

# 2025 北京朝阳高三一模

## 数 学

2025.3

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

### 第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ，集合  $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ，则  $A \cap B =$

(A)  $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$  (B)  $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$

(C)  $\{x \mid -2 < x < 2\}$  (D)  $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$

(2) 设复数  $z = 1 + i$  的共轭复数为  $\bar{z}$ ，则  $z \cdot \bar{z} =$

(A) 1 (B)  $\sqrt{2}$

(C) 2 (D) 4

(3) 在  $(x + \frac{2}{x})^4$  的展开式中，常数项为

(A) 6 (B) 8

(C) 12 (D) 24

(4) 为得到函数  $y = \sin 2x + \cos 2x$  的图象，可以将函数  $y = \sqrt{2} \sin 2x$  的图象

(A) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度 (B) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度

(C) 向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度

(5) 已知  $\{a_n\}$  是等比数列， $a_2 = 2$ ， $a_3 = 1$ ，则  $a_1 a_2 \cdots a_6 =$

(A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{4}$

(C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1

(6) 已知曲线  $C: mx^2 - ny^2 = 1$ ，则“ $n > m > 0$ ”是“ $C$  为焦点在  $x$  轴上的双曲线”的

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知  $\sin \alpha + \sin \beta = 0$ ， $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$ ，则  $\cos(\alpha - \beta) =$

(A)  $-\frac{1}{2}$

(B)  $\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) 1

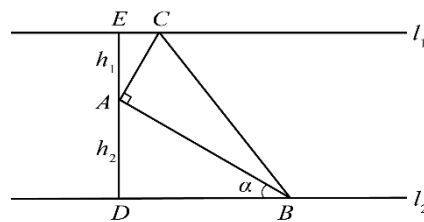
- (8) 某市计划在一条河上修建一座水上休闲公园，如图所示．这条河两岸所在直线  $l_1, l_2$  互相平行，桥  $DE$  与河岸所在直线垂直．休闲公园的形状可视为直角三角形，它的三个入口分别设在直角三角形的顶点  $A, B, C$  处，其中入口  $A$ （定点）在桥  $DE$  上，且  $A$  到直线  $l_1, l_2$  的距离分别为  $h_1, h_2$ （ $h_1, h_2$  为定值），入口  $B, C$  分别在直线  $l_2, l_1$  上，公园的一边  $AB$  与直线  $l_2$  所成的锐角  $\angle ABD$  为  $\alpha$ ，另一边  $AC$  与  $AB$  垂直．设该休闲公园的面积为  $S(\alpha)$ ，当  $\alpha$  变化时，下列说法正确的是

(A) 函数  $S(\alpha)$  的最大值为  $h_1 h_2$

(B) 函数  $S(\alpha)$  的最小值为  $\frac{h_1 h_2}{2}$

(C) 若  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$  且  $\alpha_1 < \alpha_2$ ，则  $S(\alpha_1) < S(\alpha_2)$

(D) 若  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$  且  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ，则  $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$



- (9) 在  $\triangle ABC$  中， $CA = CB = \sqrt{5}$ ， $AB = 4$ ，点  $M$  为  $\triangle ABC$  所在平面内一点且  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，则  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$  的最小值为

(A) 0

(B)  $-\frac{16}{25}$

(C)  $-\frac{4}{5}$

(D)  $-\frac{16}{5}$

- (10)  $n$  位同学参加学校组织的某棋类单循环制比赛，即任意两位参赛者之间恰好进行一场比赛．每场比赛的计分规则是：胜者计 3 分，负者计 0 分，平局各计 1 分．所有比赛结束后，若这  $n$  位同学的得分总和为 150 分，且平局总场数不超过比赛总场数的一半，则平局总场数为

(A) 12

(B) 15

(C) 16

(D) 18

## 第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \log_3 x$  的定义域为\_\_\_\_\_.

(12) 已知点  $M(2,1)$  在抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  上, 则抛物线  $C$  的焦点  $F$  的坐标为\_\_\_\_\_; 以  $F$  为圆心,  $|FM|$  为半径的圆与抛物线  $C$  的准线的位置关系是\_\_\_\_\_. (填“相交”“相切”或“相离”)

(13) 已知函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x + e^{2-x}$ , 则  $f(-2) =$  \_\_\_\_\_; 若存在  $a, b, c \in \mathbf{R} (a \neq b)$ , 使得  $f(a) = f(b) = c$ , 则  $c$  的一个取值为\_\_\_\_\_.

(14) 干支纪年法是我国古代一种纪年方式, 它以十天干 (甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸) 和十二地支 (子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥) 的组合来表示年份, 循环纪年. 比如某一年为甲子年, 则下一年为乙丑年, 再下一年为丙寅年, 以此类推, 排列到癸酉年后, 天干回到“甲”, 即甲戌年, 下一年为乙亥年, 之后地支回到“子”, 即丙子年, 以此类推. 已知 2025 年是乙巳年, 则 2025 年之后的首个己巳年是\_\_\_\_\_年. (用数字作答)

(15) 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  是底面  $A_1B_1C_1D_1$  内的动点, 给出下列四个结论:

①  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}|$  的最小值为 2;

②  $|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PC}|$  的最小值为  $\sqrt{6}$ ;

③  $|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PC}|$  的最大值为  $1 + \sqrt{3}$ ;

④  $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2$  的最小值为 3.

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

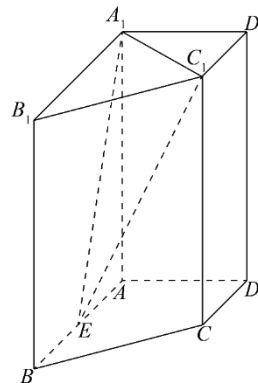
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

如图，在四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $A_1A \perp$  平面  $ABCD$ ，在四边形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $AB=2$ ， $AD=CD=1$ ， $E$  为线段  $AB$  的中点。

(I) 求证： $A_1E \parallel$  平面  $C_1CDD_1$ ；

(II) 若平面  $A_1ABB_1 \perp$  平面  $A_1ADD_1$ ， $A_1A=2$ ，求平面  $A_1ABB_1$  与平面  $A_1C_1E$  夹角的余弦值。



(17) (本小题 13 分)

在  $\triangle ABC$  中， $b \cos A + a \cos B = c^2$ 。

(I) 求  $c$  的值；

(II) 已知  $\sin C = \frac{3}{5}$ ，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得  $\triangle ABC$  存在且唯一，求  $\triangle ABC$  的周长。

条件①： $\angle B = \frac{\pi}{4}$ ；

条件②： $AB$  边上的高为  $\frac{3}{2}$ ；

条件③： $a = \frac{4}{3}$ 。

注：如果选择的条件不符合要求，第 (II) 问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分。

(18) (本小题 14 分)

某高中组织学生研学旅行. 现有 A, B 两地可供选择, 学生按照自愿的原则选择一地进行研学旅行. 研学旅行结束后, 学校从全体学生中随机抽取 100 名学生进行满意度调查, 调查结果如下表:

	高一		高二		高三	
	A 地	B 地	A 地	B 地	A 地	B 地
满意	12	2	18	3	15	6
一般	2	2	6	5	6	8
不满意	1	1	6	2	3	2

假设所有学生的研学旅行地点选择相互独立. 用频率估计概率.

(I) 估计该校学生对本次研学旅行满意的概率;

(II) 分别从高一、高二、高三三个年级中各随机抽取 1 人, 估计这 3 人中至少有 2 人选择去 B 地的概率;

(III) 对于上述样本, 在三个年级去 A 地研学旅行的学生中, 调查结果为满意的学生人数的方差为  $s_1^2$ , 调查结果为不满意的学生人数的方差为  $s_2^2$ , 写出  $s_1^2$  和  $s_2^2$  的大小关系. (结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F(1, 0)$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ .

(I) 求椭圆  $E$  的方程;

(II) 过点  $M(4, 0)$  作直线  $l$  与椭圆  $E$  交于不同的两点  $A, B$ . 设  $C(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ , 直线  $BC$  与直线  $x=1$  交于点  $N$ , 求证: 直线  $AN$  的斜率为定值.

(20) (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = a \ln x - \frac{x-1}{x+1}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

(I) 当  $a=1$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(II) 若  $a \geq \frac{1}{2}$ , 求证: 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq 0$ ;

(III) 若函数  $f(x)$  有 3 个不同的零点, 求  $a$  的取值范围.

(21) (本小题 15 分)

已知  $Q: a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*$ ) 为有穷正整数数列, 若存在  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $i < j$ ), 使得  $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j = 0$ , 其中  $s_i, s_{i+1}, \dots, s_j \in \{-1, 1\}$ , 则称  $Q$  为连续可归零数列.

(I) 判断  $Q_1: 1, 3, 2$  和  $Q_2: 4, 2, 4$  是否为连续可归零数列? 并说明理由;

(II) 对任意的正整数  $i$ , 记  $v(i) = \max \{v \in \mathbf{N} \mid i = u \cdot 2^v, u \in \mathbf{N}^*\}$ , 其中  $\max S$  表示数集  $S$  中最大的数. 令

$a_i = 2^{2-v(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ), 求证: 数列  $Q: a_1, a_2, \dots, a_7$  不是连续可归零数列;

(III) 若  $Q: a_1, a_2, \dots, a_n$  的每一项均为不大于  $k$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ) 的正整数, 求证: 当  $n \geq 2k$  时,  $Q$  是连续可归零数列.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

## 参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A                (2) C                (3) D                (4) D                (5) A  
 (6) A                (7) B                (8) D                (9) C                (10) B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) (0,1)                (12) (0,1)；相切                (13) -3；4（答案不唯一）  
 (14) 2049                (15) ①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（本小题 13 分）

解：（I）连接  $D_1C, EC$  .

因为  $AB=2, CD=1, E$  为  $AB$  的中点，

所以  $AE=CD$  .

又  $AB \parallel CD$  , 所以四边形  $AECD$  为平行四边形.

所以  $EC \parallel AD, EC=AD$  .

又因为  $A_1D_1 \parallel AD, A_1D_1=AD$  ,

所以  $A_1D_1 \parallel EC, A_1D_1=EC$  .

所以四边形  $A_1ECD_1$  为平行四边形.

所以  $A_1E \parallel D_1C$  .

又因为  $A_1E \not\subset$  平面  $C_1CDD_1$  ,  $D_1C \subset$  平面  $C_1CDD_1$  ,

所以  $A_1E \parallel$  平面  $C_1CDD_1$  . ..... 6 分

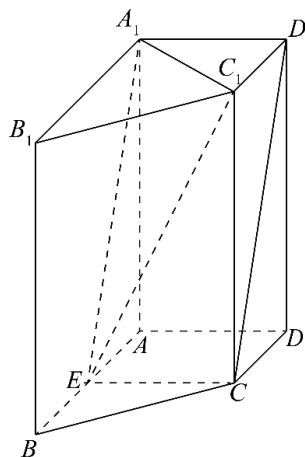
（II）因为  $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$  ,

所以  $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AD$  .

又因为平面  $A_1ABB_1 \perp$  平面  $A_1ADD_1$  , 平面  $A_1ABB_1 \cap$  平面  $A_1ADD_1 = AA_1$  ,

$AD \subset$  平面  $A_1ADD_1$  ,

所以  $AD \perp$  平面  $A_1ABB_1$  .



所以  $AD \perp AB$ .

所以  $AB, AD, AA_1$  两两垂直.

如图建立空间直角坐标系  $A-xyz$ ,

则  $D(0,1,0)$ ,  $B(2,0,0)$ ,  $A_1(0,0,2)$ ,  $C_1(1,1,2)$ .

所以  $E(1,0,0)$ ,  $\overrightarrow{EA_1} = (-1,0,2)$ ,  $\overrightarrow{A_1C_1} = (1,1,0)$ .

因为  $AD \perp$  平面  $A_1ABB_1$ ,

所以  $\overrightarrow{AD} = (0,1,0)$  是平面  $A_1ABB_1$  的法向量.

设平面  $A_1C_1E$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EA_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x + 2z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

令  $x = 2$ , 则  $y = -2, z = 1$ . 于是  $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$ .

设平面  $A_1ABB_1$  与平面  $A_1C_1E$  夹角为  $\theta$ , 则

$$\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

(17) (本小题 13 分)

解: (I) 由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  及  $b \cos A + a \cos B = c^2$  得

$$\sin B \cos A + \sin A \cos B = c \sin C.$$

$$\text{所以 } \sin(A+B) = c \sin C.$$

$$\text{所以 } \sin(\pi - C) = c \sin C.$$

$$\text{又因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin(\pi - C) = \sin C \neq 0.$$

$$\text{所以 } c = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

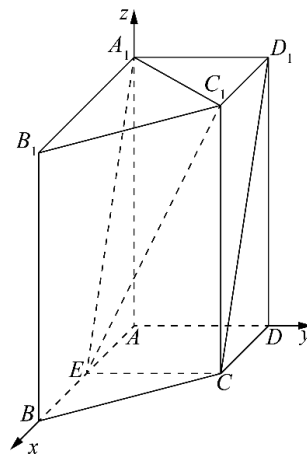
(II) 选条件①: 因为  $B = \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin C = \frac{3}{5}$ ,  $c = 1$ , 且  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ,

$$\text{所以 } b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{因为 } b > c, \text{ 所以 } B > C. \text{ 所以 } C \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$\text{又因为 } \sin C = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{所以 } \sin A = \sin(\frac{\pi}{4} + C) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$



$$\text{又 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 所以 } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a+b+c = 1 + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{6} = 1 + 2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{选条件②: 因为 } c=1, AB \text{ 边上的高为 } \frac{3}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{又因为 } \sin C = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}ab.$$

$$\text{所以 } ab = \frac{5}{2}.$$

$$\text{因为 } \sin C = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \cos C = \pm \sqrt{1 - \sin^2 C} = \pm \frac{4}{5}.$$

$$(1) \text{ 当 } \cos C = \frac{4}{5} \text{ 时, 由 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ 得 } 1 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{4}{5}.$$

$$\text{又 } ab = \frac{5}{2}, \text{ 所以 } a^2 + b^2 = 5.$$

$$\text{所以 } a = b = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a+b+c = 1 + \sqrt{10}.$$

$$(2) \text{ 当 } \cos C = -\frac{4}{5} \text{ 时, 由 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \text{ 得 } 1 = a^2 + b^2 - 2ab \times (-\frac{4}{5}).$$

$$\text{又 } ab = \frac{5}{2}, \text{ 所以 } a^2 + b^2 = -3, \text{ 不符合题意.}$$

$$\text{综上, } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a+b+c = 1 + \sqrt{10}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

(18) (本小题 14 分)

解: (I) 从表格数据可知, 随机抽取的 100 名学生对本次研学旅行满意的人数为

$$12 + 2 + 18 + 3 + 15 + 6 = 56.$$

$$\text{因此该校学生对本次研学旅行满意的概率可估计为 } \frac{56}{100} = \frac{14}{25}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设事件  $A_1$ : 抽取的高一学生选择去 B 地;

事件  $A_2$ : 抽取的高二学生选择去 B 地;

事件  $A_3$ : 抽取的高三学生选择去 B 地;

事件  $C_i$ : 抽取的 3 人中恰有  $i$  人选择去 B 地,  $i=2,3$ ;

事件  $D$ : 抽取的 3 人中至少有 2 人选择去 B 地.

从数据表格可知, 抽取的 100 名学生中高一年级学生总数为  $12 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 20$ ,

选择去 B 地的总数为  $2+2+1=5$ ，所以  $P(A_1)$  可估计为  $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ；

抽取的 100 名学生中高二年级学生总数为  $18+6+6+3+5+2=40$ ，

选择去 B 地的总数为  $3+5+2=10$ ，所以  $P(A_2)$  可估计为  $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ ；

抽取的 100 名学生中高三年级学生总数为  $15+6+3+6+8+2=40$ ，

选择去 B 地的总数为  $6+8+2=16$ ，所以  $P(A_3)$  可估计为  $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ ；

因为  $D = C_2 \cup C_3 = A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 A_2 A_3$ ，

所以  $P(D) = P(C_2 \cup C_3) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 A_2 A_3)$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

所以抽取的 3 人中至少有 2 人选择去 B 地的概率可估计为

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times (1 - \frac{2}{5}) + 2 \times \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{4}) \times \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{17}{80}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$(III) s_1^2 > s_2^2. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(19) (本小题 15 分)

解：(I) 由题意得 
$$\begin{cases} c=1, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}. \end{cases}$$

所以椭圆 E 的方程是 
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由题可知直线 l 的斜率存在. 设直线  $l: y = k(x - 4)$ .

由 
$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0, \\ y = k(x - 4) \end{cases} \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0.$$

由  $\Delta = (-32k^2)^2 - 4(4k^2 + 3)(64k^2 - 12) > 0$ ，得  $k^2 < \frac{1}{4}$ ，即  $k \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

则 
$$x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{64k^2 - 12}{4k^2 + 3}.$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - \frac{5}{2}}(x - \frac{5}{2}).$$

直线 BC 的方程为

令  $x=1$ ，得 N 的纵坐标为 
$$y_N = \frac{3(x_2 - y_2 - 1)}{2x_2 - 5}.$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } y_1 - y_N &= y_1 - \frac{3(x_2 - y_2 - 1)}{2x_2 - 5} = \frac{2x_2 y_1 - 5y_1 - 3x_2 + 3y_2 + 3}{2x_2 - 5} \\ &= \frac{2kx_2(x_1 - 4) - 5k(x_1 - 4) - 3x_2 + 3k(x_2 - 4) + 3}{2x_2 - 5} \\ &= \frac{2kx_1x_2 - 5kx_1 - (5k + 3)x_2 + 8k + 3}{2x_2 - 5}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } k_{AN} = \frac{y_1 - y_N}{x_1 - 1} = \frac{2kx_1x_2 - 5kx_1 - (5k + 3)x_2 + 8k + 3}{(2x_2 - 5)(x_1 - 1)}.$$

$$\begin{aligned} k_{AN} + 1 &= \frac{[2kx_1x_2 - 5kx_1 - (5k + 3)x_2 + 8k + 3] + (2x_1x_2 - 5x_1 - 2x_2 + 5)}{(2x_2 - 5)(x_1 - 1)} \\ &= \frac{(2k + 2)x_1x_2 - (5k + 5)(x_1 + x_2) + 8k + 8}{(2x_2 - 5)(x_1 - 1)} \\ &= \frac{(k + 1)[2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8]}{(2x_2 - 5)(x_1 - 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 &= 2 \times \frac{64k^2 - 12}{4k^2 + 3} - 5 \times \frac{32k^2}{4k^2 + 3} + 8 \\ &= \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 32k^2 + 24}{4k^2 + 3} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } k_{AN} + 1 = 0, \text{ 即 } k_{AN} = -1.$$

所以直线  $AN$  的斜率为定值  $-1$ .

..... 15 分

(20) (本小题 15 分)

$$\text{解: (I) 当 } a=1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2},$$

$$\text{所以 } f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 0.$$

$$\text{所以曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (1, f(1)) \text{ 处的切线方程为 } y = \frac{1}{2}(x - 1),$$

$$\text{即 } x - 2y - 1 = 0. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{(II) 由题设知 } f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + (2a-2)x + a}{x(x+1)^2}.$$

$$\text{设函数 } h(x) = ax^2 + (2a-2)x + a.$$

$$\text{当 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时, 因为 } \Delta = (2a-2)^2 - 4a^2 = -8a + 4 = 4(1-2a) \leq 0,$$

$$\text{所以 } h(x) \geq 0, \text{ 即 } f'(x) \geq 0.$$

所以函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增.

所以  $f(x) \geq f(1) = 0$ .

所以当  $a \geq \frac{1}{2}$  且  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq 0$ . ..... 9 分

(III) 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 - 2x}{x(x+1)^2}$ .

① 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减,

函数  $f(x)$  至多一个零点, 不合题意.

② 当  $a \geq \frac{1}{2}$  时, 由 (II) 可知函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增,

函数  $f(x)$  至多一个零点, 不合题意.

③ 当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时, 对于函数  $h(x) = ax^2 + (2a-2)x + a$ , 因为  $\Delta = -8a + 4 > 0$ ,

所以方程  $ax^2 + (2a-2)x + a = 0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ , 满足

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{a} - 2 > 0, x_1 x_2 = 1.$$

不妨设  $x_1 < x_2$ , 则  $0 < x_1 < 1 < x_2$ .

$f'(x), f(x)$  变化的情况如下:

$x$	$(0, x_1)$	$x_1$	$(x_1, x_2)$	$x_2$	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ ; 单调递减区间是  $(x_1, x_2)$ .

因为  $f(1) = 0$ , 所以 1 为  $f(x)$  的一个零点.

$$\text{又 } f(x_1) > f(1) = 0, \quad 0 < e^{\frac{1}{a}} < 1, \quad \text{且} \quad f(e^{-\frac{1}{a}}) = \frac{-2e^{-\frac{1}{a}}}{e^{-\frac{1}{a}} + 1} < 0,$$

所以存在唯一实数  $t_1 \in (0, 1)$ , 使得  $f(t_1) = 0$ .

$$\text{又 } f(x_2) < f(1) = 0, \quad e^{\frac{1}{a}} > 1, \quad \text{且} \quad f(e^{\frac{1}{a}}) = \frac{2}{e^{\frac{1}{a}} + 1} > 0,$$

所以存在唯一实数  $t_2 \in (1, +\infty)$ , 使得  $f(t_2) = 0$ .

所以函数  $f(x)$  有 3 个不同的零点.

综上,  $a$  的取值范围为  $(0, \frac{1}{2})$ . ..... 15 分

(21) (本小题 15 分)

解：(I) 数列  $Q_1$  是连续可归零数列，理由如下：

取  $s_1 = 1, s_2 = -1, s_3 = 1$ ，则  $s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 = 1 \times 1 + (-1) \times 3 + 1 \times 2 = 0$ ，

所以数列  $Q_1$  是连续可归零数列。

数列  $Q_2$  不是连续可归零数列，理由如下：

当  $(i, j) = (1, 3)$  时， $s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 = 4s_1 + 2s_2 + 4s_3 = 2(2s_1 + s_2 + 2s_3)$ ，

因为  $s_1, s_2, s_3 \in \{-1, 1\}$  是奇数，故  $2s_1 + s_2 + 2s_3$  是奇数，所以  $2(2s_1 + s_2 + 2s_3) \neq 0$ 。

当  $(i, j) = (1, 2)$  时， $s_1 a_1 + s_2 a_2 = 4s_1 + 2s_2 = 2(2s_1 + s_2)$ ，

因为  $s_1, s_2 \in \{-1, 1\}$  是奇数，故  $2s_1 + s_2$  是奇数，所以  $2(2s_1 + s_2) \neq 0$ 。

当  $(i, j) = (2, 3)$  时， $s_2 a_2 + s_3 a_3 = 2s_2 + 4s_3 = 2(s_2 + 2s_3)$ ，

因为  $s_2, s_3 \in \{-1, 1\}$  是奇数，故  $s_2 + 2s_3$  是奇数，所以  $2(s_2 + 2s_3) \neq 0$ 。

所以数列  $Q_2$  不是连续可归零数列。..... 4 分

(II) 因为 1, 3, 5, 7 是奇数，故  $v(1) = v(3) = v(5) = v(7) = 0$ ，

所以  $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 2^{2-0} = 4$ 。

因为  $v(2) = v(6) = 1$ ，所以  $a_2 = a_6 = 2^{2-1} = 2$ 。

因为  $v(4) = 2$ ，所以  $a_4 = 2^{2-2} = 1$ 。

所以数列  $Q: 4, 2, 4, 1, 4, 2, 4$ 。

因为  $s_i, s_{i+1}, \dots, s_j \in \{-1, 1\} (1 \leq i < j \leq 7)$ ，

所以  $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j$  与  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  奇偶性相同。

当  $i \leq 4 < j$  或  $i < 4 \leq j$  时，因为  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  中， $a_4$  为奇数，其余各项均为偶数，

所以  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  为奇数。

所以  $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j \neq 0$ 。

当  $(i, j)$  取  $(1, 2), (1, 3), (2, 3), (5, 6), (5, 7), (6, 7)$  时，

由 (I) 可知  $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j \neq 0$ ，

综上，数列  $Q$  不是连续可归零数列。..... 9 分

(III) 设  $b_1 = a_1$ ，
$$b_{i+1} = \begin{cases} b_i + a_{i+1}, & b_i \leq 0, \\ b_i - a_{i+1}, & b_i > 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$
，则  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是整数数列。

下面证明对任意  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，均有  $-k + 1 \leq b_i \leq k$ 。

显然  $b_1 = a_1$  满足  $-k+1 \leq b_1 \leq k$ .

假设结论不成立, 则存在  $t \in \{2, 3, \dots, n\}$ , 使得  $b_t > k$  或  $b_t < -k+1$ ,

且当  $j < t$  时都有  $-k+1 \leq b_j \leq k$ .

(1) 若  $b_t > k$ , 当  $b_{t-1} \leq 0$  时,  $b_{t-1} = b_t - a_t$ ,

因为  $a_t \leq k$ , 所以  $b_{t-1} = b_t - a_t > k - a_t \geq 0$ , 矛盾;

当  $b_{t-1} > 0$  时,  $b_{t-1} = b_t + a_t$ ,

因为  $a_t > 0$ , 所以  $b_{t-1} = b_t + a_t > k + a_t > k$ , 矛盾.

(2) 若  $b_t < -k+1$ , 当  $b_{t-1} \leq 0$  时,  $b_{t-1} = b_t - a_t$ ,

因为  $a_t > 0$ , 所以  $b_{t-1} = b_t - a_t < -k+1 - a_t < -k+1$ , 矛盾;

当  $b_{t-1} > 0$  时,  $b_{t-1} = b_t + a_t$ ,

因为  $a_t \leq k$ ,  $b_{t-1} = b_t + a_t < -k+1 + a_t \leq -k+1 + k = 1$ ,

又  $b_{t-1}$  是整数, 所以  $b_{t-1} \leq 0$ , 矛盾.

综上, 对任意  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 均有  $-k+1 \leq b_i \leq k$ .

若存在  $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ , 使得  $b_j = 0$ ,

则存在  $(1, j)$  且  $s_1, s_2, \dots, s_j \in \{-1, 1\}$ , 使得  $s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_j a_j = 0$ ,

此时数列  $\mathcal{Q}$  是连续可归零数列.

若任意  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $b_i \neq 0$ ,

因为  $-k+1, -k+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$  中共  $2k-1$  个非零整数,

当  $n \geq 2k$  时, 数列  $b_1, b_2, \dots, b_n$  中存在  $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$  且  $p < q$ , 使得  $b_p = b_q$ ,

从而存在  $s_{p+1}, s_{p+2}, \dots, s_q \in \{-1, 1\}$ , 使得  $s_{p+1} a_{p+1} + s_{p+2} a_{p+2} + \dots + s_q a_q = b_q - b_p = 0$ ,

此时数列  $\mathcal{Q}$  是连续可归零数列.

综上, 当  $n \geq 2k$  时, 数列  $\mathcal{Q}$  是连续可归零数列. .... 15 分