2024 北京西城高三二模
数　　学

2024.5

本试卷共 6 页， 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(\sqrt{3},-1)$，则 $z\cdot\bar{z}=$

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

（2）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(4,3)$， $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(10,-5)$，则

（A）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　（B）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

（C）$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$　　（D）$\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$

（3）已知集合 $A=\{-1,0,1\}$， $B=\{x\,|\,x>c\}$．若 $A\cap B=\{0,1\}$，则 c 的最小值是

（A）1　　（B）0

（C）-1　　（D）-2

（4）设 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=$

（A）-1　　（B）0

（C）1　　（D）2

（5）已知 $a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$．则“$ab>1$”是“$a^2+b^2>2$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知双曲线 $C:mx^2+ny^2=1$ 的焦点在 y 轴上，且 C 的离心率为 2，则

（A）$3m-n=0$　　（B）$m-3n=0$

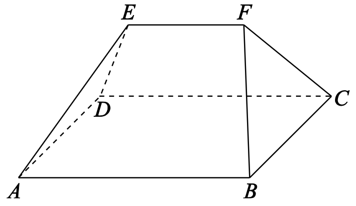
（C）$3m+n=0$　　（D）$m+3n=0$

（7）将函数 $f(x)=\tan x$ 的图象向右平移1个单位长度，所得图象再关于 y 轴对称，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

（A）$1-\tan x$　　（B）$-1-\tan x$

（C）$-\tan(x-1)$　　（D）$-\tan(x+1)$

（8）楔体形构件在建筑工程上有广泛的应用．如图，某楔体形构件可视为一个五面体 $ABCDEF$，其中面 $ABCD$ 为正方形．若 $AB=6\text{cm}$，$EF=3\text{cm}$，且 EF 与面 $ABCD$ 的距离为 2cm，则



该楔体形构件的体积为

（A）18cm^3　　（B）24cm^3

（C）30cm^3　　（D）48cm^3

（9）已知 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=3, S_2=\dfrac{3}{2}$．若对任意正整数 n，都有 $S_n-(-1)^n\cdot A>0$，则 A 的取值范围是

（A）$(-3,1)$　　（B）$[-2,1)$

（C）$(-3,\dfrac{3}{2})$　　（D）$[-2,\dfrac{3}{2})$

（10）一组学生站成一排．若任意相邻的 3 人中都至少有 2 名男生，且任意相邻的 5 人中都至多有 3 名男生，则这组学生人数的最大值是

（A）5　　（B）6

（C）7　　（D）8

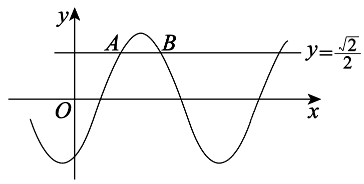
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{1+\log_3 x}$ 的定义域是_______．

（12）已知圆 C 经过点 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$，且与直线 $y=2$ 相切，则圆 C 的方程为_______．

（13）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$．直线 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点 A,B 如图所示．若 $|AB|=\dfrac{\pi}{4}$，且 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12})$ 上单调递减，则 $\omega=$_______；$\varphi=$_______．



（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<-2 \text{ 或 } x>1, \\ \sqrt{12-3x^2}, & -2\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ $g(x)=f(x)-a$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

① 若函数 $g(x)$ 无零点，则 a 的一个取值为_______；

② 若函数 $g(x)$ 有 4 个零点 x_i $(i=1,2,3,4)$，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$_______．

（15）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{16}{3}$，$a_n=\dfrac{3a_{n-1}+4}{-a_{n-1}+7}$ $(n=2,3,\cdots)$．给出下列三个结论：

① 存在正整数N，当$n\geqslant N$时，$a_n>2$；

② 存在正整数N，当$n\geqslant N$时，$a_n>a_{n-1}$；

③ 存在正整数N，当$n\geqslant N$时，$a_n>\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$．

其中所有正确结论的序号是_______．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

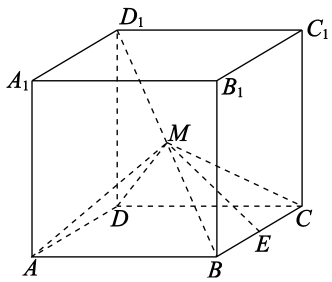
已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x+2\cos^2\dfrac{x}{2}$．在$\triangle ABC$中，$f(A)=f(B)$，且$a\neq b$．

（Ⅰ）求$\angle C$的大小；

（Ⅱ）若$c=5$，且$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长．

（17）（本小题 14 分）

如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E为BC的中点，点M在BD_1上．再从下列三个条件中选择一个作为已知，使点M唯一确定，并解答问题．



条件①：$MA=MC$；

条件②：$EM\perp AD$；

条件③：EM // 平面CDD_1C_1．

（Ⅰ）求证：M为BD_1的中点；

（Ⅱ）求直线EM与平面MCD所成角的大小，及点E到平面MCD的距离．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅰ）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

（18）（本小题 13 分）

为研究中国工业机器人产量和销量的变化规律，收集得到了 $2015-2023$ 年工业机器人的产量和销量数据，如下表所示．

年份	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
产量（万台）	3.3	7.2	13.1	14.8	18.7	23.7	36.6	44.3	43.0
销量（万台）	6.9	8.7	13.8	15.4	14.0	15.6	27.1	29.7	31.6

记 $2015-2023$ 年工业机器人产量的中位数为 a，销量的中位数为 b．定义产销率为"$\text{产销率}=\dfrac{\text{销量}}{\text{产量}}\times 100\%$"．

（Ⅰ）从 $2015-2023$ 年中随机取 1 年，求工业机器人的产销率大于 100% 的概率；

（Ⅱ）从 $2018-2023$ 年这 6 年中随机取 2 年，这 2 年中有 X 年工业机器人的产量不小于 a，有 Y 年工业机器人的销量不小于 b．记 $Z=X+Y$，求 Z 的分布列和数学期望 EZ；

（Ⅲ）从哪年开始的连续 5 年中随机取 1 年，工业机器人的产销率超过 70% 的概率最小．（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=4a\sin x+(a^2+1)x^2$，其中 $a\geqslant 0$．

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 上的最大值；

（Ⅲ）证明：$f(x)$ 有且只有一个极值点．

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个顶点为 $D(2,0)$，焦距为 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设点 P 是第一象限内椭圆 E 上一点，过 P 作 y 轴的垂线，垂足为 Q．点 P 关于原点的对称点为 A，直线 DQ 与椭圆的另一个交点为 B，直线 DP 与 y 轴的交点为 C．求证：A,B,C 三点共线．

（21）（本小题 15 分）

已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$，从 A 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_k 项（$i_1<i_2<\cdots<i_k$）构成数列 $B:a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$，$B$ 称为 A 的 k 项子列．记数列 B 的所有项的和为 $T(B)$．

当 $k\geqslant 2$ 时，若 B 满足：对任意 $s\in\{1,2,\cdots,k-1\}$，$i_{s+1}-i_s=1$，则称 B 具有性质 P．

规定：A 的任意一项都是 A 的 1 项子列，且具有性质 P．

（Ⅰ）当 $n=4$ 时，比较 A 的具有性质 P 的子列个数与不具有性质 P 的子列个数的大小，并说明理由；

（Ⅱ）已知数列 $A:1,2,3,\cdots,n\ (n\geqslant 2)$．

（ⅰ）给定正整数 $k\leqslant \dfrac{n}{2}$，对 A 的 k 项子列 B，求所有 $T(B)$ 的算术平均值；

（ⅱ）若 A 有 m 个不同的具有性质 P 的子列 $B_1,B_2,\cdots,B_m$，满足：$\forall\, 1\leqslant i<j\leqslant m$，$B_i$ 与 B_j 都有公共项，且公共项构成 A 的具有性质 P 的子列，求 m 的最大值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）B	（3）C	（4）B	（5）A
（6）C	（7）D	（8）C	（9）D	（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[\frac{1}{3},+\infty)$　　（12）$(x-1)^2+y^2=4$

（13）2　$-\frac{\pi}{3}$　　（14）-1（答案不唯一）　-2

（15）②③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sqrt{3}\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$

$=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+1$.　　………2 分

由 $f(A)=f(B)$，得 $\sin(A+\frac{\pi}{6})=\sin(B+\frac{\pi}{6})$.

在△ABC 中，因为 $A,B\in(0,\pi)$，

所以 $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，$B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$.　　………4 分

又 $a\neq b$，所以 $A\neq B$.

所以 $(A+\frac{\pi}{6})+(B+\frac{\pi}{6})=\pi$，即 $A+B=\frac{2\pi}{3}$.　　………5 分

所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$.　　………6 分

（Ⅱ）因为△ABC 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，　　………7 分

所以 $ab=8$.　　………8 分

在△ABC 中，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，　　………9 分

即 $25=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

整理得 $a^2+b^2-ab=25$.　　………10 分

所以 $(a+b)^2=25+3ab=49$.

所以 $a+b=7$.　　………12 分

故△ABC 的周长为 $a+b+c=12$.　　………13 分

（17）（共 14 分）

解：选条件②：$EM \perp AD$.

（Ⅰ）连接 CD_1. ·········1 分

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $BC \perp$ 平面 CDD_1C_1，

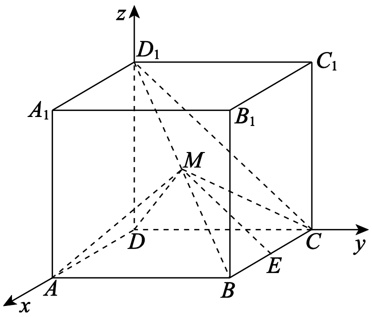
所以 $BC \perp CD_1$. ·········3 分

因为 $EM \perp AD$， $AD // BC$， 所以 $EM \perp BC$.

所以 $EM // CD_1$. ·········4 分

因为 E 为 BC 的中点，

所以 M 为 BD_1 的中点. ·········5 分



选择条件③：$EM //$ 平面 CDD_1C_1.

（Ⅰ）连接 CD_1. ·········1 分

因为 $EM //$ 平面 CDD_1C_1， $EM \subset$ 平面 BCD_1，平面 $BCD_1 \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = CD_1$.

所以 $EM // CD_1$. ·········4 分

因为 E 为 BC 的中点，

所以 M 为 BD_1 的中点. ·········5 分

（Ⅱ）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， DA, DC, DD_1 两两互相垂直，

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$. ·········6 分

则 $D(0,0,0)$， $C(0,2,0)$， $E(1,2,0)$， $M(1,1,1)$.

所以 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{DM}=(1,1,1)$， $\overrightarrow{EM}=(0,-1,1)$.

设平面 MCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=-1$. 于是 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$. ·········9 分

设直线 EM 与平面 MCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{EM}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EM}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{EM}|}=\dfrac{1}{2}$. ·········11 分

所以直线 EM 与平面 MCD 所成角的大小为 30°. ·········12 分

点 E 到平面 MCD 的距离为 $d=|\overrightarrow{EM}|\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ·········14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）记事件 A 为“工业机器人的产销率大于 100%”.

由表中数据，工业机器人的产销率大于 100% 的年份为 2015 年， 2016 年， 2017 年，

2018 年，共 4 年. ·········2 分

所以 $P(\mathrm{A})=\dfrac{4}{9}$. ·········3 分

（Ⅱ）因为 $a=18.7$， $b=15.4$， ………4 分

所以 X 的所有可能的取值为 $1,2$； Y 的所有可能的取值为 $1,2$.

所以 Z 的所有可能的取值为 $2,3,4$. ………5 分

$P(Z=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$， $P(Z=3)=\dfrac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$， $P(Z=4)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$. ………8 分

所以 Z 的分布列为：

Z	2	3	4
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{2}{5}$

故 Z 的数学期望 $EZ=2\times\dfrac{1}{15}+3\times\dfrac{8}{15}+4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{10}{3}$. ………10 分

（Ⅲ）2018 年和 2019 年. ………13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=4a\cos x+2(a^2+1)x$. ………2 分

由题设， $f'(0)=0$，解得 $a=0$. ………3 分

当 $a=0$ 时， $f(x)=x^2$.

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，适合题意.

所以 $a=0$. ………4 分

（Ⅱ）当 $a=1$ 时， $f(x)=4\sin x+2x^2$.

$f'(x)=4\cos x+4x=4(\cos x+x)$. ………6 分

因为 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ ，

所以 $-1\leqslant\cos x\leqslant 0$， $f'(x)=4(\cos x+x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 上单调递增. ………8 分

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(\pi)=2\pi^2$. ………9 分

（Ⅲ） $f'(x)=4a\cos x+2(a^2+1)x$.

当 $a=0$ 时， $f(x)=x^2$.

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 恰有一个极值点. ………10 分

当 $a>0$ 时，设 $g(x)=f'(x)$.

则 $g'(x)=-4a\sin x+2(a^2+1)=-4a(\sin x-\dfrac{a^2+1}{2a})$.

因为 $\dfrac{a^2+1}{2a}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2a}\geqslant 1$，且 $\sin x\leqslant 1$，

所以 $g'(x)\geqslant 0$，即 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. ………12 分

因为 $g(-\dfrac{\pi}{2})=-(a^2+1)\pi<0$， $g(0)=4a>0$，

所以存在 $x_0\in(-\frac{\pi}{2},0)$，使 $g(x_0)=f'(x_0)=0$．

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 恰有一个极值点.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 有且只有一个极值点. ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$\begin{cases} a=2, \\ 2c=2\sqrt{2}, \\ a^2-b^2=c^2. \end{cases}$ ………3 分

解得 $a^2=4, b^2=2$．

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$． ………4 分

（Ⅱ）设 $P(m,n)$，则 $Q(0,n)$，$A(-m,-n)$． ………5 分

其中 $m^2+2n^2=4$，$m>0,n>0$． ………6 分

直线 DP 的方程为 $y=\frac{n}{m-2}(x-2)$，所以 $C(0,\frac{-2n}{m-2})$． ………7 分

直线 DQ 的方程为 $y=-\frac{n}{2}(x-2)$．

由 $\begin{cases} y=-\frac{n}{2}(x-2), \\ x^2+2y^2=4, \end{cases}$ 得 $(n^2+2)x^2-4n^2x+4n^2-8=0$． ………8 分

设 $B(x_B,y_B)$，所以 $x_Bx_D=\frac{4n^2-8}{n^2+2}$． ………9 分

解得 $x_B=\frac{2n^2-4}{n^2+2}$．

由 $y_B=-\frac{n}{2}(x_B-2)=\frac{4n}{n^2+2}$，得 $B(\frac{2n^2-4}{n^2+2},\frac{4n}{n^2+2})$． ………10 分

由题意，点 A,B 均不在 y 轴上，所以直线 AC,BC 的斜率均存在，且

$$k_{AC}-k_{BC}=\frac{\frac{-2n}{m-2}+n}{m}-\frac{\frac{4n}{n^2+2}+\frac{2n}{m-2}}{\frac{2n^2-4}{n^2+2}}$$ ………11 分

$$=\frac{mn-4n}{m(m-2)}-\frac{4n(m-2)+2n(n^2+2)}{(2n^2-4)(m-2)}$$

$$=\frac{n}{m(m-2)(2n^2-4)}[(m-4)(2n^2-4)-2m(n^2+2m-2)]$$

$$=\frac{-4n}{m(m-2)(2n^2-4)}(2n^2+m^2-4)$$

$=0$． ………14 分

所以 A,B,C 三点共线. ………15 分

（21）（共 15 分）

解:（Ⅰ）当$n=4$时，A共有$2^4-1=15$个子列，　　　　………1 分

其中具有性质P的子列有$4+3+2+1=10$个，　　　　………2 分

故不具有性质P的子列有5个，　　　　………3 分

所以A的具有性质P的子列个数大于不具有性质P的子列个数．　　　　………4 分

（Ⅱ）（ⅰ）若$B:a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$是$A$的$k$ $(k\leqslant\frac{n}{2})$项子列，

则$B':n+1-a_{i_1},n+1-a_{i_2},\cdots,n+1-a_{i_k}$也是$A$的$k$ $(k\leqslant\frac{n}{2})$项子列．　　　　………5 分

所以$T(B)+T(B')=\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}+\sum_{j=1}^{k}(n+1-a_{i_j})=k(n+1)$．　　　　………7 分

因为给定正整数$k\leqslant\frac{n}{2}$，A有C_n^k个k项子列，

所以所有$T(B)$的算术平均值为$\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^k\cdot k(n+1)=\frac{k(n+1)}{2}$．　　　　………9 分

（ⅱ）设B_k $(k=1,2,\cdots,m)$的首项为x_k，末项为y_k，记$x_{k_0}=\max\{x_k\}$．

若存在$j=1,2,\cdots,m$，使$y_j<x_{k_0}$，则B_j与B_{k_0}没有公共项，与已知矛盾．

所以，对任意$j=1,2,\cdots,m$，都有$y_j\geqslant x_{k_0}$．　　　　………10 分

因为对于$k=1,2,\cdots,m$，$x_k\in\{1,2,\cdots,x_{k_0}\}$，$y_k\in\{x_{k_0},x_{k_0}+1,\cdots,n\}$，

所以共有$x_{k_0}(n+1-x_{k_0})$种不同的情况．

因为$B_1,B_2,\cdots,B_m$互不相同，

所以对于不同的子列B_i,B_j，$x_i=x_j$与$y_i=y_j$中至多一个等式成立．

所以$x_{k_0}(n+1-x_{k_0})\geqslant m$．　　　　………13 分

① 当n是奇数时，取$x_k\in\{1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}\}$，$y_k\in\{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\cdots,n\}$，

共有$\frac{n+1}{2}\cdot(n+1-\frac{n+1}{2})=\frac{(n+1)^2}{4}$个满足条件的子列．　　　　………14 分

② 当n是偶数时，取$x_k\in\{1,2,\cdots,\frac{n}{2}\}$，$y_k\in\{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1,\cdots,n\}$，

共有$\frac{n}{2}\cdot(n+1-\frac{n}{2})=\frac{n^2+2n}{4}$个满足条件的子列．　　　　………15 分

综上，n为奇数时，m的最大值为$\frac{(n+1)^2}{4}$；n为偶数时，m的最大值为$\frac{n^2+2n}{4}$．