- 向量
  - 三种视角
    - 物理：带有方向的数值
    - 计算机：列表
    - 数学：任何有意义的数
  - 向量可以看成在空间中从原点出发的运动：加、乘、etc
  - 向量：函数的抽象表达

$f(x)$ 满足向量的可加与scaling

$\Downarrow$

线性变换.

eg. Polynomials

$c, x, x^2, \cdots x^n$

不同维度，scaling 和矩阵数.

则 $\frac{d}{dx} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \ 3 & \vdots \end{bmatrix}$

- Span & Basis

- 线性变换
  - 空间轨迹保持直线 + 原点不移动.

- 矩阵乘法. $A \cdot v = [A_1 \ \ A_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 在正交空间中坐标.

  $A = [A_1 \ \ A_2]$ ↑ Transformed，看成空间变换后的基向量.

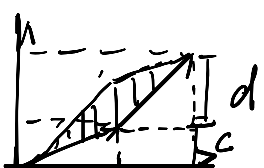
  $[\hat{i} \ \ \hat{j}]$

  矩阵的本质

- 行列式
  - 空间变换对面积的改变（二维）
  - 负号代表了是否改变定向 ⇒（$\hat{j}$ 是否在 $\hat{i}$ 的左边？）（三维中手性改变）
  - 行列式为 0 ⇒ $\hat{i}$ 与 $\hat{j}$ 重合（降维）
  - 计算.（二维）

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a+b)*(c+d) - 2\times\left(bc + \frac{ac}{2} + \frac{bd}{2}\right)$$

$$= ad - bc$$



$a \quad b$

三维 ⇒ 平行六面体的体积

- 零空间.
  - 空间变换后被压缩到原点的向量集合.
  - $N(A) \Rightarrow Ax=0$

$$= \begin{bmatrix} -A_1- \\ -A_2- \\ \vdots \\ -A_j- \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} A_1x \\ A_2x \\ \vdots \\ A_jx \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x\text{与}A^T\text{的空间垂直.}$$

- 列空间
  - 线性空间张成的空间.

- 逆

$Ax=v$

- 点积
  - duality.

- 叉积
  - 两向量围成的平行四边形的面积. $\det\begin{Bmatrix} A & B \end{Bmatrix}$
    方向遵守右手螺旋定则

$$\Downarrow$$

$$\det\begin{Bmatrix} i & A_1 & A_2 \\ j & B_1 & B_2 \\ k & B_3 & C_3 \end{Bmatrix}$$

· 基向量

- 基向量的不同就像不同地区生活的人

	基向量	坐标 ⇒ 在空间中对基向量的缩放
空间 1	$[\vec{i} \ \ \vec{j}]$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
↓	↓ A	在不同空间中的缩放相同
空间 2	$[\vec{i}' \ \ \vec{j}']$	$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

基变换矩阵.

矩阵转化. $\underline{[\vec{i}' \ \vec{j}']^{-1} A \, [\vec{i}' \ \vec{j}']} = A$

· 特征值 & 特征向量

· $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ ： 对 $\vec{v}$ 进行 A 变换后的 $A\vec{v}$ 仍与 $\vec{v}$ 同向

λ 表示变换前后的缩放比例

↓

$\lambda I \vec{v}$

保持 λ scaling 的特性

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

$\vec{v} \in N(A - \lambda I) \Rightarrow \det|A - \lambda I| = 0$

· 二维空间不一定有特征向量 eg. 旋转 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

有唯一特征值. 但有二维的特征向量 eg. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(无数个)

(空间中所有向量均为特征向量)

· 特征基. - 当特征向量足以张成整个 R{A}

$A = \underbrace{[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]^{-1}}_{} A \underbrace{[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]}_{} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

特征基矩阵