Lösungen

Lösung zu Aufgabe 2: Quadratische Gleichungen

a) $2x^2 - 5x + 1 = x^2 + 4x - 2$

Schritt 1: Alle Terme auf eine Seite bringen.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 1 &= x^2 + 4x - 2 \\ 2x^2 - 5x + 1 - x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ x^2 - 9x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Schritt 2: Mit der *pq-Formel* lösen.
Wir schreiben

$$x^2 - 9x + 3 = 0$$

in der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p = -9,\ q = 3$.
Die pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 - 3} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 3} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{12}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{69}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{69}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{9 - \sqrt{69}}{2}, \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{69}}{2}}$$

b) $(x-3)^2 + 2x = 2x^2 - x + 5$

Schritt 1: Klammer ausmultiplizieren.

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + 2x &= 2x^2 - x + 5 \\ x^2 - 4x + 9 &= 2x^2 - x + 5 \end{aligned}$$

Schritt 2: Alle Terme auf eine Seite.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 9 - 2x^2 + x - 5 &= 0 \\ (-x^2) - 3x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren mit -1 (das ändert die Lösung nicht):

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Schritt 3: pq-Formel oder Faktorisieren.
Faktorisieren:

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$

denn:

$$(x+4)(x-1) = x^2 - x + 4x - 4 = x^2 + 3x - 4$$

$$(x+4)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -4,\ x_2 = 1}$$

c) $3(x+1)^2 - 4 = 2x^2 + x + 5$

Schritt 1: Klammer ausmultiplizieren.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

daher:

$$3(x+1)^2 = 3x^2 + 6x + 3$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 - 4 &= 2x^2 + x + 5 \\ 3x^2 + 6x - 1 &= 2x^2 + x + 5 \end{aligned}$$

Schritt 2: Alle Terme auf eine Seite.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 1 - 2x^2 - x - 5 &= 0 \\ x^2 + 5x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Schritt 3: Faktorisieren. Wir suchen zwei Zahlen, deren Summe 5 und deren Produkt -6 ist:

$$6 \cdot (-1) = -6, \quad 6 + (-1) = 5$$

Also:

$$x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$$

$$(x+6)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -6,\ x_2 = 1}$$

d) $2x(x-1) + 3 = (x-2)^2$

Schritt 1: Klammern ausmultiplizieren.

$$2x(x-1) = 2x^2 - 2x$$

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Einsetzen:

$$2x^2 - 2x + 3 = x^2 - 4x + 4$$

Schritt 2: Alle Terme auf eine Seite.

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 2x + 3 - x^2 + 4x - 4 &= 0 \\
x^2 + 2x - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Schritt 3: pq-Formel.
$x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow p = 2,\ q = -1$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -1 \pm \sqrt{1 - (-1)} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{x_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{2}}$$

Lösung zu Aufgabe 4: Potenzgleichungen

a) $2^{x+1} + 8 = 4 \cdot 2^x$

Schritt 1: Potenzregel nutzen.

$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$$

Also:

$$2 \cdot 2^x + 8 = 4 \cdot 2^x$$

Schritt 2: Alle Terme mit 2^x auf eine Seite bringen.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 2^x + 8 &= 4 \cdot 2^x \\
8 &= 4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x \\
8 &= 2 \cdot 2^x
\end{aligned}
$$

Schritt 3: Durch 2 teilen.

$$4 = 2^x$$

Schritt 4: 4 als Zweierpotenz schreiben.

$$4 = 2^2 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

b) $5 \cdot 3^x + 2 = 2 \cdot 3^x + 29$

Schritt 1: Terme mit 3^x zusammenfassen.

$$
\begin{aligned}
5 \cdot 3^x + 2 &= 2 \cdot 3^x + 29 \\
5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x &= 29 - 2 \\
3 \cdot 3^x &= 27
\end{aligned}
$$

Schritt 2: Durch 3 teilen.

$$3^x = 9$$

Schritt 3: 9 als Dreierpotenz schreiben.

$$9 = 3^2 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

c) $3^{2x} = 27 \cdot 3^{x-1}$

Schritt 1: Rechte Seite zu einer Potenz vereinfachen.

$$27 = 3^3$$

Also:

$$27 \cdot 3^{x-1} = 3^3 \cdot 3^{x-1} = 3^{3+x-1} = 3^{x+2}$$

Die Gleichung wird:

$$3^{2x} = 3^{x+2}$$

Schritt 2: Exponenten vergleichen (Basis gleich und positiv).

$$2x = x + 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

Schritt 1: 4 als Potenz zur Basis $\frac{1}{2}$ schreiben.

$$4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Dann:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$$

Die Gleichung ist jetzt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}$$

Schritt 2: Exponenten vergleichen.

$$x + 1 = 2x - 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\boxed{x = 3}$$

Lösung: Punkt mit minimalem Abstand zur Geraden

Gegeben:

$$g: \ y = x + 1, \quad Q(3 \mid -1)$$

Gesucht: Punkt P auf g mit minimalem Abstand zu Q und dieser minimale Abstand.

Idee: Der kürzeste Abstand von einem Punkt zu einer Geraden ist immer entlang der Senkrechten zur Geraden. Also suchen wir die Gerade h, die durch Q geht und *senkrecht* zu g ist. Dann ist P der Schnittpunkt von g und h.

1. Schritt: Steigung der Senkrechten

Gerade g hat Steigung $m_g = 1$. Eine senkrechte Gerade hat Steigung

$$m_h = -\frac{1}{m_g} = -1.$$

Gerade h hat also die Form:

$$h:\ y = -x + b.$$

2. Schritt: Gerade h durch $Q(3 \mid -1)$

Punkt Q liegt auf h, also muss gelten:

$$y_Q = -x_Q + b$$

Einsetzen von $Q(3 \mid -1)$:

$$-1 = -3 + b \Rightarrow b = 2.$$

Damit:

$$h:\ y = -x + 2.$$

3. Schritt: Schnittpunkt P von g und h

Schnittpunkt P liegt auf beiden Geraden, also:

$$x + 1 = -x + 2$$

Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} x + 1 &= -x + 2 \\ x + x &= 2 - 1 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = x + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{P\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)}$$

4. Schritt: Minimaler Abstand $|PQ|$

Abstand zweier Punkte $P(x_P, y_P)$ und $Q(x_Q, y_Q)$:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

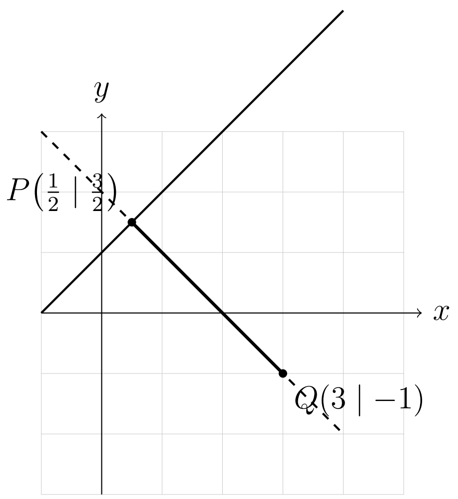
Einsetzen:

$$x_P = \frac{1}{2},\ y_P = \frac{3}{2}, \quad x_Q = 3,\ y_Q = -1$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{50}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{d_{\min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54}$$

5. Schritt: Skizze (TikZ)



Lösung: Rechteck im Dreieck (Extremwertaufgabe)

Wir verwenden das Dreieck aus deiner Aufgabe (z. B. mit den Eckpunkten)

$$A(-2 \mid 0),\ B(6 \mid 0),\ C(0 \mid 4).$$

Das Rechteck liegt mit der unteren Seite auf der x-Achse, die beiden oberen Ecken liegen auf den beiden Schenkeln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

1. Schritt: Geradengleichungen der Schenkel

Gerade durch $A(-2, 0)$ und $C(0, 4)$:

$$m_{AC} = \frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ansatz $y = 2x + b$. Einsetzen von $A(-2,0)$:

$$0 = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow 0 = -4 + b \Rightarrow b = 4.$$

$$AC:\ y = 2x + 4$$

Gerade durch $B(6,0)$ und $C(0,4)$:

$$m_{BC} = \frac{0-4}{6-0} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Ansatz $y = -\frac{2}{3}x + b$. Einsetzen von $B(6,0)$:

$$0 = -\tfrac{2}{3} \cdot 6 + b = -4 + b \Rightarrow b = 4.$$

$$BC:\ y = -\tfrac{2}{3}x + 4$$

2. Schritt: Rechteckhöhe als Variable y

Sei $y > 0$ die Höhe des Rechtecks. Dann schneiden die Horizontalen $y =$ konstant die Schenkel in den Punkten:

- Links auf $AC:\ y = 2x + 4 \Rightarrow x_{\text{links}} = \dfrac{y-4}{2}$
- Rechts auf $BC:\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = y - 4 \Rightarrow x_{\text{rechts}} = \frac{3}{2}(4-y)$

3. Schritt: Breite und Flächeninhalt des Rechtecks

Breite:

$$\begin{aligned} b(y) &= x_{\text{rechts}} - x_{\text{links}} \\ &= \tfrac{3}{2}(4-y) - \frac{y-4}{2} \\ &= \frac{3(4-y)-(y-4)}{2} \\ &= \frac{12-3y-y+4}{2} \\ &= \frac{16-4y}{2} \\ &= 8 - 2y \end{aligned}$$

Flächeninhalt:

$$A(y) = \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = b(y) \cdot y = (8-2y) \cdot y = 8y - 2y^2$$

Das ist eine nach unten geöffnete Parabel.

4. Schritt: Maximum des Flächeninhalts

Parabel $A(y) = -2y^2 + 8y$. Scheitelpunkt liegt bei

$$y_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = -\frac{8}{-4} = 2.$$

Maximale Höhe:

$$y_{\max} = 2.$$

Breite bei $y = 2$:

$$b(2) = 8 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4.$$

Maximaler Flächeninhalt:

$$A_{\max} = A(2) = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 16 - 8 = 8.$$

$$\boxed{A_{\max} = 8 \text{ Flächeneinheiten}}$$

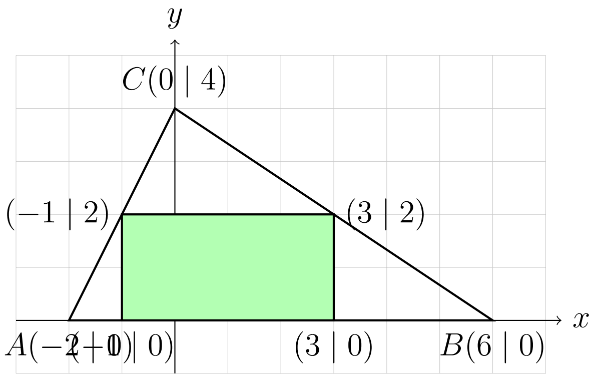
Koordinaten der Eckpunkte des optimalen Rechtecks:

$$x_{\text{links}} = \frac{2-4}{2} = -1, \quad x_{\text{rechts}} = \tfrac{3}{2}(4-2) = \tfrac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Eckpunkte:

$$(-1, 0),\ (3, 0),\ (3, 2),\ (-1, 2).$$

5. Schritt: Skizze



Lösung zu Aufgabe 6: Zuordnung Potenzfunktionen

(Es werden die Graphen 1–8 aus der Aufgabenstellung vorausgesetzt.)

- Graph **1**: nach oben geöffnete Parabel, symmetrisch zur y-Achse, wächst für $|x|$ groß schnell nach oben $\Rightarrow f(x) = x^2$ (bei dir: Antwort A)
- Graph **2**: S-förmiger Verlauf durch Ursprung, ungerade Funktion, fällt für $x < 0$, steigt für $x > 0 \Rightarrow f(x) = x^3$ (Antwort A)
- Graph **3**: nur für $x \geq 0$, startet im Ursprung, flacht nach rechts stark ab $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ (Antwort A)
- Graph **4**: Spiegelung von $\sqrt{x}$ an der x-Achse, nur für $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x}$ (Antwort A)

- Graph **5**: Hyperbel mit zwei Ästen in Quadranten I und III, geht nie durch den Ursprung, senkrechte und waagrechte Asymptote $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Antwort A)
- Graph **6**: Hyperbel mit beiden Ästen über der x-Achse (Quadranten I und II), symmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (Antwort A)
- Graph **7**: nur für $x > 0$, stark abfallend, nähert sich der x-Achse, geht aber nach oben gegen ∞, wenn $x \to 0^+ \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (Antwort A)
- Graph **8**: kubikwurzelähnlicher Verlauf, geht durch den Ursprung, flach für große $|x|$, definiert für alle x, aber weniger steil als $x^3 \Rightarrow f(x) = x^{1/3}$ (Antwort A)