

2024 北京东城高三二模

数 学

2024.5

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | x + 1 \leq 0\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 1\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $\{x | x < 1\}$ (B) $\{x | -2 \leq x < 1\}$
(C) $\{x | x \geq -2\}$ (D) $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$

(2) 下列函数中，在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减的是

(A) $f(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = e^{-x}$

(C) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \ln x$

(3) 在 ΔABC 中, $A = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{7\pi}{12}$, $b = \sqrt{2}$, 则 $a =$

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

(4) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $(3, \sqrt{2})$, 且一条渐近线的倾斜角为 30° , 则双曲线的方程为

(A) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ (B) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(C) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $x^2 - 4y^2 = 1$

(5) 直线 $l: y = -1$ 与圆 $E: x^2 + y^2 - 4x = 0$ 交于 A, B 两点, 若圆上存在点 C , 使得 ΔABC 为等腰三角形, 则点 C 的坐标可以为

- (A) (0, 0) (B) (4, 0) (C) (1, $\sqrt{3}$) (D) (2, 2)

(6) 袋中有 5 个大小相同的小球, 其中 3 个白球, 2 个黑球. 从袋中随机摸出 1 个小球, 观察颜色后放回, 同时放入一个与其颜色大小相同的小球, 然后再从袋中随机摸出 1 个小球, 则两次摸到的小球颜色不同的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(7) 已知函数 $f(x) = |x - 1|e^x$ 的图象与直线 $y = 1$ 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $|x_1 - x_2|$ 所在的区间为

- (A) (0, 1) (B) (1, 2) (C) (2, 3) (D) (3, 4)

(8) 已知平面向量 e_1, e_2, e_3, e_4 是单位向量, 且 $e_1 \perp e_2$, 则“ $e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_4$ ”是“ $e_3 \cdot e_4 = 0$ ”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 声音是由物体振动产生的，每一个纯音都是由单一简谐运动产生的乐音，其数学模型为

$$h(t) = A \sin \omega t (A > 0, \omega > 0), \text{ 其中 } A \text{ 表示振幅，响度与振幅有关；} T \text{ 表示最小正周期，} T = \frac{2\pi}{\omega},$$

它是物体振动一次所需的时间； f 表示频率， $f = \frac{1}{T}$ ，它是物体在单位时间里振动的次数。下表为我

国古代五声音阶及其对应的频率 f ：

音	宫	商	角	徵	羽
频率 f	262Hz	293Hz	330Hz	392Hz	440Hz

小明同学利用专业设备，先弹奏五声音阶中的一个音，间隔 $\frac{1}{3}$ 个单位时间后，第二次弹奏同一个音（假设

两次声音响度一致，且不受外界阻力影响，声音响度不会减弱），若两次弹奏产生的振动曲线在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上重合，根据表格中数据判断小明弹奏的音是

- (A) 宫 (B) 商 (C) 角 (D) 徵

(10) 设无穷正数数列 $\{a_n\}$ ，如果对任意的正整数 n ，都存在唯一的正整数 m ，使得

$a_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ，那么称 $\{a_n\}$ 为内和数列，并令 $b_n = m$ ，称 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的伴随数列，则

- (A) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $\{a_n\}$ 为内和数列
 (B) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\{a_n\}$ 为内和数列
 (C) 若内和数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，则其伴随数列 $\{b_n\}$ 为递增数列
 (D) 若内和数列 $\{a_n\}$ 的伴随数列 $\{b_n\}$ 为递增数列，则 $\{a_n\}$ 为递增数列

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 在 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中，常数项为_____。(用数字作答)

(12) 若复数 z 满足 $\frac{z}{1+i} = 2+i$ ，则在复平面内， z 对应的点的坐标是_____。

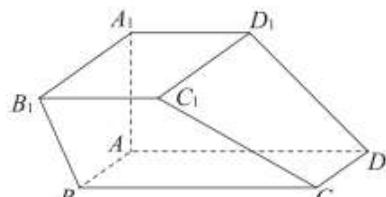
(13) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ x^2, & |x| \geq 1 \end{cases}$ ，则 $f[f(\frac{1}{2})] =$ _____，不等式 $f(x) < f(2x)$ 的解集是_____。

(14) 如图，在六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，

四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是两个全等的矩形， $AB \parallel A_1B_1$ ，

$AD \parallel A_1D_1$ ， $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB = B_1C_1 = 2$ ， $BC = A_1B_1 = 4$ ，

$AA_1 = 2$ ，则 $BB_1 =$ _____，该六面体的任意两个顶点间距离的最大值为_____。



(15) 已知平面内点集 $A = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} (n > 1)$ ， A 中任意两个不同点之间的距离都不相等。

设集合 $B = \{ \overrightarrow{P_i P_j} \mid \forall m \in \{1, 2, \dots, n\} (m \neq i), 0 < |\overrightarrow{P_i P_j}| \leq |\overrightarrow{P_i P_m}|, i=1, 2, \dots, n\}$,

$M = \{ \overrightarrow{P_j P_i} \mid \overrightarrow{P_i P_j} \in B, i=1, 2, \dots, n\}$. 给出以下四个结论:

- ①若 $n=2$, 则 $A=M$;
- ②若 n 为奇数, 则 $A \neq M$;
- ③若 n 为偶数, 则 $A=M$;
- ④若 $\{\overrightarrow{P_{i_1} P_i}, \overrightarrow{P_{i_2} P_i}, \dots, \overrightarrow{P_{i_k} P_i}\} \subseteq B$, 则 $k \leq 5$.

其中所有正确结论的序号是 ____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

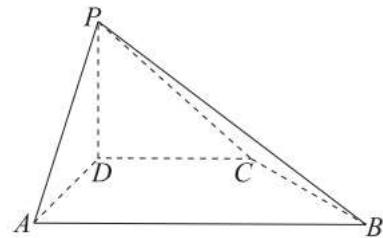
(16) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB // CD$, $AB=4$, $CD=2$, $\angle PDA=90^\circ$,

平面 $PAD \perp$ 平面 PCD .

- (I) 求证: $AD \perp PC$;
- (II) 若 $PD=AD=2$, $PD \perp DC$,

求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值.



(17) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

- (I) 求 ω 的值;
- (II) 从下列三个条件中选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在,

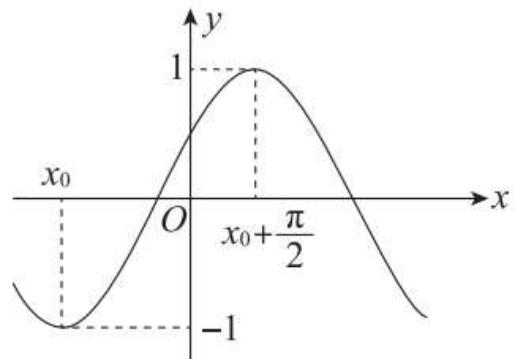
并求函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

条件①: 函数 $f(x+\frac{5\pi}{12})$ 是奇函数;

条件②: 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个

单位长度后得到 $y=\sin \omega x$ 的图象;

条件③: $f(0)=f(\frac{2\pi}{3})$.



注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 13 分)

北京市共有 16 个行政区，东城区、西城区、朝阳区、丰台区、石景山区和海淀区为中心城区，其他为非中心城区。根据《北京市人口蓝皮书·北京人口发展研究报告（2023）》显示，2022 年北京市常住人口为 2184.3 万人，由城镇人口和乡村人口两个部分构成，各区常住人口数量如下表所示：

行政区	东城区	西城区	朝阳区	丰台区	石景山区	海淀区	门头沟区	房山区
城镇人口 (万人)	70.4	110	343.3	199.9	56.3	305.4	36.2	102.6
乡村人口 (万人)	0	0	0.9	1.3	0	7	3.4	28.5
行政区	通州区	顺义区	昌平区	大兴区	怀柔区	平谷区	密云区	延庆区
城镇人口 (万人)	137.3	87.8	185.9	161.6	32.8	27.9	34.9	20.5
乡村人口 (万人)	47	44.7	40.8	37.5	11.1	17.7	17.7	13.9

- (I) 在 16 个行政区中随机选择一个，求该区为非中心城区且 2022 年乡村人口在 20 万人以下的概率；
- (II) 若随机从中心城区选取 1 个，非中心城区选取 2 个行政区，记选出的 3 个区中 2022 年常住人口超过 100 万人的行政区的个数为 X ，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ ；
- (III) 记 2022 年这 16 个区的常住人口、城镇人口、乡村人口的方差分别 s_1^2, s_2^2, s_3^2 ，试判断 s_1^2, s_2^2, s_3^2 的大小关系。(结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$ ，左、右顶点分别为 A, B ，

直线 $l: x = 2\sqrt{2}$ ，且 A 到 F 的距离与 A 到 l 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

- (I) 求椭圆 C 的方程；
- (II) 设 M, N 为椭圆 C 上不同的两点 (不在坐标轴上)，过点 N 作直线 BM 的平行线与直线 AM 交于点 D ，过点 M 作直线 BN 的平行线与直线 AN 交于点 E 。求证：点 D 与点 E 到直线 l 的距离相等。

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x \sin 2x + \cos 2x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的极值点个数.

(21) (本小题 15 分)

已知 $A_n : a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) 为有穷整数数列, 若 A_n 满足: $a_{i+1} - a_i \in \{p, q\}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$),

其中 p, q 是两个给定的不同非零整数, 且 $a_1 = a_n = 0$, 则称 A_n 具有性质 T .

(I) 若 $p = -1, q = 2$, 那么是否存在具有性质 T 的 A_5 ? 若存在, 写出一个这样的 A_5 ; 若不存在, 请说明

理由;

(II) 若 $p = -1, q = 2$, 且 A_{10} 具有性质 T , 求证: a_1, a_2, \dots, a_9 中必有两项相同;

(III) 若 $p + q = 1$, 求证: 存在正整数 k , 使得对任意具有性质 T 的 A_k , 都有 a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中任意两项均不相同.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

参考答案

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| (1) A | (2) B | (3) D | (4) A | (5) D |
| (6) B | (7) B | (8) D | (9) C | (10) C |

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

- (11) 60 (12) (1, 3) (13) 1, $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

- (14) $2\sqrt{2}$, 6 (15) ①②④

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

- (16) (本小题 14 分)

解: (I) 因为 $\angle PDA = 90^\circ$, 所以 $AD \perp PD$.

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 PCD , 平面 $PAD \cap$ 平面 $PCD = PD$,

所以 $AD \perp$ 平面 PCD .

又 $PC \subset$ 平面 PCD ,

所以 $AD \perp PC$6 分

(II) 因为 $AD \perp$ 平面 PCD ,

所以 $AD \perp CD, AD \perp PD$. 又因为 $PD \perp DC$,

如图, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $P(0, 0, 2), C(0, 2, 0), B(2, 4, 0)$,

$$\overrightarrow{PC} = (0, 2, -2), \overrightarrow{CB} = (2, 2, 0),$$

易知平面 PAD 的法向量 $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$.

设平面 PBC 的法向量 $\mathbf{v} = (x, y, z)$,

于是, $\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y - z = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$

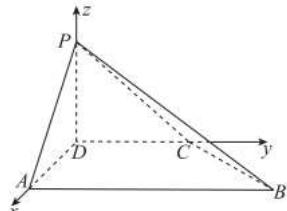
令 $y = 1$, $z = 1$, $x = -1$, 则 $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$.

所以

$$\cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$14 分

- (17) (本小题 13 分)



解：(I) 由题意知 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, $T = \pi$.

因为 $\omega > 0$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$,

解得 $\omega = 2$.

.....3 分

(II) 选择条件①: 函数 $f(x + \frac{5\pi}{12})$ 是奇函数.

$$f(x + \frac{5\pi}{12}) = \sin[2(x + \frac{5\pi}{12}) + \varphi] = \sin(2x + \frac{5\pi}{6} + \varphi).$$

因为函数 $f(x + \frac{5\pi}{12})$ 是奇函数,

$$\text{所以 } \frac{5\pi}{6} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{因为 } \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{于是, } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}).$$

$$\text{因为 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值为 } 1.$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值为 } -\frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

选择条件②: 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到 $y = \sin \omega x$ 的图象.

$$y = \sin 2[(x - \frac{\pi}{12}) + \varphi] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6} + \varphi\right),$$

因为其图象与 $y = \sin 2x$ 的图象相同,

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{因为 } \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

以下同选条件①.

.....13 分

(18) (本小题 13 分)

解: (I) 在 16 个行政区中有 10 个非中心城区, 乡村人口在 20 万人以下的有门头沟区、怀柔区、平谷区、密云区、延庆区, 共 5 个.

所以随机选择一个行政区，则该区为非中心城区且农村人口在 20 万人以下的概率为 $\frac{5}{16}$4 分

(II) 6个中心城区中常住人口超过100万人的有4个区, 10个非中心城区中常住人口超过100万人的有5个区. X 的所有取值包括0, 1, 2, 3, 则

$$P(X=0) = \frac{C_2^1 C_5^2}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{2}{27};$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_5^2 + C_2^1 C_5^1 C_5^1}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{1}{3};$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^1 C_5^1 C_5^1 + C_2^1 C_5^2}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{4}{9};$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{4}{27}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{27} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{4}{27} = \frac{5}{3}.$$
.....10分

$$(III) \quad s_1^2 > s_2^2 > s_3^2.$$

(19) (本小题 15 分)

解：(I) 由已知 $A(-a, 0)$, $\frac{a+\sqrt{2}}{a+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a = 2$.

因为 $c = \sqrt{2}$,

所以 $b^2 \equiv a^2 - c^2 \equiv 4 - 2 \equiv 2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分

(II) $A(-2,0)$, $B(2,0)$. 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } k_{ND} = k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}, \quad k_{ME} = k_{BN} = \frac{y_2}{x_2 - 2}.$$

$$\text{直线 } AM : y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \quad ND : y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - x_2) + y_2,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \\ y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - x_2) + y_2, \end{cases}, \text{得} \left(\frac{y_1}{x_1 + 2} - \frac{y_1}{x_1 - 2} \right)x = -\frac{2y_1}{x_1 + 2} - \frac{x_2 y_1}{x_1 - 2} + y_2,$$

整理得， $-4y_1x = (x_1^2 - 4)y_2 - 2y_1(x_1 - 2) - y_1x_2(x_1 + 2)$

因为 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1$ ， $x_1^2 - 4 = -2y_1^2$ ，

所以 $-4y_1x = -2y_1^2y_2 - 2y_1(x_1 - 2) - y_1x_2(x_1 + 2)$ ，

$$x_D = \frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1$$

$$\text{同理可得, } x_E = \frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1$$

所以点 D 与点 E 到直线 $l: x = 2\sqrt{2}$ 的距离相等。 15 分

(20) (本小题 15 分)

解：(I) 因为 $f(x) = x \sin 2x + \cos 2x$ ，

$$\text{所以 } f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x - 2 \sin 2x = 2x \cos 2x - \sin 2x$$

$$\text{所以 } f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

故曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$ 处的切线方程为 $y = x + \frac{\pi}{2}$ 。 5 分

(II) $f'(x) = 2x \cos 2x - \sin 2x$ ，设 $g(x) = f'(x)$ ，

$$\text{所以 } g'(x) = 2 \cos 2x - 4x \sin 2x - 2 \cos 2x = -4x \sin 2x$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{\pi}{2},$$

x	$\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$
$g'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$g(x) = f'(x)$	递增		递减		递减		递增

$$f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad f'(0) = 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \quad f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$$

故存在 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ，使得 $f'(x_0) = 0$ ，

$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ 上单调递增，在区间 $[0, x_0]$ 上单调递减，在区间 $[x_0, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上有且仅有两个极值点。 15 分

(21) (本小题 15 分)

解：(I) 不存在具有性质 T 的 A_5 ，理由如下：

设 A_5 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ,

由于 $a_1 = a_5 = 0$, $a_{i+1} - a_i \in \{-1, 2\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$),

设 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4$ 中有 m 个 -1 , $4-m$ 个 2 ,

则有 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_1 = 0$,

所以有 $(-1) \times m + 2 \times (4-m) = 8 - 3m = 0$, 这与 m 为整数矛盾,

因此存在具有性质 T 的 A_5 .

.....4 分

(II) 设 $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{10}|$ 中的最大值为 M ,

则存在 a_k , 使 $a_k = M$, 或 $a_k = -M$.

若存在 a_k , 使 $a_k = M$, 下证: $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 可以取遍 0 到 M 之间所有的整数.

假设存在正整数 m ($m < M$), 使得 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 中各项均不为 m ,

令集合 $B = \{i | a_i > m\}$, 设 i_0 是集合 B 中元素的最大值,

则有 $a_{i_0} > m > a_{i_0+1}$,

这与 $a_{i+1} - a_i \in \{-1, 2\}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 矛盾.

所以 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 可以取遍 0 到 M 之间所有的整数.

若 $M = 1$, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 的取值只能为 $0, \pm 1$. 此时 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

若 $M = 2$, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 的取值只能为 $0, \pm 1, \pm 2$ 中的数, 此时 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

若 $M \geq 3$, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 中一定有异于 0 和 M 的正整数, 再由 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 可以取遍 0 到 M 之间所有的整数, 所以 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

当 $a_k = -M$, 同理可证: a_1, a_2, \dots, a_k 可以取遍 $-M$ 到 0 之间所有的整数.

从而 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

.....10 分

(III) 不妨设 $p < 0 < q$, 当 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}$ 中有 q 个 p , $-p$ 个 q ,

由于 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_k - a_{k-1}) = a_k - a_1 = 0$,

所以取 $k = q - p + 1$, 此时 A_k 具有性质 T .

下证: a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中任意两项均不相同.

若存在 i, j ($1 \leq i < j \leq k-1$), 使得 $a_i = a_j$,

令 $a_i = u_1 p + v_1 q$, $a_j = u_2 p + v_2 q$.

则有 $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq q$, $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq -p$.

令 $s = u_2 - u_1$, $t = v_2 - v_1$, 则有 $ps + qt = 0$, 且 $0 \leq s \leq q$, $0 \leq t \leq -p$.

由于 $p + q = 1$, 则有 $s = q(s-t)$,

①若 $s = t$, 则有 $s = 0$, 即 $u_1 = u_2$,

当 $a_i = a_j$ 时, 有 $v_1 = v_2$, 从而 $i = j$, 矛盾.

②若 $s \neq t$ ， 则有 $s = q$ 且 $s = t + 1$ ，

因此有 $u_2 = q, u_1 = 0, v_2 = q - 1, v_1 = 0$ ，

所以此时 $a_i = a_1, a_j = a_n$ ， 矛盾.

综上所述，存在正整数 k ，使得当 A_k 具有性质 T 时， a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中任意两项均不相同.15 分