

TA section 1

JERRY C.

Email: 108354501@nccu.edu.tw

Website: jerryc520.github.io/teach/MS.html

March 11, 2025

Review Exercises

§5.2 #6, #8, #9, #16, #19

6. 設 X_1, \dots, X_n 為一組隨機樣本, $n \geq 2$ 。試證統計量

(i) (\bar{X}_n, S_n^2) 與 $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ 等價;

(ii) $(X_{(1)}, X_{(n)})$ 與 $(X_{(n)} - X_{(1)}, (X_{(n)} + X_{(1)})/2)$ 等價。

- 「統計量 (statistic)」 $T(\mathbf{X})$: 樣本 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 的函數, 跟未知參數 θ 無關。用以對樣本資訊的描述性測量 (measure)。
- 「估計量/估計式 (estimator)」 $\hat{\theta}$: 樣本 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 的函數, 用以推估感興趣的未知參數 θ 的統計量或統計量的函數式。例如: \bar{X}_n 是母體平均數 μ 的一個好的估計量, 而 S_n^2 不會是 μ 一個好的估計量。
- 兩個統計量 T_1 與 T_2 「等價」: $T_2(\mathbf{X})$ 與 $T_1(\mathbf{X})$ 一對一轉換 (函數)。
- 例如: (affine 轉換)

$$T_2 = AT_1 + b,$$

A is nonzero and is of full rank (linear independent, or nonsingular if A is square)。

- 數學符號可表示為: $T_1 \sim T_2$ (等價關係的符號, 即表示 T_1, T_2 具反身性, 對稱性, 遞移性)。

(i)

- Let $Y_i = X_i - \bar{X}_n$;
- $T_1 = (\bar{X}_n, S_n^2) = (\bar{X}_n, \sum_{i=1}^n Y_i^2 / (n-1))$;
and $T_2 = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2) = (n\bar{X}_n, \sum_{i=1}^n Y_i^2 + n\bar{X}_n^2)$.
- Consider

$$A = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/(n-1) \end{bmatrix}$$

and

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 \end{bmatrix}$$

- Thus,

$$T_1 = AT_2 + b.$$

(ii)

- $T_1 = (X_{(1)}, X_{(n)})$ and $T_2 = ((X_{(n)} - X_{(1)})/2, (X_{(n)} + X_{(1)})/2)$.
- Consider

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

and

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Thus,

$$T_2 = AT_1 + b.$$

- (i), (ii) 的轉換方式不唯一。

§5.2 #6, #8, #9, #16, #19

8. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{E}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。試分別以下述三法, 判定 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 為 θ 之一充分統計量。

(i) 試證給定 $T = t$, X_1, \dots, X_n 之條件 p.d.f. 為

$$f_{X_1, \dots, X_n | T}(x_1, \dots, x_n | T = t) = \frac{(n-1)!}{t^{n-1}}, \sum_{i=1}^n x_i = t;$$

(ii) 定理 2.2;

(iii) 定理 2.3。

• Definition

設 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 的分佈與參數 θ 有關, 且 joint pdf 為 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 。對任一統計量 $T(\mathbf{X})$, 若給定 $T(\mathbf{X})$, 其 \mathbf{X} 之條件分佈, 即

$$f(\mathbf{x} | T = t; \theta) = \frac{f(\mathbf{x}, t | \theta)}{f_T(t)}$$

與 θ 無關, 則 $T(\mathbf{X})$ 為 θ 之一充份統計量。

定理 2.2.

• Theorem (分解定理)

令 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 表 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 的 joint pdf。則 $T(\mathbf{X})$ 為 θ 之一充份統計量，若且唯若存在函數 $g(t|\theta)$ 和 $h(\mathbf{x})$ ，使得對所有樣本點 \mathbf{x} 及參數 θ ，

$$f(\mathbf{x}|\theta) = g(T(\mathbf{x}) = t|\theta)h(\mathbf{x}).$$

定理 2.3.

• Theorem (指數族充份統計量)

給定 X_1, \dots, X_n 為一組由 pdf $f(x|\theta)$ 所產生的隨機樣本。假設 $f(x|\theta)$ 有以下形式：

$$f(x|\theta) = h(x)c(\theta) \exp\left\{\sum_{j=1}^k w_j(\theta)t_j(x)\right\} \mathbf{I}_A(x),$$

其中 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d), d \leq k$, 且 $h(x) \geq 0, c(\theta) \geq 0$ 。則, 令 $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$,

$$T(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^n t_1(X_i), \dots, \sum_{i=1}^n t_k(X_i)\right)$$

為 θ 之一充份統計量。

(i)

- Want to show: $f(\mathbf{x}|T = t; \theta) = f(\mathbf{x}, t|\theta)/f_T(t)$, which is free of θ .
- $T = \sum_{i=1}^n X_i$, $X_i \sim i.i.d.\mathcal{E}(\theta) = \Gamma(1, 1/\theta)$; then $T \sim \Gamma(n, 1/\theta)$.
-

$$f(\mathbf{x}|T = t; \theta) = \frac{\theta^n e^{-\theta t}}{\theta^n t^{n-1} e^{-\theta t} / (n-1)!} = \frac{(n-1)!}{t^{n-1}}$$

which does not depend on θ .

- Thus, $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ is a S.S. for θ .
- Recall: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$,

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha}, \quad x > 0.$$

MGF: $M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$, $t < 1/\beta$.

(ii)

•

$$f(\mathbf{x}|\theta) = \theta^n \exp(-\theta \sum_{i=1}^n x_i) \mathbf{I}(x_i > 0) =: g(T(\mathbf{X}) = t|\theta)h(\mathbf{x}),$$

where $g(t|\theta) = \theta^n \exp(-\theta t)$ and $h(\mathbf{x}) = 1, x_i > 0$ (or $\mathbf{I}(x_i > 0)$).

- Thus, $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ is a S.S. for θ by Factorization theorem.

(iii)

•

$$f(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x) \mathbf{I}(x > 0) =: h(x)c(\theta) \exp(w(\theta)t(x)),$$

belongs to an one-dimensional exponential family, where

$$h(x) = \mathbf{I}(x > 0); c(\theta) = \theta; w(\theta) = -\theta \text{ and } t(x) = x.$$

• Thus,

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n t(X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

is a S.S. for θ .

§5.2 #6, #8, #9, #16, #19

9. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{U}(0, \theta)$ 分佈所產生隨機樣本, $\theta > 0$ 。試分別以下述二法, 判定 $T(\mathbf{X}) = X_{(n)}$ 是否為 θ 之一充分統計量。
- (i) 求在給定 $X_{(n)} = t$ 之下, X_1, \dots, X_n 之條件分佈;
 - (ii) 利用定理2.2。

(i)

- $\mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) = \theta^{-n} t^n$, then

$$f_T(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} \mathbf{I}(0 \leq t \leq \theta).$$

•

$$f(\mathbf{x}|T = t, \theta) = \frac{\theta^{-n} \mathbf{I}(0 \leq t \leq \theta)}{\frac{nt^{n-1}}{\theta^n} \mathbf{I}(0 \leq t \leq \theta)} = \frac{1}{nt^{n-1}},$$

which is free of θ .

- Thus, $T(\mathbf{X}) = X_{(n)}$ is a S.S. for θ .

(ii)

•

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}|\theta) &= \frac{1}{\theta} \mathbf{I}(0 \leq x_1 \leq \theta) \cdots \frac{1}{\theta} \mathbf{I}(0 \leq x_n \leq \theta) \\
 &= \mathbf{I}(0 \leq x_{(1)}) \theta^{-n} \mathbf{I}(x_{(n)} \leq \theta) \\
 &=: h(\mathbf{x}) g(T = t|\theta),
 \end{aligned}$$

where $h(\mathbf{x}) = \mathbf{I}(x_{(1)} \geq 0)$ and $g(t|\theta) = \theta^{-n} \mathbf{I}(t \leq \theta)$.

- Thus, $T(\mathbf{X}) = X_{(n)}$ is a S.S. for θ by Factorization theorem.

§5.2 #6, #8, #9, #16, #19

16. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{P}(\theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。試求 θ 之一最小充分統計量。

定理 2.4.

• Theorem (最小充份統計量)

令 $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ 之 joint pdf 為 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 。假設存在一函數 $T(\mathbf{X})$, 使得對任二樣本點 \mathbf{x} 及 \mathbf{y} ,

$$\frac{f(\mathbf{x}|\theta)}{f(\mathbf{y}|\theta)}$$

與 θ 無關, 若且唯若

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}).$$

則 $T(\mathbf{X})$ 為 θ 之一最小充份統計量。

- Want to show:

$$f(\mathbf{x}|\theta)/f(\mathbf{y}|\theta),$$

which is free of θ if and only if

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}).$$

-

$$\frac{f(\mathbf{x}|\theta)}{f(\mathbf{y}|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!} e^{-n\theta} \theta^{-\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{y_i!} e^{-n\theta} \theta^{-\sum_{i=1}^n y_i}} = \prod_{i=1}^n \frac{y_i!}{x_i!} \theta^{\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i}$$

is free of θ iff

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Let $T(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n x_i$ and $T(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n y_i$.

- Thus,

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$$

is a M.S.S. for θ .

§5.2 #6, #8, #9, #16, #19

19. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 p.d.f. $f(x|\theta) = \theta^{-2}e^{-(x-\theta)/\theta^2}$, $x \geq \theta$, $\theta > 0$, 所產生之隨機樣本。試求 θ 之一最小充分統計量。



$$\begin{aligned}\frac{f(\mathbf{x}|\theta)}{f(\mathbf{y}|\theta)} &= \frac{\theta^{-2n} e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)/\theta^2} \mathbf{I}(x_i \geq \theta)}{\theta^{-2n} e^{-\sum_{i=1}^n (y_i - \theta)/\theta^2} \mathbf{I}(y_i \geq \theta)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)/\theta^2\right) \frac{\mathbf{I}(x_{(1)} \geq \theta)}{\mathbf{I}(y_{(1)} \geq \theta)},\end{aligned}$$

is free of θ iff

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \quad x_{(1)} = y_{(1)}.$$

Let $T(\mathbf{x}) := (\sum_{i=1}^n x_i, x_{(1)})$ and $T(\mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^n y_i, y_{(1)})$.

- Thus, the two-dimensional statistic

$$T(\mathbf{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, X_{(1)}\right)$$

is a M.S.S. for θ .