2+

Kód studenta 4

1 Spojité funkce (3 body)

1. Definujte, co znamená, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bodě $b \in \mathbb{R}$.
2. Pro každou z následujících dvou funkcí rozhodněte (a stručně zdůvodněte), zda je spojitá v bodě 0.

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{pro } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ \exp(-1/x) & \text{pro } x \neq 0. \end{cases}$$

?

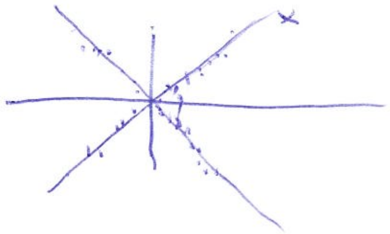
3. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující $0 \le f(x) \le 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0,1]$, a definujme funkci $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Je funkce g spojitá na intervalu $(0,1)$? Zdůvodněte.

1) $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$, limita je definována následovně:

$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$



2) $f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

pro $x \geq 0$ platí:

$\underbrace{-x}_{\text{jde k nule } 0} \le f_1(x) \le \underbrace{x}_{\text{taky } 0}$ $\Rightarrow$ z věty o dvou policajtech $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$

Analogicky $\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = 0$, tedy $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0 = f_1(0)$, $f_1(x)$ je tedy spojitá v 0.

3) $g(x)$ představuje plochu pod grafem funkce $f(x)$.

$f(x)$ může být nespojitá, ale musí platit, že míra bodů nespojitosti je nulová.

Dále také víme, že pro $a \in (0,1)$ a $\delta > 0$ takové, že $0 \le a - \delta \le a \le a + \delta \le 1$ ~~[illegible]~~ se hodnota ~~[illegible]~~ $g(x)$ v δ-okolí a změní jen málo. Jinými slovy:

$0 \cdot \delta \le |g(a) - g(a \mp \delta)| \le 1 \cdot \delta$, protože $0 \le f(x) \le 1$

tedy $\forall \varepsilon > 0$, zvolím $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1-a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ a pak

$|x - a| < \delta \Rightarrow 0 \le |g(x) - g(a)| \le 1 \cdot \delta < \varepsilon$

3 b.

Kód studenta 4

2 Limita posloupnosti (3 body)

1. Napište, jak je definována limita posloupnosti reálných čísel. (Stačí, když se omezíte na případ, kdy limita je vlastní.)
2. Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, která má vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ předpisem $b_n = a_n - a_{2n}$. Je možné z těchto informací rozhodnout, zda má $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ limitu, případně čemu se ta limita rovná?
3. Definujme posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ následujícími rovnostmi:

$$c_0 = 1$$
$$c_n = \sin(c_{n-1}) \qquad \text{pro } n \geq 1.$$

Rozhodněte, zda má posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ limitu, případně čemu se ta limita rovná.

1. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$ má vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$ (značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = L$) pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

2. využijeme Cauchyho podmínku, která říká:
$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ má limitu (vlastní) $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq n_0: |a_m - a_n| < \varepsilon$

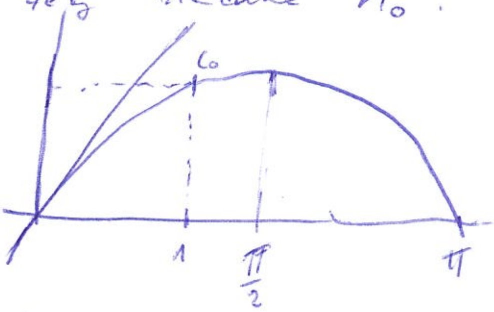
$b_n = a_n - a_{2n}$, tvrdím, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Nechť $\varepsilon > 0$, pak $\exists n_0$ takové, že $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ tedy i $|a_k - a_{2k}| < \varepsilon$, $\forall k \geq n_0$

$\parallel$

b_n, nalezli jsme tedy hledané n_0.



3) $c_0 = 1$, $c_1 = \sin(1)$, $c_2 = \sin(\sin(1))$

Pokud limita existuje, pak

$\lim_{n\to\infty}(c_n - c_{n-1}) = 0 = (\lim_{n\to\infty} c_n) - (\lim_{n\to\infty} c_{n-1})$

Cauchyho podmínka

$L = \sin(L)$ $\Rightarrow$ pokud limita existuje, $L = 0$

protože $c_n \in [0,1]$ (indukcí) a pro $c_{n-1} \in [0,1]$

$c_n = \sin(c_{n-1}) \leq c_n$, je to posloupnost nerostoucí a limita existuje a je rovna 0

Kód studenta 4

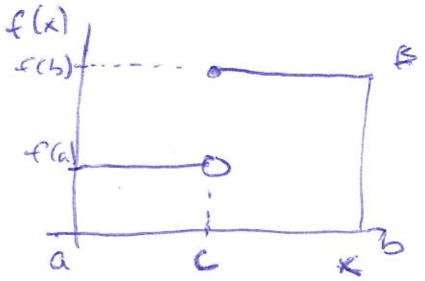
3 Primitivní funkce (3 body)

1. Napište definici pojmu *primitivní funkce k funkci f na intervalu* (a, b).
2. O každém z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý, a své rozhodnutí stručně zdůvodněte.
   (a) Jestliže je funkce f neklesající na intervalu $[a, b]$, tak má na intervalu (a, b) primitivní funkci.
   (b) Jestliže má funkce f na intervalu (a, b) primitivní funkci F, a jestliže má F lokální minimum v bodě $c \in (a, b)$, tak platí $f(c) = 0$.
3. Spočítejte

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx.$$

1) funkce $F(x) = \int f(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu (a,b) pokud pro $x \in (a,b)$: $(F(x))' = f(x)$

2) a)



$\Rightarrow$

Pokud by existovala $F(x)$, pak by musela nutně na intervalech (a,c), (c,b) mít derivaci $f(a)$, $f(b)$

$\lim_{x \to c^+} F(x)' = f(b)$ $\quad \lim_{x \to c^-} F(x)' = f(a)$

$\Rightarrow$ $F(x)$ v bodě c nemá derivaci a $f(x)$ na (a,b) nemá primitivní funkci

b) nulová první derivace je nutná podmínka existence lokálního extrému (pro derivovatelné fce)

$f(x) = F(x)'$, $x \in (a,b)$. Pokud tedy $F(x)$ má lokální minimum v $c \in (a,b)$, $F(c)' = f(c) = 0$

Otázka ③ Kód studenta ④

$$\cancel{\int} \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

3) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \cos x \, dx =$$

$u = \sin(x)$

$du = \cos(x)\, dx$

$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$u(\pi) = \sin(\pi) = 0$

$$= \int_1^0 u^{\frac{1}{2}}\, du = -\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\, du = -\left[\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = -\left[\frac{2}{3} - 0\right] = -\frac{2}{3}$$

3

Kód studenta 4

4 Lineární zobrazení (3 body)

1. Definujte pojem *jádro* $Ker(f)$ lineárního zobrazení f mezi vektorovými prostory U a V.
2. Dokažte, že jádro $Ker(f)$ je podprostorem U.
3. Najděte bázi jádra lineárního zobrazení, které představuje druhou derivaci na prostoru reálných polynomů stupně nanejvýše 5.

1) $Ker(f) = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in U, f(\vec{x}) = \vec{o}\}$ $\quad f: U \to V$

f lineární

2) Víme, že $f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

protože f je lineární.

Aby byl $Ker(f)$ podprostor, musí obsahovat $\vec{o}$ a být uzavřený na ~~lineární kombinace~~ součty a skalární násobky.

$$f(\vec{o}) = f(0 \cdot \vec{o}) = 0 \cdot f(\vec{o}) = \vec{o}$$

$$u, v \in Ker(f) \Rightarrow f(u) + f(v) = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}$$

$$\underset{\text{z linearity}}{=} f(u+v), \text{ tedy } u+v \in Ker(f)$$

$$u \in Ker(f),\ \alpha \in T \Rightarrow f(u) = \vec{o} = \alpha \cdot \vec{o} = \alpha f(u) = f(\alpha \cdot u)$$

takže $\alpha \cdot u \in Ker(f)$

3) ~~[illegible]~~ Mějme prostor reálných polynomů stupně nanejvýš 5 s bazí $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Lineární zobrazení f představující druhou derivaci zobrazí bázi následovně:

$f(1) = \vec{o}$ $\quad f(x^3) = 6x$

$f(x) = \vec{o}$ $\quad f(x^4) = 12x^2$

$f(x^2) = 2$ $\quad f(x^5) = 20x^3$

Otázka (4) Kód studenta (G)

~~2) Zobrazování bodů 3.~~

~~$f(x^k)$, $k \geq 2$ jsou lineárně nezávislé~~

~~dále víme, že dim Ker(f) + dim Im(f) = dim~~

3) ~~každý~~ Pokud je polynom stupně ≥ 2, pak druhá derivace ~~[illegible]~~ určitě obsahuje nenulový člen $x^k, k \geq 0$. Z toho plyne, že v $\mathrm{Ker}(f)$ jsou pouze polynomy stupně nanejvýš 1. Zároveň, každý takový polynom už patří do $\mathrm{Ker}\, f$.

Báze $\mathrm{Ker}\, f$ tedy je $\{1, x\}$

3

Kód studenta 4

5 Skalární součin (3 body)

Na prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme standardní a nestandardní skalární součin

$$\langle x, y\rangle = x^T y,$$
$$\langle x, y\rangle_A = x^T A y,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Ověřte, že $\langle x, y\rangle_A$ tvoří skutečně skalární součin (stačí ověřit vlastnost $\langle x, x\rangle_A > 0$ pro každé $x \neq 0$).
2. Najděte lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, aby pro každé $x, y \in \mathbb{R}^3$ platilo

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle_A\,.$$

1) Potřebujeme ověřit, že A je pozitivně-definitní.
Použijeme Silvestrovo kritérium, podle kterého je $A^{n\times n}$ pos. def. pokud $\forall i$ $1 \le i \le n$ je $\det(A_{1:i,1:i}) > 0$ kde $A_{1:i,1:i}$ je levá horní podmatice $i \times i$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(1) = \underline{1}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = \underline{1}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(laplaceův rozvoj)

$$+\ 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 6 - 3 + (-2) = \underline{1}$$

Matice A je pos. def. a $\langle x, x\rangle_A > 0$ pro každé $x \neq 0$

Otázka 5 kód studenta 4

a) $f(x) = B\cdot\vec{x}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\langle x, y\rangle_A = x^T A y = (B\cdot x)^T \cdot By =$$

$$= x^T B^T B y$$ $\Rightarrow$ hledáme $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, že $B^T B = A$

Cholského dekompozicí získáme $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Výpočet je zachycen a dalším listě.

Otázka (5)   kód studenta (4)

<u>Dekompozice</u> $A = B^T B$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & x^T \\ x & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & \vec{c}^T \\ \vec{0} & \boxed{B_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$A = B^T B = \begin{pmatrix} b_{11} & \vec{0} \\ \vec{c} & \boxed{B_{n-1}^T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \vec{c}^T \\ \vec{0} & \boxed{B_{n-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11} \cdot c^T \\ b_{11} \cdot \vec{c} & B_{n-1}^T B_{n-1} + c \cdot c^T \end{pmatrix}$$

$\to \quad b_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$c^T = \dfrac{x^T}{\sqrt{a_{11}}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cancel{\sqrt{2}} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_{n-1}^T B_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{c \cdot c^T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3⁻

Kód studenta 4

6 Podobnost matic (3 body)

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Definujete pojem *podobnost matic.*
2. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda matice A, B jsou podobné.
3. Dokažte $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}A)^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}B)^n$.

není uveden rozměr matic ani těleso, nad kterým jsou uvažovány

1) Matice A a B jsou si podobné, pokud existuje regulární S, že

$$AS = SB \iff A = SBS^{-1} \iff B = S^{-1}AS.$$

$A = IAI^{-1} \Rightarrow$ ~~sym~~ reflexní

symetrická

$A = SBS^{-1}$, $B = TCT^{-1} \Rightarrow A = STCT^{-1}S^{-1} = (ST)C(ST)^{-1}$

$\Rightarrow$ tranzitivní

2) vlastní čísla λ matice A jsou kořeny $\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$ což jsou právě $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Podobně, matice B má stejný charakteristický polynom, protože $\det(B - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$, B má tedy stejná vlastní čísla jako A.

Protože λ_i jsou různá, vlastním číslům odpovídají lineárně nezávislé vlastní vektory, dále

$$A\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} As_1 & As_2 & As_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 & \lambda_2 s_2 & \lambda_3 s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}\Lambda = S\Lambda \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Protože vlastní vektory s_1, s_2, s_3 jsou lin. nez., S je regulární.

Podobně lze argumentovat pro B, že $BT = T\Lambda$ pro T regulární.

Protože B i A jsou podobné Λ a podobnost je ekvivalence, A a B jsou si podobné

Otázka 6 Kód Studenta 4

3) z předchozího úkolu

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$B = T\Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{4} S\Lambda S^{-1} = S\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{4}A\right)^n = S\left(\frac{1}{4}\Lambda\right)^n S^{-1} \qquad \left(\frac{1}{4}B\right)^n = T\left(\Lambda \cdot \frac{1}{4}\right)^n T^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}A\right)^n = \lim_{n\to\infty} S\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} S^{-1} = O^{3\times 3}$$

jde k nulové matici

Pro B to samé:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}B\right)^n = \lim_{n\to\infty} T\left(\frac{1}{4}\Lambda\right)^n T^{-1} = O^{3\times 3}$$

3−

Kód studenta 4

7 Kombinatorické počítání (3 body)

Kolik lze nalézt různých čtvercových matic řádu 4 nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, které obsahují 9 nul, ale žádný řádek ani sloupec nemají zcela zaplněný nulami?

Nejdříve spočítáme, kolik různých invalidních rozmístění nul existuje. $I = \check{R} \cup S$

Porušena řádková podmínka

porušena sloupcová podmínka.

Množina invalidních rozmístění nul.

$|\check{R} \cap S| = 16 \cdot \binom{9}{2}$

9 políček neobsa...

dvě nuly zb...

NEBYLO BY NA ŠKODU ZMÍNIT ŽE TŘEBA 2 ŘÁDKY A 1 SLOUPEC S NULAMI UŽ NEJDOU.

$|I| = |\check{R}| + |S| - |\check{R} \cap S|$

$|\check{R}| = |\bigcup_{i=1}^{4} \check{R}_i|$

$\check{R}_i$ ..... rozmístnění nul zaplňující i-tý řádek

$|\check{R}_i| = \binom{12}{5}$

neobsazené pozice

5 nul zbývá rozmístit

$|\check{R}| = \sum_{i=1}^{4} |\check{R}_i| - |R_1 \cap R_2| - |R_1 \cap R_3| \ldots - \underbrace{|R_3 \cap R_4|}_{8}$

princip inkluze exkluze

$+ |R_1 \cap R_2 \cap R_3| + \ldots =$

0

$= 4\binom{12}{5} - \binom{4}{2} \cdot 8$

V... validní rozmístění nul

$|S| = |\check{R}|$ ze symetrie

$|I| = 2\left(4 \cdot \binom{12}{5} - 8\binom{4}{2}\right) - 16 \cdot \binom{9}{2}$

KDE SE Z 16 STALA 32?

$|V| = \binom{16}{9} - |I| = \binom{16}{9} - 8\binom{12}{5} + 16 \cdot \binom{4}{2} + \cancel{32}\,16 \binom{9}{2}$

$\# \text{Matic} = |V| \cdot (16-9)^2 = 7^2 \left(\binom{16}{9} - 8\binom{12}{5} + 16\binom{4}{2} + \cancel{32}\,16\binom{9}{2}\right)$

2^7 2^7

3

Kód studenta 4

8 Souvislost grafů (3 body)

Pro jednoduchý graf G s alespoň dvěma vrcholy definujte jeho vrcholovou a hranovou souvislost. $G=(V,E)$

Rozhodněte, zda existují grafy s následujícími hodnotami vrcholové a hranové souvislosti. Odpovědi zdůvodněte.

1. $k_v(G_1) = 2, k_e(G_1) = 3$,
2. $k_v(G_2) = 3, k_e(G_2) = 2$,
3. $k_v(G_3) = 2, k_e(G_3) = 3$ a G_3 je kubický (tj. všechny jeho vrcholy mají stupeň 3).

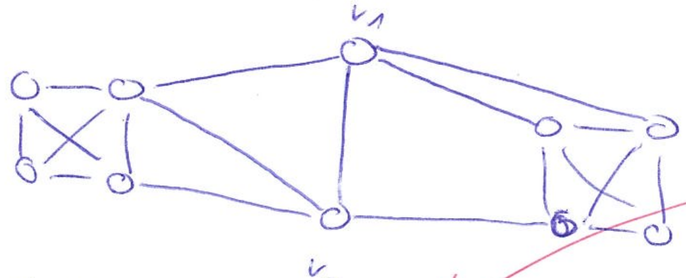
$k_e = \min\{ i \mid G=(V, E_1)$ je nesouvislý, $|\overbrace{E \setminus E_1}^{\text{hranový řez}}| = i,\ E_1 \subseteq E \}$

$k_v = \min\{ i \mid G=(V_1, E \cap (V_1 \times V_1))$ je nesouvislý, $|\underbrace{V \setminus V_1}_{\text{vrcholový řez}}| = i,\ V_1 \subseteq V \}$

pozor na K_n

$k_v(G) \le k_e(G)$ protože každý hranový řez lze namapovat na vrcholový prostě tím, že odstraním jeden z krajních vrcholů pro každou hranu.

1) Například:



$k_v = 2$, protože stačí odstranit v_1 a v_2

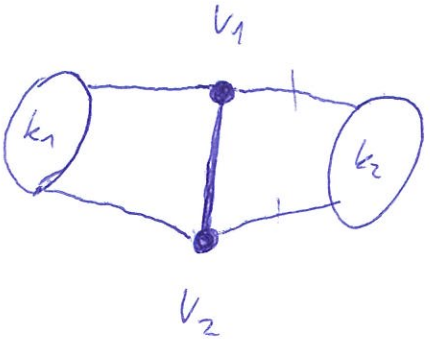
$k_e = 3$ protože mezi každými dvěma vrcholy vedou alespoň 3 hranově disjunktní cesty (uvnitř K_4 vedou, $K_4 \to K_4$ taky)

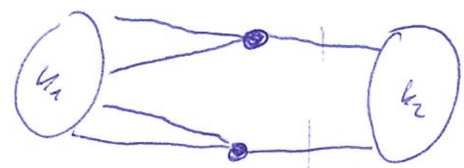
2) Jak už jsme řekli, $k_v(G) \le k_e(G)$, takže žádný takový graf neexistuje

Otázka (8) Kód studenta (4)

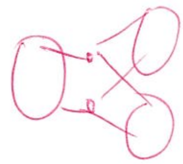
3) Nechť v_1 a v_2 je minimální vrcholový řez, k_1, k_2 komponenty, na které se G po odstranění v_1, v_2 rozpadne

~~Nechť~~





ještě je možnost



ale ta je taková

Vidíme, že pokud vede mezi v_1 a v_2 hrana, ~~pak~~ propojení komponent (tak aby byl $\{v_1, v_2\}$ minimální vrcholový řez) už je jasně dané. k_e je však 2.

Pokud mezi v_1 a v_2 nevede hrana, pak už jsou jen 2 způsoby, jak k_1 a k_e přes v_1 a v_2 propojit. V obou případech je $k_e = 2$.

Takový G_3 tedy neexistuje

0

Kód studenta 4

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici (jednu z navzájem ekvivalentních definic), kdy je teorie S *jednoduchou extenzí* teorie T.
2. Nalezněte příklad výrokových teorií S, T_1, T_2 takových, že S je jednoduchou bezespornou extenzí teorie T_1 i teorie T_2 a $T_1 \cup T_2$ je sporná, anebo zdůvodněte, proč takové teorie neexistují.
3. Kolik je navzájem neekvivalentních jednoduchých extenzí S výrokové teorie $T = \{p \to q\}$ nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$, ve kterých neplatí $q \to r$, tj. $S \not\models q \to r$?

1) Nechť teorie T je množina axiomů a L_T je jazyk teorie T. Pak S je jednoduchou extenzí T, pokud $\cancel{T \subseteq S}$ a teorie S je teorie nad stejným jazykem L_T

To nestačí, např. $S = \{p \wedge q\}$ je extenze $T = \{p \vee q\}$

2)