2025 北京海淀高三一模

数　　学

2025.04

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知集合$U=\{x\mid |x|>1\}$, $A=\{x\mid x\geq 2\}$,则$\complement_U A=$

(A)$(-\infty,2)$　　(B)$(-\infty,-1)\cup(1,2]$

(C)$(-\infty,2]$　　(D)$(-\infty,-1)\cup(1,2)$

(2)在复平面内，复数$z=i^2+i^3$对应的点的坐标为

(A)$(1,1)$　　(B)$(1,-1)$

(C)$(-1,1)$　　(D)$(-1,-1)$

(3)函数$f(x)=a^{2x-1}+1(a>0)$的图象一定经过点

(A)$\left(\frac{1}{2},2\right)$　　(B)$\left(\frac{1}{2},1\right)$

(C)$(0,2)$　　(D)$(0,1)$

(4)已知直线 $y=ax+b$ 经过圆$x^2+y^2+2x=0$的圆心，则a^2+b的最小值为

(A)-1　　(B)$-\frac{1}{4}$

(C)0　　(D)1

(5)已知四个数$a=\frac{\lg 2+\lg 5}{2}$, $b=\sqrt{\lg 2\cdot\lg 5}$, $c=\lg 2$, $d=\lg 5$,其中最小的是

(A)a　　(B)b

(C)c　　(D)d

(6)已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点$M\left(\frac{3}{2},y_0\right)$在 C 上,|MF|=2,则(| y_0 |=

(A)1　　(B)$\sqrt{2}$

(C)$\sqrt{3}$　　(D)2

(7)已知 A_4纸的长宽比约为$\sqrt{2}:1$.现将一张 A_4纸卷成一个圆柱的侧面(无重叠部分).当该圆柱的高等于 A_4纸的长时，设其体积为 V_1，轴截面的面积为S_1;当该圆柱的高等于A_4纸的宽时，设其体积为 V_2，轴截面的面积为 S_2，则

(A)$V_1=V_2,S_1=S_2$　　(B)$V_1\neq V_2,S_1=S_2$

(C)$V_1=V_2,S_1\neq S_2$　　(D)$V_1\neq V_2,S_1\neq S_2$

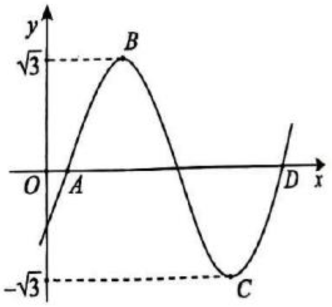
(8)已知$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列.若 0<q<1,则“$\{a_n-b_n\}$是递增数列”是“d≥0”

的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(9)已知函数$y=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)$(ω > 0) 的部分图象如图所示.若 A，B，C，D 四点在同一个圆上，则 ω=



(A)1　　(B)$\frac{1}{2}$

(C)π　　(D)$\frac{\pi}{2}$

(10)对于无穷数列$\{a_n\}$和正整数$k(k\geq 2)$,若存在$n_1,n_2,\ldots\ldots,n_k$满足$n_1<n_2<\cdots<n_k$且$\frac{a_{n_1}}{n_1}=\frac{a_{n_2}}{n_2}=\cdots=\frac{a_{n_k}}{n_k}$,则称数列$\{a_n\}$具有性质$P_k$.下列选项中错误的是

(A)若$a_n=n^2$,则数列$\{a_n\}$不具有性质P_2

(B)若$a_n=n-1+\cos(n\pi)$,则数列$\{a_n\}$具有性质P_{2025}

(C)存在数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,使得$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均不具有性质P_2,且$\{a_n+b_n\}$具有性质P_{2025}

(D)若数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均具有性质P_{2025},则$\{a_n+b_n\}$具有性质P_{2025}

第二部分(非选择题共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)已知$(x-2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,则$a_4+a_3=$______________.

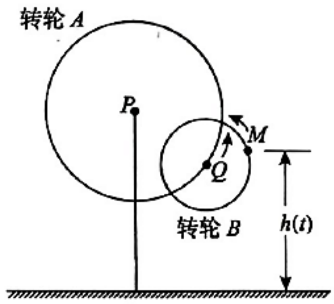
(12)已知双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的一条渐近线的方程为 y=2x，则该双曲线的离心率为___________.

(13)已知向量$a=(2,0)$,$|b|=1$,则$|a+b|$的最大值为______________;$a+b$与a的夹角的取值范围是___________.

(14)已知函数$f(x)=\begin{cases}2-x^2, x\leq 1,\\ \log_a(\frac{1}{2}ax+3), x>1\end{cases}(a>0且a\neq 1)$.若$f(x)$的值域为$(-\infty,2]$则$a$的一个取值为___________；若$f(x)$的值域为 R，则$a$的取值范围是_________________.

(15)如图所示，某游乐场有一款游乐设施，该设施由转轮 A 和转轮 B 组成，B 的圆心固定在转轮 A 上的点 Q 处，某个座椅固定在转轮 B 上的点 M 处.A 的半径为 10 米，B 的半径为 5 米，A 的圆心 P 距离地面竖直高度为 20 米.游乐设施运行过程中，A 与 B 分别绕各自的圆心逆时针方向匀速旋转，A 旋转一周用时 π 分

钟，B 旋转一周用时 $\frac{\pi}{2}$ 分钟.当 Q 在 P 正下方且 M 在 Q 正下方时，开始计时，设在第 t 分钟 M 距离地面的竖直高度为 h(t)米.给出下列四个结论：



①$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=25$;

② $h(t)$ 最大值是 35;

③M 在竖直方向上的速度大小低于 40 米/分钟；

④存在 $t_0\in(0,\pi)$ 使得 $t=t_0$ 时 M 到 P 的距离等于 15 米.其中所有正确结论的序号为____________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

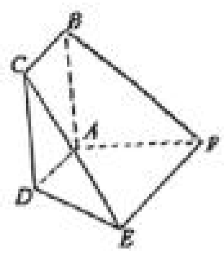
(16)(本小题 13 分)

如图，五面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形.

(I)求证:$EF/\!/CB$;

(II)若平面 $ABCD\perp$平面 ABF,$AB=AF=\frac{1}{2}EF=1$,$BF=\sqrt{2}$,

求直线 DE 与平面 $BCEF$ 所成角的大小.



(17)(本小题 13 分)

在△ABC中，已知$2a\sin A=3\sqrt{3}(1-\cos 2A),b=2\sqrt{6}$.

(I)求 $\sin B$ 的值;

(II)若$\angle B$为锐角，再从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，使△ABC存在且唯一，求△ABC的面积.

条件①:c=5;

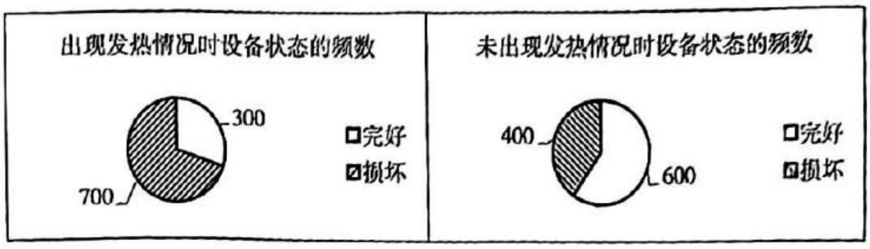
条件②：$\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$;

条件③：$a\sin A=\sqrt{3}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第(II)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(18)(本小题 14 分)

某工厂有一组型号相同的设备，在日常维护中发现部分设备有发热的情况，经过查阅历史数据，发现设备是否发热与设备状态(完好或损坏)有较强的相关性，从发热和未发热情况的数据中各自随机抽取 1000 条数据，整理如下图所示：



日常维护时，对单台设备有三种可能的操作：保留观察、停机更换或检查维修，对单台设备的不同状态，这三种操作给工厂带来的经济损失如下(单位：千元)：

操作 经济损失 设备状态	保留观察	停机更换	检查维修
完好	0	10	5
损坏	12	5	7

假设用频率估计概率，且各设备之间的状态相互独立.

(I)已知某设备未出现发热情况，试估计该设备损坏的概率；

(II)该工厂现有 2 台设备出现发热情况，准备对这 2 台设备都进行检查维修.记检查维修这 2 台设备给工厂带来的总经济损失为 X 千元，求 X 的分布列和数学期望 EX；

(III)该工厂的某车间现有 2 台设备，维护时发现其中一台出现发热情况，另一台未出现发热情况.下面有三种维护这 2 台设备的操作方案：

发热情况 操作方案 编号	发热	未发热
①	检查维修	保留观察
②	停机更换	检查维修
③	停机更换	保留观察

直接写出使得工厂总经济损失的期望最小的方案的编号.

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 W：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,A，B 分别是 W 的左、右顶点，C 是 W 的上顶点.$\triangle ABC$的面积为 2，且$|AC|=\sqrt{5}$.

(I)求椭圆 W 的方程及长轴长；

(II)已知点$M(2,1)$,点 P 在直线 AC 上,设直线 PM 与 x 轴交于点 E,直线 BP 与直线 EC 交于点 Q，判断点 Q 是否在椭圆 W 上，并说明理由.

(20)(本小题 15 分)

已知函数$f(x)=-\sin x+kx$.

(I)若曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$处的切线为$y=-\frac{3}{2}x$,求 k 的值；

(II)若 $f(x)$ 为 R 上的单调函数，求 k 的取值范围；

(III)若函数$g(x)=\frac{k}{6}x^3+x+\sin x$,求证：$k$ 可以取无数个值，使得每一个 k 的取值 $g(x)$ 都恰有三个不同的零点.

(21)(本小题 15 分)

设正整数$n\geq 2$,对于数列$A: a_1,a_2,\cdots,a_n$,定义变换 T，T将数列 A 变换成数列 $T(A): a_1a_2,a_2a_3,\cdots,a_{n-1}a_n,a_na_1$.

已知数列 $A_0: a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_i\in\{-1,1\}(i=1,2,\cdots,n)$.记$A_{k+1}=T(A_k)$.(k=0,1,2, • • •)

(I)若$A_0: -1,1,1$,写出数列A_1,A_2;

(II)若 n 为奇数且 A_0 不是常数列，求证：对任意正整数 k，A_k都不是常数列；

(III)求证：当且仅当$n=2^m(m\in N^*)$时，对任意A_0,都存在正整数 k，使得A_k为常数列.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

(1)D	(2)D	(3)A	(4)B	(5)C
(6)C	(7)B	(8)D	(9)D	(10)D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11)-7　　(12) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(13)3，$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$

(14) $\dfrac{1}{2}$（答案不唯一，只需满足 0<a<1）,$[2,+\infty)$　　（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：(I）由四边形 $ABCD$ 是正方形，可得 $BC//AD$.

又因为 $BC\not\subset$ 平面 $ADEF$，$AD\subset$ 平面 $ADEF$，

所以 $BC//$ 平面 $ADEF$.

又因为 $BC\subset$ 平面 $BCEF$，平面 $BCEF\bigcap$ 平面 $ADEF=EF$，

所以 $BC//EF$.

（II）由四边形 $ABCD$ 是正方形，可得 $AD\perp AB$.

又因为平面 $ABCD\perp$ 平面 ABF，

所以 $AD\perp$ 平面 ABF.

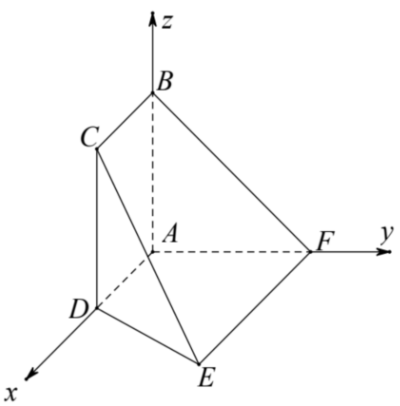
所以 $AD\perp AF$.

在□ABF 中，因为 $AB=AF=1$，$BF=\sqrt{2}$，

所以 $AB^2+AF^2=BF^2$，

由勾股定理逆定理得 $AB\perp AF$

如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



由已知可得 $A(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$F(0,1,0)$，$E(2,1,0)$，$B(0,0,1)$，$C(1,0,1)$.

所以，$\overrightarrow{DE}=(1,1,0),\overrightarrow{BC}=(1,0,0),\overrightarrow{BF}=(0,1,-1)$，

设平面 $BCEF$ 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，则，$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot n=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=0,\\ y-z-0.\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $x=0$，$z=1$

所以 $n=(0,1,1)$，

设直线 DF 与平面 $BCEF$ 所成角为 θ

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{DE},n>1\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot n}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\cdot|n|}\right|=\dfrac{1}{2}\cos<\overrightarrow{DE},n>=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot n}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\cdot|n|}=\dfrac{1}{2}$.

又因为 θ 为锐角，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

（17）（本小题 14 分）

解：（I）因为 $\cos 2A=1-2\sin^2 A$,

故由 $2a\sin A=3\sqrt{3}(1-\cos 2A)$ 可得 $2a\sin A=6\sqrt{3}\sin^2 A$,

因为 $A\in(0,\pi)$ ，$\sin A>0$ ，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=3\sqrt{3}$,

在□ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ ，所以 $\dfrac{b}{\sin B}=3\sqrt{3}$,

因为 $b=2\sqrt{6}$ ，所以 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（II）选条件②解答如下：

因为 $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

因为 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\angle B$ 为锐角，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{1}{3}$,

又因为 $A+B+C=\pi$,

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

在 ΔABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=3\sqrt{3}$,

所以 $c=3\sqrt{3}\sin C=5$ (或者 a=3)

又因为 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$b=2\sqrt{6}$

所以 ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{2}$.

选条件③解答如下：

由（I），$\dfrac{a}{\sin A}=3\sqrt{3}$ ，且 $a\sin A=\sqrt{3}$,

解得 $a=3,\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

因为 $a=3<2\sqrt{6}=b$，所以 $A<B<\dfrac{\pi}{2}$,

所以$\cos A>0,\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

因为$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\angle B$为锐角，所以$\cos B>0,\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{1}{3}$,

又因为$A+B+C=\pi$，所以

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A+\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

所以ΔABC的面积$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{6}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{9}=5\sqrt{2}$.

（18）（本小题 13 分）

解：（I）设“一台设备未出现发热情况时该设备损坏”为事件 A，

由图可得$P(A)=\dfrac{400}{400+600}=\dfrac{2}{5}$.

（II）X 的取值范围为$\{10,12,14\}$，

依题意，用频率估计概率，一台设备出现发热情况下损坏的概率为$\dfrac{7}{10}$.

$P\left(X=10\right)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{100}$,

$P\left(X=12\right)=2\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{50}$

$P\left(X=14\right)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{49}{100}$

X 的分布列为：

X	10	12	14
P	$\dfrac{9}{100}$	$\dfrac{21}{50}$	$\dfrac{49}{100}$

所以$EX=10\times\dfrac{9}{100}+12\times\dfrac{21}{50}+14\times\dfrac{49}{100}=\dfrac{64}{5}$,

100501005

(III)①

(19)(本小题 15 分)

解：(I)由题意，$\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

所以，椭圆$W:\dfrac{x^2}{4}$ $+y^2=1$,其长轴长为$2a=4$.

(II)由(I)得，$A(-2,0),5(2,0),C(0,1)$，

直线 AC 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

设 $P\left(x_0,\frac{1}{2}x_0+1\right)$,其中 $x_0\neq 0$，

①当 $x_0=2$ 时，$PM:x=2,E(2,0)$ 与 B 重合，此时 BP 与 EC 的交点 Q 即点 B ,所以，Q 在椭圆 W 上.

②当 $x_0\neq 2$ 时,

直线 $PM:y-1=\frac{(\frac{1}{2}x_0+1)-1}{x_0-2}\cdot(x-2)$，即 $y=\frac{x_0}{2x_0-4}x-\frac{4}{2x_0-4}$.

令 $y=0$ 得，$x=\frac{4}{x_0}$，即 $E\left(\frac{4}{x_0},0\right)$.

直线 $BP:y-1=\frac{\frac{1}{2}x_0+1}{x_0-2}\cdot(x-2)$，即 $y=\frac{x_0+2}{2x_0-4}x-\frac{x_0+2}{x_0-2}$

直线 $EC:y=\frac{1-0}{0-\frac{4}{x_0}}x+1$，即 $y=-\frac{x_0}{4}x+1$.

联立 $\begin{cases} y=-\frac{x_0}{4}x+1, \\ y=\frac{x_0+2}{2x_0-4}x-\frac{x_0+2}{x_0-2}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{8x_0}{x_0^2+4}, \\ y=\frac{x_0^2-4}{x_0^2+4}, \end{cases}$ 即 $Q(\frac{8x_0}{x_0^2+4},-\frac{x_0^2-4}{x_0^2+4})$

因为 $\frac{(\frac{8x_0}{x_0^2+4})^2}{4}+(\frac{x_0^2-4}{x_0^2+4})^2=\frac{16x_0^2+(x_0^2-4)^2}{(x_0^2+4)^2}=\frac{16x_0^2+(x_0^4-8x_0^2+16)}{x_0^4+8x_0^2+16}=1$

所以，Q 在椭圆 W 上.

综上，Q 在椭圆 W 上.

(20)(本小题 15 分)

解：(I) $f'(x)=-\cos x+k$，

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-\frac{3}{2}x$，

所以 $f'(0)=-1+k=-\frac{3}{2}$，解得 $k=-\frac{1}{2}$.

检验：$f(0)=0$，故曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-\frac{3}{2}x$ ⋯⋯ 4 分

(II)因为 $f\left(x\right)$ 为 R 上的单调函数,

所以对任意 x,有 $f'\left(x\right)<0$；或对任意 x,有 $f'\left(x\right)\geq 0$,

即 $k\leq\cos x$ 恒成立，或 $k\geq\cos x$ 恒成立，

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(III)因为 $g\left(x\right)$ 是奇函数，

所以只需证明：k 存在无数个取值使得 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恰有一个零点.

$g'(x)=\dfrac{k}{2}x^2+1+\cos x$,令 $h\left(x\right)=\dfrac{k}{2}x^2+1+\cos x, h'\left(x\right)=kx-\sin x=f\left(x\right)$,

根据(II), $k\leq -1$ 时， $h'\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是减函数.

所以，任意 $x>0, h'\left(x\right)<h'\left(0\right)=0, h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是减函数.

$h\left(0\right)=2$，$h(\pi)=\dfrac{k\pi^2}{2}<0$ 故存在 $x0\in\left(0,\pi\right), h\left(x_0\right)=0$.

{存在其它取点情况，由 $h\left(x\right)\leq-\dfrac{x^2}{2}+1+\cos x\leq 2-\dfrac{x^2}{2}$ 可得 $x>2$ 时, $h\left(x\right)<0$}

当 x 变化时，$g'\left(x\right), g\left(x\right)$ 的变化情况如下表:

x	0	$\left(0,x_0\right)$	x_0	$\left(x_0,+\infty\right)$
$g'\left(x\right)$	2	+	0	-
$g\left(x\right)$	0	↑	极大值	↓

故 $x\in(0,x_0]$ 时， $g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$.

$g(\pi)=\dfrac{k}{6}\pi^3+\pi\leq\dfrac{1}{6}\pi^3+\pi<0$.

{存在其它取点情况， $x>0$ 时，由 $g\left(x\right)\leq-\dfrac{x^3}{6}+x+1$ 可得 $x>3$ 时， $g\left(x\right)<0$}

故存在唯一的 $x_1\in\left(x_0,\pi\right), g\left(x_1\right)=0$.

于是 $k\leq -1$ 时， $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上存在唯一的零点.

于是 k 存在无数个取值使得 $g\left(x\right)$ 恰有三个不同的零点.

(21)(本小题 15 分)

解：(I) $A_1:-1,1,-1$，$A_2:-1,-1,1$.

(II)证明：设 $n=2t-1$，其中 $t\in N^*$.

假设存在正整数 k，使得 A_k 是常数列，由 A_0 不是常数列，

不妨设 $A_0,A_1,...,A_{k-1}$ 不为常数列且 A_k 为常数列，

记 $A_{k-1}:b_1,b_2,\dots,b_{2t-2},b_{2t-1}$，则 $A_k:b_1b_2,b_2b_3,\dots,b_{2t-2}b_{2t-1},b_{2t-1}b_1$.

令 $b_{2t}=b_1$，$b_{2t+1}=b_2$

当 $i=1,2,...2t-1$ 时，因为 $b_ib_{i+1}=b_{i+1}b_{i+2}$，且 $b_{i+1}\in\{-1,1\}$，所以 $b_i=b_{i+2}$.

故 $b_1=b_3=b_5=\dots=b_{2t-1}=b_2=b_4=\dots=b_{2t-2}$.

此时 A_{k-1} 为常数列，矛盾.

另法：

①若 $A_k:1,1,...,1$，则 $b_2=b_1$，$b_3=b_2$,...，$b_{2t-1}=b_{2t-2}$，$b_1=b_{2t-1}$，有

$b_1=b_2=\dots=b_{2t-1}$，

此时 A_{k-1} 为常数列，矛盾.

②若 $A_k:-1,-1,\dots,-1$，则 $b_1b_2=b_2b_3=\dots=b_{2n-2}b_{2n-1}=b_{2n-1}b_1=-1$，有

$(-1)^{2t-1}=(b_1b_2)(b_3b_4)...(b_{2t-2}b_{2t-1})(b_{2t-1}b_1)=b_1^2b_2^2...b_{2t-1}^2=1$，

矛盾.

综上，对任意正整数 k，A_k 都不是常数列.

(III)①首先证明，若 $n=2^m\cdot(2s-1)$,其中 $m\in N^*,s\geq 2,s\in N^*$,

则存在 n 项的数列 A_0，使得对任意的正整数 k，A_k 都不是常数列.

证明：构造 $2s-1$ 项的数列 $C_0:c_1,c_2,...,c_{2s-1}$，其中

$c_1=c_2=\dots=c_{2s-2}=1$，$c_{2s-1}=-1$.

构造 n 项的数列

$$A_0:\underbrace{c_1,c_2,...,c_{2s-1},c_1,c_2,...,c_{2s-1},...,c_1,c_2,...,c_{2s-1}}_{2^m\text{组}c_1,c_2,...,c_{2s-1}}$$

对任意的正整数 k，设 C_k：$d_1,d_2,...,d_{2s-1}$，则

$$A_k:\underbrace{d_1,d_2,...,d_{2s-1},d_1,d_2,...,d_{2s-1},...,d_1,d_2,...,d_{2s-1}}_{2^m\text{组}d_1,d_2,...,d_{2s-1}}$$

由(II)得，C_k 不是常数列，故 A_k 不是常数列.

②其次证明：若 $n=2^m$，其中 $m\in N^*$,对任意 A_0，都存在正整数 k,A_k 是常数列.

证明：假设存在 $n=2^m$，其中 $m\in N^*$，使得存在数列 A_0，使得对任意的正整数 k,A_k 都不是常数列，不妨设 m 的最小值为 m_0.

情形一：$m_0=1$，则 $n=2$，记 $A_0:a_1,a_2$，则 $A_1:a_1a_2,a_1a_2$ 为常数列，矛盾.

情形二：$m_0\geq 2$，对任意的数列 $A_0:a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-2},a_{n-1},a_n$，则

$A_1: a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, ..., a_{n-2}a_{n-1}, a_{n-1}a_n, a_na_1$，$A_2: a_1a_3, a_2a_4, a_3a_5, ..., a_{n-2}a_n, a_{n-1}a_1, a_na_2$.

记 $A_0: \alpha_1$，β_1，α_2，$\beta_2, \cdots \alpha_{\frac{n}{2}}$，$\beta_{\frac{n}{2}}$，

定义数列 $E_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\frac{n}{2}}, F_0: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\frac{n}{2}}$, 其中 $\frac{n}{2} = 2^{m_0-1}$.

则 $E_1: \alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \cdots \alpha_{\frac{n}{2}}\alpha_1, F_1: \beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \cdots \beta_{\frac{n}{2}}\beta_1, A_2: \alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \alpha_2\alpha_3, \beta_2\beta_3, \cdots \alpha_{\frac{n}{2}}\alpha_1\beta_{\frac{n}{2}}\beta_1$,

则依此类推，对任意正整数 k，记 $E_k: u_1, u_2, \cdots, u_{\frac{n}{2}}, F_k: v_1, v_2, \cdots, v_{\frac{n}{2}}$,

$A_{2k}: u_1, v_1, u_2, v_2, ...,\ u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}}$.

存在正整数 k_1，k_2，使得 E_{k_1}，F_{k_2} 为常数列，记 $k_0 = max\{k_1, k_2\}$，

则数列 E_{k_0}，F_{k_0} 均为常数列，设 A_{2k_0}：α，β，α，$\beta, \cdots$，α，β,，则 A_{2k_0+1} 的各项均为 $\alpha\beta$.

即 $k = 2k_0 + 1$ 时，A_k 是常数列，矛盾.

综上，当且仅当 $n = 2^m$（$m \in N^*$）时，对任意 A_0，都存在正整数 k，使得 A_k 为常数列.