Fase Local.
Viernes Mañana.

Problema -1.

¿Cuántas ternas ordenadas de números naturales **(***a, b, c***)** distintos de la unidad hay tales que

$$a.b.c = \mathbf{7^{39}}\ ?$$

Solución:

Como **7** es primo y $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $c \neq 1$, $a.b.c = 7^p.7^q.7^r = 7^{39}$ con $p,\ q,\ r \in N$

Por tanto, el número de ternas ordenadas **(***a, b, c***)** será el mismo que el de ternas *(p, q, r)* con la condición $p + q + r = 39$

Tabulemos y contemos:

P	**q**	**r**	**Nº de ternas**
1	1 2 ... 37	37 36 ... 1	*37*
2	1 2 ... 36	36 35 ... 1	*36*
3	1 2 ... 35	35 34 ... 1	*35*
...	...	...	...
...	...	...	...
36 ...	1 2	2 1	*2*
37	1	1	*1*

El total de ternas será:

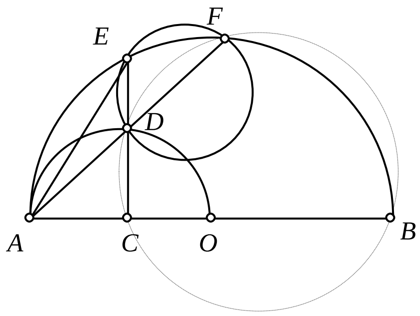
$$37 + 36 + 35 + \dots \dots + 2 + 1 = \frac{37 + 1}{2} \cdot 37 = 19 \cdot 37 = 703$$

Problema – 2.

Dibuja un semicírculo con centro en *O* y diámetro *AB* y, en su interior, otro, con diámetro *OA*. Traza por un punto *C* de *OA* una recta perpendicular a dicho radio *OA*, que cortará al semicírculo pequeño en *D* y al grande en *E* y, finalmente, la recta *AD* que cortará al semicírculo grande en *F*.

Demuestra que el círculo circunscrito al triángulo *DEF* es tangente a la cuerda *AE* en *E*

Solución:



-El triángulo *AEB* es rectángulo.

Por el *Teorema del Cateto*: $AE^2 = AC.AB$

-El cuadrilátero *BCDF* es inscriptible, pues sus ángulos opuestos *C* y ***F*** son rectos.

Así, las rectas *ACB* y *ADF* son secantes a la circunferencia que lo circunscribe.

- La potencia del punto A respecto de esa circunferencia nos da:

$$AC.AB = AD.AF$$

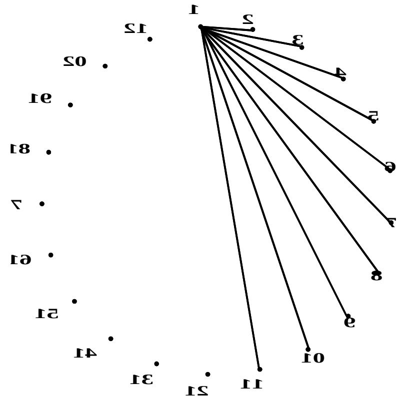
- Por tanto: $AE^2 = AD.AF$.

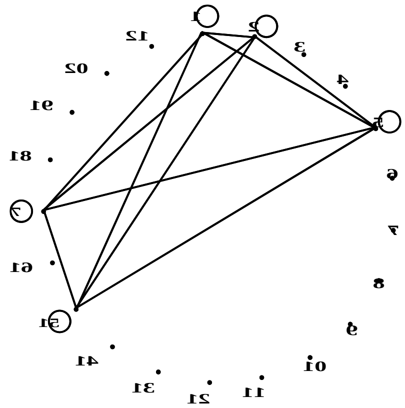
Y esto quiere decir, por potencia de *A* respecto a la circunferencia que circunscribe al triángulo *DEF*, que la recta *AE* es tangente a dicha circunferencia en *E*.

Problema – 3.

¿Cuál es el número máximo de vértices de un polígono regular de **21** lados que podemos elegir para que, al trazar los segmentos que los unen entre sí, no haya dos con la misma longitud?

Solución:





Por la simetría de la figura, sólo hay 10 distancias distintas.

-Como mucho, podremos elegir **5** vértices. Pues, entre cinco puntos no alineados se pueden trazar $C_{5,2} = 10$ segmentos.

- Nos faltará constatar si con **5**, y con qué **5**, vértices se puede.

La figura de la derecha muestra una posibilidad.

Fase Local.
Viernes tarde.

Problema – 4.

Determina los dos valores de x más próximos (por defecto y por exceso) a 2003º que cumplen la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\frac{1}{sen^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x} = -3$$

Solución:

La expresión se puede escribir así

$$\cos ec^2 x - \sec^2 x - \cot^2 x - \mathrm{tg}^2 x - \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x = -3$$

$$(1 + \cot^2 x) - (1 + tg^2 x) - \cot^2 x - \mathrm{tg}^2 x - 1 = -3$$

y se reduce a la sencilla ecuación trigonométrica $tg^2 x = 1$

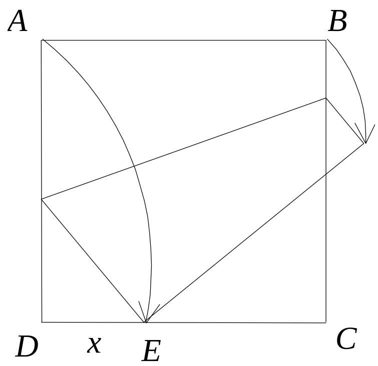
que tiene por soluciones: $x = 45^o + 90^o k$ con $k \in Z$

Los valores pedidos se obtienen para $k_1 = 21$ y $k_2 = 22$

y son $x_1 = 1935^o$ y $x_2 = 2025^o$

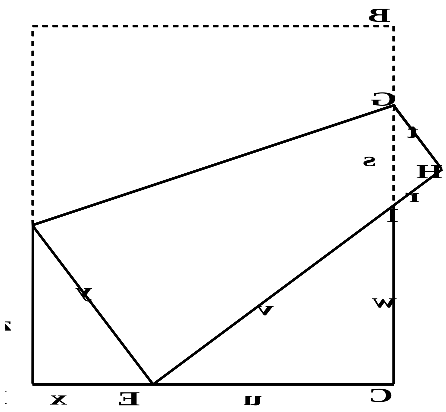
Problema – 5.

Un cuadrado de papel *ABCD*, de lado unidad, se dobla de modo que el vértice *A* toque en un punto arbitrario *E* del lado *CD*. Así, se obtienen tres triángulos rectos formados por una sola capa de papel.



Determinar la longitud de sus lados en función de $x = DE$ y demostrar que el perímetro del triángulo mayor es la suma de los perímetros de los otros dos, y vale la mitad que el perímetro del cuadrado. *(Teorema de Haga)*

Solución:



Denominamos, con letras mayúsculas, los puntos característicos que produce el plegado y, con minúsculas, los lados de los triángulos

Los lados del triángulo *DEF* se obtienen, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + z^2 = y^2 \\ z + y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} z = 1 - y \\ x^2 + (1-y)^2 = y^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} z = 1 - y \\ x^2 + 1 - 2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \frac{1+x^2}{2} \qquad z = \frac{1-x^2}{2}$$

y su perímetro es $P_{DEF} = x + y + z = x + \frac{1+x^2}{2} + \frac{1-x^2}{2} = x + 1$

Los triángulos rectángulos de una capa de papel son semejantes, pues, por un lado, $\angle FED$ y $\angle IEC$ son complementarios y, por otro, $\angle EIC = \angle GIH$.

Por semejanza de los triángulos *EDF* y *ECI*.

$$\frac{x}{z} = \frac{w}{u} \rightarrow \quad w = \frac{x.u}{z} = \frac{x(1-x)}{z} \quad ; \quad \frac{y}{z} = \frac{v}{u} \rightarrow \quad v = \frac{y.u}{z} = \frac{y(1-x)}{z}$$

Los lados del triángulo *ECI* son: $u = 1 - x \qquad v = \frac{1+x^2}{1+x} \qquad w = \frac{2x}{1+x}$

y su perímetro $P_{ECI} = u + v + w = \frac{1-x^2}{1+x} + \frac{1+x^2}{1+x} + \frac{2x}{1+x} = 2$

Por semejanza de los triángulos *ECI* y *IHG*.

$$\frac{w}{v} = \frac{r}{s} \rightarrow \quad s = \frac{v.r}{w} = \frac{v(1-v)}{w}$$

Los lados del triángulo *IHG* son:

$$r = 1 - v = \frac{x(1-x)}{1+x} \qquad s = \frac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)} \qquad t = 1 - w - s = \frac{(1-x)^2}{2}$$

y su perímetro es

$$P_{IHG} = r + s + t = \frac{2x(1-x)}{2(1+x)} + \frac{(1+x^2)(1-x)}{2(1+x)} + \frac{(1-x)^2(1+x)}{2(1+x)} =$$

$$= \frac{(1-x)\left[2x + (1+x^2) + (1- x^2)\right]}{2(1+x)} = \frac{(1-x)\left[2x + 2\right]}{2(1+x)} = 1 - x$$

Queda probado lo que se pedía: $P_{EDF} + P_{IHG} = (x + 1) + (1 - x) = 2 = P_{ECI}$ y que $P_{ECI} = 2$, es la mitad del perímetro del cuadrado.

Problema – 6.

Dado el polinomio $p(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$, probar que si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $B^3D = C^3$

Solución:

Llamemos r, s y t a las tres raíces.

El polinomio lo podemos escribir así: $p(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$.

Si operamos $p(x) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+st+tr)x - rst$

e igualamos coeficientes, obtenemos las conocidas relaciones de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} r + s + t = -B \\ rs + st + tr = C \\ rst = -D \end{cases}$$

Y como $r^2 = st$, quedan así: $\begin{cases} C = rs + r^2 + tr = r(s+r+t) = -rB \\ -D = rst = r^3 \end{cases}$

Finalmente, elevando al cubo esta primera expresión conseguimos lo pedido:

$C^3 = (-rB)^3 = -r^3B^3 = B^3D$

Fase Local.
Sábado Mañana.

Problema – 1.

Se dispone de pequeñas piezas de madera de tamaño 4 x 5 x 10. Decidir si es posible o no apilarlas, sin dejar huecos y apoyándolas siempre sobre cualquiera de sus caras, para formar un ortoedro de dimensiones 2^{2003} x 3^{2003} x 5^{2003}.

Solución:

La superficie de cada una de las caras del ortoedro es:
$C_1 = 2^{2003} \times 3^{2003} = 6^{2003}$, $C_2 = 2^{2003} \times 5^{2003} = 10^{2003}$ y $C_3 = 3^{2003} \times 5^{2003} = 15^{2003}$

Y, de ser posible el apilamiento, debería ser combinación lineal (con coeficientes naturales) de superficies de las caras de las piezas de madera:

de 4 x 5 = 20, de 4 x 10 = 40 y de 5 x 10 = 50; esto es, múltiplo de 10.

Pero como $\mathbf{6^{2003}}$ no lo es, el apilamiento ortoédrico es imposible.

Problema – 2.

Dado un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, y con lados de longitud $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$, llamemos *D* al punto de intersección del lado *AB* con la bisectriz del ángulo *C*.

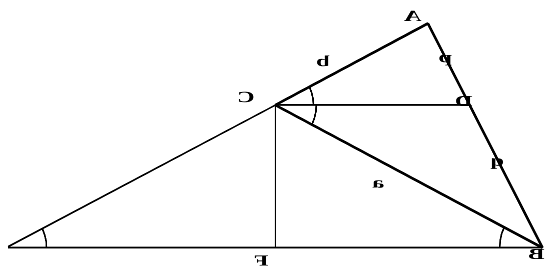
Demuestra que :
$$CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

Solución:

- A partir del vértice *B* trazamos una paralela a la bisectriz *CD* y prolongamos el lado *AC* hasta obtener el punto *E*.

Y, también, *CF* perpendicular a *BE*

- Así, *CB* = *CE* = *a*



- Por ángulos alternos-internos, en el triángulo *BCF* tenemos: $\cos\frac{C}{2} = \frac{FB}{a} = \frac{EB}{2a}$

- Los triángulos *ACD* y *AEB* son semejantes: $\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EB}$

$$CD = \frac{AC \ . \ EB}{AE} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

Solución – 2.

- Por el *Teorema de la Bisectriz*: $\frac{a}{b} = \frac{q}{p}$
- Y aplicando en los dos triangulitos el *Teorema del Coseno*:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{q^2}{p^2} = \frac{CD^2 + a^2 - 2.CD.a.\cos\frac{C}{2}}{CD^2 + b^2 - 2.CD.b.\cos\frac{C}{2}}$$

- Distinguimos dos casos:

$a \neq b$ Multiplicando en cruz $(b^2 - a^2).CD^2 = 2ab(b - a).CD.\cos\frac{C}{2}$

y simplificando queda: $(b+a).CD = 2ab\cos\frac{C}{2}$

a = *b* En este caso el triángulo es isósceles.

Y, directamente, se tiene: $CD = a\cos\frac{C}{2} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$

Solución – 3.

Por áreas de triángulos:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}aCD\sin\frac{C}{2}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}bCD\sin\frac{C}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = ab\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$S_{BCD} + S_{ACD} = S_{ABC} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(a+b)CD\sin\frac{C}{2} = ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

y simplificando se tiene la relación pedida

Problema – 3.

¿Existirán 16 números naturales distintos y menores de 100 tales que al colocarlos en las casillas de un tablero 4 x 4 el producto de los situados en cada fila sea el mismo y, a su vez, coincida con el de los colocados en cada columna y en las dos diagonales principales.?

Si la respuesta es afirmativa, indica cuáles son.

Si la respuesta es negativa, justifícalo.

Solución:

Veamos que sí existen.

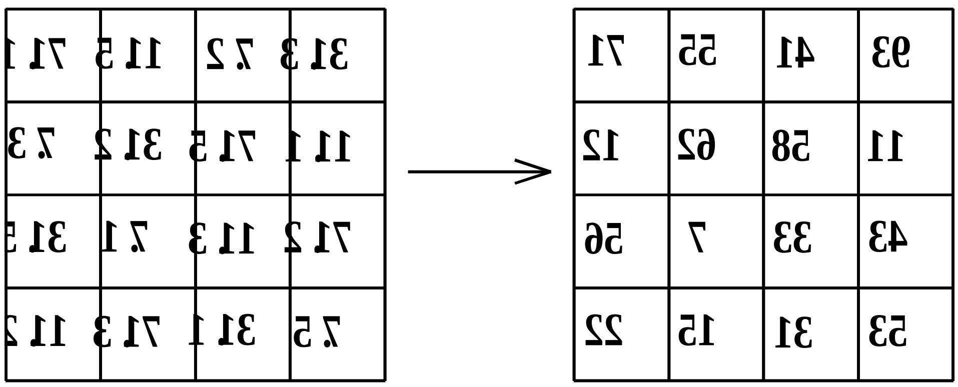
Consideremos estos dos conjuntos: $A = \{1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 5\}$ y $B = \{7,\ \ 11,\ \ 13,\ \ 17\}$

Los 16 productos que se obtienen al multiplicar un número de *A* por uno de *B* son todos distintos y menores de 100.

Los colocaremos de forma que, en cada fila, en cada columna y cada diagonal principal, los números de *A* y *B* aparezcan como factores exactamente una vez.

Procederemos así:

1º) En una diagonal ponemos: 1.17, 2.13, 3.11 y 5.7.
2º) En las esquinas restantes: 2.11 y 3.13.
3º) Y completamos las demás casillas.



El producto de cada fila, cada columna y cada diagonal es siempre el mismo:

1.2.3.5.7.11.13.17 = 510510

Fase Local.
Sábado tarde.

Problema – 4.

Prueba que si los números $\log_a x$, $\log_b x$ y $\log_c x$ con $(x \neq 1)$ están en progresión aritmética, entonces

$$c^2 = (a.c)^{\log_a b}$$

Solución:

Por ser tres números en *progresión aritmética* $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$

$2\dfrac{\log x}{\log b} = \dfrac{\log x}{\log a} + \dfrac{\log x}{\log c}$ y como $\log x \neq 0 \rightarrow$ $2 = \dfrac{\log b}{\log a} + \dfrac{\log b}{\log c} = \log_a b + \log_c b$

Uniformando la base $\log_c c^2 = \log_c c^{\log_a b} + \log_c b = \log_c (b.c^{\log_a b})$

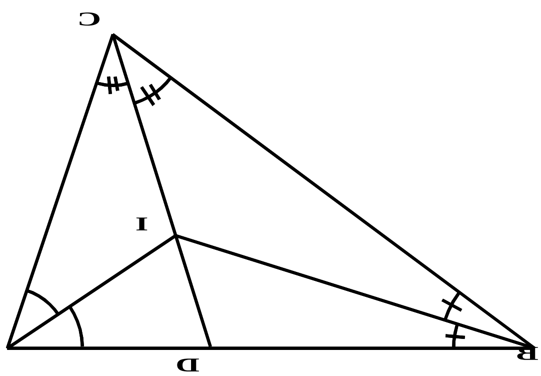
Por tanto: $c^2 = b.c^{\log_a b} = a^{\log_a b}.c^{\log_a b} = (a.c)^{\log_a b}$ como queríamos probar.

Problema – 5.

¿Qué condición han de cumplir las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera para que la línea que une el **baricentro** *(centro de gravedad del triángulo o punto donde coinciden las medianas)* y el **incentro** *(punto común a las tres bisectrices)* sea paralela a uno de los lados?

Solución:

- Llamemos *I* al *incentro*.



Por el *Teorema de la Bisectriz*:

En el triángulo *ADC*: $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CI}{ID}$

En el triángulo *BDC*: $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CI}{ID}$

Luego

$$\frac{CI}{ID} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC + BC}{AD + BD} = \frac{AC + BC}{AB} = \frac{b + a}{c}$$

-Dibujemos la situación completa.

Denominemos *M* al punto medio del lado *AB* y *G* al *baricentro*.

Los triángulos *CIG* y *CDM* han de ser semejantes. Así, por el *Teorema de Tales*:

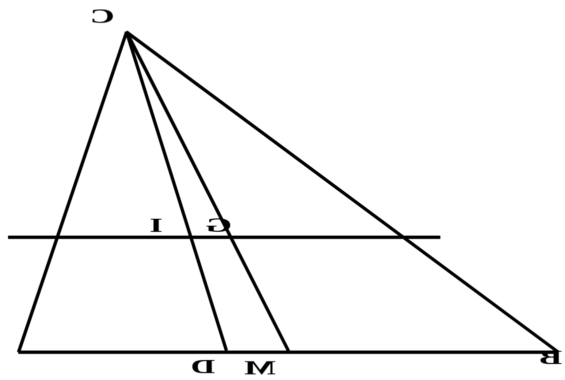
$$\frac{CI}{ID} = \frac{CG}{GM}$$

Y por la *propiedad del baricentro*: $\frac{CG}{GM} = 2$

Luego $\frac{CI}{ID} = 2$

-Conclusión: $\frac{CI}{ID} = \frac{a + b}{c} = 2$

La línea que une baricentro e incentro de un triángulo será paralela al lado **AB** si su longitud es media aritmética de los otros dos: $c = \frac{a + b}{2}$



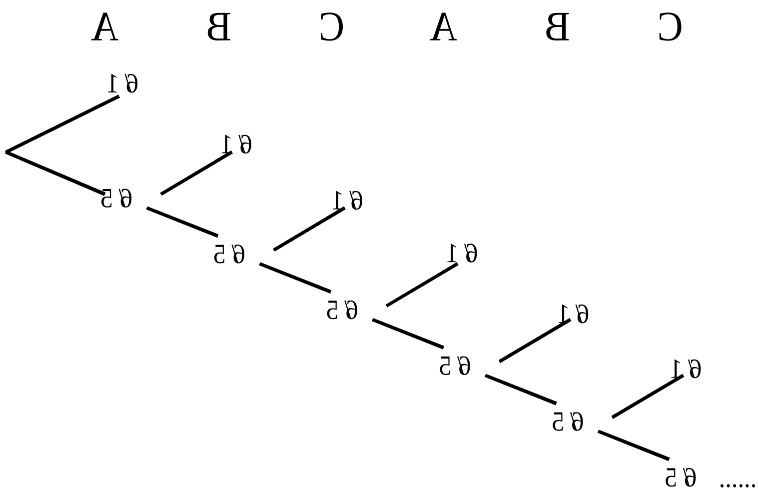
Problema – 6.

Por turno, en orden alfabético, tres amigos lanzan un dado. Quien saque un 6 en primer lugar gana lo apostado.

Por cada euro que apueste Carlos, ¿qué cantidad han de poner Ana y Blas para equilibrar el juego y lograr que sea equitativo, es decir, para que las expectativas de ganancia sean las mismas para los tres colegas y no se vean afectadas por el orden de actuación al lanzar el dado?

Solución:

El esquema en árbol nos ayudará a determinar las probabilidades que tienen cada uno de los amigos de ganar en este juego:



$$p(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{1}{6} + \dots \dots = \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots \dots\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1}{6}\frac{6^3}{6^3-5^3} = \frac{36}{91}$$

$$p(B) = \left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \frac{1}{6} + \dots \dots = \left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots \dots\right] =$$

$$= \frac{5}{6^2}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{5}{6^2}\frac{6^3}{6^3-5^3} = \frac{30}{91}$$

$$p(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8 \frac{1}{6} + \dots \dots = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}\left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots \dots\right] =$$

$$= \frac{5^2}{6^3}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{5^2}{6^3}\frac{6^3}{6^3-5^3} = \frac{25}{91}$$

Por cada 91 € en litigio, 36 los debe poner Ana, 30 Blas y 25 Carlos.

Luego, si Carlos apuesta 1 €, Ana debe poner 1'44€ y Blas 1'20 €.

Obviamente, así, el juego es justo, pues la ***esperanza matemática*** de ganar de cada jugador es cero. De todas formas, veámoslo:

Definimos las siguientes variables aleatorias:

***X_A* = ganancia de Ana**

	x_1 = Gana	x_2 = Pierde
X_A	+2'20	-1'44
$p(X_A = x_i)$	$36/91$	$55/91$

$$E(X_A) = 2'20\frac{36}{91} - 1'44\frac{55}{91} = 0$$

X_B = ganancia de Blas

	x_1 = Gana	x_2 = Pierde
X_B	+2'44	-1'20
$p(X_B = x_i)$	$30/91$	$61/91$

$$E(X_B) = 2'44\frac{30}{91} - 1'20\frac{61}{91} = 0$$

X_C = ganancia de Carlos

	x_1 = Gana	x_2 = Pierde
X_C	+2’64	-1
$p(X_C = x_i)$	$25/91$	$66/91$

$$E(X_C) = 2'64\frac{25}{91} - 1.\frac{66}{91} = 0$$

El juego es equitativo: las expectativas de ganancia para los tres amigos es la misma.