

### Problema 1

Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes enteros, demostrar que si existe un entero  $k$  tal que ninguno de los enteros  $P(1), P(2), \dots, P(k)$  es divisible por  $k$ , entonces  $P(x)$  no tiene raíces enteras.

Solución.

Por reducción al absurdo. Si  $n$  fuese una raíz, por una parte tenemos

$$P(x) = (x - n)Q(x)$$

y por otra siempre existen enteros  $q$  y  $r$  tales que  $n = kq + r$ , con  $1 \leq r \leq k$  (basta hacer la división entera y en el caso de ser resto cero se rebaja el cociente en una unidad), entonces

$$P(r) = (r - n)Q(r) = -kqQ(r)$$

en contra de lo supuesto en el enunciado.

### Problema 2

Las dimensiones de un paralelepípedo de madera son enteras. Pintamos toda su superficie (las seis caras) y lo cortamos en cubos de una unidad de arista y observamos que exactamente la mitad de los pequeños cubos no tienen ninguna cara pintada. Probar que el número de paralelepípedos con tal propiedad es finito.

(Puede resultar útil tener en cuenta que  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 1,79... < 1,8$ ).

Solución . Consiste en acotar el número de soluciones de la ecuación diofántica:

$$abc = 2(a-2)(b-2)(c-2)$$

y para ello suponiendo que  $a \leq b \leq c$ , se pone en la forma:  $\frac{1}{2} = \frac{a-2}{a} \cdot \frac{b-2}{b} \cdot \frac{c-2}{c}$ , y como

$$\left(\frac{a-2}{a}\right)^3 \leq \frac{1}{2} < \frac{a-2}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a-2}{a} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

fácilmente se obtiene que  $4 < a < 10$ .

Fijado  $a$  se acotan de modo análogo los posibles valores de  $b$ :

De una parte

$$\frac{a}{2(a-2)} = \frac{b-2}{b} \cdot \frac{c-2}{c} \Rightarrow \left(\frac{b-2}{b}\right)^2 \leq \frac{a}{2(a-2)} < \frac{b-2}{b}$$

y de ahí se sigue

$$\frac{a}{2(a-2)} < \frac{b-2}{b} < \sqrt{\frac{a}{2(a-2)}} \leq \sqrt{\frac{5}{6}} < 1$$

con lo que para cada valor de  $a$ ,  $b$  sólo puede tomar un conjunto finito de valores.

Finalmente fijados  $a$  y  $b$  a lo sumo hay un valor para  $c$  que cumpla la ecuación inicial lo que prueba que el número de soluciones es finito.

### Problema 3

$ABC$  es un triángulo isósceles con  $AB = AC$ . Sea  $P$  un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados  $AB$  en  $B$  y a  $AC$  en  $C$ .

Pongamos  $a$ ,  $b$  y  $c$  a las distancias desde  $P$  a los lados  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$  respectivamente. Probar que:

$$a^2 = b \cdot c$$

Solución:

Pongamos  $m = PB$ ;  $n = PC$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  las proyecciones de  $P$  sobre cada lado y sea  $P'$  el punto diametralmente opuesto a  $P$ .

Por la semejanza de los triángulos  $PBP'$  y  $PBS$  se tiene:

$$\frac{m}{c} = \frac{2r}{m} \Leftrightarrow m^2 = 2cr \quad (1)$$

De modo análogo por la semejanza de  $PCP'$  y  $PBC$  se cumple:

$$\frac{n}{b} = \frac{2r}{n} \Leftrightarrow n^2 = 2br \quad (2)$$

Por el teorema de los senos en  $PBC$ :

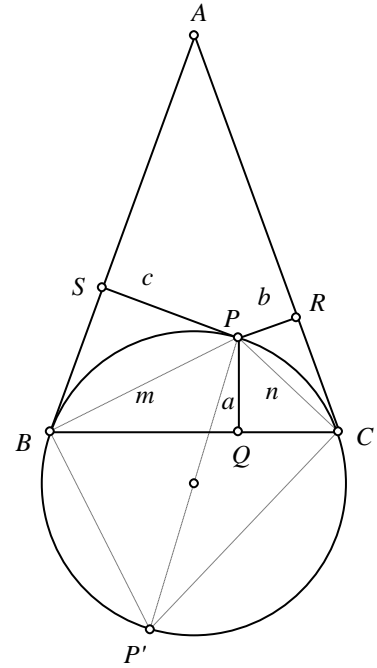
$$\widehat{\text{sen}(PBC)} = \frac{n}{2r}$$

y en el triángulo rectángulo  $PQB$ :

$$\widehat{\text{sen}(PBC)} = \frac{a}{m}$$

de donde  $a = \frac{mn}{2r} \Leftrightarrow a^2 = \frac{m^2 n^2}{4r^2}$  y por (1) y (2) queda finalmente:

$$a^2 = \frac{2cr \cdot 2br}{4r^2} = b \cdot c$$



#### Problema 4.

Hallar todas las funciones  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy)$$

para todo par de números reales  $x$  e  $y$  positivos, siendo  $\lambda$  un número real positivo tal que  $f(\lambda) = 1$ .

Solución:

Haciendo  $x = y = 1$  en la ecuación funcional dada se tiene que  $f^2(1) + f^2(\lambda) = 2f(1)$ . De este modo  $(f(1) - 1)^2 = 0$  y así  $f(1) = 1$ . Sustituyendo ahora  $y = 1$  en la ecuación funcional resulta

$f(x)f(1) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f(\lambda) = 2f(x)$ , que es equivalente a  $f(x) = f\left(\frac{\lambda}{x}\right)$  para todo  $x > 0$ . Tomemos a continuación  $y = \frac{\lambda}{x}$  y observemos que

$$f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f(x) = 2f(\lambda).$$

Entonces  $f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 1$ , por lo que  $f^2(x) = 1$  para todo  $x > 0$ .

Sustituyendo  $x = y = \sqrt{t}$  de nuevo en la ecuación funcional inicial se tiene que

$f^2(\sqrt{t}) + f^2\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}}\right) = 2f(t)$  y debido a ser el miembro de la izquierda positivo  $f$  es positivo y

$f(x)=1$  para todo  $x > 0$ . Se comprueba fácilmente que esta función constante e idénticamente igual a 1 es solución de la ecuación funcional del enunciado y además es la única.

### Problema 5

Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Solución. Si el producto  $N = (n-1)n(n+1)(n+2)$  fuese un cuadrado, basta ponerlo en la forma

$$N = (n-1)n(n+1)(n+2) = (n^2 + n - 2)(n^2 + n) = (n^2 + n - 1)^2 - 1$$

de donde se sigue una contradicción (no hay dos cuadrados consecutivos).

Si  $N$  fuese cubo perfecto, podemos suponer que  $n > 2$  (si  $n = 2$ ,  $N = 24$ ).

Distinguimos ahora dos casos:

a)  $n$  impar, entonces  $n$  es primo con los otros tres factores y si  $N$  es cubo perfecto, también lo es

$$M = (n-1)(n+1)(n+2) = n^3 + 2n^2 - n - 2$$

pero si  $n > 2 \Rightarrow n^3 < n^3 + 2n^2 - n - 2 < (n+1)^3$  y ya tenemos la contradicción pues entre dos cubos consecutivos no puede haber otro cubo.

b) si  $n$  es par,  $n+1$  es impar y por tanto  $n+1$  es primo con el producto

$$M = (n-1)n(n+2) = n^3 + n^2 - 2n$$

que también debe ser cubo perfecto.

Finalmente, como  $x > 2 \Rightarrow x^3 < x^3 + x^2 - 2x < (x+1)^3$  se sigue la contradicción.

### Problema 6

Las diagonales  $AC$  y  $BD$  de un cuadrilátero convexo  $ABCD$  se cortan en  $E$ . Denotamos por  $S_1, S_2$  y  $S$  a las áreas de los triángulos  $ABE, CDE$  y del cuadrilátero  $ABCD$  respectivamente.

Prueba que  $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$ . ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución:

Denotando, como en el enunciado, la áreas de los triángulos  $BCE$  y  $DAE$  por  $S_3$  y  $S_4$  respectivamente, tenemos que probar que  $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$ .

Elevando al cuadrado la anterior desigualdad, se obtiene la desigualdad equivalente  $2\sqrt{S_1 S_2} \leq S_3 + S_4$  (1).

Sean ahora  $K$  y  $L$  los pies de las perpendiculares en la diagonal  $AC$  trazadas desde  $D$  y  $B$  respectivamente. Estos puntos  $K$  y  $L$  pueden estar dentro o fuera del segmento  $AC$ . Llamamos  $b = BL$ ,  $d = DK$ ,  $m = AE$ ,  $n = CE$ . Entonces

$$S_1 = \frac{1}{2}mb, \quad S_2 = \frac{1}{2}nd, \quad S_3 = \frac{1}{2}nb, \quad S_4 = \frac{1}{2}md.$$

Sustituyendo esta expresión en la desigualdad (1) se llega a  $\sqrt{mb \cdot nd} \leq \frac{1}{2}(nb + md)$ , que es precisamente la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de los dos productos  $nb$  y  $md$ .

Esta última desigualdad se alcanza si y sólo si  $nb = md \Leftrightarrow \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$  (2).

Las rectas  $BL$  y  $DK$  son paralelas. Así  $\frac{b}{d} = \frac{BL}{DK} = \frac{BE}{DE}$ , por la semejanza entre los triángulos  $BLE$  y  $DKE$ . La relación (2) se convierte en  $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$  (3). Y recíprocamente por la semejanza de triángulos (3) se verifica si y sólo si  $AB$  y  $CD$  son paralelos, es decir el cuadrilátero dado es un trapecio con los lados paralelos  $AB$  y  $CD$ . Esta es la condición para que se alcance (1).