Lösungen zur Klassenarbeit: Un- und Gleichungen, Bruchgleichungen, quadratische Ergänzung, Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1: Gleichungen und Ungleichungen lösen.

a) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$$\begin{aligned} (2x-3)^2 &= 4x^2 - 12x + 9 \\ 4x^2 - 12x + 9 &= 4x^2 - 12x + 9 \\ 0 &= 0 \quad \text{(Unendlich viele Lösungen)} \end{aligned}$$

b) $x(3x+20) + 50 = (2x+5)^2$

$$\begin{aligned} x(3x+20) + 50 &= (2x+5)^2 \\ 3x^2 + 20x + 50 &= 4x^2 + 20x + 25 \quad | -4x, -20x, -25 \\ 3x^2 + 20x + 50 - 4x^2 - 20x - 25 &= 0 \\ -x^2 + 25 &= 0 \\ -x^2 &= -25 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

c) $\frac{x-3}{4} \geq \frac{2x+1}{6}$

$$\begin{aligned} 6(x-3) &\geq 4(2x+1) \\ 6x - 18 &\geq 8x + 4 \\ -18 - 4 &\geq 8x - 6x \\ -22 &\geq 2x \\ -11 &\geq x \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bruchgleichungen lösen.

a) $\frac{x}{4} + \frac{3}{x} = \frac{1}{4}x$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{3}{x} &= \frac{1}{4}x \\ x^2 + 12 &= \frac{1}{4}x^2 \cdot 4 \\ 4x^2 + 12x - x^2 &= 0 \\ 3x^2 + 12x &= 0 \\ 3x(x+4) &= 0 \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= -4 \end{aligned}$$

b) $\frac{2x}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{x^2-16}{x^2-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x+1} - \frac{3}{x-1} &= \frac{x^2-16}{x^2-1} \\
\text{Ersetze } x^2-1 \text{ durch } (x+1)(x-1): \\
\frac{2x}{x+1} - \frac{3}{x-1} &= \frac{(x-4)(x+4)}{(x+1)(x-1)} \\
\text{Hauptnenner: } (x+1)(x-1) \\
2x(x-1) - 3(x+1) &= (x-4)(x+4) \\
2x^2 - 2x - 3x - 3 &= x^2 - 16 \\
2x^2 - 5x - 3 &= x^2 - 16 \\
2x^2 - 5x - 3 - x^2 + 16 &= 0 \\
x^2 - 5x + 13 &= 0 \\
(x-4)(x+4) &= 0 \\
x_1 = 4, \quad x_2 &= -4
\end{aligned}$$

c) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{5}{x^2-x}$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} &= \frac{5}{x^2-x} \\
\text{Ersetze } x^2-x \text{ durch } x(x-1): \\
\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} &= \frac{5}{x(x-1)} \\
\text{Hauptnenner: } x(x-1) \\
2(x-1) + 3x &= 5 \\
2x - 2 + 3x &= 5 \\
5x - 2 &= 5 \\
5x &= 7 \\
x &= \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Quadratische Ergänzung.

a) $x^2 + 6x$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 = (x+3)^2 - 9$$

b) $x^2 - 10x + 7$

$$\begin{aligned}
x^2 - 10x + 7 &= x^2 - 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 7 \\
&= (x-5)^2 - 25 + 7 \\
&= (x-5)^2 - 18
\end{aligned}$$

b) $3x^2 - 12x + 11$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 11 &= 3\left(x^2 - 4x\right) + 11 \\ &= 3\left(x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + 11 \\ &= 3\left((x-2)^2 - 4\right) + 11 \\ &= 3(x-2)^2 - 12 + 11 \\ &= 3(x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (.. Punkte)

Bei einem Rechteck ist eine Seite 7 cm lang. Verkürzt man diese Seite um 2 cm und verlängert man die andere Seite um 2 cm, so ist der Flächeninhalt des neuen Rechtecks um 2 cm^2 kleiner. Wie lang ist die andere Seite des Rechtecks?

$$\begin{aligned} \text{Gegeben:}\quad & \text{Eine Seite des Rechtecks ist 7 cm lang.} \\ & \text{Sei die andere Seite } x. \\ \text{Fläche des ursprünglichen Rechtecks:}\quad & A_{\text{alt}} = 7 \cdot x \\ \text{Nach der Änderung:}\quad & A_{\text{neu}} = (7-2)\cdot(x+2) \\ & A_{\text{neu}} = 5(x+2) \\ \text{Es gilt:}\quad & A_{\text{alt}} - A_{\text{neu}} = 2 \\ & 7x - 5(x+2) = 2 \\ & 7x - 5x - 10 = 2 \\ & 2x - 10 = 2 \\ & 2x = 12 \\ & x = 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (.. Punkte)

Ein Beutel enthält **jeweils 2 rote, 3 blaue und 5 grüne Kugeln**. Es werden **nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen** gezogen.

a) Zeichne ein Baumdiagramm, das alle möglichen Ziehungen darstellt.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln dieselbe Farbe haben?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Kugeln dieselbe Farbe haben und die dritte Ku

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln unterschiedliche Farben haben?

Lösung:

b) Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln dieselbe Farbe haben:

$$P(\text{RRR}) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{0}{8} = 0$$
$$P(\text{BBB}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$$
$$P(\text{GGG}) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$$
$$P(\text{alle gleich}) = P(\text{RRR}) + P(\text{BBB}) + P(\text{GGG}) = 0 + \frac{1}{120} + \frac{1}{12} = \frac{11}{120} \approx 0.0917$$

c) Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Kugeln dieselbe Farbe haben und die dritte eine andere Farbe:

$$P(\text{RRG}) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{5}{8} = 0$$
$$P(\text{RRB}) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{3}{8} = 0$$
$$P(\text{BBR}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}$$
$$P(\text{BBG}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$P(\text{GGR}) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{40}{720} = \frac{1}{18}$$
$$P(\text{GGB}) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12}$$
$$P(\text{genau zwei gleich}) = P(\text{BBR}) + P(\text{BBG}) + P(\text{GGR}) + P(\text{GGB}) = \frac{1}{60} + \frac{1}{24} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{19}{120} \approx 0.158$$

d) Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln unterschiedliche Farben haben:

$$P(\text{RGB}) = \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$P(\text{RBG}) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$P(\text{BRG}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$P(\text{BGR}) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$P(\text{GRB}) = \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$P(\text{GBR}) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$
$$\begin{aligned} P(\text{alle unterschiedlich}) &= P(\text{RGB}) + P(\text{RBG}) + P(\text{BRG}) + P(\text{BGR}) + P(\text{GRB}) + P(\text{GBR}) \\ &= \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (.. Punkte)

In einer Kiste befinden sich **8 Schokoladen, 5 Karamell- und 7 Erdbeerbonbons**. Ein Kind zieht **nacheinander zwei Bonbons ohne Zurücklegen**.

a) Zeichne ein Baumdiagramm für die möglichen Ziehungen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Bonbons Schokolade sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Bonbon Schokolade und das zweite Erdbeere ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Bonbon Karamell ist?

Lösung:

b) Wahrscheinlichkeit für zwei Schokoladenbonbons:

$$P(SS) = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{56}{380} = \frac{14}{95} \approx 0.1474$$

c) Wahrscheinlichkeit für zuerst Schokolade, dann Erdbeere:

$$P(SE) = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{56}{380} = \frac{14}{95} \approx 0.1474$$

d) Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Karamellbonbon:

$$\begin{aligned} P(\text{kein K}) &= P(SS) + P(SE) + P(ES) + P(EE) \\ &= \frac{56}{380} + \frac{56}{380} + \frac{56}{380} + \frac{42}{380} \\ &= \frac{210}{380} = \frac{21}{38} \approx 0.5526 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens ein K}) &= 1 - P(\text{kein K}) \\ &= 1 - 0.5526 = 0.4474 \end{aligned}$$

Gesamtauswertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe	Note
Punkte							