

2019 北京高考真题

数 学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. （5 分）已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

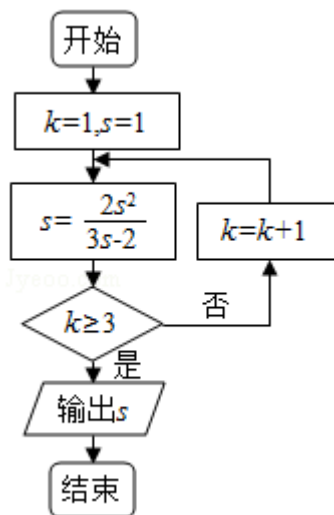
2. （5 分）已知复数 $z = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 5

3. （5 分）下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = 2^{-x}$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \frac{1}{x}$

4. （5 分）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. （5 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的离心率是 $\sqrt{5}$, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{6}$ B. 4 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

6. （5 分）设函数 $f(x) = \cos x + b \sin x$ (b 为常数), 则“ $b = 0$ ”是“ $f(x)$ 为偶函数”的 ()

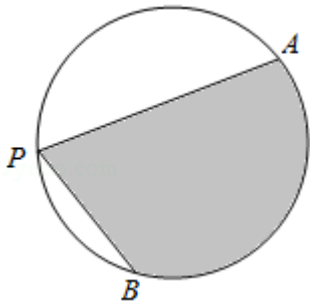
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. （5 分）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$,

其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k = 1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

- A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

8. (5分) 如图, A, B 是半径为 2 的圆周上的定点, P 为圆周上的动点, $\angle APB$ 是锐角, 大小为 β , 图中阴影区域的面积的最大值为 ()



- A. $4\beta+4\cos\beta$ B. $4\beta+4\sin\beta$ C. $2\beta+2\cos\beta$ D. $2\beta+2\sin\beta$

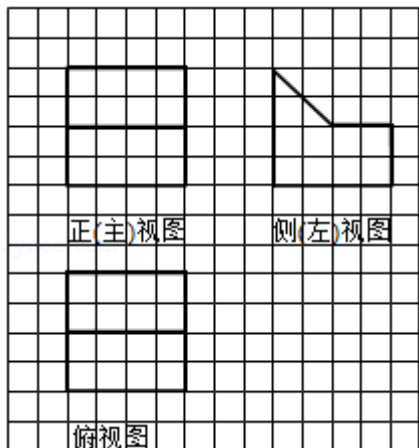
二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

9. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (6, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. (5分) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \geq -1, \\ 4x - 3y + 1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $y - x$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. (5分) 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. (5分) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



13. (5分) 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

- ① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (5分) 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

- ① 当 $x = 10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元;
② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

15. (13分) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b - c = 2$, $\cos B = -\frac{1}{2}$.

- (I) 求 b, c 的值;
- (II) 求 $\sin(B+C)$ 的值.

16. (13 分) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = -10$, 且 a_2+10, a_3+8, a_4+6 成等比数列.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n 的最小值.

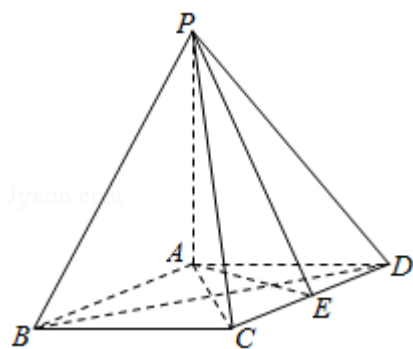
17. (12 分) 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的使用情况, 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付金额 支付方式	不大于 2000 元	大于 2000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

- (I) 估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数;
- (II) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率;
- (III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 发现他本月的支付金额大于 2000 元. 结合 (II) 的结果, 能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

18. (14 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为菱形, E 为 CD 的中点.

- (I) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;
- (II) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAE ;
- (III) 棱 PB 上是否存在点 F , 使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ? 说明理由.



19. (14 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$, 且经过点 $A(0, 1)$.

- (I) 求椭圆 C 的方程;
- (II) 设 O 为原点, 直线 $l: y = kx + t$ ($t \neq 1$) 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q , 直线 AP 与 x 轴交于点 M , 直线 AQ 与 x 轴交于点 N . 若 $|OM| \cdot |ON| = 2$, 求证: 直线 l 经过定点.

20. (14 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
- (II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$)，记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$ 。当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值。

参考答案

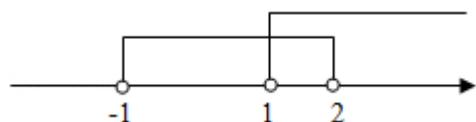
一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. (5 分) 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

【分析】直接由并集运算得答案.

【解答】解: $\because A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$,



$$\therefore A \cup B = \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | x > 1\} = (-1, +\infty).$$

故选: C.

【点评】本题考查并集及其运算, 是基础的计算题.

2. (5 分) 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 5

【分析】直接由 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 求解.

【解答】解: $\because z = 2 + i$,

$$\therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = (\sqrt{2^2 + 1^2})^2 = 5.$$

故选: D.

【点评】本题考查复数及其运算性质, 是基础的计算题.

3. (5 分) 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = 2^{-x}$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = \frac{1}{x}$

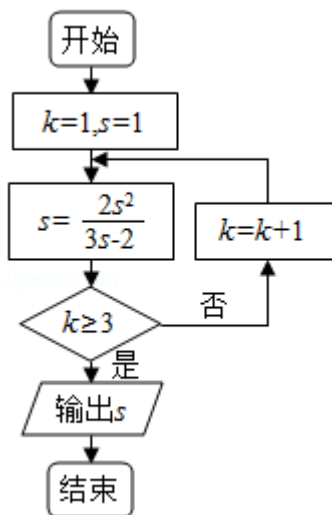
【分析】判断每个函数在 $(0, +\infty)$ 上的单调性即可.

【解答】解: $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = 2^{-x}$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数.

故选: A.

【点评】考查幂函数、指数函数、对数函数和反比例函数的单调性.

4. (5 分) 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【分析】由已知中的程序语句可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 s 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

【解答】解：模拟程序的运行，可得

$$k=1, s=1$$

$$s=2$$

不满足条件 $k \geq 3$ ，执行循环体， $k=2, s=2$

不满足条件 $k \geq 3$ ，执行循环体， $k=3, s=2$

此时，满足条件 $k \geq 3$ ，退出循环，输出 s 的值为 2.

故选：B.

【点评】本题考查了程序框图的应用问题，解题时应模拟程序框图的运行过程，以便得出正确的结论，是基础题.

5. (5 分) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的离心率是 $\sqrt{5}$ ，则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{6}$ B. 4 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

【分析】由双曲线方程求得 b^2 ，再由双曲线的离心率及隐含条件 $a^2 + b^2 = c^2$ 联立求得 a 值.

【解答】解：由双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$)，得 $b^2 = 1$ ，

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}, \text{ 得 } \frac{c^2}{a^2} = 5, \text{ 即 } \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2 + 1}{a^2} = 5,$$

$$\text{解得 } \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}, a = \frac{1}{2}.$$

故选：D.

【点评】本题考查双曲线的简单性质，考查计算能力，是基础题.

6. (5 分) 设函数 $f(x) = \cos x + b \sin x$ (b 为常数)，则“ $b=0$ ”是“ $f(x)$ 为偶函数”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【分析】“ $b=0$ ” \Rightarrow “ $f(x)$ 为偶函数”，“ $f(x)$ 为偶函数” \Rightarrow “ $b=0$ ”，由此能求出结果.

【解答】解：设函数 $f(x) = \cos x + b \sin x$ (b 为常数)，

则“ $b=0$ ” \Rightarrow “ $f(x)$ 为偶函数”，

“ $f(x)$ 为偶函数” \Rightarrow “ $b=0$ ”，

\therefore 函数 $f(x) = \cos x + b \sin x$ (b 为常数)，

则“ $b=0$ ”是“ $f(x)$ 为偶函数”的充分必要条件.

故选：C.

【点评】本题考查命题真假的判断，考查函数的奇偶性等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于基础题.

7. (5 分) 在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$,

其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 ，天狼星的星等是 -1.45 ，则太阳与天狼星的亮度的比值为 ()

A. $10^{10.1}$ B. 10.1 C. $\lg 10.1$ D. $10^{-10.1}$

【分析】把已知熟记代入 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ ，化简后利用对数的运算性质求解.

【解答】解：设太阳的星等是 $m_1 = -26.7$ ，天狼星的星等是 $m_2 = -1.45$ ，

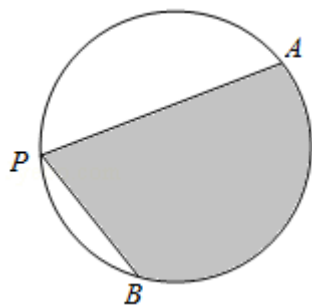
由题意可得： $-1.45 - (-26.7) = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$,

$\therefore \lg \frac{E_1}{E_2} = \frac{50.5}{5} = 10.1$ ，则 $\frac{E_1}{E_2} = 10^{10.1}$.

故选：A.

【点评】本题考查对数的运算性质，是基础的计算题.

8. (5 分) 如图，A, B 是半径为 2 的圆周上的定点，P 为圆周上的动点， $\angle APB$ 是锐角，大小为 β ，图中阴影区域的面积的最大值为 ()



A. $4\beta + 4\cos\beta$ B. $4\beta + 4\sin\beta$ C. $2\beta + 2\cos\beta$ D. $2\beta + 2\sin\beta$

【分析】由题意可得 $\angle AOB = 2\angle APB = 2\beta$ ，要求阴影区域的面积的最大值，即为直线 $QO \perp AB$ ，运用扇形面积公式和三角形的面积公式，计算可得所求最大值.

【解答】解：由题意可得 $\angle AOB = 2\angle APB = 2\beta$ ，

要求阴影区域的面积的最大值，即为直线 $QO \perp AB$ ，

即有 $QO = 2$ ，Q 到线段 AB 的距离为 $2 + 2\cos\beta$ ，

$$AB=2\cdot 2\sin\beta=4\sin\beta,$$

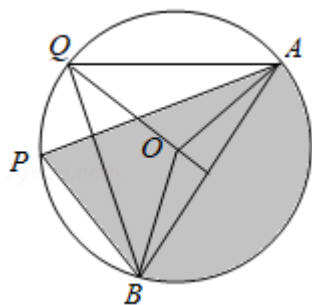
$$\text{扇形 } AOB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}\cdot 2\beta\cdot 4=4\beta,$$

$$\triangle ABQ \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}(2+2\cos\beta)\cdot 4\sin\beta=4\sin\beta+4\sin\beta\cos\beta=4\sin\beta+2\sin 2\beta,$$

$$S_{\triangle AOQ}+S_{\triangle BOQ}=4\sin\beta+2\sin 2\beta-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 2\beta=4\sin\beta,$$

即有阴影区域的面积的最大值为 $4\beta+4\sin\beta$.

故选: B.



【点评】本题考查圆的扇形面积公式和三角函数的恒等变换, 考查化简运算能力, 属于中档题.

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. (5 分) 已知向量 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (6, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m = \underline{8}$.

【分析】 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 代入 \vec{a} , \vec{b} , 解方程即可.

【解答】解: 由向量 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (6, m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\text{得 } \vec{a} \cdot \vec{b} = -24 + 3m = 0,$$

$$\therefore m = 8.$$

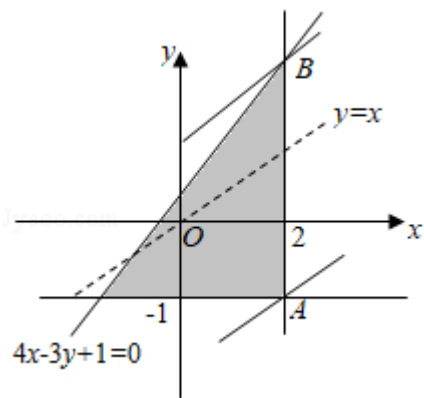
故答案为: 8.

【点评】本题考查了平面向量的数量积与垂直的关系, 属基础题.

10. (5 分) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \geq -1, \\ 4x - 3y + 1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $y - x$ 的最小值为 $\underline{-3}$, 最大值为 $\underline{1}$.

【分析】由约束条件作出可行域, 令 $z = y - x$, 作出直线 $y = x$, 平移直线得答案.

【解答】解: 由约束条件 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \geq -1, \\ 4x - 3y + 1 \geq 0, \end{cases}$ 作出可行域如图,



$A(2, -1)$, $B(2, 3)$,

令 $z=y-x$, 作出直线 $y=x$, 由图可知,

平移直线 $y=x$, 当直线 $z=y-x$ 过 A 时, z 有最小值为 -3 , 过 B 时, z 有最大值 1 .

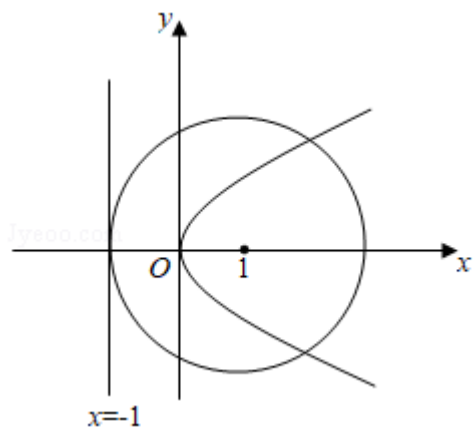
故答案为: $-3, 1$.

【点评】本题考查简单的线性规划, 考查数形结合的解题思想方法, 是中档题.

11. (5分) 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=4$.

【分析】由题意画出图形, 求得圆的半径, 则圆的方程可求.

【解答】解: 如图,



抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$,

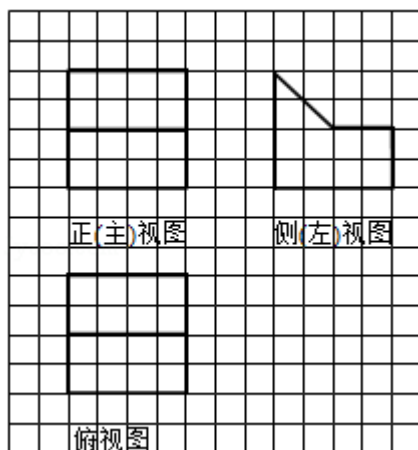
\because 所求圆的圆心 F , 且与准线 $x=-1$ 相切, \therefore 圆的半径为 2 .

则所求圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=4$.

故答案为: $(x-1)^2+y^2=4$.

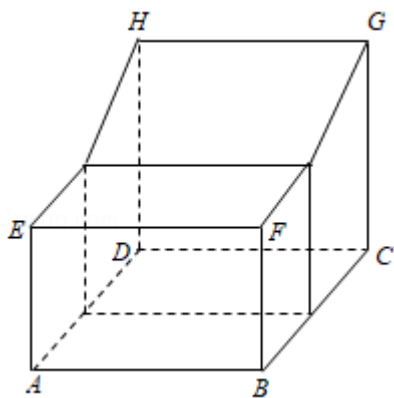
【点评】本题考查抛物线的简单性质, 考查直线与圆位置关系的应用, 考查数形结合的解题思想方法, 是基础题.

12. (5分) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1 , 那么该几何体的体积为 40 .



【分析】由三视图还原原几何体，然后利用一个长方体与一个棱柱的体积作和求解．

【解答】解：由三视图还原原几何体如图，



该几何体是把棱长为 4 的正方体去掉一个四棱柱，

则该几何体的体积 $V = 4 \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} (2+4) \times 2 \times 4 = 40$ ．

故答案为：40．

【点评】本题考查由三视图求面积、体积，关键是由三视图还原原几何体，是中档题．

13. （5 分）已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

① $l \perp m$ ；② $m \parallel \alpha$ ；③ $l \perp \alpha$ ．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：若 $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则 $m \parallel \alpha$ ．

【分析】由 l, m 是平面 α 外的两条不同直线，利用线面平行的判定定理得若 $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则 $m \parallel \alpha$ ．

【解答】解：由 l, m 是平面 α 外的两条不同直线，知：

由线面平行的判定定理得：

若 $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则 $m \parallel \alpha$ ．

故答案为：若 $l \perp \alpha, l \perp m$ ，则 $m \parallel \alpha$ ．

【点评】本题考查满足条件的真命题的判断，考查空间中直线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于中档题．

14. （5 分）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%．

①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付 130 元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为 15 .

【分析】①由题意可得顾客一次购买的总金额，减去 x ，可得所求值；

②在促销活动中，设订单总金额为 m 元，可得 $(m-x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，解不等式，结合恒成立思想，可得 x 的最大值.

【解答】解：①当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，可得 $60+80=140$ （元），

即有顾客需要支付 $140-10=130$ （元）；

②在促销活动中，设订单总金额为 m 元，

可得 $(m-x) \times 80\% \geq m \times 70\%$ ，

即有 $x \leq \frac{m}{8}$ ，

由题意可得 $m \geq 120$ ，

可得 $x \leq \frac{120}{8} = 15$ ，

则 x 的最大值为 15 元.

故答案为：130，15

【点评】本题考查不等式在实际问题的应用，考查化简运算能力，属于中档题.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （13 分）在 $\triangle ABC$ 中， $a=3$ ， $b-c=2$ ， $\cos B = -\frac{1}{2}$.

(I) 求 b ， c 的值；

(II) 求 $\sin(B+C)$ 的值.

【分析】（1）利用余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$ ，代入已知条件即可得到关于 b 的方程，解方程即可；

（2） $\sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A$ ，根据正弦定理可求出 $\sin A$.

【解答】解：（1） $\because a=3$ ， $b-c=2$ ， $\cos B = -\frac{1}{2}$.

\therefore 由余弦定理，得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$

$$= 9 + (b-2)^2 - 2 \times 3 \times (b-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$\therefore b=7$ ， $\therefore c=b-2=5$ ；

（2）在 $\triangle ABC$ 中， $\because \cos B = -\frac{1}{2}$ ， $\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

由正弦定理有： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\therefore \sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

【点评】本题考查了正弦定理余弦定理，属基础题.

16. （13 分）设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 = -10$ ，且 a_2+10 ， a_3+8 ， a_4+6 成等比数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n 的最小值.

【分析】(I) 利用等差数列通项公式和等比数列的性质, 列出方程求出 $d=2$, 由此能求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(II) 由 $a_1 = -10$, $d=2$, 得 $S_n = -10n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 11n = (n - \frac{11}{2})^2 - \frac{121}{4}$, 由此能求出 S_n 的最小值.

【解答】解: (I) $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = -10$, 且 a_2+10 , a_3+8 , a_4+6 成等比数列.

$$\therefore (a_3+8)^2 = (a_2+10)(a_4+6),$$

$$\therefore (-2+2d)^2 = d(-4+3d),$$

解得 $d=2$,

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = -10 + 2n - 2 = 2n - 12.$$

(II) 由 $a_1 = -10$, $d=2$, 得:

$$S_n = -10n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 11n = (n - \frac{11}{2})^2 - \frac{121}{4},$$

$\therefore n=5$ 或 $n=6$ 时, S_n 取最小值 -30 .

【点评】本题考查数列的通项公式、前 n 项和的最小值的求法, 考查等差数列、等比数列的性质等基础知识, 考查推理能力与计算能力, 属于基础题.

17. (12分) 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A , B 两种移动支付方式的 usage 情况, 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A , B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付方式 \ 支付金额	不大于 2000 元	大于 2000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

(I) 估计该校学生中上个月 A , B 两种支付方式都使用的人数;

(II) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率;

(III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 发现他本月的支付金额大于 2000 元. 结合 (II) 的结果, 能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

【分析】(I) 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取的 100 人中, A , B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 仅使用 A 的有 30 人, 仅使用 B 的有 25 人, 求出 A , B 两种支付方式都使用的人数有 40 人, 由此能估计该校学生中上个月 A , B 两种支付方式都使用的人数.

(II) 从样本仅使用 B 的学生有 25 人, 其中不大于 2000 元的有 24 人, 大于 2000 元的有 1 人, 从中随机抽取 1 人, 基本事件总数 $n=25$, 该学生上个月支付金额大于 2000 元包含的基本事件个数 $m=1$, 由此能求出该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率. (III) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 发现他本月的支付金额大于 2000 元的概率为 $\frac{1}{25}$, 虽然概率较小, 但发生的可能性为 $\frac{1}{25}$. 不能认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化.

【解答】解：（I）由题意得：

从全校所有的 1000 名学生中随机抽取的 100 人中，

A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人，

仅使用 A 的有 30 人，仅使用 B 的有 25 人，

∴ A, B 两种支付方式都使用的人数有：100 - 5 - 30 - 25 = 40，

∴ 估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数为： $1000 \times \frac{40}{100} = 400$ 人。

（II）从样本仅使用 B 的学生有 25 人，其中不大于 2000 元的有 24 人，大于 2000 元的有 1 人，

从中随机抽取 1 人，基本事件总数 $n = 25$ ，

该学生上个月支付金额大于 2000 元包含的基本事件个数 $m = 1$ ，

∴ 该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率 $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{25}$ 。

（III）不能认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化，

理由如下：

上个月样本学生的支付方式在本月没有变化。

现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人，

发现他本月的支付金额大于 2000 元的概率为 $\frac{1}{25}$ ，

虽然概率较小，但发生的可能性为 $\frac{1}{25}$ 。

故不能认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化。

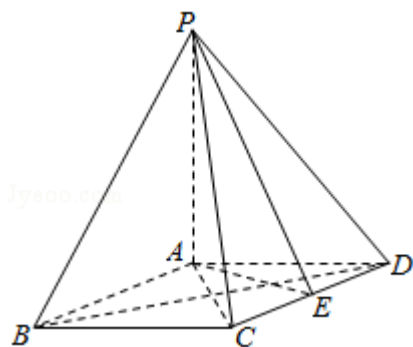
【点评】本题考查频数、概率的求法，考查频数分布表、概率等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于基础题。

18. （14 分）如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， E 为 CD 的中点。

（I）求证： $BD \perp$ 平面 PAC ；

（II）若 $\angle ABC = 60^\circ$ ，求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PAE ；

（III）棱 PB 上是否存在点 F ，使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ？说明理由。



【分析】（I）推导出 $BD \perp PA$ ， $BD \perp AC$ ，由此能证明 $BD \perp$ 平面 PAC 。

（II）推导出 $AB \perp AE$ ， $PA \perp AE$ ，从而 $AE \perp$ 平面 PAB ，由此能证明平面 $PAB \perp$ 平面 PAE 。

（III）棱 PB 上是存在中点 F ，取 AB 中点 G ，连结 GF ， CG ，推导出 $CG \parallel AE$ ， $FG \parallel PA$ ，从而平面 $CFG \parallel$ 平面 PAE ，进而 $CF \parallel$ 平面 PAE 。

【解答】证明：（I） \because 四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore BD \perp PA, BD \perp AC$,

$\because PA \cap AC = A, \therefore BD \perp$ 平面 PAC .

（II） \because 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形，

E 为 CD 的中点， $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore AB \perp AE, PA \perp AE$,

$\because PA \cap AB = A, \therefore AE \perp$ 平面 PAB ,

$\because AE \subset$ 平面 PAE, \therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 PAE .

解：（III）棱 PB 上是存在中点 F ，使得 $CF \parallel$ 平面 PAE .

理由如下：取 AB 中点 G ，连结 GF, CG ,

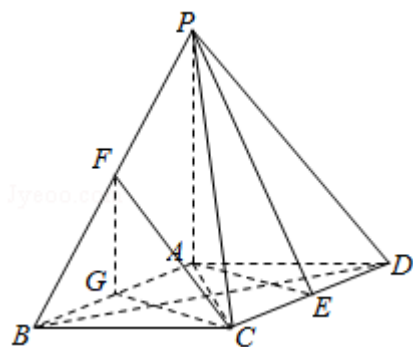
\because 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为菱形， E 为 CD 的中点，

$\therefore CG \parallel AE, FG \parallel PA$,

$\because CG \cap FG = G, AE \cap PA = A$,

\therefore 平面 $CFG \parallel$ 平面 PAE ,

$\because CF \subset$ 平面 $CFG, \therefore CF \parallel$ 平面 PAE .



【点评】本题考查线面垂直、面面垂直的证明，考查满足线面平行的线是否存在的判断与求法，考查空间中中线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查推理能力与计算能力，属于中档题.

19. (14分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$ ，且经过点 $A(0, 1)$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 O 为原点，直线 $l: y = kx + t$ ($t \neq 1$) 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q ，直线 AP 与 x 轴交于点 M ，直线 AQ 与 x 轴交于点 N . 若 $|OM| \cdot |ON| = 2$ ，求证：直线 l 经过定点.

【分析】(I) 由题意可得 $b = c = 1$ ，由 a, b, c 的关系，可得 a ，进而得到所求椭圆方程;

(II) $y = kx + t$ 与椭圆方程 $x^2 + 2y^2 = 2$ 联立，运用韦达定理，化简整理，结合直线恒过定点的求法，计算可得结论.

【解答】解：(I) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$ ，且经过点 $A(0, 1)$.

可得 $b = c = 1, a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}$,

则椭圆方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(II) 证明： $y = kx + t$ 与椭圆方程 $x^2 + 2y^2 = 2$ 联立，可得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$,

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\Delta = 16k^2t^2 - 4(1+2k^2)(2t^2-2) > 0, \quad x_1+x_2 = -\frac{4kt}{1+2k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{2t^2-2}{1+2k^2},$$

$$AP \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1-1}{x_1}x+1, \text{ 令 } y=0, \text{ 可得 } y = \frac{x_1}{1-y_1}, \text{ 即 } M\left(\frac{x_1}{1-y_1}, 0\right);$$

$$AQ \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2-1}{x_2}x+1, \text{ 令 } y=0, \text{ 可得 } y = \frac{x_2}{1-y_2}. \text{ 即 } N\left(\frac{x_2}{1-y_2}, 0\right).$$

$$(1-y_1)(1-y_2) = 1+y_1y_2 - (y_1+y_2) = 1 + (kx_1+t)(kx_2+t) - (kx_1+kx_2+2t)$$

$$= (1+t^2-2t) + k^2 \cdot \frac{2t^2-2}{1+2k^2} + (kt-k) \cdot \left(-\frac{4kt}{1+2k^2}\right) = \frac{(t-1)^2}{1+2k^2},$$

$$|OM| \cdot |ON| = 2, \text{ 即为 } \left| \frac{x_1}{1-y_1} \cdot \frac{x_2}{1-y_2} \right| = 2,$$

即有 $|t^2-1| = (t-1)^2$, 由 $t \neq \pm 1$, 解得 $t=0$, 满足 $\Delta > 0$,

即有直线 l 方程为 $y=kx$, 恒过原点 $(0, 0)$.

【点评】本题考查椭圆的方程和运用, 考查联立直线方程和椭圆方程, 运用韦达定理, 考查直线恒过定点的求法, 考查化简整理的运算能力, 属于中档题.

20. (14分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;

(II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x-6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

【分析】(I) 求导数 $f'(x)$, 由 $f'(x)=1$ 求得切点, 即可得点斜式方程;

(II) 把所证不等式转化为 $-6 \leq f(x) - x \leq 0$, 再令 $g(x) = f(x) - x$, 利用导数研究 $g(x)$ 在 $[-2, 4]$ 的单调性和极值点即可得证;

(III) 先把 $F(x)$ 化为 $|g(x) - a|$, 再利用 (II) 的结论, 引进函数 $h(t) = |t-a|$, 结合绝对值函数的对称性, 单调性, 通过对称轴 $t=a$ 与 -3 的关系分析即可.

【解答】解: (I) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$,

由 $f'(x)=1$ 得 $x(x-\frac{8}{3})=0$,

得 $x_1=0$, $x_2=\frac{8}{3}$.

又 $f(0)=0$, $f(\frac{8}{3})=\frac{8}{27}$,

$\therefore y=x$ 和 $y=\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$,

即 $y=x$ 和 $y=x-\frac{64}{27}$;

(II) 证明: 欲证 $x - 6 \leq f(x) \leq x$,

只需证 $-6 \leq f(x) - x \leq 0$,

$$\text{令 } g(x) = f(x) - x = \frac{1}{4}x^3 - x^2, \quad x \in [-2, 4],$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = \frac{3}{4}x(x - \frac{8}{3}),$$

可知 $g'(x)$ 在 $[-2, 0]$ 为正, 在 $(0, \frac{8}{3})$ 为负, 在 $[\frac{8}{3}, 4]$ 为正,

$\therefore g(x)$ 在 $[-2, 0]$ 递增, 在 $[0, \frac{8}{3}]$ 递减, 在 $[\frac{8}{3}, 4]$ 递增,

$$\text{又 } g(-2) = -6, \quad g(0) = 0, \quad g(\frac{8}{3}) = -\frac{64}{27} > -6, \quad g(4) = 0,$$

$$\therefore -6 \leq g(x) \leq 0,$$

$$\therefore x - 6 \leq f(x) \leq x;$$

(III) 由 (II) 可得,

$$F(x) = |f(x) - (x+a)|$$

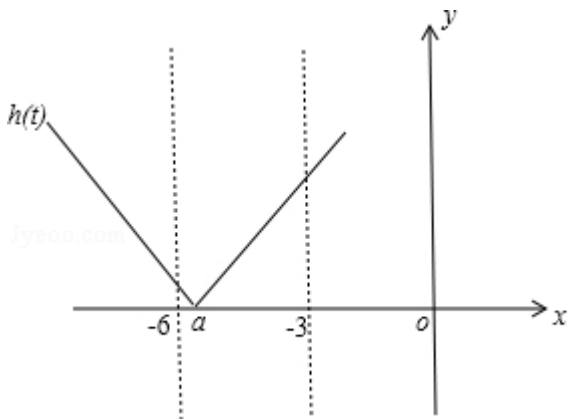
$$= |f(x) - x - a|$$

$$= |g(x) - a|$$

\because 在 $[-2, 4]$ 上, $-6 \leq g(x) \leq 0$,

$$\text{令 } t = g(x), \quad h(t) = |t - a|,$$

则问题转化为当 $t \in [-6, 0]$ 时, $h(t)$ 的最大值 $M(a)$ 的问题了,



$$\text{① 当 } a \leq -3 \text{ 时, } M(a) = h(0) = |a| = -a,$$

此时 $-a \geq 3$, 当 $a = -3$ 时, $M(a)$ 取得最小值 3;

$$\text{② 当 } a \geq -3 \text{ 时, } M(a) = h(-6) = |-6 - a| = |6 + a|,$$

$$\because 6 + a \geq 3, \therefore M(a) = 6 + a,$$

也是 $a = -3$ 时, $M(a)$ 最小为 3.

综上, 当 $M(a)$ 取最小值时 a 的值为 -3 .

【点评】此题考查了导数的综合应用, 构造法, 转化法, 数形结合法等, 难度较大.