TANDA I (En sesiones de viernes, mañana y tarde)

Problema I - 1

Se da un triángulo rectángulo isósceles *ABC*, con el ángulo recto en *C*, y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo *l* con centro *A* divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo *m* con centro en *B* es tangente al arco *l* en un punto de la hipotenusa *AB*.
Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.
Solución.
Se *r* el radio del arco *l*. El área del sector determinado así en el triángulo es 1/8 del área del círculo. Por lo tanto,

$$\frac{1}{8}\pi r^2 = 1 \Rightarrow r = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

El radio del circulo *m* es

$$r_1 = |AB| - r = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right).$$

El área de la región buscada es entonces

$$S = 1 - \frac{1}{8}\pi\cdot 8\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi\,.$$

Problema I - 2

Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	*Raíces*
$x^2 + a_1 x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2 x + b_2 = 0$	x_0, x_2
$\cdots$	$\cdots$
$x^2 + a_n x + b_n = 0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0\,.$$

Solución.
Por hipótesis, se tiene

$$x_0^2 + a_1 x_0 + b_1 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_0^2 + a_n x_0 + b_n = 0$$

Sumando estas igualdades, resulta

$$n x_0^2 + \left(a_1 + \cdots + a_n\right) x_0 + \left(b_1 + \cdots + b_n\right) = 0$$

es decir, x_0 es una raíz de la ecuación propuesta.

Por lo tanto, el discriminante de esta ecuación es no negativo y debe tener otra raíz a la que llamaremos $\overline{x}$. Por las fórmulas que relacionan los coeficientes y las raíces, se tiene

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 &= -a_1 \\ \cdots&\cdots\cdots \\ x_0 + x_n &= -a_n \\ x_0 + \overline{x} &= -\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

Multiplicando la última igualdad por n y restando de las anteriores, resulta

$$n\overline{x} - \left(x_1 + \cdots + x_n\right) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Problema I - 3

En el triángulo *ABC* se traza la bisectriz interior *CD*. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo *BCD* coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo *ABC*. Calcular los ángulos del triángulo *ABC*.

Solución

Sea *O* el centro común de los círculos mencionados en el enunciado. Por la hipótesis, *BO* y *CO* son bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$ (*O* es el centro del círculo inscrito en *BCD*).

Además *AO* = *BO* = *CO* (*O* es el centro del círculo circunscrito a *ABC*).

De aquí, si llamamos $\alpha = \angle ABO$, entonces tenemos

$$\angle OAB = \alpha, \angle OCB = \angle OBC = \alpha, \angle BCD = 2\alpha \quad (CD \text{ es bisectriz})$$

De aquí, $\angle OAC = \angle OCA = 3\alpha$

Como la suma de los ángulos del triángulo *ABC* es 180º, resulta $\alpha = 18^{\circ}$, y $\angle A = \angle C = 72^0, \angle B = 36^0$.

Problema I - 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos *a* y *b*, tales que

b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

Solución

Escribamos

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r},$$

donde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, p_i es primo para cada *i*, y $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$.

Las condiciones del problema son entonces equivalentes a

i) para cada *i* $\alpha_i \leq 2\beta_i \leq 3\alpha_i \leq 4\beta_i \leq 5\alpha_i$ y

ii) existe *i* tal que $\alpha_i > \dfrac{6}{5}\beta_i$.

Es claro entonces que basta considerar un solo primo, así que encontraremos α_1 y β_1 que satisfagan i) y ii).
Esto puede hacerse fácilmente por tanteo, por ejemplo $\alpha_1 = 4$ y $\beta_1 = 3$ sirven (también sirven $\alpha_1 = 13$ y $\beta_1 = 10$).
Ahora tomamos para p_1 cualquier primo, por ejemplo 2.
Una pareja que satisface las condiciones pedidas es $a = 2^4, \quad b = 2^3$.

Problema I - 5
Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 .$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.
Solución.
Se tiene

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 .$$

Entonces

$$3 \cdot 9 = 27 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x} \right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18 .$$

Entonces

$$7 \cdot 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 3 + x^5 + \frac{1}{x^5} \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123 .$$

Problema I - 6
Se considera la inecuación

$$|x - 1| < ax ,$$

donde *a* es un parámetro real.
a) Discutir la inecuación según los valores de *a*.
b) Caracterizar los valores de *a* para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.
Solución.
a) En principio distinguiremos dos casos, según que $x \geq 1$ ó $x < 1$.
Caso I: $x \geq 1$. La desigualdad es equivalente a la siguiente:

$$x - 1 < ax \Leftrightarrow (1 - a)x < 1 .$$

Subcaso I.1: Supongamos $1 - a > 0$, es decir, $a < 1$. Entonces $x < \frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a} > 1 \Leftrightarrow a > 0.$ Por lo tanto,

$$o < a < 1, 1 \le x < \frac{1}{1-a}.$$

Subcaso I.2: $1-a=0 \Leftrightarrow a=1$ y la desigualdad se escribe como $0 \cdot x < 1$. Por lo tanto $a=1,\ x \ge 1$.

Subcaso I.3: $1-a<0 \Rightarrow 1<a \Rightarrow x \ge 1.$ La desigualdad es equivalente a $1-x<ax \Leftrightarrow 1<(a+1)x$.

Caso II: $x<1.$ La desigualdad es equivalente a $1-x<ax \Leftrightarrow 1<(a+1)x$.

Subcaso II.1: $a+1>0 \Leftrightarrow a>-1,\ \frac{1}{a+1}<x<1,\ \frac{1}{a+1}<1 \Leftrightarrow a>0.$

Por lo tanto, $a>0,\ \frac{1}{a+1}<x<1,$ cuando $-1<a\le 0$ no hay solución.

Subcaso II.2: $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1 \Rightarrow 1<0,$ no hay solución.

Subcaso II.3: $a+1<0 \Leftrightarrow a<-1 \Rightarrow x<\frac{1}{a+1}<0.$

Por lo tanto, $a<-1,\ x<\frac{1}{a+1}.$

Resumiendo:

Si $a<-1,$ entonces $x<\frac{1}{a+1}.$

Si $-1\le a\le 0,$ no hay solución.

Si $0<a<1,$ entonces $\frac{1}{a+1}<x<\frac{1}{a-1}.$

Si $1\le a,$ entonces $1\le x.$

b) Por el análisis efectuado en a), la desigualdad puede tener dos soluciones enteras sólo si $0<a<1$. Ya que en estos casos se tiene

$$0<\frac{1}{1+a}<1<\frac{1}{1-a},$$

habrá dos soluciones enteras si y solamente si

$$2<\frac{1}{1-a}\le 3.$$

Por lo tanto la respuesta es

$$\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}.$$

TANDA II (En sesiones de tarde de viernes y mañana de sábado)
Problema II - 1
En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Solución.
Debe haber 4 gnomos de modo que cada uno de ellos tenga al menos 48 llaves (de lo contrario se podrían elegir 3 de ellos de manera que tuvieran conjuntamente menos d 3·48 = 144 llaves y por lo tanto no podrían abrir las cerraduras, contra lo supuesto). Los otro 3 gnomos tienen conjuntamente al menos 144 llaves. Por lo tanto hay 4 gnomos con, al menos 48 llaves cada uno y otros 3 gnomos con al menos 144 llaves, luego los 7 gnomos tienen al menos 4·48 +144 = 336 llaves.

Problema II - 2
Determinar todos los enteros *n* tales que

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

es entero.
Solución.
Llamemos

$$p=\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}=\sqrt{25+2\sqrt{n}}.$$

(la última igualdad se comprueba elevando al cuadrado la expresión dada a la que se llama *p*).
Entonces

$$n=\left(\frac{p^2-25}{2}\right)^2,$$

y *p* es un número impar mayor o igual que 5.
Si $p \geq 9$, entonces $n > \frac{625}{4}$ y la expresión de *p* no sería real.
Los posibles valores de *p* son 5 y 7, que dan respectivamente las soluciones

n = 0 y 144.

Problema II - 3
Dos esferas de radio *r* son tangentes exteriores. Tres esferas de radio *R* son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras.
Encontrar la relación existente entre *R* y *r*.

Solución.
Los centros O_1, O_2, O_3 de las tres esferas de radio *R* son los vértices de un triángulo equilátero.

Los centros de las dos esferas de radio *r* determinan una recta perpendicular al plano determinado por los centros de las esferas de radio *R*; el punto de tangencia *T* de las esferas de radio *r* debe ser el centro del triángulo equilátero anterior. Los cinco centros son los vértices de un doble tetraedro. Sea C_1 uno de los centros de las esferas de radio *r* y consideremos el tetraedro $O_1O_2O_3C_1$.

T es el pie de la altura desde C_1 y se verifican las relaciones

$$O_1O_2 = 2R,\ O_1C_1 = r + R,\ C_1T = r$$

El triángulo C_1O_1T es rectángulo en *T*, y se tiene

$$O_1T = \frac{2}{3}R\sqrt{3}.$$

Una aplicación del teorema de Pitágoras en este último triangulo nos permite escribir

$$\left(r+R\right)^2 = \frac{4R^2}{3} + r^2,$$

que se simplifica para dar

$$2Rr = \frac{1}{3}R^2 \Leftrightarrow R = 6r.$$

Problema II - 4

Calcular los números *p* y *q* tales que las raíces de la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$

sean *D* y 1 – *D*, siendo *D* el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

Solución

Por las fórmulas que relacionan las raíces y los coeficientes de la ecuación, se tiene

$$D + 1 - D = -p,$$
$$D\cdot\left(1 - D\right) = q.$$

De la primera se obtiene inmediatamente $p = -1$; de la segunda, $q = D - D^2$.

Pero $D = p^2 - 4q = 1 - 4q = 1 - 4\left(D - D^2\right)$, es decir

$$4D^2 - 5D + 1 = 0,$$

deberá ser $D = 1$ ó $D = 1/4$.

Si $D = 1$, entonces $q = 1 - 1^2 = 0$.

Si $D = 1/4$, entonces $q = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$.

Los valores obtenidos son

$$\left(p,q\right) = \left(-1,0\right)$$
$$\left(p,q\right) = \left(-1,\frac{3}{16}\right)$$

Finalmente se comprueba por sustitución directa que en esos dos casos la ecuación tiene como raíces *D* y –*D*.

Problema II - 5

Los números naturales 22, 23, y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:

$$22 = 2^1 \cdot 11^1; \quad 23 = 23^1; \quad 24 = 2^3 \cdot 3^1 .$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?. Razónese la contestación.

Solución

Vamos a demostrar que es imposible encontrar 8 números consecutivos con esta propiedad. Supongamos, para razonar por reducción al absurdo, que tale 8 números consecutivos existen. Uno de ellos al que llamaremos *n*, es divisible por 8.

Entre los 8 números deberá estar, o bien *n* + 4, o bien *n* – 4. Tanto uno como otro son divisibles por 4, pero no por 8, y esto es una contradicción porque el exponente de 2 en es número es necesariamente PAR.

El ejemplo de los números

29, 30, 31, 32, 33, 34, 35

demuestra finalmente que el máximo buscado es 7, y que efectivamente se alcanza.

Problema II - 6

Los vértices del cuadrilátero convexo *ABCD* están situados en una circunferencia. Sus diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto *E*. Sea O_1 el centro del círculo inscrito en el triángulo *ABC*, y O_2 el centro del círculo inscrito en el triángulo *ABD*. La recta O_1O_2 corta a *EB* en *M* y a *EA* en *N*.

Demostrar que el triángulo *EMN* es isósceles.

Solución

El centro del círculo inscrito es el punto de intersección de las bisectrices, así que

$$\angle O_1BA = \angle O_1BC = \beta,\ \angle O_1AB = \angle O_1AC = \tau,\ \angle O_2BA = \angle O_2BD = \alpha,\ \angle O_2AB = \angle O_2AB = \gamma$$

Entonces se tiene

$$\angle BO_1A = \pi - (\beta + \tau) \qquad \angle BO_2A = \pi - (\alpha + \gamma)$$

de donde $\angle BO_1A = \angle BO_2A$ porque $\beta + \tau = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2\beta - 2\alpha = 2\gamma - 2\tau \Leftrightarrow \angle CBD = \angle CAD$ (ángulos inscritos que abarcan el arco *CD*).

Resulta entonces que los puntos B, O_1, O_2, A están en una circunferencia. Pero entonces

$$\angle MO_1B = \pi - \angle O_2O_1B = \angle O_2AB = \gamma$$

es decir,

$$\angle AMN = \angle MBO_1 + \angle MO_1B = 2\alpha - \beta + \gamma$$

Análogamente,

$$\angle EMN = \angle NAO_1 + \angle NO_1A = \tau + \angle O_2BA = \tau + \alpha$$

de donde resulta $EMN = ENM$ porque $2\alpha - \beta + \gamma = \tau + \alpha$.

Por tanto, *EMN* es isósceles.

TANDA III (Mañana y tarde del sábado)
Problema III - 1
Los números reales no nulos a y b verifican la igualdad

$$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1.$$

Encontrar, razonadamente, todos los valores tomados por la expresión

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Solución
La primera igualdad del enunciado la escribimos como

$$a^2b^2=a^4-2b^4 \Leftrightarrow a^4-b^2a^2-2b^4=0 \Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(a^2-2b^2\right)=0.$$

De ahí que, o bien $a^2=-b^2$ (lo que es claramente imposible), o bien $a^2=2b^2$.
En este último caso, sustituyendo en la segunda expresión, obtenemos

$$\frac{2b^2-b^2}{2b^2+b^2}=\frac{1}{3}.$$

Problema III - 2
¿Existe un conjunto infinito de números naturales que NO se pueden representar en la forma

$$n^2+p,$$

siendo n natural y p primo? Razónese la contestación.
Solución
La respuesta es afirmativa. Vamos a demostrar que hay un número no acotado de cuadrados que no se puede expresar de esa manera.
Sea $m^2=n^2+p$. Entonces $m^2-n^2=p \Leftrightarrow (m+n)(m-n)=p,$ y al ser p primo, necesariamente

$$m-n=1, m+n=p.$$

De aquí que

$$m=\frac{p+1}{2}.$$

Luego $m^2=n^2+p$ es posible sólo para números de la forma $\frac{p+1}{2}$, con p primo.

Pero existe un conjunto no acotado de números impares que no son primos, como por ejemplo 3^r con $r\geq 2$.

Problema III - 3
En el triángulo ABC, se trazan la bisectriz interior AL (L pertenece al lado BC), la altura BH (H pertenece al lado AC) y la mediana CM (M pertenece al lado AB).
Se sabe que los ángulos $\angle CAL$, $\angle ABH$ y $\angle BCM$ son iguales.
Determinar, razonadamente, las medidas de los ángulos del triángulo ABC.
Solución

Llamemos $\alpha = \angle CAL = \angle ABH = \angle BCM$ Entonces $\angle BAC = 2\alpha$.
Si el ángulo *BAC* fuera obtuso, el punto *H* estaría en la prolongación del lado *AC* mas allá de *A*, y por lo tanto $2\alpha = \alpha + 90^{\circ}$, de donde $\alpha = 90^{\circ}$. Esto es imposible, porque todos los ángulos mitad de un triángulo son agudos (suman 90º entre los tres). Además $\angle BAC \neq 90^{0}$, pues $\alpha \neq 0$. Por lo tanto *A* es agudo, y entonces, considerando el triángulo *ABH* se obtiene

$$\alpha + 2\alpha = 90^{\circ} \Leftrightarrow \alpha = 30^{\circ} .$$

Es fácil ver que el recíproco también es cierto, es decir que si en un triángulo el ángulo *A* es de 60º, entonces $\angle CAL = \angle ABM$.
Por consiguiente, los triángulos buscados son aquellos que tienen el ángulo $\angle BAC = 60^{0}$, y cuya mediana *CM* forma un ángulo de 30º con el lado *BC*.
El conjunto de los puntos desde los que el segmento *BM* se ve bajo ángulo de 30º, situados a un lado de la recta *AB*, es un arco de circunferencia que puede cortar a *AC* a lo sumo en dos puntos.
Esta condición la verifican los puntos *C* con *ABC* equilátero, y *H*, con *HM* la paralela media de *ABC* equilátero ($\angle BHM = \angle HBC = 30^{0}$).
Por lo tanto las únicas soluciones del problema son

$$A = B = C = 60^{\circ} \quad \text{o bien} \quad A = 60^{\circ}, B = 30^{\circ}, C = 90^{\circ}.$$

Problema III - 4

Determinar todas las ternas de números reales (a,b,c), con $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$, tales que las parábolas

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = bx^2 + cx + a$$

tienen el mismo vértice.
Solución.
Se observa en primer lugar que las parábolas pasan por el punto común $N(1, a+b+c)$.
Primera solución
Sea $V(x_0, y_0)$ el vértice de las dos parábolas. El cambio de variable

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

transforma *V* en el punto *O*’ que es el origen de coordenadas, es decir, las ecuaciones de las parábolas en el nuevo sistema son

$$Y = aX^2, \quad Y = bX^2,$$

que pasan por el punto común

$$N'(1 - x_0, a + b + c - y_0).$$

Dado que $a \neq b$, estas dos parábolas sólo tienen el único punto común *O*’, luego *N*’ = *O*’ y *N* es el vértice de las dos parábolas.
Entonces

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{c}{2b} = 1 \Rightarrow b = -2a, \quad c = 4a.$$

Segunda solución.
Anulando la primera derivada para hallar la abscisa del vértice e igualando, se obtiene directamente

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{c}{2a};$$

igualando ambos valores a 1, como abscisa del punto común, resulta lo anterior.
En conclusión, los valores buscados son

$$(a,b,c)\equiv(a,-2a-4a) \text{ con } a\neq 0.$$

Problema III - 5

Encontrar todas la soluciones (x,y) reales del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x^2-xy+y^2&=7\\ x^2y+xy^2&=-2\end{aligned}\right\}$$

Solución.
Como la segunda ecuación se puede escribir en la forma

$$xy(x+y)=-2,$$

vamos a escribir la primera de manera relativamente parecida:

$$(x+y)^2-3xy=7.$$

Haciendo el cambio de variables $x+y=s,\quad xy=p$ obtenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} s^2-3p&=7\\ sp&=-2\end{aligned}\right\}(1)$$

La segunda ecuación implica que $s\neq 0$, y $p=-\frac{2}{s}$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene la ecuación cúbica $s^3-7s+6=0,$
que tiene las raíces enteras $s_1=1, s_2=2, s_3=-3$.
A estos valores des les corresponden los valores de p

$$p_1=-2,\ p_2=-1, p_3=\frac{2}{3},$$

respectivamente.
Los números x e y son las raíces de la ecuación cuadrática $t^2-st+p=0,$ que en cada uno de los casos anteriores da las tres ecuaciones de segundo grado

$$t^2-t-2=0,\quad t^2-2t-1=0,\quad t^2+9t+\frac{3}{5}=0.$$

Resolviendo obtenemos las soluciones del sistema dado:

$$\{x,y\}=\{-1,2\}=\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}=\left\{\frac{-9+\sqrt{57}}{6},\frac{-9-\sqrt{57}}{6}\right\}$$

Problema III - 6
Decimos que tres números naturales distintos forman una *terna aditiva* si la suma de los dos primeros de ellos es igual al tercero. Hallar, razonadamente, el máximo número de ternas aditivas que puede haber en un conjunto dado de 20 números naturales.
Solución.
Sean veinte números naturales mutuamente distintos, arbitrariamente elegidos:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{20}.$$

Vamos a obtener una cota superior para el número de ternas aditivas que se pueden encontrar entre ellos, es decir, ternas $\{x_i, x_j, x_k\}$ que verifiquen $1 \le i < j < k \le 20$, y $x_i + x_j = x_k$. Primero haremos estos para un valor fijo del índice $k \in \{3, 4, \cdots, 20\}$: sean estas ternas

$$\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_k\}, \{x_{i_2}, x_{j_2}, x_k\}, \cdots \{x_{i_p}, x_{j_p}, x_k\}.$$

Entonces los números

$$x_{i_1}, x_{j_1}, x_{i_2}, x_{j_2}, \cdots, x_{i_p}, x_{j_p}$$

son mutuamente distintos y están todos en el conjunto

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\}.$$

Por lo tanto, su número 2*p* debe estar sometido a la limitación

$$2p \le k-1,$$

es decir *p* debe ser menor o igual que la parte entera de $\frac{1}{2}(k-1)$:

$$p \le \left[\frac{k-1}{2}\right].$$

En consecuencia, el número total de ternas aditivas no puede exceder de la suma

$$\sum_{k=3}^{20}\left[\frac{k-1}{2}\right] = 1+1+2+2+3+3+\cdots+9+9 = 90.$$

El ejemplo del conjunto

$$M = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$$

demuestra que la cota superior 90 puede ser efectivamente alcanzada, ya que para cualquier

$$k \in \{3, 4, \cdots, 20\},$$

podemos elegir para *i* cualquier número del conjunto

$$\left\{1, 2, \cdots, \left[\frac{k-1}{2}\right]\right\};$$

el correspondiente $j = k - i$ satisface, en efecto las desigualdades $i < j < k$, así que $\{i, j, k\}$ es una terna contenida en *M*.