1.- Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

Solución 1.

Por la simetría bastará considerar 0 < α < 90º, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta.

El área pedida S(α) sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el PA'M.
Llamando x al cateto PA' e y al cateto A'M, el área de cuatro triángulos vale 2xy. Como el lado B'A' vale 1, tenemos:

$$x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}(1)$$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda:

$$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}(2)$$

pero $x = \sqrt{x^2 + y^2}cos\alpha, y = \sqrt{x^2 + y^2}sen\alpha$, y sustituyendo en (1) resulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2}(1 + cos\alpha + sen\alpha) = 1Û\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1+sen\alpha+cos\alpha}$$

sustituyendo en (2) y operando obtenemos:

$$2xy = 1 - \frac{2}{1+sen\alpha+cos\alpha} = \frac{sen\alpha+cos\alpha-1}{sen\alpha+cos\alpha+1}.$$

Finalmente para el área pedida obtenemos:

$$S(\alpha) = 1 - \frac{sen\alpha+cos\alpha-1}{sen\alpha+cos\alpha+1} = \frac{2}{sen\alpha+cos\alpha+1} \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 90º$$

Solución 2.
El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura OPM.
Tomando como base b = MP, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale ½.
En el triángulo PA'M se tiene:

MA' = b cos α, PA' = b sen α ; pero BM = MA' y PA = PA', además:

BM + MP + PA = 1 ⇔ b cos α + b + b sen α = 1,

de donde

$$b = \frac{1}{sen\alpha+cos\alpha+1}$$

y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{sen\alpha+cos\alpha+1} = \frac{2}{sen\alpha+cos\alpha+1} \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 90º$$

2.- Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución:
Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras.

Como $1000 \le n \le 9999$ y $n = s^3$, resulta

$$11 \le s \le 21 \qquad (1)$$

Si n = xyzt, tenemos:

$$1000x + 100y + 10z + t = s^3 \qquad (2)$$
$$x + y + z + t = s$$

restando queda:

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \qquad (3)$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que

$$s^3 - s = (s - 1)\, s\, (s + 1)$$

y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9:

$$16 \cdot 17 \cdot 18; \quad 17 \cdot 18 \cdot 19 \text{ y } 18 \cdot 19 \cdot 20$$

sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1º

$$999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$$

resulta inmediatamente $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4913$

2º

$$999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$$

de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente $n = 5832$

3º

$$999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$$

resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son

4913 y **5832**

3.- Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Solución:

Los triángulos ΔABC y ΔADC son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales ya que:

∠ADC = ∠BCM = ∠BAC (la primera igualdad por ser AC y CM paralelas y la segunda por ser ∠BCM ángulo semiinscrito) y el ángulo ∠ACD es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \text{Û} \overline{CD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 (1)$$

De modo análogo los triángulos ΔABC y ΔABE son semejantes pues:

∠AEB = ∠EBM = ∠BAC y el ángulo ∠ABE es común.

Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{Û} \overline{BE} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 (2)$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2) se obtiene el resultado.

4.- Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

Solución.

Sean α, β, γ los tres ángulos y supongamos α ≤ β ≤ γ . Si fuera $g^3 \frac{p}{2}$, tendría que ser $\alpha < \frac{p}{4}$ y entonces tg α no es entero.

Si tg α > 1, entonces α ≥ arc tg 2 > arc tg $\sqrt{3} = \frac{p}{3}$, imposible porque α + β + γ = π.

Por tanto tg α = 1 y β + γ = $\frac{3p}{4}$, con lo que:

$$tg(\beta + g) =- 1 = \frac{tg\beta+tgg}{1-tg\beta tgg}$$

relación que operada se convierte en:

$$(\text{tg } \beta - 1)(\text{tg } \gamma - 1) = 2$$

de donde, por ser enteros positivos, se sigue tg β = 2 y tg γ = 3.

Existe una visualización “sin palabras” de la solución: arc tg 1 + arc tg 2 + arc tg 3 = π.

5.- Hallar todas las funciones $f: N \to N$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2\, f(n)$$

para n = 1, 2, 3, ...

Solución:
Supongamos f(1) = b. Entonces, f(1 + b) = 2b, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1 + 1) < \ldots < f(1 + b) = 2b = b + b.$$

y resulta que f(1), f(2),….f(1+ b) son b + 1 naturales, distintos, el primero vale b y el último 2b, por tanto han de ser consecutivos.
resulta entonces:

$$f(1) = b,\ f(2) = 1 + b,\ f(3) = 2 + b, \ldots\ldots, f(1 + b) = b + b.$$

En general, para n > 1, si f(n) = c , f(n + c) = 2c = c + c y resulta que:

c = f(n) < f(n + 1) <.…< f(n + c) = c + c y los números f(n), f(n + 1), ….., f(n + c) son consecutivos.
Así pues,

$$f(n) = n - 1 + f(1)$$

6.- Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de n × n ensamblando piezas del tipo:

Solución:
Evidentemente n^2 debe ser múltiplo de 4 y, por tanto n necesariamente es par.

Si n = 4k podemos dividir cualquier cuadrado n × n en k^2 sub-cuadrados del tipo 4 × 4 cada uno de los cuales lo podemos rellenar en la forma señalada en la figura de la izquierda.

Queda sólo considerar el caso n = 4k + 2. Veamos que en ese caso la repuesta es negativa.
Supongamos que fuera posible.
Si pintamos cada cuadradito alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza:

Sea a el número de piezas del tipo de las de la izquierda y b el número de piezas del tipo de las de la derecha.
Tenemos:

$$a + b = \frac{(4k+2)^2}{4} = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

luego a + b ha de ser impar.
Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, se tiene:

3a + b = 3b + a $\Leftrightarrow$ a = b, de donde a + b = 2a ha de ser par en contradicción con lo anterior.