2025 北京朝阳高三二模

数　　学

2025.5

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,x^2+x<0\}$，集合 $B=\{x\,|\,2^x\leqslant 1\}$，则集合 $A\cup B=$

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$(-\infty,-1)$

（C）$(-1,0)$　　（D）$(-1,0]$

（2）已知抛物线 $C:x^2=my\ (m\neq 0)$ 的焦点坐标为 $(0,-1)$，则抛物线 C 的准线方程为

（A）$x=2$　　（B）$x=1$　　（C）$y=2$　　（D）$y=1$

（3）已知 $a=\log_{0.5}0.2,\ b=0.5^{0.5},\ c=2^{0.5}$，则

（A）$a<b<c$　　（B）$a<c<b$　　（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

（4）已知 $(x^2+\dfrac{1}{x})^n$ 的展开式中,第 4 项和第 6 项的系数相等，则 $n=$

（A）7　　（B）8　　（C）9　　（D）10

（5）已知函数 $f(x)=|x|-|x-2|+1$，则对任意实数 x，有

（A）$f(1-x)=2-f(1+x)$　　（B）$f(-x)=-f(x)-2$

（C）$f(2-x)=2+f(x)$　　（D）$f(2+x)=f(2-x)$

（6）在矩形 $ABCD$ 中, $AB\perp AD$, $AD=2, AB=\sqrt{2}$，点 E 为线段 AD 的中点，BE 与 AC 交于点 F．设 $\overrightarrow{AF}=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2$（$k_1,k_2\in\mathbf{R}$），其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 分别是与 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 方向相同的单位向量，则

（A）$k_1=\dfrac{2}{3},k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　（B）$k_1=\dfrac{\sqrt{2}}{3},k_2=\dfrac{2}{3}$　（C）$k_1=\dfrac{1}{3},k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　（D）$k_1=\dfrac{1}{3},k_2=\dfrac{2}{3}$

（7）已知 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“$\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\tan\alpha=\sqrt{3}$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

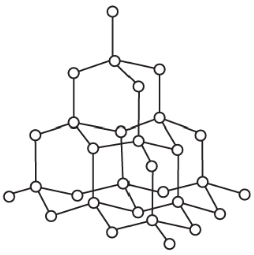
（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）已知函数 $f(x)=x-x^3$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(t,f(t))\ (t\in(0,1))$ 处的切线方程为 $y=g(x)$，设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，则

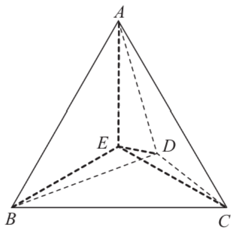
（A）当 $x>0$ 时，$h(x)>h(0)$　　（B）当 $x<0$ 时，$h(x)<h(0)$

（C）当 $x>0$ 时，$h(x)\leqslant 0$　　（D）当 $x<0$ 时，$h(x)\geqslant 0$

（9）金刚石是由碳元素组成的单质，具有极高的硬度，在工业中有广泛的应用．如图 1 所示，组成金刚石的每个碳原子都与其相邻的 4 个碳原子以完全相同的方式连接．从立体几何的角度，可以认为 4 个碳原子分布在一个正四面体的 4 个顶点 A,B,C,D 处，中间的碳原子处于与这 4 个碳原子距离都相等的位置（点 E 处），如图 2 所示，设 $AB=a$,则 E 到平面 ABD 的距离为



9 题图 1



9 题图 2

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$　　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{9}a$　　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{9}a$

（10）设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，定义 $\sigma_k=\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_k}{k}(k=1,2,3,\cdots)$，则

（A）当 $a_n=1$ 时，$\dfrac{\sigma_{2025}}{S_{2025}}<\dfrac{1}{2}$

（B）当 $a_n=(-1)^{n-1}$ 时，$\dfrac{\sigma_{2025}}{S_{2025}}<\dfrac{1}{2}$

（C）当 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 时，$\sigma_{2025}-S_{2025}>0$

（D）当 $a_n=(\dfrac{1}{2})^n$ 时，$\sigma_{2025}-S_{2025}>-\dfrac{1}{2025}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知复数 z 满足 $z\cdot \mathrm{i}=2+\mathrm{i}$，则 $|z|=$_________.

（12）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-8$，$a_5+a_6=8$，则 $a_3+a_4=$_________；设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则使 $S_n>0$ 的 n 的最小值为_________.

（13）在 $\triangle ABC$ 中，$a+c=2\sqrt{5}$，且 $\tan B=2$，则 $\sin B=$_________；$\triangle ABC$ 面积的最大值为_________.

（14）若直线 $y=\dfrac{1}{3}x$ 与双曲线 $C:y^2-\dfrac{x^2}{b^2}=1(b>0)$ 没有公共点，则双曲线 C 的离心率的一个取值为_________.

（15）设 $a>0$，过原点 O 的直线（不与 x 轴重合）与圆 $A:x^2+(y-a)^2=a^2$ 交于点 P，与直线 $y=2a$ 交于点 Q．过点 P 作 x 轴的平行线，过点 Q 作 x 轴的垂线，这两条直线交于点 $M(x,y)$，称 y 为 x 的箕舌线函数，记作 $y=f(x)$，给出下列四个结论：

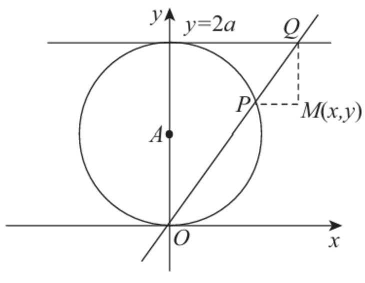
① 函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② 若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$；

③ 设函数 $h(x)=xf(x)$，则 $h(x)$ 的最大值为 $2a^2$；

④ 设函数 $g(x)=f(x)+x^2$，则 $g(x)$ 的最小值为 $2a$.

其中所有正确结论的序号是________.



15 题图

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x-\varphi)\ (0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，再从条件 ①、条件 ②、条件 ③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $g(x)$ 存在且唯一，求 $g(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{2\pi}{3}]$ 上的最大值和最小值.

条件 ①：$g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调递增；

条件 ②：$g(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$；

条件 ③：$g(x)$ 为偶函数.

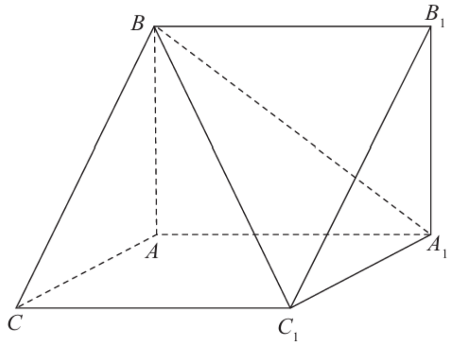
注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 $ABC\perp$ 侧面 ACC_1A_1，侧面 ACC_1A_1 是边长为 4 的菱形，$\angle A_1AC=120°$，$BC_1=5$，$AB=3$.

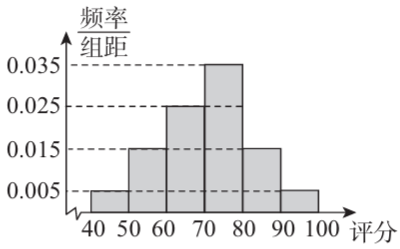
（Ⅰ）求证：侧面 ABB_1A_1 为矩形；

（Ⅱ）求直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

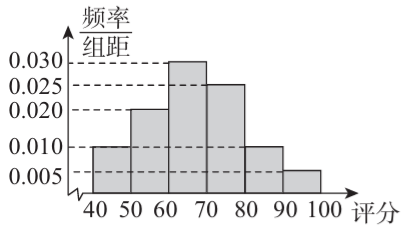


(18)（本小题 13 分）

某电商平台为了解用户对配送服务的满意度，分别从 A 地区和 B 地区随机抽取了 500 名和 100 名用户进行问卷评分调查，将评分数据按 $[40,50)$, $[50,60)$, $\cdots$, $[90,100]$ 分组整理得到如下频率分布直方图：



A地区



B地区

（Ⅰ）从 A 地区抽取的 500 名用户中随机抽取一名，求该用户评分不低于 60 分的概率；

（Ⅱ）从 B 地区评分为 $[80,100]$ 的样本中随机抽取两名，记评分不低于 90 分的用户人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）根据图中的样本数据，假如同组中每个数据用该组区间的中点值代替，设 A 地区评分的平均值估计为 μ_1，A、B 两地区评分的平均值估计为 μ，比较 μ_1 与 μ 的大小关系.

（直接写出结论）

(19)（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 2，且过点 $(0,\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx+2\,(k<0)$ 与椭圆 E 交于不同的两点 A,B，直线 $y=x$ 与直线 AB 交于点 N,若 $\angle AON=\angle BON$ (O 是坐标原点)，求 k 的值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x+1}{e^{x-1}}\ (a\geqslant 0)$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在单调递减区间，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_0)=1$，求 a 的值.

（21）（本小题 15 分）

已知 $\{a_n\}$ 是无穷正整数数列，且对任意的 $n\geqslant 3$， $a_{n+1}=\mathrm{card}\{k\mid a_k=a_n,k\in\{1,2,\cdots,n\}\}$，其中 $\mathrm{card}\,S$ 表示有穷集合 S 的元素个数.

（Ⅰ）若 $a_1=2,a_2=3,a_4=2$，求 a_5 的所有可能取值；

（Ⅱ）求证：数列 $\{a_n\}$ 中存在等于 1 的项；

（Ⅲ）求证：存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得集合 $\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_k=t\}$ 为无穷集合.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A	（2）D	（3）D	（4）B	（5）A
（6）B	（7）B	（8）C	（9）C	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\sqrt{5}$　　（12）0；7　　（13）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；$\sqrt{5}$

（14）3（答案不唯一）　　（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi]\,(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………… 6 分

（Ⅱ）选择条件①：

由题意得 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-2\varphi+\dfrac{\pi}{4})$.

由（Ⅰ）可知 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi+\varphi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi+\varphi](k\in\mathbf{Z})$.

由 $g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调递增得 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{8}+k\pi+\varphi\geqslant\dfrac{\pi}{4},\\ -\dfrac{3\pi}{8}+k\pi+\varphi\leqslant-\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$

解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{8}-k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{8}$.

从而 $g(x)=\sqrt{2}\sin 2x$ 存在且唯一.

当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$0\leqslant 2x\leqslant\dfrac{4\pi}{3}$，

所以当 $2x=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}$；

当 $2x=\frac{4\pi}{3}$，即 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$． ....13 分

选择条件③：

由题意得 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-2\varphi+\frac{\pi}{4})$．

由 $g(x)$ 为偶函数可知 $-2\varphi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\varphi=-\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$．

又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{8}$．

从而 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})=-\sqrt{2}\cos 2x$ 存在且唯一.

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$0\leqslant 2x\leqslant\frac{4\pi}{3}$，

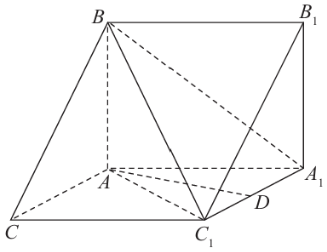
所以当 $2x=0$，即 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{2}$；

当 $2x=\pi$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $\sqrt{2}$． ....13 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）连接 AC_1，因为四边形 ACC_1A_1 为菱形，且 $\angle A_1AC=120°$，

所以 $\triangle ACC_1$ 为正三角形，从而 $AC_1=4$．



因为 $AB^2+AC_1^2=BC_1^2$，所以 $AB\perp AC_1$．

设 A_1C_1 中点为 D，连接 AD，则 $AD\perp A_1C_1$，

又 $AC\,//\,A_1C_1$，

所以 $AD\perp AC$．

因为底面 $ABC\perp$ 侧面 ACC_1A_1，

底面 $ABC\cap$ 侧面 $ACC_1A_1=AC$，

$AD\subset$ 侧面 ACC_1A_1，所以 $AD\perp$ 底面 ABC．

所以 $AD\perp AB$．

又 $AB\perp AC_1$，$AC_1\cap AD=A$，

所以 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1．

所以 $AB\perp AA_1$．

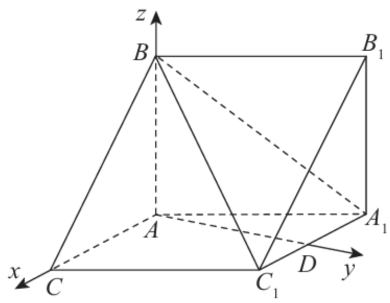
又因为侧面 ABB_1A_1 为平行四边形，

所以侧面 ABB_1A_1 为矩形． ....6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1，所以 $AB \perp AC$.

所以 AB, AC, AD 两两垂直.

如图，以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $A_1(-2, 2\sqrt{3}, 0), B(0,0,3), C(4,0,0), C_1(2, 2\sqrt{3}, 0)$.

所以 $\overrightarrow{A_1B} = (2, -2\sqrt{3}, 3), \overrightarrow{CC_1} = (-2, 2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CB} = (-4, 0, 3)$.

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x + 2\sqrt{3}y = 0, \\ -4x + 3z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 3$，则 $z = 4$，$y = \sqrt{3}$. 所以 $\boldsymbol{n} = (3, \sqrt{3}, 4)$.

设直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta = |\cos < \overrightarrow{A_1B}, \boldsymbol{n} >| = \dfrac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{12}{5 \times 2\sqrt{7}} = \dfrac{6\sqrt{7}}{35}$.

因此，直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{6\sqrt{7}}{35}$. ………………………………14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 M：

从 A 地区抽取的 500 名用户中随机抽取一名，该用户评分不低于 60 分.

由频率分布直方图可知 A 地区抽取的 500 名用户中评分不低于 60 分的人数为

$500 \times (0.025 + 0.035 + 0.015 + 0.005) \times 10 = 400$，

所以 $P(M) = \dfrac{400}{500} = 0.8$. ………………………………………………………………3 分

（Ⅱ）B 地区评分为 $[80,100]$ 的样本用户共有 $100 \times (0.01 + 0.005) \times 10 = 15$ 人，

其中评分不低于 90 分的人数为 5 人.

由题意可知，X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$.

$P(X=0) = \dfrac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \dfrac{3}{7}$，

$P(X=1) = \dfrac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{15}^2} = \dfrac{10}{21}$，

$P(X=2) = \dfrac{C_5^2}{C_{15}^2} = \dfrac{2}{21}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2

P	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$

则 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{3}{7}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{2}{21}=\frac{2}{3}$. ....10 分

（III）$\mu_1>\mu$. ....13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}b=\sqrt{3},\\2c=2,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\c=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ....5 分

（Ⅱ）由 $\begin{cases}y=kx+2,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$.

由 $\Delta=256k^2-4(3+4k^2)\times4>0$ 得 $k^2>\frac{1}{4}$.

又 $k<0$，所以 $k<-\frac{1}{2}$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-16k}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\frac{4}{3+4k^2}$.

不妨设点 A 在点 B 的上方，

因为 $\angle AON=\angle BON$,

又 $\angle AON<\frac{\pi}{4}$,

此时，直线 OB 的倾斜角为 $\alpha=\frac{\pi}{4}-\angle BON$,

直线 OA 的倾斜角为 $\beta=\frac{\pi}{4}+\angle AON$,

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

由题可知直线 OA 和 OB 的斜率都存在，分别设为 k_{OA} 和 k_{OB},

则 $k_{OA}\cdot k_{OB}=1$.

因为 $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}$， $k_{OB}=\frac{y_2}{x_2}$,

所以 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=1$，即 $x_1x_2=y_1y_2$.

由 $x_1x_2=(kx_1+2)(kx_2+2)$ 得 $(1-k^2)x_1x_2=2k(x_1+x_2)+4$.

所以 $(1-k^2)\frac{4}{3+4k^2}=2k\frac{-16k}{3+4k^2}+4$.

整理得 $k^2=\dfrac{2}{3}$.

又 $k<-\dfrac{1}{2}$，所以 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ....15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）若 $a=0$， $f(x)=\dfrac{1}{e^{x-1}}\ (x>0)$， $f'(x)=-\dfrac{1}{e^{x-1}}<0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(1)=1$. ....4 分

（Ⅱ） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $a=0$ 时， $f(x)=\dfrac{1}{e^{x-1}}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，符合题意.

当 $a>0$ 时， $f'(x)=\dfrac{\dfrac{a}{x}-a\ln x-1}{e^{x-1}}$，设 $g(x)=\dfrac{a}{x}-a\ln x-1$，

则 $g'(x)=-\dfrac{a(x+1)}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时， $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减.

① 若 $g(1)=a-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$时，当 $x\in(0,1)$ 时， $g(x)\geqslant 0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，不符合题意.

② 若 $g(1)=a-1<0$，即 $0<a<1$ 时， $g(a)=-a\ln a>0$，

所以存在唯一的 $t\in(a,1)$ 使得 $g(t)=0$.

当 $x\in(t,1)$ 时， $g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(t,1)$ 上单调递减，符合题意.

综上，a 的取值范围为 $[0,1)$. ....10 分

（Ⅲ）由题意得 $\begin{cases} f'(x_0)=0, \\ f(x_0)=1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=\dfrac{x_0}{1-x_0\ln x_0}, \\ \dfrac{a\ln x_0+1}{e^{x_0-1}}=1. \end{cases}$

所以 $\dfrac{1}{e^{x_0-1}(1-x_0\ln x_0)}=1$，即 $e^{x_0-1}(1-x_0\ln x_0)-1=0$ （*）.

设函数 $h(x)=e^{x-1}(1-x\ln x)-1$，

$h'(x)=e^{x-1}(1-x\ln x-1-\ln x)=-e^{x-1}(x+1)\ln x$.

当 $x\in(0,1)$ 时， $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $x=1$ 时， $h(x)$ 取得最大值 $h(1)$.

又 $h(1)=0$，所以 $h(x)\leqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

又（*）等价于 $h(x_0)=0$，所以 $x_0=1$．

所以 $a=\dfrac{x_0}{1-x_0\ln x_0}=1$．

经检验，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 存在极大值点 1 且 $f(1)=1$，符合题意．

所以 $a=1$．……………………………………………………………………………………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_4=2$，由题意得 $a_3=2$ 或 $a_3=3$．

当 $a_3=2$ 时，$a_5=3$；

当 $a_3=3$ 时，$a_5=2$．

所以 a_5 的所有可能取值为 2，3．…………………………………………………………4 分

（Ⅱ）假设 $\{a_n\}$ 中不存在等于 1 的项．

所以 $a_4\geqslant 2$．

又 $a_4\leqslant 3$，所以 $a_4\in\{2,3\}$．

当 $a_4=3$ 时，由 $a_5\neq 1$，则存在 $i\in\{1,2,3\}$，使得 $a_i=3$．

所以 $a_1=a_2=a_3=3$，$a_5=4$，$a_6=1$，矛盾．

当 $a_4=2$ 时，由 $a_5\neq 1$，则存在 $i\in\{1,2,3\}$，使得 $a_i=2$．

（1）若 a_1,a_2,a_3 中有两项为 2，一项为 3，

则 $a_5=3$，$a_6=2$，$a_7=4$，$a_8=1$，矛盾．

（2）若 a_1,a_2,a_3 中有两项为 2，一项为 $m\,(m\geqslant 4)$，

则 $a_5=3$，$a_6=1$，矛盾．

（3）若 a_1,a_2,a_3 中有一项为 2，两项为 3，

则 $a_5=2$，$a_6=3$，$a_7=3$，$a_8=4$，$a_9=1$，矛盾．

（4）若 a_1,a_2,a_3 中有一项为 2，两项为 $k\,(k\geqslant 4)$，

则 $a_5=2$，$a_6=3$，$a_7=1$，矛盾．

综上，假设不成立，所以 $\{a_n\}$ 中存在等于 1 的项．…………………………………………9 分

（Ⅲ）假设对任意 $t\in\mathbf{N}^*$，集合 $\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_k=t\}$ 均为有限集合．

当 $t=1$ 时，设 $\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_k=1\}$ 中的最大元素为 k_0，

则当 $n>k_0$ 时，$a_n\geqslant 2$．

令 $M=\max\{a_i\mid i\in\{1,2,\cdots,k_0\}\}$，下证当 $n>k_0$ 时，$a_n\leqslant M$．

否则假设 $n_0=\min\{n\in\mathbf{N}^*\mid a_n>M,n>k_0\}$，则 $a_{n_0+1}=1$，矛盾．

所以当 $n>k_0$ 时，$2\leqslant a_n\leqslant M$．

因为 $\{a_n\}$ 为无穷集合，

所以存在$l\in\{2,3,\cdots,M\}$，使得集合$\{n\in\mathbf{N}^*\mid a_n=l\}$为无穷集合，矛盾．

综上，假设不成立．

所以存在$t\in\mathbf{N}^*$，使得集合$\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_k=t\}$为无穷集合． ………………………………15 分