2025 北京西城高三一模

数　　学

2025.4

本试卷共 6 页， 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,x^2<4\}$， $B=\{x\,|\,\lg x>0\}$，那么集合 $A\cup B=$

（A） $(-2,+\infty)$　　（B） $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

（C） $(-\infty,2)$　　（D） $(1,+\infty)$

（2）下列函数中，图象关于 y 轴对称的是

（A） $y=(x-1)^2$　　（B） $y=2^x$

（C） $y=x^4+x^2$　　（D） $y=|\ln x|$

（3）在 $(x^2+\dfrac{2}{x})^4$ 的展开式中， x^2 的系数等于

（A） 6　　（B） 12

（C） 18　　（D） 24

（4）在长方形 $ABCD$ 中， E 为 BC 的中点， $\cos\angle AEB=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos\angle AED=$

（A） $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$　　（B） $\dfrac{1}{9}$

（C） $-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$　　（D） $-\dfrac{1}{9}$

（5）在平面直角坐标系 xOy 中，若从点 $A(0,t)$ 发出的光线经过点 $B(1,0)$，且被 x 轴反射后将圆 C: $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ 平分，则实数 $t=$

（A） 1　　（B） 2

（C） 3　　（D） 4

（6）设直线 $m\subset$ 平面 α，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 l，则“ $m\perp\beta$ ”是“ $m\perp l$ ”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$ ，则

（A）$x_1 - x_2 = 2k\pi$， $k \in \mathbf{Z}$　　　　（B）$x_1 - x_2 = 2k\pi$ 或 $x_1 + x_2 = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$， $k \in \mathbf{Z}$

（C）$x_1 + x_2 = k\pi + \dfrac{\pi}{3}$， $k \in \mathbf{Z}$　　　　（D）$x_1 - x_2 = 2k\pi$ 或 $x_1 + x_2 = k\pi + \dfrac{\pi}{3}$， $k \in \mathbf{Z}$

（8）设双曲线 E: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1 和 F_2. 若 E 上存在一点 P 使得 $|PF_1| = 3|PF_2|$，则双曲线 E 的离心率的取值范围为

（A）$[3, +\infty)$　　　　（B）$[2, +\infty)$

（C）$(1, 3]$　　　　（D）$(1, 2]$

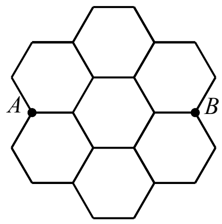
（9）蜂巢的精密结构是通过优胜劣汰的进化自然形成的. 若不计蜂巢壁的厚度，蜂巢的横截面可以看成正六边形网格图，如图所示. 设 P 为图中 7 个正六边形（边长为 4 ）的某一个顶点， A, B 为两个固定顶点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最大值为

（A）44

（B）48

（C）72

（D）76



（10）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， 前 n 项的乘积为 T_n. 若 $a_1a_2 < a_2a_3 < 0$， 则

（A）S_n 无最小值，T_n 无最大值　　　　（B）S_n 有最小值，T_n 无最大值

（C）S_n 无最小值，T_n 有最大值　　　　（D）S_n 有最小值，T_n 有最大值

第二部分（非选择题 共 110 分）

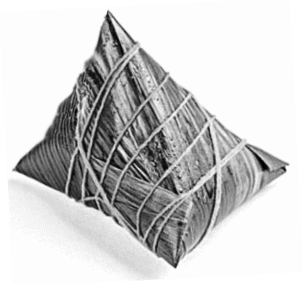
二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

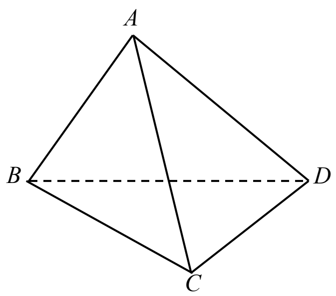
（11）设 i 为虚数单位，则 $\frac{1-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$____.

（12）设抛物线 C：$x^2=2py$ 的焦点为 $F(0,1)$，准线为 l，则抛物线 C 上一点 $A(t,2)$ 到 l 的距离为____.

（13）设平面向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，且 $|\boldsymbol{c}|=5$，则使得向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的一组值 $x=$ ____，$y=$ ____.

（14）端午节又名端阳节、粽子节等，它是中国首个入选世界非遗的节日. 从形状来分，端午节吃的粽子有三角粽、四角粽、枕形粽、牛角粽等. 其中，四角粽的形状可以近似看成一个四面体 $ABCD$，如图所示. 设棱 AD 的长为 $6\,\mathrm{cm}$，其余的棱长均为 $2\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$，则该四角粽的表面积为____cm^2，内含食物的体积为____cm^3.（粽叶的厚度忽略不计）





（15）记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 设函数 $f(x)=x+[x]$，有以下四个结论：

① 函数 $f(x)$ 为单调函数；

② 对于任意的 x，$f(x)+f(-x)=0$ 或 $f(x)+f(-x)=-1$；

③ 集合 $\{x\,|\,f(x)=a\}$ (a 为常数) 中有且仅有一个元素；

④ 满足 $f(x)+f(y)\leqslant 7$ 的点 (x,y) $(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 构成的区域的面积为 8.

其中，所有正确结论的序号是____.

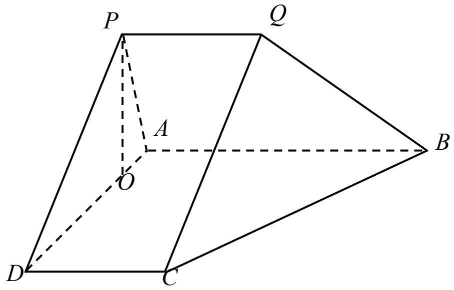
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，在多面体 $ABCDPQ$ 中，$AB\perp$平面PAD，平面$PDC\cap$平面$PAB=PQ$，$AB//CD$，$PO\perp AD$于点O.

（Ⅰ）求证：$CD//PQ$；

（Ⅱ） 设 $AB=DO=4OA=4$，$CD=PQ=PO=2$，求直线 PA 与平面 QBC 所成角的正弦值.



（17）（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$中，$a\cos B+b\cos A=4c\cos A$.

（Ⅰ）求 $\cos A$ 的值；

（Ⅱ）若 $a=2\sqrt{10}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$存在，求 BC 边上的高.

条件①：$B=\dfrac{3\pi}{4}$；

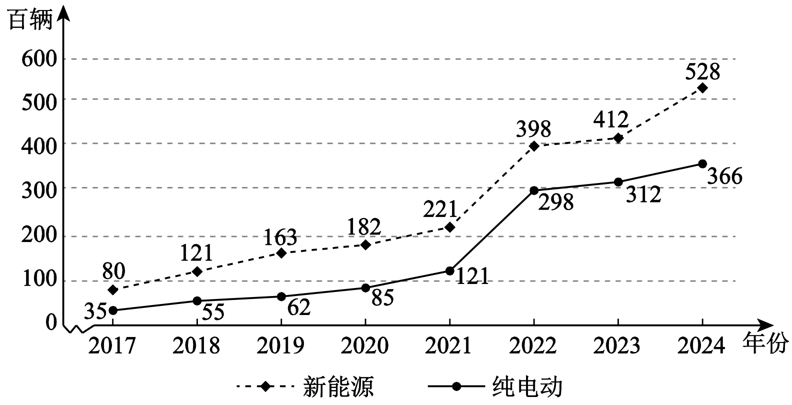
条件②：$b=6$；

条件③：$\cos C=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

发展纯电动、插电式混合动力等新能源汽车是我国从汽车大国迈向汽车强国的必由之路．为调查研究，某地统计了辖区内从 2017 年至 2024 年这 8 年的新能源汽车和纯电动汽车的销量，得到如下折线图（单位：百辆）：



在每一年中，记该年纯电动汽车销量占该年新能源汽车销量的比重为Q．

（Ⅰ）从 2017 年至 2024 年这 8 年中随机抽取 1 年，求该年Q值超过 50% 的概率；

（Ⅱ）现从 2019 年至 2024 年这 6 年中依次随机抽取，每次抽取 1 个年份，若该年的Q值超过 50%，则停止抽取，否则继续从剩余的年份中抽取，直至抽到Q值超过 50% 的年份．记抽取的次数为X，求X的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记 2020 年至 2024 年这 5 年新能源汽车销量数据的方差为s_1^2，且这 5 年纯电动汽车销量数据的方差为s_2^2，写出s_1^2与s_2^2的大小关系．（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$A$为椭圆$E$上一点，且点$A$到椭圆$E$的两个焦点的距离之和等于$2\sqrt{6}$．

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）若A关于原点O的对称点为B，过点A与AB垂直的直线与椭圆E的另一个交点为C，$AH\perp x$轴于点H，直线BC与x轴交于点M．用$S_{\triangle BOM}$与$S_{\triangle AOH}$分别表示$\triangle BOM$与$\triangle AOH$的面积，证明：$S_{\triangle BOM}=2S_{\triangle AOH}$．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=(x+a)\mathrm{e}^{ax}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 2，求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值分别为 $M(a),N(a)$，求使得不等式

$M(a)\cdot N(a)\geqslant(2a-1)\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{2}$ 成立的 a 的最小值.

（21）（本小题 15 分）

如图，设 A 是由 $n\times n\ (n\geqslant 3)$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表，其中 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的实数，且满足 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 与 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$ 均是公差不为 0 的等差数列.

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nn}

若根据条件 p，能求出数表 A 中所有的数，则称 A 能被 p 确定.

（Ⅰ）已知 $n=3$，分别根据下列条件，直接判断数表 A 能否被其确定：

条件 p_1：“已知 a_{13},a_{22},a_{31}”；

条件 p_2：“已知 $a_{12},a_{21},a_{23},a_{33}$”.

（Ⅱ）设条件 p：“任意给定数表 A 中的 m 个数”，A 能被 p 确定，证明：m 的最小值为 $2n$；

（Ⅲ）设条件 p：“已知集合 $\{a_{ij}\,|\,i=j$ 或 $i+j=n+1$，其中 $i=1,2,\cdots,n\}$ 中的任意 k 个元素”，求 k 的最小值，使得 A 能被 p 确定.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　　（2）C　　（3）D　　（4）B　　（5）A

（6）A　　（7）B　　（8）D　　（9）B　　（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$　　（12）3

（13）-4　3（答案不唯一）　　（14）$12\sqrt{3}+6\sqrt{15}$　$6\sqrt{6}$

（15）①②④

注：（13）（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；（15）题全部选对得 5 分，有两个选对且无错选得 4 分，有一个选对且无错选得 3 分，其他得 0 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

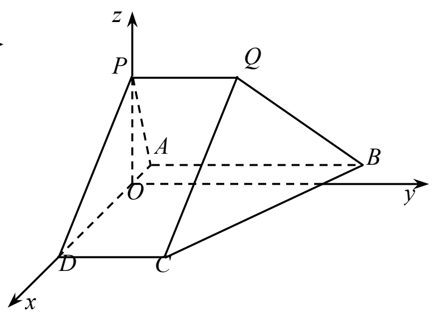
（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）如图，因为 $AB \parallel CD$， $CD \not\subset$ 平面 $ABQP$， $AB \subset$ 平面 $ABQP$，

所以 $CD \parallel$ 平面 $ABQP$.　　………………… 3 分

又因为 $CD \subset$ 平面 $CDPQ$，平面 $CDPQ \cap$ 平面 $ABQP = PQ$，

所以 $CD \parallel PQ$.　　………………… 5 分



（Ⅱ）在平面 $ABCD$ 内过点 O 作 $Oy \parallel AB$.

因为 $AB \perp$ 平面 PAD，

所以 $Oy \perp$ 平面 PAD.

所以 $Oy \perp OP$， $Oy \perp OD$.

又因为 $PO \perp AD$，所以 OD, Oy, OP 两两互相垂直.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $O(0,0,0)$， $A(-1,0,0)$， $D(4,0,0)$， $C(4,2,0)$， $B(-1,4,0)$， $P(0,0,2)$， $\overrightarrow{BC}=(5,-2,0)$， $\overrightarrow{AP}=(1,0,2)$.　　………………… 7 分

由题意，得 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{DP}=(-4,0,2)$.

设平面 QBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CQ}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -4x+2z=0, \\ 5x-2y=0. \end{cases}$

令 $x=2$，则 $y=5$， $z=4$. 于是 $\boldsymbol{m}=(2,5,4)$.　　………………… 10 分

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m}, \overrightarrow{AP}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AP}|} = \dfrac{2}{3}$.

故直线 PA 与平面 QBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$. ………………… 13 分

（17）（本小题 14 分）

解:（Ⅰ）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$，

得 $\sin A\cos B + \sin B\cos A = 4\sin C\cos A$， ………………… 3 分

即 $\sin(A+B) = 4\sin C\cos A$. ………………… 5 分

由 $A+B+C=\pi$，得 $\sin(A+B)=\sin C$. ………………… 7 分

所以 $\sin C = 4\sin C\cos A$.

由 $0 < C < \pi$，得 $\sin C \neq 0$.

所以 $\cos A = \dfrac{1}{4}$. ………………… 8 分

（Ⅱ）选择条件②:

由 $A\in(0,\pi)$，且 $\cos A = \dfrac{1}{4}$，得 $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. ………………… 9 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，

得 $(2\sqrt{10})^2 = 6^2 + c^2 - 2\times 6\times c\times\dfrac{1}{4}$，

解得 $c=4$ 或 $c=-1$（舍）. ………………… 12 分

设边 BC 上的高为 h，则三角形面积 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ah$，

所以 $h = \dfrac{bc\sin A}{a} = \dfrac{4\times 6\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. ………………… 14 分

选择条件③:

由 $A\in(0,\pi)$，且 $\cos A = \dfrac{1}{4}$，得 $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. ………………… 9 分

由 $C\in(0,\pi)$，且 $\cos C = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$，得 $\sin C = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

所以 $\sin B = \sin(A+C) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4} + \dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$. ………………… 11 分

由正弦定理，得 $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A} = 6$，

所以边 BC 上的高 $h = b\sin C = 6\times\dfrac{\sqrt{6}}{4} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. ………………… 14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设从2017年至2024年这8年中随机抽取1年，且该年的Q值超过50%为事件A，

由图表知，在2017年至2024年这8年中，有且仅有2021年至2024年这4年的Q值超过50%，

所以$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. ………………… 4分

（Ⅱ）由图表知，在2019年至2024年这6年中，Q值超过50%的有4年，

所以随机变量X的所有可能取值为$1,2,3$. ………………… 5分

则$P(X=1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(X=2)=\frac{2\times4}{6\times5}=\frac{4}{15}$，$P(X=3)=\frac{2\times1\times4}{6\times5\times4}=\frac{1}{15}$. … 8分

所以X的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

故X的数学期望$EX=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{15}=\frac{7}{5}$. ………………… 10分

（Ⅲ）$s_1^2>s_2^2$. ………………… 13分

（19）（本小题15分）

解：（Ⅰ）由题意，得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\2a=2\sqrt{6},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………… 3分

解得$a=\sqrt{6},\ b=\sqrt{2}$，

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………… 5分

（Ⅱ）由题意，设点$A(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$，则点$B(-x_0,-y_0)$，$H(x_0,0)$.

设直线BC的方程为$y+y_0=k(x+x_0)$，$C(x_C,y_C)$. ………………… 6分

由$\begin{cases}y=kx+kx_0-y_0,\\x^2+3y^2=6\end{cases}$得$(3k^2+1)x^2+6k(kx_0-y_0)x+3(kx_0-y_0)^2-6=0$.

所以$\varDelta>0,\ -x_0+x_C=\frac{-6k(kx_0-y_0)}{3k^2+1},\ -x_0x_C=\frac{3(kx_0-y_0)^2-6}{3k^2+1}$， ………………… 8分

故$x_C=\frac{-6k(kx_0-y_0)}{3k^2+1}+x_0$，$y_C=kx_C+kx_0-y_0=\frac{-6k^2(kx_0-y_0)}{3k^2+1}+2kx_0-y_0$. … 10分

又因为$AB\perp AC$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=(x_0,y_0)\cdot(\frac{-6k(kx_0-y_0)}{3k^2+1},\frac{-6k^2(kx_0-y_0)}{3k^2+1}+2kx_0-2y_0)=0$，

即$(y_0-kx_0)(y_0-3kx_0)=0$，

所以 $y_0 = kx_0$ 或 $y_0 = 3kx_0$. ……………… 12 分

当 $y_0 = kx_0$ 时，直线 BC 过原点，不符合题意.

当 $y_0 = 3kx_0$ 时，直线 BC 的方程为 $y = kx - 2kx_0$ ，则点 M 坐标为 $(2x_0, 0)$ ，

所以 $S_{\triangle AOH} = \frac{1}{2} \times |OH| \times |y_0| = \frac{1}{2}|x_0 y_0|$ ， $S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} \times |OM| \times |y_0| = |x_0 y_0|$.

故 $S_{\triangle BOM} = 2S_{\triangle AOH}$. ……………… 15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意，得 $f'(x) = (ax + a^2 + 1)e^{ax}$. ……………… 2 分

则 $f'(0) = a^2 + 1 = 2$ ，

解得 $a = \pm 1$. ……………… 3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），知 $f'(x) = (ax + a^2 + 1)e^{ax}$.

当 $a = 0$ 时， $f(x) = x$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，无减区间； ……………… 4 分

当 $a \neq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = -\frac{a^2+1}{a}$ ， ……………… 5 分

若 $a > 0$ ，由 $f'(x) > 0$ ，得 $x \in (-\frac{a^2+1}{a}, +\infty)$ ；由 $f'(x) < 0$ ，得 $x \in (-\infty, -\frac{a^2+1}{a})$ ，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\frac{a^2+1}{a}, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\infty, -\frac{a^2+1}{a})$ ； …… 7 分

若 $a < 0$ ，由 $f'(x) > 0$ ，得 $x \in (-\infty, -\frac{a^2+1}{a})$ ；由 $f'(x) < 0$ ，得 $x \in (-\frac{a^2+1}{a}, +\infty)$ ，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -\frac{a^2+1}{a})$ ，单调减区间为 $(-\frac{a^2+1}{a}, +\infty)$.

综上，当 $a = 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增，无减区间；当 $a > 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\frac{a^2+1}{a}, +\infty)$ ，单调减区间为 $(-\infty, -\frac{a^2+1}{a})$ ；当 $a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -\frac{a^2+1}{a})$ ，单调减区间为 $(-\frac{a^2+1}{a}, +\infty)$. ……………… 9 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，当 $a = 0$ 时， $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 单调递增；

当 $a \neq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = -\frac{a^2+1}{a} = -a - \frac{1}{a} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ，

此时在区间 $(-1, 2)$ 上 $f'(x) > 0$ ，故函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上单调递增， … 10 分

所以 $M(a) \cdot N(a) = f(-1) \cdot f(2) = (a^2 + a - 2)e^a$.

由 $M(a) \cdot N(a) \geqslant (2a - 1)e^a + e^2$ ，得 $(a^2 - a - 1)e^a - e^2 \geqslant 0$ ， ……………… 11 分

令 $g(a) = (a^2 - a - 1)e^a - e^2$ ，则 $g'(a) = (a^2 + a - 2)e^a$ ，

由 $g'(a) = 0$ ，得 $a = -2$ 或 $a = 1$.

当 x 变化时，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表：

a	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(a)$	↗	极大值	↘	极小值	[illegible]

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减.　……… 13 分

又因为 $g(-2)=5e^{-2}-e^{2}<0$, $g(1)<g(-2)<0$ ，且 $g(2)=0$ ，

所以当 $a\in[2,+\infty)$ 时，$g(a)\geqslant 0$ ；当 $a\in(-\infty,2)$ 时，$g(a)<0$.

即当且仅当 $a\in[2,+\infty)$ 时，$M(a)\cdot N(a)\geqslant(2a-1)e^{a}+e^{2}$ 恒成立，

所以使得 $M(a)\cdot N(a)\geqslant(2a-1)e^{a}+e^{2}$ 成立的 a 的最小值为 2 .　…………… 15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）数表 A 不能被 p_1 确定；数表 A 能被 p_2 确定.　………………… 3 分

（Ⅱ）对于一个公差为 d 的等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ ，若知其中两项 a_i 与 a_j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ ，

便可根据 $d=\dfrac{a_j-a_i}{j-i}$ ，$a_1=a_i-(i-1)d$ 求出该等差数列中的每一项.

故对于数表 A 中的任意一行（或列），若知道其中的两个数，便可利用条件得到该行（或列）中的所有数.　………………… 5 分

一方面，若知 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ 这 $2n-1$ 个数，则无法求出 a_{22} ，故不能得出数表 A 中所有的数，

所以 $m>2n-1$.　………………… 7 分

另一方面，若知数表 A 中的任意 $2n$ 个数，则必存在表 A 中的两行，且这两行中至少有两个数已知，

于是数表 A 中这两行的数都能被求出，即数表 A 中每一列都至少有两个数已知，

所以数表 A 中所有的数都能求出，即 A 能被 p 确定.

综上，m 的最小值为 $2n$.　………………… 9 分

（Ⅲ）当 $k\leqslant n$ 时，若知 $a_{ii}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中的 k 个数，则不能求出 A 中所有的数. … 10 分

当 $k=n+1$ 时，已知 $a_{ii}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $a_{ij}\,(i+j=n+1)$ 中的任意 $n+1$ 个数，则必存在两个数在 A 中位于同一行（记为第 s 行），从而可求出这一行中的所有数. …… 11 分

因为 $a_{ii}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $a_{ij}\,(i+j=n+1)$ 中至多有两个数在同一行，

所以除去第 s 行的两个数外，余下已知的 $n-1$ 个数必在其余的 $n-1$ 行中.

当 $n=3$ 时，通过列举可知：余下已知的 2 个数不在同一列中（所在列分别记为第 g 列和第 h

列）； ………………… 13 分

当 $n>3$ 时，$n-1\geqslant 3$，

因为在 $a_{ii}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $a_{ij}\,(i+j=n+1)$ 中至多有两个数在同一列，

所以至少有两列（记为第 g 列和第 h 列）中含有这已知的 $n-1$ 数中的数.

又因为第 s 行的数均已得到，

所以在第 g 列与第 h 列中均至少知道两个数，故这两列中所有的数都可求出，

于是数表 A 中每一行至少有两个数均已得到，从而可求出数表 A 中所有的数.

综上，k 的最小值为 $n+1$. ………………… 15 分