Problema 1
Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todas nueves. Por ejemplo si p = 13, 999999 = 13·76923

Solución de Luis Hernández Corbato de Madrid.

Sea a_i el número compuesto por i nueves $a_i = \overbrace{99\ldots9}^{i}$. Supongamos que $\exists p$ tal que $p \nmid a_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ para probar por contradicción el enunciado.
Considérense en dicho caso los números $\{a_1, a_2, \ldots a_p\}$, en este conjunto sabemos que no hay ningún $a_i \equiv 0\,(p)$ (por hipótesis) . Por tanto al haber p números y sólo p – 1 restos posibles módulo p, se sabe que existen m, n tales que $a_m - a_n \equiv 0\,(p)$.
Suponemos sin pérdida de generalidad que $m > n$ y:

$$p \mid a_m - a_n = \overbrace{99\ldots9}^{m} - \overbrace{99\ldots9}^{n} = \overbrace{99\ldots9}^{m-n}\overbrace{00\ldots0}^{n} = a_{m-n} \cdot 10^n$$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5 \Rightarrow p \nmid 10^n = 2^n \cdot 5^n \Rightarrow p \mid a_{m-n}$ y como a_{m-n} pertenece al conjunto escogido por ser $m - n < n$ y $m - n \geq 1$ se ha llegado a una contradicción. Por ende:

$$\forall p \ \exists a_i \text{ tal que } p \mid a_i$$

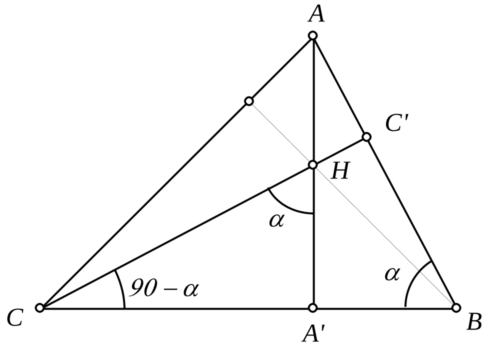
y el enunciado queda probado.

Problema 2
¿Existe algún conjunto finito de números reales M que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números a, b cualesquiera de M, el número $2a - b^2$ sea también un elemento de M?

Solución de Víctor González Alonso de Burgos.

Como M es finito, necesariamente estará acotado.
Pongamos $M \subset [x, y]$, con x = Mín M e y = Máx M. Supongamos $x \leq 0$:
Tenemos $x \leq 0 \Rightarrow 2x \leq x \Rightarrow 2x - k^2 < x$ (k cualquier número de M). Esto contradice que x sea el mínimo de M. Por tanto $x > 0$ y $0 < x < y$.
En cualquier casi debe ser:
(1) $x \leq 2x - y^2 \leq y$ y además (2) $x \leq 2y - y^2 \leq y$.
De (1) se desprende que : $x \leq 2x - y^2 \Rightarrow 0 \leq x - y^2 \Rightarrow y^2 \leq x < y$; que sólo se cumple si $y \in (0, 1)$.
De (2) obtenemos que: $2y - y^2 \leq y \Rightarrow y - y^2 \leq 0 \Rightarrow y \leq y^2$; y esto sólo es cierto si $y \in [1, +\infty)$.
Como (1) y (2) deben cumplirse a la vez, no existe ningún $y \in$ R que pueda ser máximo de M por lo que no estaría acotado y no sería finito.

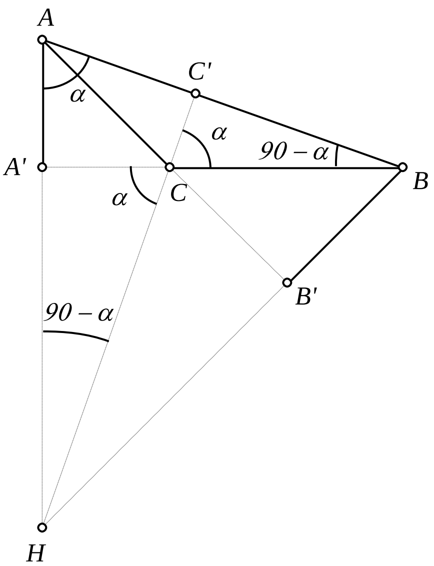
Problema 3
Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\angle BCA$.



Solución de Ibón Arregui Bilbao del País Vasco.

Ángulo $C < 90°$.
Llamaremos A' al punto en que la altura de A corta al lado BC del triángulo ABC, y C' al punto donde la altura de C corta al lado AB del triángulo ABC.

El ángulo $\angle CHA'$ es igual al ángulo $\angle AHC'$. En el triángulo $CA'H$, el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto el ángulo $\angle HCA'$ es 90º - α . En el triángulo AHC' el ángulo $\angle HC'A$ es recto, por tanto el ángulo $\angle HAC'$ es 90º - α .
El ángulo $\angle HAC'$ es igual al ángulo $\angle A'AB$ del triángulo $A'AB$ que es rectángulo por tanto el ángulo $\angle A'BA$ es α.
De aquí concluimos que los triángulos CHA' y $A'AB$ son semejantes, y como $CH = AB$, son triángulos iguales de donde obtenemos que $AA' = CA'$, por tanto el valor de tg $C = 1$, y $C = 45º$.



Ángulo $C > 90º$.
Procediendo de modo análogo el ángulo $\angle A'CH$ es igual al ángulo $\angle C'CB$. En el triángulo $C'CB$ el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto el ángulo $\angle A'HC$ es 90º - α y en el triángulo $CC'B$ el ángulo $\angle CC'B$ es recto y por tanto $\angle C'BC$ es 90º - α.
El triángulo $AA'B$ es rectángulo en A' y por ello $\angle BAA'$ es α.
Entonces los triángulos $AA'B$ y $A'CH$ son semejantes y tienen la hipotenusa igual, luego son iguales y deducimos $AA' = A'C$, entonces la tangente de C vale –1 y $C = 135º$.

Finalmente, si fuese $C = 90º$, C coincide con H y $CH = 0$.
Como $AB \neq 0$, este valor de C no es válido.

Problema 4
Sea x un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostrar que tanto x como x^2 son irracionales.

Solución:
Primero veamos que x no puede ser entero. Esto puede hacerse teniendo en cuenta que si lo fuese, sería un divisor de 20, y basta probar los 8 divisores para comprobar que ninguno verifica la ecuación.
Otro modo de verlo es comprobar que $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ es estrictamente creciente (su derivada es positiva para todo x) y además $f(1) = 13$ y $f(2) = 36$.
Luego no hay raíces enteras.
Veamos que x no puede ser racional por reducción al absurdo. Supongamos que $x = p/q$ con $q \geq 1$ y p/q irreducible. Entonces

$$p^3 = 20q^3 - 10q^2 p - 2qp^2 = q\left(20q^2 - 10qp - 2p^2\right)$$

Si q fuera estrictamente mayor que 1, la igualdad anterior estaría en contradicción con la hipótesis de que p/q es irreducible. Por tanto $q = 1$, x sería entero lo que es imposible. Luego x es irracional.
Para la irracionalidad de x^2 basta ver que

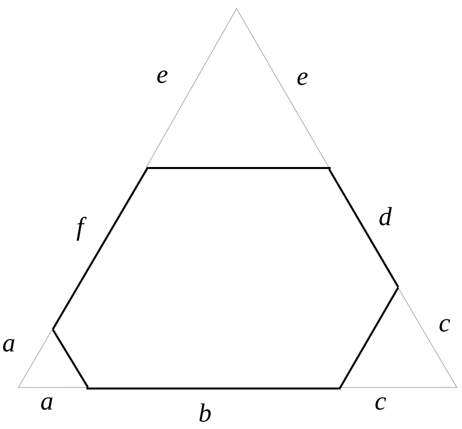
$$x\left(x^2 + 10\right) = 20 - 2x^2 \Rightarrow x = \frac{20 - 2x^2}{x^2 + 10},$$

y si x^2 fuese racional, también los sería x en contra de lo probado.

Problema 5
¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

Solución:
La idea es prolongar los lados para formar un triángulo equilátero.

$$a + b + c + d + e + f = 21$$
$$l = a + b + c = c + d + e = e + f + a$$
$$3l = 21 + a + c + e, \text{ por tanto}$$
$$l = 7 + (a + c + e) / 3$$



El valor más pequeño de $a + c + e$ es 6 y el más grande 15 así que

$$9 \le l \le 12$$

Si $a + c + e = 6$, entonces son:

$(a, c, e) = (1, 2, 3)$ y $(b, c, d) = (4, 5, 6)$

Si $a + c + e = 9$ el único caso posible es:

$(a ,c, e) = (1, 3, 5)$ y $(b, c, d) = (2, 4, 6)$

Si $a + c + e = 12$ el único caso posible es $(a ,c, e) = (2, 4, 6)$

Si $a + c + e = 15$ el único posible es $(4, 5, 6)$.

Como el área del triángulo de lado l es $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ y la del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{4}\left[l^2 - \left(a^2 + c^2 + e^2\right)\right]$, las áreas posibles son:

Si $a + c + e = 6$, entonces $l = 9$ y el área $\frac{67\sqrt{3}}{4}$

Si $a + c + e = 9$, entonces $l = 10$ y el área $\frac{65\sqrt{3}}{4}$

Si $a + c + e = 4$, entonces $l = 11$ y el área $\frac{65\sqrt{3}}{4}$

Si $a + c + e = 5$, entonces $l = 12$ y el área $\frac{67\sqrt{3}}{4}$

Problema 6

Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

Solución de Mohammed Blanca Ruiz de Valencia.

Tenemos la cadena con el total de $4n$ bolas, $2n$ blancas y $2n$ negras. Cogemos un grupo de un extremos con $2n$ bolas, este grupo tendrá x bolas negras e y bolas blancas, de forma que la diferencia es $x - y = 2k$ para $k \in \{-n, 1-n, \ldots, 0, \ldots n-1, n\}$.

Vamos moviéndonos de una en una posición hacia el extremo contrario, en cada movimiento la diferencia varía en 2 o no varía, es decir k aumente en 1, disminuye en 1 o no cambia.

La diferencia varía en 2 si la bola que se deja y que se coge son de distinto color y no se mantiene si son del mismo color.

La posición final, es decir en el otro extremo, tendrá las bolas al revés, x bolas blancas e y bolas negras con lo que la diferencia (blancas - negras) será ahora $y - x = -2k$, para el mismo k.

Es decir que k pasa de una posición a su opuesta con el mismo valor absoluto. Como k sólo puede variar de 1 en 1 tiene que pasar por el cero ya que no se lo puede saltar.

En el momento en que $k = 0$, $x = y = n$, c.q.d.

Siempre se podrá cortar un segmento de longitud $2n$ con n bolas blancas y n bolas negras.