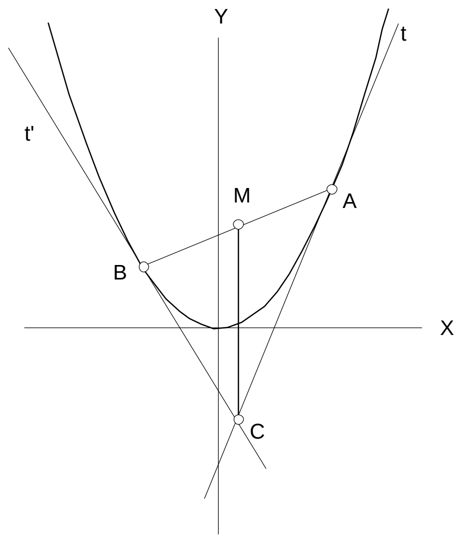
XXXV
OLIMPÍADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

FASE NACIONAL
Primera Sesión
Granada, 12 de Marzo de 1999

Problema 1.

Las rectas t y t', tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos A y B, se cortan en el punto C.
La mediana del triángulo ΔABC correspondiente al vértice C tiene longitud m.
Determinar el área del triángulo ΔABC en función de m.



Solución:
Sean $A(a, a^2)$; $B(b, b^2)$. Las ecuaciones de t y t' son:

$$t: y = 2ax - a^2, \quad t': y = 2bx - b^2$$

y su intersección C es: $C\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$.

La mediana CM está en la recta: $x = \frac{a+b}{2}$, paralela al eje OY. Las coordenadas de M son: $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$.

Tenemos: $m = CM = \frac{(a-b)^2}{2}$ y si h es la altura del triángulo ΔBMC resulta: $h = \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}}$

Poniendo $[XYZ]$ para denotar el área del triángulo de vértices X,Y,Z queda finalmente:

$$[ABC] = 2[BMC] = 2\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{m^3}{2}}$$

Problema 2.

Probar que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

Solución:
Lo haremos por inducción sobre n, para n = 2 basta tomar $a_1 = 3$; $a_2 = 4$ con $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Supongamos que $a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 = k^2$. Veamos que podemos encontrar un entero positivo a_{n+1} tal que $k^2 + a_{n+1}^2 = p^2$.
En efecto, $k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 = (p + a_{n+1})(p - a_{n-1})$.
Pongamos $a = p + a_{n+1}; b = p - a_{n+1}$.

Tenemos: $p=\dfrac{a+b}{2}$; $\quad a_{n+1}=\dfrac{a-b}{2}$; $\quad k^2=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{a-b}{2}$.

La última expresión exige que a y b son de la misma paridad. Distinguiremos dos casos

1.- a y b son pares, entonces $k^2 = 4m$. Tomado $a = 2m$; $b = 2$ queda:

$$p=m+1=\frac{k^2}{4}+1;\quad a_{n+1}=m-1=\frac{k^2}{4}-1$$

2.- a y b son impares, entonces $k^2 = 2m + 1$. Tomando $a = 2m +1$, $b = 1$ queda:

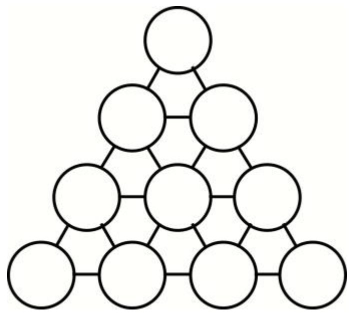
$$p=m+1=\frac{k^2-1}{2}+1;\quad a_{n+1}=m=\frac{k^2-1}{2}$$

En ambos casos hemos encontrado a_{n+1} entero verificando el enunciado.

Segunda Sesión
Granada, 13 de Marzo de 1999

Problema 3.

Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero como se indica en la figura; se juega un solitario.



Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento.

Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?

Solución:

En el tablero, hay casillas de tres tipos : vértice, lado, o interiores. Cada una de ellas tiene, respectivamente, dos, cuatro o seis casillas vecinas.

Si pudiéramos retirar todas las fichas del tablero, habría un momento en que quedaría sobre él una única ficha negra. Esa ficha era inicialmente blanca, luego ha tenido que cambiar de color un número impar de veces. Pero esto es imposible, porque una ficha se vuelve cada vez que se retira una ficha vecina, y ninguna ficha tiene un número impar de casillas vecinas.

Problema 4.

Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

Solución:

Hay 27 posibles resultados para la suma de dígitos (de 1 a 27). Las sumas 1 y 27 sólo se puede obtener de un modo (100 y 999) En el caso más desfavorable al sacar 52 (27 + 25) tarjetas todas repetirán suma dos veces y en la siguiente (extracción 53) una de ellas aparecerá por tercera vez.

Por tanto el número pedido es 27 + 25 + 1 = 53.

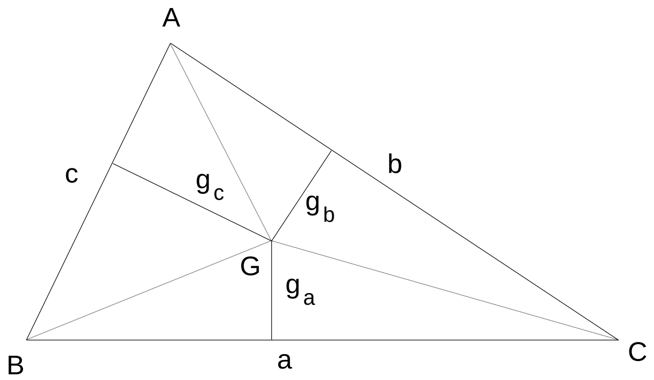
Problema 5.

El baricentro del triángulo ΔABC es G. Denotamos por g_a, g_b, g_c las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente.
Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que:

i) $g_a \geq \frac{2r}{3}$, $g_b \geq \frac{2r}{3}$, $g_c \geq \frac{2r}{3}$

ii) $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

Solución 1 (del autor del problema):



i) Es sabido que uniendo G con cada vértice, se forman tres triángulos BGC de base a y altura g_a, AGC de base b y altura g_b y AGB de base c y altura g_c de la misma área.
Por tanto, llamando S al área de ABC:

$$a\cdot g_a = b\cdot g_b = c\cdot g_c = \frac{2S}{3} \quad (1)$$

Por otra parte sabemos que $r\cdot(a + b + c) = 2S$ (basta unir el incentro con los tres vértices y quedan tres triángulos de bases a, b, c y altura común r).
Sustituyendo 2S en (1), y despejando queda:

$$g_a = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{a}; \quad g_b = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{b}; \quad g_c = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{c} \quad (2)$$

y por la desigualdad triangular $(b + c \geq a)$, resulta : $\frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a} \geq 2$, de donde $g_a \geq \frac{2r}{3}$ y de modo análogo para g_b y g_c .

b) De (2) , haciendo los inversos y sumando resulta:

$$\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c} = \frac{3a}{r(a+b+c)} + \frac{3b}{r(a+b+c)} + \frac{3c}{r(a+b+c)} = \frac{3}{r}$$

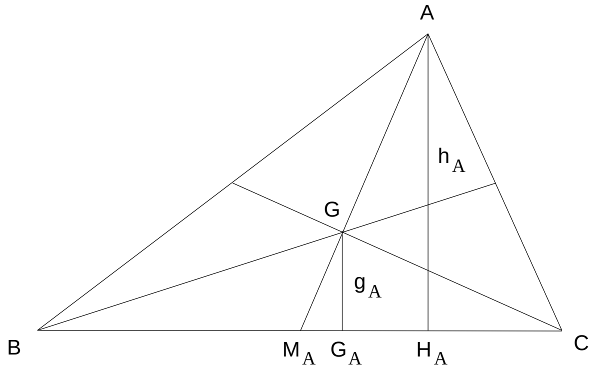
finalmente, aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica:

$$\frac{g_a + g_b + g_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c}} = \frac{3}{\frac{3}{r}} = r \Leftrightarrow \frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$$

Nota.- Sumando las tres desigualdades de a) sólo obtenemos $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 2$

Solución 2 (de Ramón José que mereció mención especial)

i) Consideremos los puntos M_A, H_A, G_A como indica la figura.
Pondremos h_A a la altura correspondiente a A, p el semiperímetro y S el área de ABC.



Los triángulos AM_AH_A y GM_AG_A son semejantes siendo la razón de semejanza 3 (propiedad del baricentro sobre cada mediana).
Entonces

$$h_A = 3\, g_A \quad (1)$$

Por la desigualdad triangular:

$$b + c \geq a \Leftrightarrow 2p \geq 2a \Leftrightarrow p \geq a \Leftrightarrow \frac{a}{p} \leq 1$$

multiplicando por h_A y teniendo en cuenta (1) queda:

$$g_A \geq \frac{ah_A}{3p} \Leftrightarrow g_A \geq \frac{2S}{3p}$$

finalmente, como $S = pr$ resulta $g_A \geq \frac{2}{3} r$.
Análogamente obtendríamos las correspondientes desigualdades para g_B y g_C .

ii) Usaremos la desigualdad $x + \frac{1}{x} \geq 2$ que se deduce de la obvia $(x-1)^2 \geq 0$. (Consideraremos siempre x positivo).
Tenemos entonces:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 6$$

Sumando 3, ordenando y operando resulta:

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9 \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

sacando factor común, dividiendo por 3 y poniendo $2p = a + b + c$, queda:

$$\frac{2p}{3a} + \frac{2p}{3b} + \frac{2p}{3c} \geq 3 \quad (2)$$

Por otra parte, como $3g_a = h_A; \quad 3g_b = h_B; \quad 3g_c = h_C$, resulta $2S = 3g_a a = 3g_b b = 3g_c c$
Despejando *3a*, *3b y 3c* y sustituyendo en (2), queda:

$$(g_a + g_b + g_c)\frac{p}{S} \geq 3$$

Finalmente usando de nuevo $S = pr$, resulta $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

Problema 6.

Se divide el plano en un número finito de regiones N mediante tres familias de rectas paralelas. No hay tres rectas que pasen por un mismo punto.
¿Cuál es el mínimo número de rectas necesarias para que N>1999?
Solución:

Supongamos que hay x rectas en la primera familia, y en la segunda y z en la tercera. Las x rectas de la primera familia determinan $x + 1$ regiones. La primera recta de la segunda familia determina en el plano $(x+1)\cdot 2$ regiones, la segunda $(x+1)\cdot 3$..... la y -ésima determina $(x + 1)(y + 1)$ regiones.
La primera recta de la tercera familia es cortada por las $x + y$ rectas existentes en $x + y + 1$ partes y cada una de estas partes divide a en dos a cada región existente de modo que el número de regiones se incrementa en $x + y + 1$ regiones. Cada recta de la tercera familia aumenta las regiones existentes en la misma cantidad; luego el número total de regiones N vale:

$$N = (x+1)(y+1) + z(x+y+1) = x + y + z + xy + xz + yz + 1 = n + m + 1$$

con $n = x + y + z$ y $m = xy + xz + yz$.
Tenemos:
$m = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}\left((y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\right) \le x^2 + y^2 + z^2$, entonces
$n^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2m \ge 3m \Leftrightarrow m \le \frac{n^2}{3}$ y $N = n + m + 1 \le n + \frac{n^2}{3} + 1$.
Para $n = 76$, $n^2 + \frac{n^2}{3} + 1 > 2002$. Así, si $n = 76 = x + y + z$ con $x = 26$, $y = 25$, $z = 25$, resulta:
$m = 1925$ y $N = 2002$.