Задача "Идеальное паросочетание , Ткаченко Дмитрий, команда PQ.

Решение: Докажем нашу задачу при помощи теоремы Форда-Фалкерсона. Обозначим мощность первой доли как n. Модифицируем наш граф: на каждом ребре введем пропускную способность 1 в направлении от вершины первой доли к вершине второй. Ведем фиктивные вершины s и t - от s проведем все ребра в вершины первой доли, а из каждой вершины второй доли - ребра в t. Получилась целочисленная сеть, то есть если доказать, что пропускная способность минимального разреза равна n, то по теореме Форда-Фалкерсона величина наибольшего потока будет равна n.

$\Leftarrow$ Понятно, что если в бинарной сети величина наибольшего потока суть n, то существует ровно столько же непересекающихся (по вершинам) путей из истока в сток, что нам и нужно (это и будет нашим паросочетанием).
Мощность минимального разреза не превышает n из рассмотрения разреза, в котором множество S содержит лишь вершину s.
Теперь рассмотрим какой-то разрез (S, T). Если в S попали $m \leq n$ вершин из левой доли и l из правой. Тут возможны два случая.

1) $l < m$. По условию теоремы, данные m вершин связаны с m вершинами правой доли, а в силу $l < m$, они связаны минимум с $m - l$ вершинами правой доли, попавшими в T. В таком случае пропускная способность разреза рассчитывается из $n - m$ ребер, ведущих из истока в вершины левой доли, лежащие в T, и l ребер, ведущих из вершин правой доли, лежащих в S, в сток, а так же из $m - l$ ребер из вершин первой доли, принадлежащих S в вершины второй доли, принадлежащими T. Получается $(n - m) + l + (m - l) = n$.

2) $l \geq m$. Пропускная способность разреза получается из $n - m$ ребер, ведущих из s в вершины первой доли, лежащие в T и l ребер, ведущих из вершин правой доли, лежащих в S в сток. Получаем $n-m+l = n+(l-m) \geq n$.

$\Rightarrow$ Очевидно, что если существует полное паросочетание, то для любого подмножества вершин левой доли, мощность вершин, смежных с ними, не меньше.