2025 北京东城高三二模

数　　学

2025.5

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$， $B=\{x \mid x+1>0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0,1,2\}$　　（B）$\{-2\}$

（C）$\{-2,-1\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）已知 $(1-\mathrm{i})\cdot z=2+\mathrm{i}$，则复数 z 的实部为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1

（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）3

（3）已知单位向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1$，则 θ 的取值范围为

（A）$[0,\dfrac{\pi}{3})$　　（B）$[0,\dfrac{2\pi}{3})$

（C）$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$　　（D）$(\dfrac{2\pi}{3},\pi)$

（4）某人工智能模型在语言训练时，每轮训练的模型参数的数量会发生变化. 记第一轮训练的模型参数的数量为 t，若从第二轮开始，每一轮与它前一轮相比较，训练的模型参数增加的数量可以看成一个以 t 为首项，公比为 3 的等比数列，则第五轮训练的模型参数的数量为

（A）$121t$　　（B）$81t$

（C）$41t$　　（D）$27t$

（5）若双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 的离心率大于 $\sqrt{2}$，则 m 的取值范围为

（A）$(\sqrt{3},+\infty)$　　（B）$(1,+\infty)$

（C）$(0,\sqrt{3})$　　（D）$(0,1)$

（6）已知 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x>0, \\ -g(x), & x<0. \end{cases}$ 下列选项中能使 $f(x)$ 既是奇函数又是增函数的是

（A）$g(x)=x$　　（B）$g(x)=x^2$

（C）$g(x)=\mathrm{e}^x$　　（D）$g(x)=\ln|x|$

（7）已知 α， $\beta\in\mathbf{R}$，则“$\cos^2\alpha=\cos^2\beta$”是“$\beta=(-1)^k\alpha+k\pi(k\in\mathbf{Z})$”的

（A）充分不必要条件　　　　　　　　　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知直线 l 过点 $(0,-1)$，且 l 上至少有一点到点 $(0,3)$ 的距离为 2，则 l 的倾斜角的最大值为

（A）$\frac{\pi}{3}$　　　　（B）$\frac{\pi}{2}$

（C）$\frac{2\pi}{3}$　　　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

（9）马赫数是飞行器的运动速度与音速的比值. 在不考虑空气阻力的前提下，某飞行器的最大速度 v（单位：m/s）和燃料的质量 M（单位：kg）、飞行器（除燃料外）的质量 m（单位：kg）的函数关系是 $v=2900\ln(1+\frac{M}{m})$.已知当该飞行器所处高空的音速为 290 m/s，最大速度对应的马赫数分别为8 和 13 时，燃料的质量分别为 M_1 和 M_2，则下列结论一定正确的是

（A）$\frac{M_2}{M_1}=\sqrt{e}$　　　　（B）$\frac{M_2}{M_1}=e$

（C）$\frac{m+M_2}{m+M_1}=\sqrt{e}$　　　　（D）$\frac{m+M_2}{m+M_1}=e$

（10）设无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+\sin a_n$，则

（A）存在 $a_1\in(0,\pi)$，$\{a_n\}$ 为等差数列　　（B）存在 $a_1\in(0,\pi)$，$\{a_n\}$ 为等比数列

（C）存在 $a_1\in(0,\pi)$，$\{a_n\}$ 为递减数列　　（D）存在 $a_1\in(0,\pi)$，$\{a_n\}$ 为递增数列

第二部分（非选择题　共 110 分）

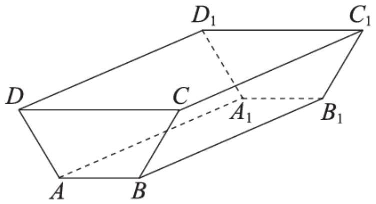
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，则 $A=$______ .

（12）已知 $(1+x)^5=1-2C_5^1+4C_5^2-8C_5^3+16C_5^4-32C_5^5$，则实数 $x=$_____ .

（13）已知直线 $y=kx$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在第一象限交于点 M，过点 M 作 x 轴的垂线，垂足为抛物线的焦点 F，则 $k=$____；若该抛物线的准线上的点到点 M 与点 F 的距离之和的最小值为 $\sqrt{5}$，则 $p=$____.

（14）《九章算术》是我国古代著名的数学著作，其中讨论了“垣”“堑”等建筑的体积问题. 某工程要完成一个形如直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的“堑”型沟渠的土方作业（如图），其中 AD，BC 与平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $\frac{\pi}{3}$，$AB//DC$，$AB=4$ 米，$DC=8$ 米，$AA_1=20$ 米，则需要挖土__ 立方米.



（15）已知曲线 C：$xy-x^2+x-y+1=0$. 给出下列四个结论：

① 曲线 C 为中心对称图形；

② 曲线 C 与直线 $y=x+1$ 有两个交点；

③ 曲线 C 恰好经过两个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

④ 曲线 C 上任意两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，当 $x_1<1<x_2$ 时，$|AB|\geqslant 2$.

其中正确结论的序号是____.

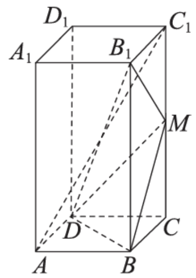
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

如图，长方体 $ABCD\text{–}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，$AB=1$，$AA_1=2$，点 M 在棱 CC_1 上，AC_1 // 平面 BDM.

（Ⅰ）求证：M 为 CC_1 的中点；

（Ⅱ）求平面 BDM 与平面 B_1DM 夹角的余弦值.



（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})\cos\omega x+b(\omega>0)$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，求 b 的值；

（Ⅱ）若 $f(0)=\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得函数 $f(x)$ 存在且唯一，求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的取值范围.

条件①：$f(x)$ 的图象关于 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 和 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称；

条件②：$f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调，且 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称；

条件③：$f(x)$ 的最小正周期 $T\geqslant\pi$，且 $f(-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

已知近 10 年北京市 12 月和 1 月历史气温分别如下图所示.

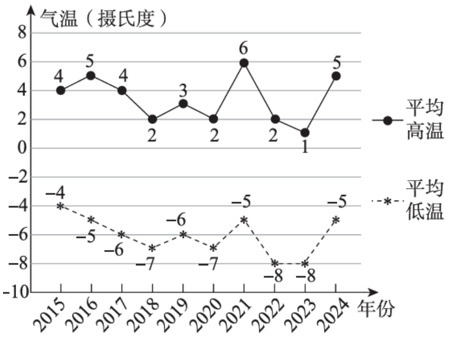


图 1　北京市 12 月历史气温

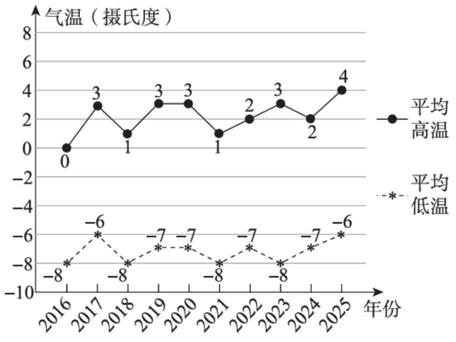


图 2　北京市 1 月历史气温

（Ⅰ）从2016年至2024年这9年中随机抽取一年，求该年12月平均高温和平均低温都低于前一年的概率；

（Ⅱ）将当年 12 月和次年 1 月作为当年的冬季周期，记当年 12 月平均高温与平均低温的差值为 a（单位：摄氏度），次年 1 月平均高温与平均低温的差值为 b（单位：摄氏度）.从 2015 年至 2024 年这 10 个冬季周期中随机抽取 3 个，求至少有 2 个冬季周期中 $a=b$ 的概率；

（Ⅲ）依据图 2 中信息，能否预测北京市 2026 年 1 月平均高温低于 4 摄氏度？请说明理由.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，且过点 $(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程及焦距；

（Ⅱ）过点 $(0,2)$ 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 的斜率分别记为 k_1 与 k_2，当 $k_1+k_2=\dfrac{2}{3}$ 时，求△ABC 的面积.

（20）（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=(x^2+ax)\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，证明：

（i）1为 $f(x)$ 的极小值点；

（ii）对于任意 $m\in(\dfrac{1}{2},1)$，存在 $n\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(m,\ f(m))$ 处的切线斜率与在点 $B(n,\ f(n))$ 处的切线斜率互为相反数.

（21）（本小题 15 分）

已知有穷整数数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 4)$，满足 $a_1 = a_n = 1$．记集合 $\mathbf{\Omega}$ 为 $\{B: b_1, b_2, \cdots, b_n \mid b_1 = b_n = 1, b_i = a_{i+1} - a_{i-1}, \text{或} b_i = a_{i-1} - a_{i+1}, \text{或} b_i = a_{i-1} + a_{i+1}, i = 2, 3, \cdots, n-1\}$．若数列 $A \in \mathbf{\Omega}$，则称数列 A 是 $\mathbf{\Omega}$ 的“恒元”.

（Ⅰ）已知数列 $A: 1, 3, 4, 1$，请写出 $\mathbf{\Omega}$ 中所有满足 $b_2 < b_3$ 的数列；

（Ⅱ）当 $n = 3m + 2 (m \in \mathbf{N}^*)$ 时，是否存在数列 A 满足 $a_2 = 2$，且 A 是 $\mathbf{\Omega}$ 的“恒元”？若存在，请写出一个满足条件的数列 A；若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）当数列 A 是 $\mathbf{\Omega}$ 的“恒元”时，若 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ 是 $n-2$ 个连续正整数的一个排列，求数列 A 的项数 n 的最大值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　　（2）A　　（3）B　　（4）C　　（5）D

（6）B　　（7）B　　（8）C　　（9）C　　（10）D

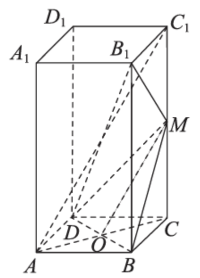
二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）30°　　（12）-2　　（13）2；1

（14）$240\sqrt{3}$　　（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）



解：（Ⅰ）连接 AC 与 BD 交于点 O，连接 OM .

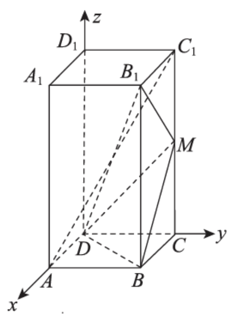
因为 $AC_1 /\!/$ 平面 BDM，平面 $ACC_1 \cap$ 平面 $BDM = OM$，

$AC_1 \subset$ 平面 ACC_1，

所以 $AC_1 /\!/ OM$.

在 $\triangle ACC_1$ 中，O 为 AC 中点，所以 M 为 CC_1 中点.　　………………5 分

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则



$D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$B_1(1,1,2)$，$M(0,1,1)$.

因此 $\overrightarrow{DB_1}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{DM}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设平面 B_1DM 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y+2z=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=-1$，$x=1$，于是 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$.

设平面 BDM 的法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+b=0,\\ b+c=0.\end{cases}$

令 $b=1$，则 $a=-1$，$c=-1$，于是 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-1)$.

设平面 BDM 与平面 B_1DM 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|1\times(-1)+1\times1+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{3}$.

所以平面 BDM 与平面 B_1DM 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.　　………………13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=4\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})\cos\omega x+b$

$=4(\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x)\cos\omega x+b$

$=2\sin\omega x\cos\omega x+2\sqrt{3}\cos^2\omega x+b$

$=\sin 2\omega x+\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sqrt{3}+b$

$=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+b$.

当 $2\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，

即 $x=\frac{7\pi}{12\omega}+\frac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $-2+\sqrt{3}+b$.

由 $-2+\sqrt{3}+b=\sqrt{3}$, 解得 $b=2$. ··················6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}+b$ ，

由 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+b=\sqrt{3}$ ，

解得 $b=-\sqrt{3}$ ，所以 $f(x)=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})$. ··················8 分

若选条件②：

因为 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调，所以 $T\geqslant 2\times(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12})=\pi$.

所以 $0<\omega\leqslant 1$.

由已知得 $f(\frac{\pi}{3})=0$ ，即 $2\sin(\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=0$.

解得 $\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ ，即 $\omega=\frac{3k}{2}-\frac{1}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

综上 $\omega=1$. 所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的取值范围为 $[-\sqrt{3},2]$. ··················14 分

若选条件③：

因为 $f(x)$ 的最小正周期 $T\geqslant\pi$ ，所以 $0<\omega\leqslant 1$.

由 $f(-\frac{\pi}{3})=2\sin(-\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$ ，

解得 $-\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $-\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ ，

即 $\omega=1-3k$ 或 $\omega=\frac{3}{2}-3k(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $\omega=1$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的取值范围为 $[-\sqrt{3},2]$. ………………14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）2016 年至 2024 年这 9 年中， 12 月平均高温和平均低温都低于前一年的年份是 2017 年、2018 年、2020 年和 2022 年，所以从 2016 年至 2024 年这 9 年中随机抽取一年，该年 12 月份平均高温和平均低温都低于前一年的概率为 $\frac{4}{9}$. ………4 分

（Ⅱ）在 2015 年至 2024 年这 10 个冬季周期中，a，b（单位：摄氏度）的值见下表.

	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
a	8	10	10	9	9	9	11	10	9	10
b	8	9	9	10	10	9	9	11	9	10

其中满足 $a=b$ 的是 2015，2020，2023 和 2024.

从 2015 年至 2024 年这 10 个冬季周期中随机抽取 3 个，共有 $C_{10}^{3}=120$ 种不同情形.

若恰有 2 个冬季周期中 $a=b$，则有 $C_4^2C_6^1=36$ 种不同情形；

若有 3 个冬季周期中 $a=b$，有 $C_4^3=4$ 种不同情形，

所以从 2015 年至 2024 年这 10 个冬季周期中随机抽取 3 个，至少有 2 个冬季周期中 $a=b$ 的概率为 $\frac{36+4}{120}=\frac{1}{3}$. ……………10 分

（Ⅲ） 答案示例 1：可以预测北京市 2026 年 1 月平均高温低于 4 摄氏度.

理由如下：北京市近 10 年 1 月平均高温有 9 年低于 4 摄氏度，故可以预测北京市 2026 年 1 月平均高温低于 4 摄氏度.

答案示例 2：无法预测北京市 2026 年 1 月平均高温低于 4 摄氏度.

理由如下：由于北京市 1 月平均高温受诸多因素影响，故仅依据图 2 中信息，无法预测北京市 2026 年 1 月平均高温低于 4 摄氏度. ……………13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得，$\begin{cases} b=1, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1. \end{cases}$ 所以 $a=2$.

因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $c=\sqrt{3}$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 焦距为 $2\sqrt{3}$. ……………5 分

（Ⅱ）由已知得，直线 BC 的斜率存在. 设直线 BC 的方程为 $y=kx+2$.

由 $\begin{cases} y=kx+2, \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$.

由 $\Delta=(16k)^2-4\times(4k^2+1)\times12=16(4k^2-3)>0$ ，得 $|k|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

设 $B(x_1,y_1),\ C(x_2,y_2)$ ，则 $x_1+x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+1}$ ， $x_1x_2=\dfrac{12}{4k^2+1}$.

直线 AB 的斜率为 $k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1}$ ，直线 AC 的斜率为 $k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2}$.

由已知 $k_1+k_2=\dfrac{2}{3}$ ，即 $\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{2}{3}$.

由 $\dfrac{kx_1+1}{x_1}+\dfrac{kx_2+1}{x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{2k\times\dfrac{12}{4k^2+1}+\dfrac{-16k}{4k^2+1}}{\dfrac{12}{4k^2+1}}=\dfrac{2k}{3}=\dfrac{2}{3}$,

解得 $k=1$.

所以直线 BC 的方程为 $y=x+2$, 点 A 到直线 BC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$|BC|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\left|-\dfrac{6}{5}-(-2)\right|=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

所以△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2}{5}$. ………………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $a>0$ ，所以 $x^2+ax>0$.

由 $f(x)=(x^2+ax)\ln x=0$ ，得 $\ln x=0$ ，解得 $x=1$.

所以 1 为 $f(x)$ 的零点. ………………3 分

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时， $f(x)=(x^2-x)\ln x$.

所以 $f'(x)=(2x-1)\ln x+x-1$.

（i）当 $x>1$ 时， $2x-1>1,\ \ln x>0,\ x-1>0$ ，

从而 $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时， $2x-1>0,\ \ln x<0,\ x-1<0$ ，

从而 $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递减.

当 x 变化时， $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

综上，1为 $f(x)$ 的极小值点. ………………7分

（ii）令 $g(x)=f'(x)=(2x-1)\ln x+x-1\,(x>0)$.

所以 $g'(x)=2\ln x+\frac{2x-1}{x}+1=2\ln x+3-\frac{1}{x}$.

因为 $y=2\ln x, y=3-\frac{1}{x}$ 均在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)=2\ln x+3-\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g'(1)=2>0, g'(\frac{1}{2})=1-2\ln 2<0$，

所以存在唯一 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $g'(x_0)=0$.

从而当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)$ 存在最小值 $g(x_0)=(2x_0-1)\ln x_0+x_0-1$

$$=(2x_0-1)\frac{\frac{1}{x_0}-3}{2}+x_0-1$$

$$=\frac{1}{2}[3-(4x_0+\frac{1}{x_0})]$$

因为 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，所以 $g(x_0)\in(-1,-\frac{1}{2})$.

因为 $g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$，$g(1)=0$，

所以当 $m\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率的取值范围为 $[g(x_0),0)$.

因为 $n\in(1,2)$，所以 $y=f(x)$ 在点 B 处的切线斜率的取值范围为 $(0,g(2))$.

因为 $g(2)=1+3\ln 2>1$，所以对于任意 $m\in(\frac{1}{2},1)$，均存在 $n\in(1,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(m, f(m))$ 处的切线斜率与在点 $B(n, f(n))$ 处的切线斜率互为相反数. ……………15分

（21）（共15分）

解：（Ⅰ）因为数列 $A:1,3,4,1$，所以 Ω 中的数列满足 $b_2\in\{-3,3,5\}$，$b_3\in\{-2,2,4\}$.

因为 $b_2<b_3$，所以 Ω 中所有满足 $b_2<b_3$ 的数列有

$1,3,4,1$；$1,-3,4,1$；$1,-3,2,1$；$1,-3,-2,1$. ……………4 分

（Ⅱ）假设存在满足条件的数列 A，

则满足 $\forall i\in\{2,3,\cdots,3m+1\}$，有 $a_i=a_{i+1}-a_{i-1}$,或$a_i=a_{i-1}-a_{i+1}$,或$a_i=a_{i-1}+a_{i+1}$.

所以 a_i 与 $a_{i-1}+a_{i+1}$ 同为奇数或同为偶数.

所以 $a_{i-1}+a_i+a_{i+1}$ 是偶数.

所以 $\sum\limits_{i=1}^{3m+2}a_i=a_1+\sum\limits_{i=2}^{3m+1}a_i+a_{3m+2}=2+\sum\limits_{i=2}^{3m+1}a_i$ 是偶数.

又 $\sum\limits_{i=1}^{3m+2}a_i=a_1+a_2+\sum\limits_{i=3}^{3m+2}a_i=3+\sum\limits_{i=3}^{3m+2}a_i$ 是奇数，矛盾.

所以假设不成立，不存在满足条件的数列 A. ……………9 分

（Ⅲ）当数列 A 是 Ω 的"恒元"时，

因为数列 A 中，$a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 是 $n-2$ 个连续正整数的一个排列，

所以当 $2\leqslant i<j\leqslant n-1$ 时，有 $a_i\neq a_j$，且至多一项为 1.

不妨记 $a_{n_0}=\max\{a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}\}=k$，所以 $a_{n_0-1}+a_{n_0+1}=k=a_{n_0}$，且 $k\geqslant 2$.

当 $k\leqslant 4$ 时，$n\leqslant 6$.

当 $n\geqslant 7$ 时，有 $k\geqslant 5$.

此时 $a_{n_0-2}=a_{n_0}-a_{n_0-1}=a_{n_0+1}$，或 $a_{n_0+2}=a_{n_0}-a_{n_0+1}=a_{n_0-1}$.

又 $a_1=a_n=1$，所以 $a_{n_0-2}=a_{n_0+1}=1$，$a_{n_0-1}=k-1$，或 $a_{n_0+2}=a_{n_0-1}=1$，$a_{n_0+1}=k-1$.

①当 $a_{n_0-2}=a_{n_0+1}=1$ 时，有 $n_0+1=n$，或 $n_0-2=1$，所以 $n_0=n-1$，或者 $n_0=3$.

当 $n_0=n-1$ 时，有 $a_{n-3}=1$，$a_{n-2}=k-1$，$a_{n-1}=k$，$a_n=1$，

所以 $a_{n-4}=a_{n-2}-a_{n-3}=k-2$，$a_{n-5}=a_{n-4}-a_{n-3}=k-3$，$a_{n-6}=a_{n-4}-a_{n-5}=1$.

因为 $a_{n-3}=1$，$a_n=1$，所以 $n-6=1$. 所以 $n=7$.

当 $n_0=3$ 时，有 $a_1=1$，$a_2=k-1$，$a_3=k$，$a_4=1$，所以 $n=4$（舍）.

②当 $a_{n_0-1}=a_{n_0+2}=1$ 时，有 $n_0-1=1$，或 $n_0+2=n$，所以 $n_0=2$，或者 $n_0=n-2$.

当 $n_0=2$ 时，有 $a_1=1$，$a_2=k$，$a_3=k-1$，$a_4=1$，

所以 $a_5=a_3-a_4=k-2$，$a_6=a_5-a_4=k-3$，$a_7=1$，

所以 $n=7$.

当 $n_0=n-2$ 时，有 $a_{n-3}=1$，$a_{n-2}=k$，$a_{n-1}=k-1$，$a_n=1$，

所以 $n-3=1$. 所以 $n=4$（舍）.

又由于数列 $A:1,2,3,1,4,5,1$ 和 $A:1,5,4,1,3,2,1$ 满足条件.

综上所述，$n_{\max}=7$. …………… 15 分