2022 北京高考真题

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.（4 分）已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A．$(-2，1]$　　B．$(-3，-2)\cup[1，3)$

C．$[-2，1)$　　D．$(-3，-2]\cup(1，3)$

2.（4 分）若复数 z 满足 $i\cdot z=3-4i$，则 $|z|=$（　　）

A．1　　B．5　　C．7　　D．25

3.（4 分）若直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，则 $a=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

4.（4 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$，则对任意实数 x，有（　　）

A．$f(-x)+f(x)=0$　　B．$f(-x)-f(x)=0$

C．$f(-x)+f(x)=1$　　D．$f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

5.（4 分）已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x$，则（　　）

A．$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{6})$ 上单调递减

B．$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{12})$ 上单调递增

C．$f(x)$ 在 $(0，\frac{\pi}{3})$ 上单调递减

D．$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}，\frac{7\pi}{12})$ 上单调递增

6.（4 分）设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$”的（　　）

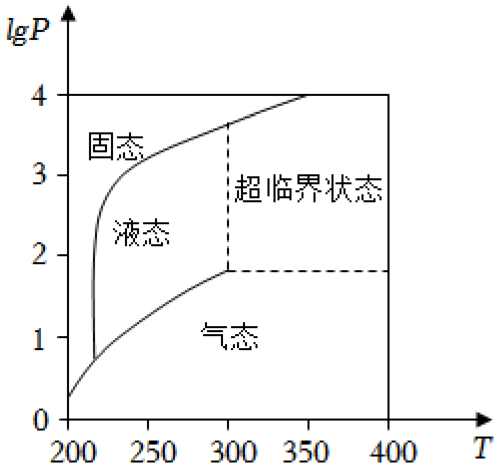
A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

7.（4 分）在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献．如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 lgP 的关系，其中 T 表示温度，单位是 K；P 表示压强，单位是 bar．下列结论中正确的是（　　）



A．当 $T=220$，$P=1026$ 时，二氧化碳处于液态

B．当 $T=270$，$P=128$ 时，二氧化碳处于气态

C．当 $T=300$，$P=9987$ 时，二氧化碳处于超临界状态

D．当 $T=360$，$P=729$ 时，二氧化碳处于超临界状态

8．（4 分）若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$（　　）

A．40　　　　B．41　　　　C．－40　　　　D．－41

9．（4 分）已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是△ABC 及其内部的点构成的集合．设集合 $T=\{Q\in S|PQ\leqslant 5\}$，则 T 表示的区域的面积为（　　）

A．$\dfrac{3\pi}{4}$　　　　B．π　　　　C．2π　　　　D．3π

10．（4 分）在△ABC 中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°$．P 为△ABC 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　　）

A．$[-5,3]$　　　　B．$[-3,5]$　　　　C．$[-6,4]$　　　　D．$[-4,6]$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．（5 分）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是____________．

12．（5 分）已知双曲线 $y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $m=$_______．

13．（5 分）若函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $A=$______；$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$____________．

14．（5 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为______；a 的最大值为______．

15．（5 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9$（$n=1$，2，…）．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3；

②$\{a_n\}$ 为等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；

④$\{a_n\}$中存在小于$\frac{1}{100}$的项.

其中所有正确结论的序号是 ________.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（13分）在△ABC中，$\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$.

（Ⅰ）求∠C；

（Ⅱ）若$b=6$，且△ABC的面积为$6\sqrt{3}$，求△ABC的周长.

17.（14分）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1为正方形，平面$BCC_1B_1\perp$平面ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M，N分别为A_1B_1，AC的中点.

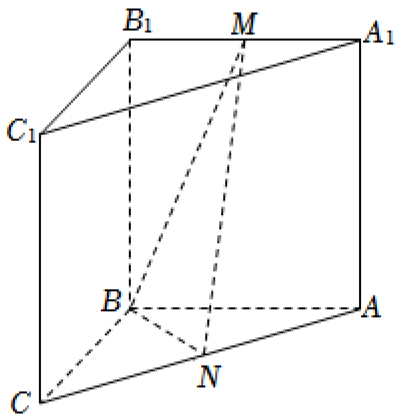
（Ⅰ）求证：$MN//$平面BCC_1B_1；

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线AB与平面BMN所成角的正弦值.

条件①：$AB\perp MN$；

条件②：$BM=MN$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.



18.（13分）在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到9.50m以上（含9.50m）的同学将获得优秀奖．为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

（Ⅰ）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（Ⅱ）设X是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计X的数学期望EX；

（Ⅲ）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

19.（15分）已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个顶点为$A$（0，1），焦距为$2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 P（﹣2，1）作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N．当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值．

20．（15 分）已知函数 $f(x)=e^x ln(1+x)$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在$[0,+\infty)$上的单调性；

（Ⅲ）证明：对任意的 s，$t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$．

21．（15 分）已知 Q：a_1，a_2，…，a_k 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在 a_i，a_{i+1}，a_{i+2}，…，a_{i+j}（$j\geqslant 0$），使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 m﹣连续可表数列．

（Ⅰ）判断 Q：2，1，4 是否为 5﹣连续可表数列？是否为 6﹣连续可表数列？说明理由；

（Ⅱ）若 Q：a_1，a_2，…，a_k 为 8﹣连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

（Ⅲ）若 Q：a_1，a_2，…，a_k 为 20﹣连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\geqslant 7$．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】由补集的定义直接求解即可.

【解答】解：因为全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\leqslant 1\}$，

所以 $\complement_U A=\{x|-3<x\leqslant -2$ 或 $1<x<3\}=(-3,-2]\cup(1,3)$.

故选：D.

【点评】本题主要考查补集的运算，考查运算求解能力，属于基础题.

2.【分析】把已知等式变形，再由商的模等于模的商求解.

【解答】解：由 $i\cdot z=3-4i$，得 $z=\dfrac{3-4i}{i}$，

$\therefore |z|=|\dfrac{3-4i}{i}|=\dfrac{|3-4i|}{|i|}=\dfrac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{1}=5$.

故选：B.

【点评】本题考查复数模的求法，考查化归与转化思想，是基础题.

3.【分析】由圆的方程求得圆心坐标，代入直线方程即可求得 a 值.

【解答】解：圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的圆心坐标为 $(a,0)$，

$\because$ 直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，

$\therefore$ 圆心在直线 $2x+y-1=0$ 上，可得 $2a+0-1=0$，即 $a=\dfrac{1}{2}$.

故选：A.

【点评】本题考查直线与圆位置关系的应用，明确直线过圆心是关键，是基础题.

4.【分析】根据题意计算 $f(x)+f(-x)$ 的值即可.

【解答】解：因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$，所以 $f(-x)=\dfrac{1}{1+2^{-x}}=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，

所以 $f(-x)+f(x)=\dfrac{1+2^x}{1+2^x}=1$.

故选：C.

【点评】本题考查了指数的运算与应用问题，是基础题.

5.【分析】利用二倍角公式化简得 $f(x)=\cos 2x$，周期 $T=\pi$，根据余弦函数的单调性可得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$，单调递增区间为 $[\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$，进而逐个判断各个选项的正误即可.

【解答】解：$f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$，周期 $T=\pi$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$，单调递增区间为 $[\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$，

对于 A，$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递增，故 A 错误，

对于 B，$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递增，在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 上单调递减，故 B 错误，

对于 C，$f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减，故 C 正确，

对于 D，$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递增，故 D 错误，

故选：C.

【点评】本题主要考查了二倍角公式，考查了余弦函数的单调性，属于基础题.

6.【分析】根据等差数列的定义与性质，结合充分必要条件的定义，判断即可.

【解答】解：因为数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列，当 $\{a_n\}$ 为递增数列时，公差 $d>0$，

令 $a_n=a_1+(n-1)d>0$，解得 $n>1-\frac{a_1}{d}$，$[1-\frac{a_1}{d}]$表示取整函数，

所以存在正整数 $N_0=1+[1-\frac{a_1}{d}]$，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，充分性成立；

当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$，$a_{n-1}<0$，则 $d=a_n-a_{n-1}>0$，必要性成立；

是充分必要条件.

故选：C.

【点评】本题考查了等差数列与充分必要条件的应用问题，是基础题.

7.【分析】计算每个选项的 lgP 的值，结合 T 与图可判断结论.

【解答】解：对于 A，当 $T=220$，$P=1026$ 时，$lgP>3$，由图可知二氧化碳处于固态，故 A 错误；

对于 B：当 $T=270$，$P=128$ 时，$2<lgP<3$，由图可知二氧化碳处于液态，故 B 错误；

对于 C：当 $T=300$，$P=9987$ 时，$lgP\approx4$，由图可知二氧化碳处于固态，故 C 错误；

对于 D：当 $T=360$，$P=729$ 时，$2<lgP<3$，由图可知二氧化碳处于超临界状态，故 D 正确；

故选：D.

【点评】本题考查对数的计算，考查看图的能力，数形结合思想，属基础题.

8.【分析】法一：由题意，利用二项式展开式的通项公式，求出 a_0 和 a_2，以及 a_4 的值，可得结论.

解法二：在所给的等式中，分别令 $x=1$，$x=-1$，得到两个等式，再把两个等式相加并处以 2 可得 $a_0+a_2+a_4$ 的值.

【解答】解：法一：$\because (2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，

可得 $a_0=C_4^4=1$，$a_2=C_4^2\times2^2=24$，$a_4=C_4^0\times2^4=16$，

$\therefore a_0+a_2+a_4=41$，

故答案为：41.

法二：$\because (2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，

令 $x=1$，可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1$，

再令 $x=-1$，可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=(-3)^4=81$，

∴两式相加处以 2 可得，$a_0+a_2+a_4=\frac{1+81}{2}=41$，

故选：B.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式展开式的通项公式，求展开式的系数和常用的方法是赋值法，属于基础题.

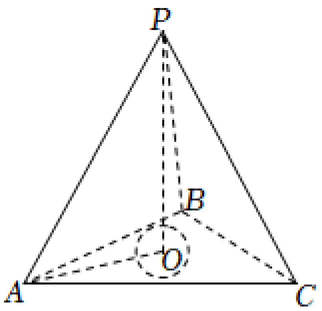
9.【分析】设点 P 在面 ABC 内的投影为点 O，连接 OA，根据正三角形的性质求得 OA 的长，并由勾股定理求得 OP 的长，进而知 T 表示的区域是以 O 为圆心，1 为半径的圆.

【解答】解：设点 P 在面 ABC 内的投影为点 O，连接 OA，则 $OA=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

所以 $OP=\sqrt{PA^2-OA^2}=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$，

由 $\sqrt{PQ^2-OP^2}=\sqrt{25-24}=1$，知 T 表示的区域是以 O 为圆心，1 为半径的圆，

所以其面积 $S=\pi$.



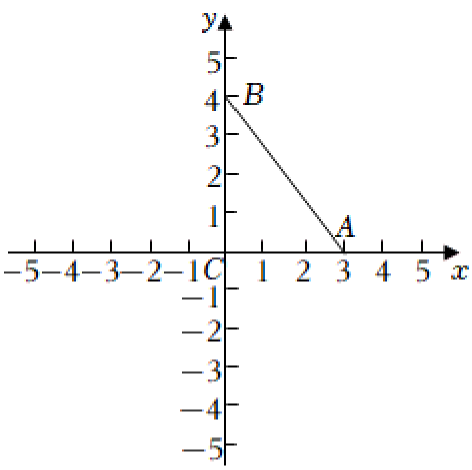
故选：B.

【点评】本题考查棱锥的结构特征，点的轨迹问题，考查空间立体感和运算求解能力，属于基础题.

10.【分析】根据条件，建立平面直角坐标系，设 $P(x,y)$，计算可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3x-4y+1$，进而可利用参数方程转化为三角函数的最值问题求解.

【解答】解：在△ABC 中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°$，

以 C 为坐标原点，CA，CB 所在的直线为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系，如图：



则 $A(3,0)$，$B(0,4)$，$C(0,0)$，

设 $P(x,y)$，

因为 $PC=1$，

所以 $x^2+y^2=1$，

又 $\overrightarrow{PA}=(3-x,\ -y)$，$\overrightarrow{PB}=(-x,\ 4-y)$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-x(3-x)-y(4-y)=x^2+y^2-3x-4y=-3x-4y+1$，

设 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(3\cos\theta+4\sin\theta)+1=-5\sin(\theta+\varphi)+1$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$，

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最小值为 -4，

当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最大值为 6，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-4,\ 6]$，

故选：D.

【点评】本题考查了平面向量数量积的最值问题，属于中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.【分析】由分母不为 0，被开方数非负列不等式组，即可求解函数的定义域.

【解答】解：要使函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$有意义，

则 $\begin{cases}x\neq 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$，解得 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，

所以函数的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1]$.

故答案为：$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1]$.

【点评】本题主要考查函数定义域的求法，考查运算求解能力，属于基础题.

12.【分析】化双曲线方程为标准方程，从而可得 $m<0$，求出渐近线方程，结合已知即可求解 m 的值.

【解答】解：双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 化为标准方程可得 $y^2-\frac{x^2}{-m}=1$，

所以 $m<0$，双曲线的渐近线方程 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{-m}}x$，

又双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

所以$\frac{1}{\sqrt{-m}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $m=-3$.

故答案为：-3.

【点评】本题主要考查双曲线的简单性质，考查运算求解能力，属于基础题.

13.【分析】由题意，利用函数的零点，求得 A 的值，再利用两角差的正弦公式化简 $f(x)$，可得 $f(\frac{\pi}{12})$ 的值.

【解答】解：∵函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为$\frac{\pi}{3}$，∴$\frac{\sqrt{3}}{2}A-\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=0$，

∴$A=1$，函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，

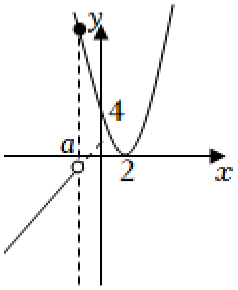
∴$f(\frac{\pi}{12})=2\sin(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3})=2\sin(-\frac{\pi}{4})=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$，

故答案为：1；$-\sqrt{2}$.

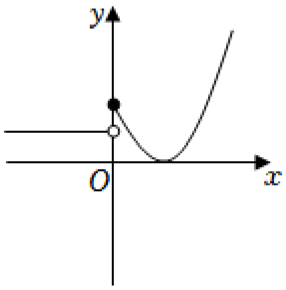
【点评】本题主要考查两角差的正弦公式，函数的零点，求三角函数的值，属于中档题.

14.【分析】对函数 $f(x)$ 分段函数的分界点进行分类讨论，研究其不同图像时函数取最小值时 a 的范围即可.

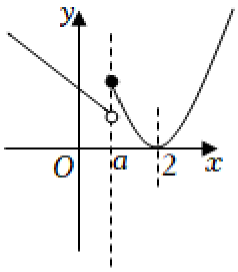
【解答】解：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，不满足题意，



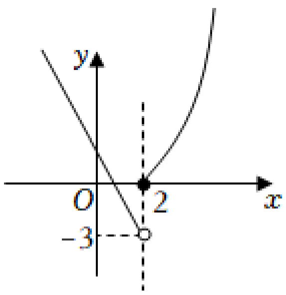
当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，满足题意；



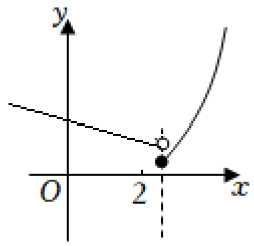
当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，要使得函数有最小值，需满足 $-a^2+1\geqslant 0$，解得：$0<a\leqslant 1$；



当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，不满足题意，



当 $a>2$ 时，函数 $f(x)$ 图像如图所示，要使得函数 $f(x)$ 有最小值，需 $(a-2)^2\leqslant -a^2+1$，无解，故不满足题意；



综上所述：a 的取值范围是[0，1]，

故答案为：0，1．

【点评】本题主要考查利用分段函数图像确定函数最小值是分界点的讨论，属于较难题目．

15．【分析】对于①，求出 a_2 即可得出结论；对于②，假设$\{a_n\}$为等比数列，推出矛盾即可得出结论；对于③，容易推得 $a_n<a_{n-1}$；对于④，假设所有项均大于等于$\frac{1}{100}$，推出矛盾即可判断．

【解答】解：对于①$n=1$ 时，可得 $a_1=3$，当 $n=2$ 时，由 $a_2\bullet S_2=9$，可得 $a_2\bullet(a_1+a_2)=9$，可得 $a_2=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}<3$，故①正确；

对于②，当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_n=\frac{9}{a_n}$得 $S_{n-1}=\frac{9}{a_{n-1}}$，于是可得 $a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{9-a_n^2}{9}$，

若$\{a_n\}$为等比数列，则 $n\geqslant2$ 时，$a_{n+1}=a_n$，即从第二项起为常数，可检验 $n=3$ 不成立，故②错误；

对于③，因为 $a_n\bullet S_n=9$，$a_n>0$，$a_1=3$，

当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=\frac{9}{a_n}$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}>0$，

所以$\frac{9}{a_n}>\frac{9}{a_{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{a_n}>\frac{1}{a_{n-1}}\Rightarrow a_n<a_{n-1}$，

所以$\{a_n\}$为递减数列，故③正确；

对于④，假设所有项均大于等于$\frac{1}{100}$，取 $n>90000$，则 $a_n\geqslant\frac{1}{100}$，$S_n>900$，则 $a_nS_n>9$ 与已知矛盾，故④正确；

故答案为：①③④．

【点评】本题考查命题的真假判断，考查数列的递推关系，考查逻辑推理能力，运算求解能力，属于较难题目．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．【分析】（Ⅰ）根据二倍角公式化简可得 $\cos C$，进一步计算可得角 C；（Ⅱ）根据三角形面积求得 a，再根据余弦定理求得 c，相加可得三角形的周长．

【解答】解：（Ⅰ）$\because\sin2C=\sqrt{3}\sin C$，

$\therefore2\sin C\cos C=\sqrt{3}\sin C$，

又 $\sin C \neq 0$，$\therefore 2\cos C = \sqrt{3}$，

$\therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because 0 < C < \pi$，

$\therefore C = \frac{\pi}{6}$；

（Ⅱ）$\because \triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}ab\sin C = 6\sqrt{3}$，

又 $b=6$，$C=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore \frac{1}{2} \times a \times 6 \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{3}$，

$\therefore a = 4\sqrt{3}$，

又 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(4\sqrt{3})^2+6^2-c^2}{2\times 4\sqrt{3}\times 6}$，

$\therefore c = 2\sqrt{3}$，

$\therefore a+b+c = 6+6\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6+6\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了三角形面积公式和余弦定理的应用，属于中档题.

17.【分析】(1) 通过证面面平行证明线面平行；

(2) 通过证明 BC，BA，BB_1 两两垂直，从而建立以 B 为坐标原点，BC，BA，BB_1 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，利用向量法求线面角的正弦值.

【解答】解：(*I*) 证明：取 AB 中点 K，连接 NK，MK，

$\because M$ 为 A_1B_1 的中点．$\therefore B_1M \parallel BK$，且 $B_1M = BK$，

$\therefore$ 四边形 $BKMB_1$ 是平行四边形，故 $MK \parallel BB_1$，

$MK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1；$BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore MK \parallel$ 平面 BCC_1B_1，

$\because K$ 是 AB 中点，N 是 AC 的点，

$\therefore NK \parallel BC$，$\because NK \not\subset$ 平面 BCC_1B_1；$BC \subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore NK \parallel$ 平面 BCC_1B_1，又 $NK \cap MK = K$，

$\therefore$ 平面 $NMK \parallel$ 平面 BCC_1B_1，

又 $MN \subset$ 平面 NMK，$\therefore MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1；

(*II*) $\because$ 侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1$，

$\therefore CB \perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CB \perp AB$，又 $NK \parallel BC$，$\therefore AB \perp NK$，

若选①：$AB \perp MN$；又 $MN \cap NK = N$，$\therefore AB \perp$ 平面 MNK，

又 $MK\subset$平面 MNK，∴$AB\perp MK$，又 $MK /\!/ BB_1$，

∴$AB\perp BB_1$，∴BC，BA，BB_1 两两垂直，

若选②：∵$CB\perp$平面 ABB_1A_1，$NK /\!/ BC$，∴$NK\perp$平面 ABB_1A_1，$KM\subset$平面 ABB_1A_1，

∴$MK\perp NK$，又 $BM=MN$，$NK=\frac{1}{2}BC$，$BK=\frac{1}{2}AB$，

∴$\triangle BKM\cong\triangle NKM$，∴$\angle BKM=\angle NKM=90°$，

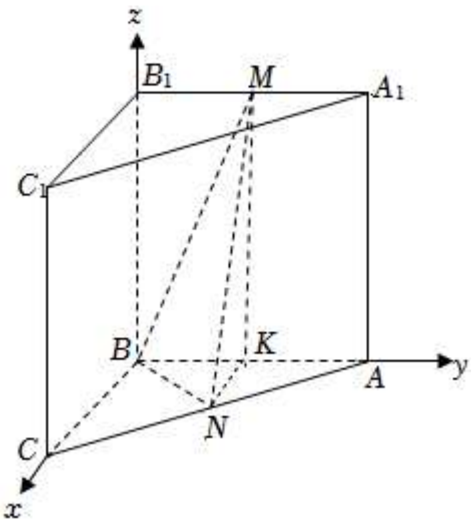
∴$AB\perp MK$，又 $MK /\!/ BB_1$，∴$AB\perp BB_1$，

∴BC，BA，BB_1 两两垂直，

以 B 为坐标原点，BC，BA，BB_1 为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 B（0，0，0），N（1，1，0），M（0，1，2），A（0，2，0），

∴$\overrightarrow{BM}=$（0，1，2），$\overrightarrow{BN}=$（1，1，0），



设平面 BMN 的一个法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=x+y=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $y=-2$，$x=2$，

∴平面 BMN 的一个法向量为 $\vec{n}=(2，-2，1)$，

又 $\overrightarrow{BA}=$（0，2，0），

设直线 AB 与平面 BMN 所成角为 θ，

∴$\sin\theta=|\cos<\vec{n}，\overrightarrow{BA}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\frac{4}{\sqrt{4+4+1}\times 2}=\frac{2}{3}$.

∴直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查线面平行的证明，线面角的求法，属中档题.

18.【分析】（Ⅰ）用频率估计概率，即可求出甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率.

（Ⅱ）分别求出甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率，X 的所有可能取值为 0，1，2，3，结合独立事件的概率乘法公式求出相应的概率，再利用期望公式即可求出 EX.

（Ⅲ）丙夺冠概率估计值最大，因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩，比赛一次，丙获得 9.85 的概

率为$\frac{1}{4}$，甲获得 9.80 的概率为$\frac{1}{10}$，乙获得 9.78 的概率为$\frac{1}{6}$，并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的，比赛次数越多，对丙越有利，所以丙冠军的概率估计值最大.

【解答】解：（Ⅰ）甲以往的 10 次成绩中有 4 次获得优秀奖，用频率估计概率，则甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

（Ⅱ）用频率估计概率，则乙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

X的所有可能取值为 0，1，2，3，

则P（$X=0$）$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$，

P（$X=1$）$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，

P（$X=2$）$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$，

P（$X=3$）$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，

$\therefore EX=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{8}{20}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{2}{20}=\frac{7}{5}$.

（Ⅲ）由题中数据可知，乙与丙获得优秀奖的概率较大，均为$\frac{1}{2}$，且丙投出过三人成绩中的最大值 $9.85m$，

在三人中有一定优势，

故如果发挥较好的话丙获得的概率估计值最大.

【点评】本题主要考查了古典概型的概率公式，考查了离散型随机变量的期望，属于中档题.

19.【分析】（Ⅰ）利用已知和 a，b，c 的关系，可得 a，b，进而得到椭圆方程.

（Ⅱ）联立直线与椭圆方程，再利用韦达定理求出 x_1+x_2，$x_1\cdot x_2$，再表示出$|MN|$，化简即可.

【解答】解：（Ⅰ）由题意得，

$\begin{cases}b=1\\2c=2\sqrt{3}\end{cases}$，$\therefore b=1$，$c=\sqrt{3}$，$a=2$，

$\therefore$椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）设过点 P（-2，1）的直线为 $y-1=k$（$x+2$），B（x_1，y_1），C（x_2，y_2），

联立得$\begin{cases}y-1=k(x+2)\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\end{cases}$，即（$1+4k^2$）$x^2+$（$16k^2+8k$）$x+16k^2+16k=0$，

$\because$直线与椭圆相交，$\therefore \Delta=[(16k^2+8k)]^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$，$\therefore k<0$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}$，$x_1\bullet x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$，

$\because k_{AB}=\frac{y_1-1}{x_1}$，$\therefore$直线 AB 为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，

令 $y=0$，则 $x=\frac{x_1}{1-y_1}$，$\therefore M$（$\frac{x_1}{1-y_1}$，0），同理 N（$\frac{x_2}{1-y_2}$，0），

$\therefore |MN|=|\frac{x_1}{1-y_1}-\frac{x_2}{1-y_2}|=|\frac{x_1}{-k(x_1+2)}-\frac{x_2}{-k(x_2+2)}|=|\frac{1}{k}(\frac{x_2}{x_2+2}-\frac{x_1}{x_1+2})|$

$=|\frac{1}{k}\bullet\frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+2)(x_1+2)}|=|\frac{1}{k}\bullet\frac{2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]}|$

$=|\frac{2}{k}\frac{\sqrt{(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2})^2-\frac{4(16k^2+16k)}{1+4k^2}}}{\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}-\frac{2(16k^2+8k)}{1+4k^2}+4}|=2$，

$\therefore |\frac{2}{k}\bullet\frac{\sqrt{-64k}}{4}|=2$，$\therefore |\frac{\sqrt{-k}}{k}|=\frac{1}{2}$，

$\therefore k=-4$．

【点评】本题考查直线和椭圆的位置关系，考查联立法和韦达定理、方程思想和运算能力，是一道综合题．

20．【分析】（Ⅰ）对函数求导，将 $x=0$ 代入原函数及导函数得到纵坐标和斜率即可；

（Ⅱ）法一：对 $g(x)$ 求导，并研究 $g(x)$ 导函数的正负即可．

法二：设 $m(x)=e^x$，$n(x)=ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$，则 $g(x)=m(x)\bullet n(x)$，由指数函数的性质得 $m(x)=e^x$ 在（0，$+\infty$）上是增函数，且 $m(x)=e^x>0$，由导数性质得 $n(x)$ 在（0，$+\infty$）上单调递增，$n(x)=ln(x+1)+\frac{1}{x+1}>0$，从而 $g(x)$ 在[0，$+\infty$）单调递增．

（Ⅲ）构造函数 $w(x)=f(x+t)-f(x)$，利用 $w(x)$ 单调性判断 $f(s+t)-f(s)$ 与 $f(t)-f(0)$ 大小关系即可．

【解答】解：（Ⅰ）对函数求导可得：$f'(x)=e^x[ln(x+1)+\frac{1}{x+1}]$，

将 $x=0$ 代入原函数可得 $f(0)=0$，将 $x=0$ 代入导函数可得：$f'(0)=1$，

故在 $x=0$ 处切线斜率为 1，故 $y-0=1(x-0)$，化简得：$y=x$；

（Ⅱ）解法一：由（Ⅰ）有：$g(x)=f'(x)=e^x[ln(x+1)+\frac{1}{x+1}]$，

$g'(x)=e^x[ln(x+1)+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]$，

令 $h(x)=\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$，令 $x+1=k$（$k\geqslant1$），

设 $m(k)=\ln k+\frac{2}{k}-\frac{1}{k^2}$，$m'(k)=\frac{(k-1)^2+1}{k^3}>0$ 恒成立，

故 h（x）在[0，+∞）单调递增，又因为 h（0）＝1，

故 h（x）＞0 在[0，+∞）恒成立，故 g'（x）＞0，

故 g（x）在[0，+∞）单调递增；

解法二：由（Ⅰ）有：$g(x)=f'(x)=e^x[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}]$，

$g'(x)=e^x[\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]$，

设 $m(x)=e^x$，$n(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}$，则 $g(x)=m(x)\cdot n(x)$，

由指数函数的性质得 $m(x)=e^x$ 上（0，+∞）上是增函数，且 $m(x)=e^x>0$，

$n'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，当 $x\in$（0，+∞）时，$n'(x)>0$，$n(x)$ 单调递增，

且当 $x\in$（0，+∞）时，$n(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}>0$，

∴g（x）在[0，+∞）单调递增.

（Ⅲ）证明：由（Ⅱ）有 g（x）在[0，+∞）单调递增，又 g（0）＝1，

故 g（x）＞0 在[0，+∞）恒成立，故 f（x）在[0，+∞）单调递增，

设 $w(x)=f(x+t)-f(x)$，$w'(x)=f'(x+t)-f'(x)$，

由（Ⅱ）有 g（x）在[0，+∞）单调递增，又因为 $x+t>x$，所以 $f'(x+t)>f'(x)$，

故 w（x）单调递增，又因为 $s>0$，故 $w(s)>w(0)$，

即：$f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)$，又因为函数 $f(0)=0$，

故 $f(s+t)>f(s)+f(t)$，得证.

【点评】本题主要考查利用导函数研究函数切线，及证明函数不等式，属于较难题目.

21.【分析】（Ⅰ）直接根据 m－连续可表数列的定义即可判断；

（Ⅱ）采用反证法证明，即假设 k 的值为 3，结合 Q 是 8－连续可表数列的定义推出矛盾，进而得出证明；

（Ⅲ）首先 m－连续可表数列的定义，证明得出 $k\geqslant6$，然后验证 $k=6$ 是否成立，进而得出所证的结论.

【解答】解：（Ⅰ）若 $m=5$，则对于任意的 $n\in\{1，2，3，4，5\}$，

$a_2=1$，$a_1=2$，$a_1+a_2=2+1=3$，$a_3=4$，$a_2+a_3=1+4=5$，

所以 Q 是 5－连续可表数列；

由于不存在任意连续若干项之和相加为 6，

所以 Q 不是 6－连续可表数列；

（Ⅱ）假设 k 的值为 3，则 a_1，a_2，a_3 最多能表示 a_1，a_2，a_3，a_1+a_2，a_2+a_3，$a_1+a_2+a_3$，共 6 个数字，

与 Q 是 8﹣连续可表数列矛盾，故 $k\geqslant 4$；

现构造 Q：4，2，1，5 可以表达出 1，2，3，4，5，6，7，8 这 8 个数字，即存在 $k=4$ 满足题意．

故 k 的最小值为 4．

（Ⅲ）先证明 $k\geqslant 6$．

从 5 个正整数中，取一个数字只能表示自身，最多可表示 5 个数字，

取连续两个数字最多能表示 4 个数字，取连续三个数字最多能表示 3 个数字，

取连续四个数字最多能表示 2 个数字，取连续五个数字最多能表示 1 个数字，

所以对任意给定的 5 个整数，最多可以表示 $5+4+3+2+1=15$ 个正整数，不能表示 20 个正整数，即 $k\geqslant 6$．

若 $k=6$，最多可以表示 $6+5+4+3+2+1=21$ 个正整数，

由于 Q 为 20﹣连续可表数列，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，

所以其中必有一项为负数．

既然 5 个正整数都不能连续可表 1﹣20 的正整数，

所以至少要有 6 个正整数连续可表 1﹣20 的正整数，

所以至少 6 个正整数和一个负数才能满足题意，

当 $k=7$ 时，数列 1，2，4，5，8，﹣2，﹣1 满足题意，

当 $k>7$ 时，数列 1，2，4，5，8，﹣2，﹣1，$a_k=\cdots=a_n=0$，所以 $k\geqslant 7$ 符合题意，

故 $k\geqslant 7$．

【点评】本题考查数列的新定义，考查学生的逻辑思维能力和运算能力，属中档题．