TA section 3

JERRY C.

Email: 108354501@nccu.edu.tw

Website: jerryc520.github.io/teach/MS.html

October 15, 2024

Homework 2 (I)

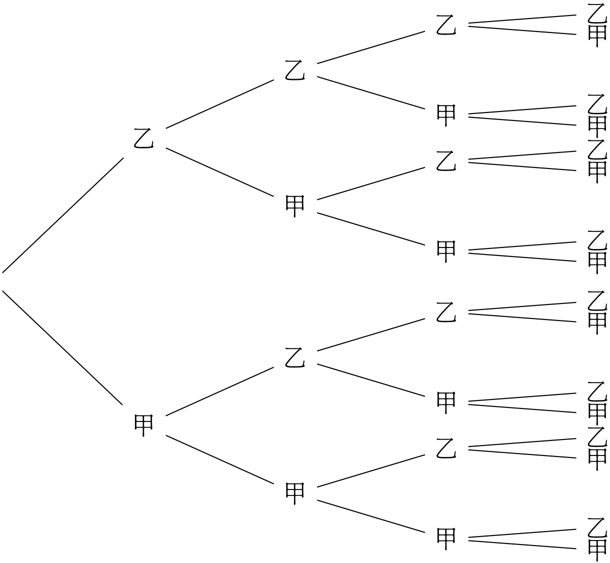
§1.2-#4, #7, #10, #22; #23

4. 甲、乙兩人棋力相當, 在進行七戰四勝有獎金的比賽中, 下了三盤甲以2 : 1領先, 但因故無法繼續比賽。試問如何合理地分配獎金。

- 假設獎金為 $\$W$ 元。
- 先贏四盤者獲勝。即: 剩餘四盤棋, 甲還要再勝至少 2 盤, 乙還要再勝至少 3 盤。(backward induction)
- 甲乙棋力相當, 即每盤棋甲或乙獲勝機率相同。
- 若不中止比賽, 繼續四盤棋的所有可能結果: (假設沒有和局)

  $\mathbb{P}(\text{甲 win}) = \frac{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{2^4} = \frac{11}{16} = 0.6875$

  $\mathbb{P}(\text{乙 win}) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{2^4} = \frac{5}{16} = 0.3125.$
- 甲分得 $0.6875W$, 乙分得 $0.3125W$.


乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲
乙
甲

另解: 甲勝 2 盤就停止, 或乙勝 3 盤就停止

- 甲乙棋力相當, 即每盤棋甲或乙獲勝機率相同, 各為 1/2;
- $\mathbb{P}(\text{甲 win}) = \mathbb{P}(\text{玩兩盤 win}) + \mathbb{P}(\text{玩三盤 win}) + \mathbb{P}(\text{玩四盤 win}) = (1/2)^2 + 2 \times (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^4 = 11/16 = 0.6875$
- $\mathbb{P}(\text{乙 win}) = \mathbb{P}(\text{玩三盤 win}) + \mathbb{P}(\text{玩四盤 win}) = (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^4 = 5/16 = 0.3125$;
- 甲分得 $0.6875W$, 乙分得 $0.3125W$.

7. 假設有A, B, C三個盒子，其中恰有一盒裝有獎品。某君任選一盒，並宣佈他的選擇。然後主持人打開另兩盒中的某一盒，並發現爲一空盒。這時主持人問該君是否願意改變選擇。試分別對主持人事先知道及不知道獎品在那一盒，回答該君是否須改變選擇。

- 主持人不知獎品位置: 令 $E = \{$主持人開出空盒$\}$, $F = \{$某君選中獎品$\}$, 故

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F \cap E) + \mathbb{P}(F^c \cap E) = (1/3) \times 1 + (2/3) \times (1/2) = 2/3.$$

  可知: $\mathbb{P}(F|E) = (1/3)/(2/3) = 1/2 = \mathbb{P}(F^c|E)$, 某君的選擇有中獎或沒中獎的機率相同, 所以換或不換沒差別。
- 主持人知道獎品位置:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F \cap E) + \mathbb{P}(F^c \cap E) = (1/3) \times 1 + (2/3) \times 1 = 1.$$

  可知: $\mathbb{P}(F|E) = 1/3$, $\mathbb{P}(F^c|E) = 2/3$, 某君的選擇沒中獎機率較高, 當然換。
- 因此,「換」是最好的策略。

10. 設A與B獨立, A與C獨立, 且$B \cap C = \emptyset$。

(i) 試證A與$B \cup C$獨立;

(ii) 試舉一例說明若$B \cap C \neq \emptyset$, 則(i)之結論便不一定成立。

- (i). $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap (B \cap C) = A \cap \phi = \phi$,
- $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \cup C)$.
  So, $A \perp\!\!\!\perp (B \cup C)$.
- (ii). $\Omega = \{1,2,3,4\}$. $\mathbb{P}(\{w\}) = 1/4, \forall\, w \in \Omega$. Let $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$, then $B \cap C = \{1\} \neq \phi$.
- $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4$.
- $B \cup C = \{1,3,4\}$,
  $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \cup C) = 1/2 \times 3/4 = 3/8$.

22. 設一家庭中有5個小孩, 已知其中有4個男孩。試求另一個亦爲男孩之機率。

- 5 個小孩共有: $2^5 = 32$ 種可能。
- $\mathbb{P}(\text{至少四個男生}) = \frac{\binom{5}{4}+\binom{5}{5}}{32} = 6/32;$
- $\mathbb{P}(\text{全部都男生}) = 1/32;$
- $\mathbb{P}(\text{BBBBB}|\text{BBBB ?}) = \mathbb{P}(\text{全部都男生}) / \mathbb{P}(\text{至少四個男生}) = 1/6.$

23. 自一副撲克牌中任取5張, 已知至少取中三張黑桃, 則五張皆是黑桃的機率爲何?

- 52 張牌, 抽 5 張共有: $\binom{52}{5}$ 種可能。黑桃共有 13 張。
- $\mathbb{P}(\text{至少三張是黑桃}) = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}+\binom{13}{4}\binom{39}{1}+\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$;
- $\mathbb{P}(\text{全部都黑桃}) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$;
-

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit \mid \spadesuit\spadesuit\spadesuit??) &= \mathbb{P}(\text{全部都黑桃}) / \mathbb{P}(\text{至少三張是黑桃}) \\ &= \frac{\binom{13}{5}}{\binom{13}{3}\binom{39}{2}+\binom{13}{4}\binom{39}{1}+\binom{13}{5}}.\end{aligned}$$