Fach:	____________
Klasse/Kurs:	____________
Datum:	____________
Name:	____________

Musterlösung

Thema: *Zahlensysteme — Wiederholung & eigenes System (Basis 4/5)*

Hinweis: Diese Musterlösung ist ausführlich gehalten. Bei der Bewertung können auch äquivalente richtige Begründungen und Zwischenschritte anerkannt werden.

Lösung 1: Unser Zahlensystem (Basis 10) — Wiederholung

Ziffern: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Stellenwertsystem: Jede Stelle hat den Wert einer Zehnerpotenz. Von rechts nach links: $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$

Beispiel 407:

$$407 \;=\; 4 \cdot 10^2 \;+\; 0 \cdot 10^1 \;+\; 7 \cdot 10^0 \;=\; 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1 \;=\; 400 + 0 + 7.$$

Kurzbegründung: Die Bedeutung einer Ziffer hängt von ihrer Position (Stelle) ab. Das ist der Kern des Stellenwertsystems.

Lösung 2: Neues Zahlensystem entwerfen (Basis 4)

a) **Ziffern in Basis 4:** $\{0, 1, 2, 3\}$.

b) **Stellenwerte:** Potenzen von 4: $4^0 = 1$, $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64, \ldots$

c) **Beispiele & Umwandlungen:**

(i) Dezimal → Basis 4 (durch wiederholtes Dividieren durch 4):

$$16_{10}: \quad \begin{aligned} 16 : 4 &= 4 \text{ Rest } 0 \\ 4 : 4 &= 1 \text{ Rest } 0 \\ 1 : 4 &= 0 \text{ Rest } 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{Reste von unten nach oben: } 1\,0\,0 \Rightarrow 100_4.$$

Weiteres Beispiel: 45_{10} in Basis 4

$$45 : 4 = 11 \text{ R } 1, \quad 11 : 4 = 2 \text{ R } 3, \quad 2 : 4 = 0 \text{ R } 2 \quad \Rightarrow \quad 45_{10} = 231_4.$$

(ii) Basis 4 → Dezimal (Stellenwertsumme):

$$121_4 \;=\; 1 \cdot 4^2 \;+\; 2 \cdot 4^1 \;+\; 1 \cdot 4^0 \;=\; 1 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \;=\; 16 + 8 + 1 \;=\; 25_{10}.$$

Weiteres Beispiel: $3201_4 = 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 192 + 32 + 0 + 1 = 225_{10}$.

Zusammenfassung: In Basis 4 gibt es vier Ziffern (0–3). Die Wertigkeit einer Stelle wächst mit den Potenzen von 4. Zahlenumwandlungen erfolgen entweder über die Division mit Rest (Dezimal → Basis 4) oder über die Stellenwertsumme (Basis 4 → Dezimal).

Lösung 3: Präsentation (Gruppenarbeit)

Mögliche Beispiel-Lösung (Stichwort-Poster):

- **Dezimalsystem:** Ziffern 0–9; Stellenwerte $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$; Beispiel: $407 = 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

- **4er-System:** Ziffern 0–3; Stellenwerte $4^0, 4^1, 4^2, \ldots$; Beispiel: $121_4 = 25_{10}$.
- **Umwandlungen:**
  - $16_{10} \to 100_4$ (Division durch 4 mit Rest).
  - $231_4 \to 45_{10}$ (Stellenwertsumme).
- **Visualisierung:** kleine Tabelle mit Potenzen (Dezimal vs. 4er-System) und 2–3 Umrechnungsbeispielen.

Hinweis für die Bewertung: Vollständigkeit, fachliche Korrektheit, klare Darstellung (Stellenwerte sichtbar), nachvollziehbare Rechenschritte.

Lösung 4: Hausaufgabe: Eigenes Zahlensystem (Basis 5)

Ziffern: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. **Stellenwerte:** $5^0 = 1,\ 5^1 = 5,\ 5^2 = 25,\ 5^3 = 125, \ldots$

a) **Dezimal → Basis 5 (Beispiel):** $42_{10} \to ?_5$

Division mit Rest:

$$42 : 5 = 8 \text{ R } 2, \quad 8 : 5 = 1 \text{ R } 3, \quad 1 : 5 = 0 \text{ R } 1 \Rightarrow\ 42_{10} = 132_5.$$

b) **Basis 5 → Dezimal (Beispiel):** $203_5 \to ?_{10}$

$$203_5 \ = \ 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 \ = \ 2 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \ = \ 50 + 0 + 3 \ = \ 53_{10}.$$

c) **Gemischt (z. B. Basis 5 → Basis 4):** $132_5 \to ?_4$

Weg 1 (über Dezimal):

$$132_5 \ = \ 1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \ = \ 25 + 15 + 2 \ = \ 42_{10}.$$

Nun 42_{10} in Basis 4:

$$42 : 4 = 10 \text{ R } 2, \quad 10 : 4 = 2 \text{ R } 2, \quad 2 : 4 = 0 \text{ R } 2 \Rightarrow\ 42_{10} = 222_4.$$

Also $132_5 = 222_4$.

Weg 2 (optional direkt): i. d. R. nicht nötig in der Einführungsphase; der Weg über Dezimal ist didaktisch klarer.

Weitere Beispielumwandlungen (optional für Übung):

- $75_{10} \to ?_5:\ 75 : 5 = 15 \text{ R } 0,\ 15 : 5 = 3 \text{ R } 0,\ 3 : 5 = 0 \text{ R } 3 \Rightarrow 300_5.$
- $404_5 \to ?_{10}:\ 4 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 4 \cdot 1 = 500 + 0 + 4 = 504.$

Nur für Lehrkräfte. Sinnvolle alternative Rechenwege und korrekte äquivalente Darstellungen sind anzuerkennen.