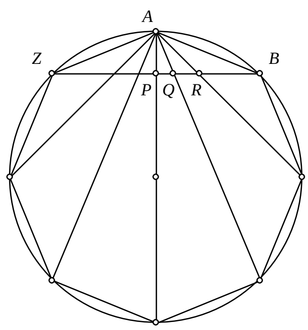
Consideremos una coloración de $\mathbb{Z}^2$ d acuerdo con las siguientes reglas:
-Azul si sus dos coordenadas son pares.
-Verde si ambas coordenadas son impares.
-Naranja cuando tienen una coordenada de cada paridad.
Demostraremos que tal coloración cumple las condiciones requeridas.



Observamos que tres puntos *A*, *B*, *C* de $\mathbb{Z}^2$ están alineados si y sólo si existe *k* tal que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Caso 1. Supongamos que *A* azul, *B* verde y *C* naranja con la primera coordenada par están alineados, la condición $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ sobre la primera componente queda: $b_x - a_x = k\left(c_x - a_x\right)$ y reduciéndola módulo 2 resulta: $1 - 0 = k\left(0 - 0\right) \Leftrightarrow 1 = 0 \cdot k$ contradicción que prueba que no existen tales puntos.
Caso 2. Igual que el anterior con la primera coordenada de *C* impar y por tanto la segunda par.
Razonando del mismo modo sobre la segunda componente tenemos:
$b_y - a_y = k\left(c_y - a_y\right)$ y módulo 2 resulta $1 - 0 = k\left(0 - 0\right) \Leftrightarrow 1 = 0 \cdot k$ y la correspondiente contradicción.
La segunda condición también se cumple:
El azul se repite infinitamente en las rectas de la forma $y = k$ para *k* par.
El verde se repite infinitamente en las rectas de la forma $y = k$ para *k* impar.
El naranja se repite infinitamente en las rectas de la forma $y = k$ para cualquier k.

Problema 3

Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado.
Sea *ABC...XYZ* un polígono regular de *n* lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n - 3$ diagonales que salen del vértice *A* dividen al triángulo *ZAB* en $n - 2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.



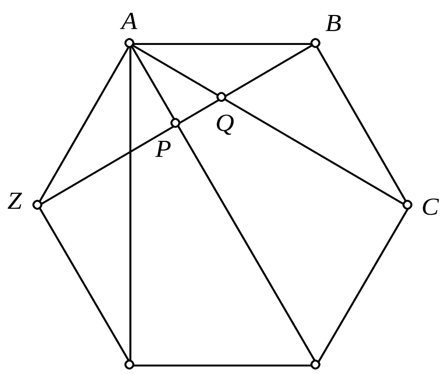
Solución oficial.
El ángulo formado pos dos diagonales consecutivas con un extremo en *A* es el mismo por inscrito en el mismo arco α.
Sean *PQ* y *QR* dos segmentos adyacentes sobre el segmento *ZB*, determinados por tres diagonales consecutivas. Entonces

$$S_{APQ} = \frac{1}{2} h \cdot PQ = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot sen\alpha$$
$$S_{AQR} = \frac{1}{2} h \cdot QR = \frac{1}{2} AQ \cdot AR \cdot sen\alpha$$

donde *h* es la altura común a todos los triángulos. Por tanto

$$\frac{AP \cdot AQ}{PQ} = \frac{AQ \cdot AR}{QR},$$

es decir, la razón *r* del producto de dos lados a la base es la misma para cualquier par de triángulos adyacentes, y por tanto es la misma para todos ellos. Pero el primero y el último son claramente multiplicativo al tener dos lados iguales y el tercero igual a 1. Se deduce que $r = 1$ y todos los triángulos son multiplicativos.



Solución de Anas El Barkani que mereció una mención especial del jurado.
Vamos a probar el enunciado demostrando que si un triángulo es multiplicativo, también lo es el colindante.
Obsérvese primero que el triángulo *ABQ* es isósceles puesto que los ángulos *A* y *B* abarcan el mismo arco. Es obvio que el triángulo *ABQ* es multiplicativo pues $AB = 1$.

$$QB = AQ \cdot AB = AQ \cdot 1 = AQ \quad (1)$$

Ahora bien, si aplicamos el teorema de la bisectriz al triángulo *APB* tenemos que:

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{QB}{AB} = AQ \Rightarrow PQ = AQ \cdot AP$$

lo que prueba que APQ también es multiplicativo.
c.q.d.

Problema 4
Probar que para todo entero positivo *n*, la expresión decimal de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

es periódica mixta.
Solución:
Tenemos

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$$

Sabemos que para que una fracción origine un decimal periódico mixto, una vez reducida debe tener en el denominador algún factor primo del conjunto $\{2,5\}$ y alguno que no sea ni 2 ni 5.

Veamos primero que la fracción anterior tiene en el denominador al menos una factor 2 más que en el numerador, en efecto
Si *n* es par tenemos $n = 2k$ que una vez sustituido resulta:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{12k^2+12k+2}{2k(2k+1)(2k+2)}=\frac{6k^2+6k+1}{2k(2k+1)(k+1)}$$

el numerador es impar y el denominados par.
Si n es impar tenemos $n=2k+1$ que una vez sustituido resulta:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{12k^2+24k+11}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)}$$

el numerador es impar y el denominados par.
En ambos casos el denominador tiene al menos un factor 2 que no está en el numerador.
Además la expresión $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}$ muestra que el numerador no contiene el factor primo 3 (da resto 2 al dividirlo entre tres) mientras el denominador al ser producto de tres números consecutivos es múltiplo de tres.

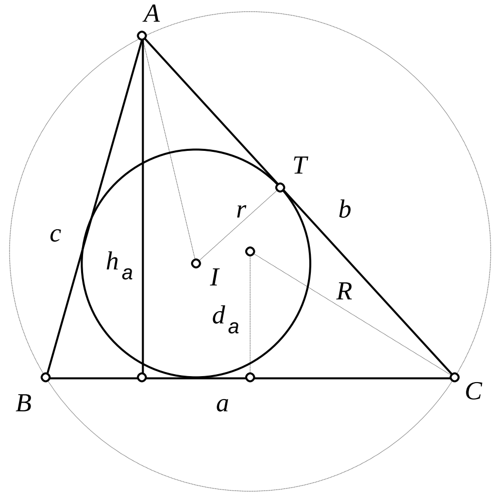
Problema 5
Sean r,s,u,v números reales cualesquiera. Probar que:

$$\text{mín}\left\{ r-s^2, s-u^2, u-v^2, v-r^2 \right\} \le \frac{1}{4}.$$

Solución.
Supongamos que los cuatro números $r-s^2, s-u^2, u-v^2$ y $v-r^2$ son mayores estrictamente que $\frac{1}{4}$. Entonces $r-s^2+s-u^2+u-v^2+v-r^2>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, pero esta expresión es equivalente a $0>\left(\frac{1}{2}-r\right)^2+\left(\frac{1}{2}-s\right)^2+\left(\frac{1}{2}-u\right)^2+\left(\frac{1}{2}-v\right)^2$ que es una contradicción.

Problema 6
En un triángulo de lados *a, b, c* el lado *a* es la media aritmética de *b* y *c*. Probar:
a) 0º ≤ A ≤ 60º.
b) La altura relativa al lado *a* es tres veces el inradio *r*.
c) La distancia del circuncentro al lado *a* es $R-r$.
Solución.
a) Por la desigualdad triangular:

$$\left.\begin{array}{l} b\le \frac{b+c}{2}+c \Leftrightarrow b\le 3c \Leftrightarrow \frac{b}{c}\le 3 \\ c\le \frac{b+c}{2}+b \Leftrightarrow c\le 3b \Leftrightarrow \frac{b}{c}\ge \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}\le\frac{b}{c}\le 3$$



Por el teorema de coseno:

$$\frac{(b+c)^2}{4}=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow \cos A=\frac{3b^2+3c^2-2bc}{8bc}$$

dividiendo numerador y denominador por c^2 y llamando por comodidad de escritura $x=\frac{b}{c}$, queda:

$$\cos A = f(x)=\frac{3x^2-2x+3}{8x}=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{8x} \text{ con } \frac{1}{3}\le x\le 3.$$

Fácilmente se comprueba que $f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(3\right)=1$ y que la derivada se anula en x = 1 donde hay un mínimo que vale $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$.

También puede localizarse el mínimo sin recurrir a la derivada teniendo en cuenta la desigualdad de las medias:

$$\cos A = f\left(x\right)=\frac{3x^2-2x+3}{8x}=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{8x}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cdot 2$$

con igualdad para x = 1.

Resumiendo queda $\frac{1}{2}\leq \cos A\leq 1 \Leftrightarrow 60º\geq A\geq 0º$.

b) Designando A, B y C a los vértices opuestos a los lados a, b y c respectivamente, I al incentro y h_a a la altura correspondiente al lado a como se indica en la figura, S al área y p al semiperímetro, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} S = pr=\dfrac{a+b+c}{2}r=\dfrac{3ar}{2} \\ S=\dfrac{1}{2}ah_a \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3ar}{2}=\frac{1}{2}ah_a \Leftrightarrow 3r=h_a$$

c) Pongamos d_a a la distancia entre el circuncentro y el lado a.

De una parte $d_a{}^2=R^2-\frac{a^2}{4}$ (1)

y de otra $tg\,\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}=\frac{2r}{a}$.

Como $2R=\frac{a}{senA}$ y $senA=\frac{1+tg\,\frac{A}{2}}{2tg\,\frac{A}{2}}$, resulta:

$$2R=a\frac{1+\frac{4r^2}{a^2}}{\frac{4r}{a}}=\frac{a^2}{4r}+r\Rightarrow \frac{a^2}{4}=2Rr-r^2$$

que sustituida en (1) queda:

$$d_a{}^2=R^2-\frac{a^2}{4}=R^2-2Rr+r^2=\left(R-r\right)^2\Leftrightarrow d_a=R-r$$

Solución de Elisa Lorenzo García.

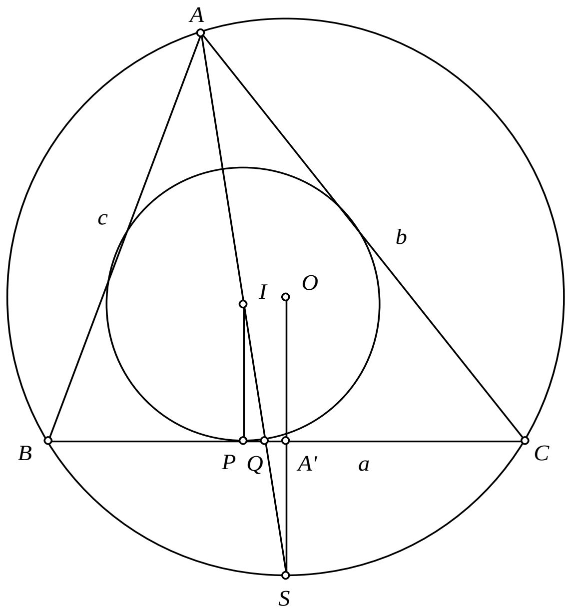
Los apartados a) y b) son esencialmente iguales a los de la solución oficial.

Para el apartado c) se da la solución que sigue sin utilizar trigonometría.

Q es la intersección de la bisectriz de A con la mediatriz de a que está en el punto medio del arco BC.

Llamando $x=PB$, resulta

$$\left.\begin{array}{r} a = x + y = \dfrac{b+c}{2} \\ b = y + z \\ c = z + x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3c-b}{4}$$



Aplicando el teorema de la bisectriz:

$$\frac{c}{BQ} = \frac{b}{CQ}$$

y

$$BQ + CQ = a = \frac{b+c}{2} \Rightarrow BQ = \frac{c^2 + bc}{2b+2c}$$

además $BA' = \dfrac{b+c}{4}$ por ser la mitad de *a*.

Calculemos

$$QA' - PQ = BA' - BQ - BQ + BP = \frac{b+c}{4} - 2\frac{c^2+bc}{2b+2c} + \frac{3c-b}{4} = \frac{b-b+c+3c}{4} - \frac{c^2+bc}{b+c} = c - c = 0$$

de donde $QA' = PQ$ y como $IPQ = QA'S = 90º$ y $IQP = A'QS$, resulta que los triángulos *PIQ* y *A'SQ* son iguales y $IP = A'S = r$ de donde queda finalmente:

$$OA' = OS - A'S = R - r$$