Soluciones XXXVII Olimpiada

Primera sesión

1.- Prueba que la gráfica del polinomio P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $P(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2)$, para todo $x \in R$.

Solución:

Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas. Sea $x - a = h$ ó $x = a + h$. Entonces :

$$\begin{cases} P(a-h) = b - hQ(h^2) \\ P(a+h) = b + hQ(h^2) \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2} = b,$$ para todo $h \in R$. Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$.

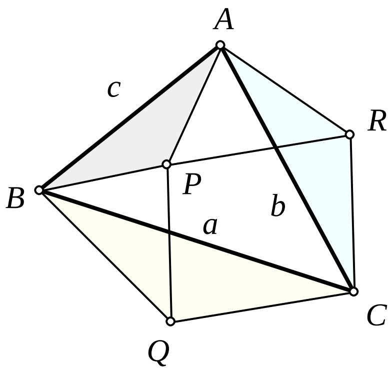
Sea $x = a + h$, $P(x) = P(a+h) = R(h)$. La condición $\frac{P(a-h)+P(a+h)}{2} = b$ es equivalente a $R(-h) + R(h) = 2h$, porque $P(a-h) = R(-h)$. Para $R(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$, la condición anterior se escribe de la forma: $a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + a_0 - a_1 + a_2 h^2 - ... + (-1)^n a_n h^n = 2b$ es decir $a_0 + a_2 h^2 + ... + a_m h^m = b$, para cada $h \in R$. $m = n$ n par, $m = n - 1$ n impar.

Se deduce que $a_2 = a_4 = ... = a_m = 0$, $a_0 = b$.

Por tanto ahora se tiene que $R(h) = b + a_1 h + a_3 h^3 + ...$ y así existe un polinomio Q tal que $R(h) = b + hQ(h^2)$, para algún polinomio Q. Por último $P(x) = R(h) = b + (x-a)Q((x-a)^2)$.

2.- Sea P un punto, en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP es isósceles. Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BCQ y CAR, ambos semejantes al triángulo ABP.

Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.



Solución:

Los triángulos ABC y PBQ son semejantes pues tienen un ángulo igual $\angle ABC = \angle PBQ$ y los lados que lo forman proporcionales:

$$\frac{c}{a} = \frac{BP}{BQ}$$

De modo análogo, ABC es semejante a APR , por tanto PBQ y APR son semejantes (y al ser $PB = PA$ son iguales).

En particular: $\angle ARP = \angle ACB$ y $\angle BQP = \angle ACB$

Llamando $\alpha = \angle BAP = \angle ABP$, resulta:

$$\angle QPR = 360º - (180 - 2\alpha) - (A + B) = 180º + 2\alpha - (180º - \angle ACB) = 2\alpha + \angle ACB$$

$$\angle QCR = \angle ACB + 2\alpha$$

$$\angle PRC = 180º - 2\alpha - \angle ARP = 180º - 2\alpha - \angle ACB$$

$$\angle PQC = 180º - 2\alpha - \angle BQP = 180º - 2\alpha - \angle ACB$$

Las cuatro igualdades establecen que los dos pares de ángulos opuestos del cuadrilátero $PQCR$ son iguales y es un paralelogramo.

La alineación es un caso particular y se producirá cuando $\angle ACB + 2\alpha = 180º$, es decir cuando

$$\alpha = \frac{180º - \angle ACB}{2}.$$

3.- Están dados 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.

Demuestra que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

Solución:

Supongamos que $0 < a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Si ningún triángulo es acutángulo, tendríamos:

$$a_1^2 + a_2^2 \le a_3^2 \quad (1)$$
$$a_2^2 + a_3^2 \le a_4^2 \quad (2)$$
$$a_3^2 + a_4^2 \le a_5^2 \quad (3)$$

Pero (desigualdad triangular):

$$a_5 < a_1 + a_2, \text{ luego } a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \quad (4)$$

Sumando las desigualdades (1),(2),(3) y (4) tenemos:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

es decir,

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$$

Como $a_2 \le a_3$, resulta $2a_2^2 \le a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$, y por tanto $a_2 < a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

Segunda sesión

4.- Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3.
Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas y los tres que se leen en columnas.
¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?
Solución
Consideremos la distribución:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Resulta:

$$S = abc + def + ghi + adg + beh + cfi =$$

$$100\,(a + c + f + b + a + d + g) + 10(d + e + f + b + e + h) + (g + h + i + c + f + i) =$$

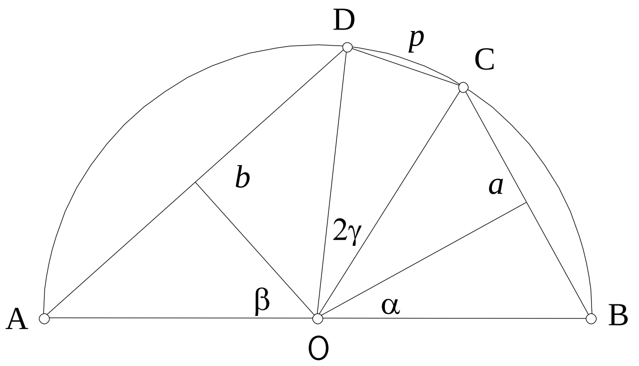
$$200\,a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i$$

Módulo 9 tenemos:

$$S = 2(a + b + c + \dots h + i) = 2.45 = 0$$

Como 2001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2001.

5.- *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que *AB* es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita.
Probar que: $CD \le 2\sqrt{5} - 4$
Solución:
Sea O el centro de la semicircunferencia.
Pongamos a = BC; b = AD; p = CD;
$2\alpha = \angle BOD$; $2\beta = \angle AOD$; $2\gamma = \angle COD$.
La condición necesaria y suficiente para que ABCD admita una circunferencia inscrita es:



$$p + 2 = a + b \quad (1)$$

Como $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180º$, entonces

$$\beta = 90 - (\alpha + \beta)$$

y además:

$$a = 2sen\alpha; \quad p = 2sen\gamma; \quad b = 2sen\beta = 2\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma - 2sen\alpha\ sen\gamma$$

Vamos a expresar la condición (1) en función del ángulo α y el dato p que determina por completo el cuadrilátero.

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - p^2}}{2},$$

de donde:

$$b = \sqrt{4 - p^2}\,\cos\alpha - psen\alpha$$

sustituyendo en (1), queda:

$$p + 2 = 2sen\alpha + \sqrt{4 - p^2}\cos\alpha - psen\alpha$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{4 - p^2}\cos\alpha + (2 - p)sen\alpha = p + 2 \quad (2)$$

Por tanto, existirá circunferencia inscrita para los valores de *p* que hagan compatible la ecuación (2) en la incógnita α.
Puede expresarse el seno en función del coseno y estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene, pero es más rápido interpretar la ecuación (2) como el producto escalar de los vectores $\vec{u}(\cos\alpha, sen\alpha)$de módulo 1 y $\vec{v}\left(\sqrt{4 - p^2}, 2 - p\right)$. La condición (2) queda:

$$|\vec{v}|\cos\delta = p + 2 \quad (3)$$

siendo δ el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Para que (3) sea compatible debe cumplirse $p + 2 \le |\vec{v}| = \sqrt{4 - p^2 + (2 - p)^2}$, elevando al cuadrado y operando queda:

$$p^2 + 8p - 4 \le 0$$

Las raíces de la ecuación son $p = \pm 2\sqrt{5} - 4$.
Como *p* es positivo la condición final es:

$$0 \le p \le 2\sqrt{5} - 4$$

6.- Determinar la función $f : N \to N$ (siendo $N = \{1,2,3,...\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera $s, n \in N$, las dos siguientes condiciones:
a) $f(1) = 1$, $f(2^s) = 1$.
b) Si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \le 2001$.
Hallar el menor número natural *n* tal que $f(n) = 2001$.
Solución
Para cada número natural *n* definimos $f(n)$ como la suma de las cifras de la expresión de *n* escrito en base 2. Está claro que esta función f cumple las condiciones a) y b). Además, es la única función que las cumple, porque el valor de $f(n)$ viene determinado por las condiciones a) y b). Probamos esa afirmación por inducción sobre *n*. Si $n = 1$ o $n = 2^s$, $f(n) = 1$. Supongamos $n > 1$, $n \neq 2^s$ y que es conocido $f(m)$ para todo $m < n$; se puede escribir $n = 2^s + m$ con $m < 2^s$ tomando 2^s la mayor potencia de 2 que es menor que *n*; entonces $f(n) = f(m) + 1$.
Ahora, es fácil resolver las dos cuestiones que nos plantean:

En el primer caso, se trata de ver cuántos unos puede tener como máximo un número menor o igual que 2001 escrito en base 2. Ese número, escrito en base 2, es, obviamente, 1111111111, que corresponde a $n = 1023 = 2^{10} - 1$. Es $f(n) = 10$.

En el segundo caso, razonando de manera análoga, se observa que la respuesta es $n = 2^{2001} - 1$.