

2024 年北京市海淀区高三数学查漏补缺题选

- 说明：1. 可根据学生实际选用或改编；
2. 本练习题目目的是提醒学生 4 次统练未关注到的点，或重点知识，或变式的形式，学生不必全做；
3. 提供的答案仅供参考；
4. 老师们使用时，重点引导学生学会破题，提升学生思维的灵活性；
5. 部分题目选用自学校的练习题或高考题，再此表示感谢。

预祝同学们取得好成绩！

1. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $A + B = \frac{\pi}{3}$, $c = 3$, 若_____.

在横线上选择下面一个序号作为条件，求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 及 c 边上的高 h .

① $a - b = \sqrt{6}$; ② $a + b = \sqrt{10}$; ③ $\sin A \sin B = \frac{1}{12}$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sqrt{3} \sin A + \cos A = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$, $a = 2$, $b^2 > a^2 + c^2$. 求：

- (I) $\tan 2A$ 的值；
(II) c 和面积 S 的值。

3. 若 $\triangle ABC$ 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④中的三个，请选择一组这样的三个条件并解决下列问题：

- (I) 求边 a 的值；
(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

条件①: $a \cos A = b \sin A$;

条件②: $b = a + 2$;

条件③: $\sin C = \frac{1}{2}$;

条件④: $c^2 \cdot \cos C = -10\sqrt{3} - 12$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分。

* (有余力学生选用) 在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$.

- (1) 连接 BD ，从下列三个等式中再选择两个作为条件，剩余的一个作为结论，要求构成一个真命题，并给出证明：

① $AB + AD = 6$; ② $BD = \sqrt{3}AD$; ③ $AB = 4 \sin \angle ADB$

备选：连接 BD ，从上述三个等式中再选择两个作为条件，剩余的一个作为结论，构成一个命题，判断该命题的真假并给出证明；

- (2) 在(1)中真命题的条件下，求 $\triangle BCD$ 的周长的最大值；
- (3) 在(1)中真命题的条件下，连接 AC ，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

4. 如图，矩形 $ACFE$ ， $AE=1$ ， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB//CD$ ， $\angle BAD=90^\circ$ ， $AB=1$ ， $CD=2$ ，平面 ADF 与棱 BE 交于点 G . 再从条件①、条件②、条件③，这三个条件中选择一个作为已知.

(I) 求证： $AG//DF$ ；

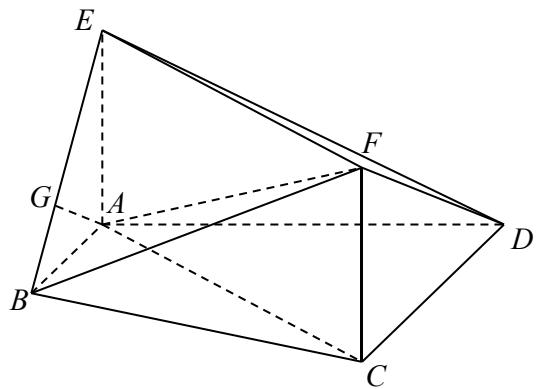
(II) 求直线 CF 与平面 ADF 夹角的正弦值；

(III) 求 $\frac{BG}{BE}$ 的值.

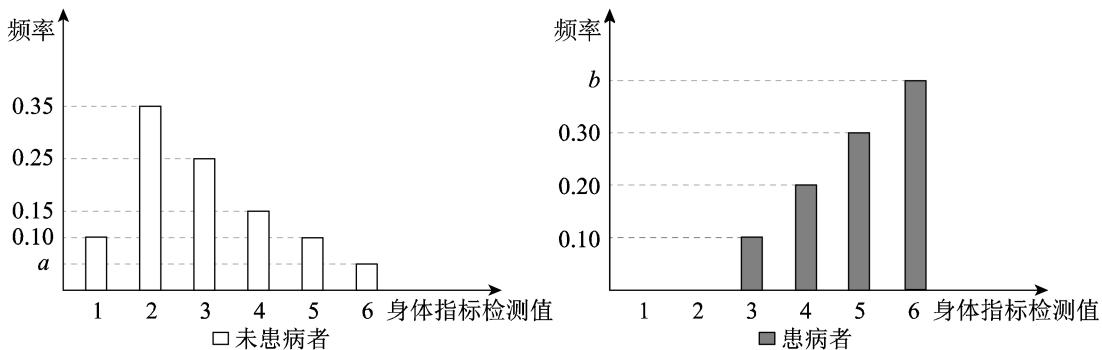
条件①： $AD=1$ ；

条件②： $AD=2$ ；

条件③： $AD=3$.



5. 在某地区，某项职业的从业者共约 8.5 万人，其中约 3.4 万人患有某种职业病. 为了解这种职业病与某项身体指标（检测值为不超过 6 的正整数）间的关系，依据是否患有职业病，使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者，记录他们该项身体指标的检测值，整理得到

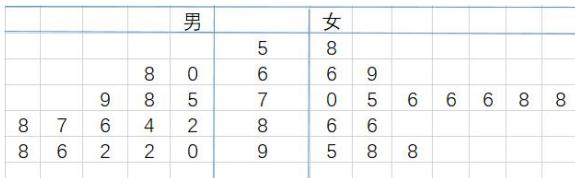


如下统计图：

- (I) 求样本中患病者的人数和图中 a , b 的值；
- (II) 在该指标检测值为 4 的样本中随机选取 2 人，求这 2 人中有患病者的概率；
- (III) 某研究机构提出，可以选取常数 $X_0 = n + 0.5$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，若一名从业者该项身体指标检测值大于 X_0 ，则判断其患有这种职业病；若检测值小于 X_0 ，则判断其未患有这种职业病. 从样本中随机选择一名从业者，按照这种方式判断其是否患有职业病. 写出使得判断错误的概率

率最小的 X_0 的值及相应的概率 (只需写出结论).

6. 为迎接 2022 年北京冬季奥运会, 普及冬奥知识, 某地区的学校联合开展了“冰雪答题王”冬奥知识竞赛活动. 现从参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机抽取了 30 名学生, 将他们的比赛成绩 (单位: 分) 用茎叶图记录如图:



(1) 求这组数据的中位数;

(2) 从选出的 15 名女生中随机抽取 2 人, 记其中测试成绩在 90 分以上的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 为便于普及冬奥知识, 现从每所小学参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机选取 m 个人作为冬奥宣传志愿者, 要求每所学校的志愿者中至少有 1 人的“冰雪答题王”的测试成绩在 80 分以上的概率大于 0.99. 根据图表中数据, 以频率作为概率, 给出 m 的最小值. (只需写出结论)

7. 已知函数 $f(x)=ax^2+(x^2-2x+2)e^x$.

(I) 证明: 不论 a 取何值, 曲线 $y=f(x)$ 均与一条定直线相切, 并求出该切线方程;

(II) 若 0 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 求 a 的取值范围;

(III) 曲线 $y=f(x)$ 是否存在两个不同的点关于 y 轴对称, 若存在, 请给出这两个点的坐标及此时 a 的值, 若不存在, 请说明理由.

8. 已知焦点在 x 轴上, 中心在原点, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆经过点 $M(1, \frac{1}{2})$, 动点 A, B (不与定点 M 重合) 均在椭圆上, 且直线 MA 与 MB 的斜率之和为 1, O 为坐标原点.

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 求证直线 AB 经过定点;

(III) 求 $\triangle ABO$ 的面积 S 的最大值.

9. 已知点 A, B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 点 A 在第一象限, O 为坐标原点, 且 $OA \perp AB$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 直线 OA 的方程为 $x - 3y = 0$, 求直线 OB 的斜率;

(2) 若 $\triangle OAB$ 是等腰三角形(点 O, A, B 按顺时针排列), 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.

数学查漏补缺题选

- 说明：1.可根据学生实际选用或改编；
2.本练习题目目的是提醒学生4次统练未关注到的点，或重点知识，或变式的形式，学生不必全做；
3.提供的答案仅供参考；
4.老师们使用时，重点引导学生学会破题，提升学生思维的灵活性；
5.部分题目选用自学校的练习题或高考题，再此表示感谢。

预祝同学们取得好成绩！

1. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $A + B = \frac{\pi}{3}$, $c = 3$, 若_____.

在横线上选择下面一个序号作为条件，求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 及 c 边上的高 h .

① $a - b = \sqrt{6}$; ② $a + b = \sqrt{10}$; ③ $\sin A \sin B = \frac{1}{12}$.

【参考答案】

解：由 $A + B = \frac{\pi}{3}$ 得 $C = \frac{2\pi}{3}$,

因为 $c = 3$,

所以由余弦定理，得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

对于①, $a - b = \sqrt{6}$, 由 $9 = a^2 + b^2 - ab = (a - b)^2 + 3ab$, 得 $ab = 1$,

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}ch,$$

$$\text{所以 } h = \frac{\sqrt{3}}{6};$$

对于②, $a + b = \sqrt{10}$, 由 $9 = a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - 3ab$, 得 $ab = 1$,

$$\text{对于③, } \sin A \sin B = \frac{1}{12}, \text{ 由 } \sin A \sin B = \frac{a \sin C}{c} \cdot \frac{b \sin C}{c} = \frac{1}{12}, \text{ 得 } ab = 1,$$

因此都可以用与①相同的方法求出 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 及 c 边上的高 h .

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sqrt{3} \sin A + \cos A = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$, $a = 2$, $b^2 > a^2 + c^2$. 求:

- (I) $\tan 2A$ 的值;
(II) c 和面积 S 的值.

【参考答案】

解: (I) 因为 $\sqrt{3} \sin A + \cos A = \sqrt{3}$,

所以 $2 \sin(A + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$,

即 $\sin(A + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0 < A < \pi$,

所以 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$,

所以 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 或 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$,

得 $A = \frac{\pi}{6}$ 或 $A = \frac{\pi}{2}$.

因为 $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$,

所以 $a < b$, A 不是最大角, 得 $A = \frac{\pi}{6}$,

所以 $\tan 2A = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

(II) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$.

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b^2 > a^2 + c^2$,

所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 0$,

所以 $\frac{\pi}{2} < B < \pi$,

所以 $B = \frac{2\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{6}$,

所以 $c = a = 2$, $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{3}$.

3. 若 $\triangle ABC$ 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④中的三个，请选择一组这样的三个条件并解决下列问题：

- (I) 求边 a 的值；
(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a \cos A = b \sin A$;

条件②: $b = a + 2$;

条件③: $\sin C = \frac{1}{2}$;

条件④: $c^2 \cdot \cos C = -10\sqrt{3} - 12$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

【参考答案】

解：因为 $a \cos A = b \sin A$ ，由正弦定理得， $\sin A \cos A = \sin B \sin A$

又因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $\sin A \neq 0$ ，

所以 $\cos A = \sin B$.

由于 $\sin B > 0$ ，所以 $\cos A > 0$ ，

又因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$.

当 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $\cos A \in (0, 1)$ ，

而 $\sin B \in (0, 1), B \in (0, \pi)$ 时， $\angle B$ 的取值最多两个.

当 $A \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时， $B = \frac{\pi}{2} - A$ 或 $B = A + \frac{\pi}{2}$ ，

此时， $C = \frac{\pi}{2}$ 或 $C = \frac{\pi}{2} - 2A \in (0, \frac{\pi}{2})$.

当 $A \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时，因为 $\frac{\pi}{2} - 2A \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ ，所以 $C = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\angle C$ 不可能为钝角.

由条件④知， $\cos C < 0$ ， $\angle C$ 为钝角，

所以条件①和条件④不能同时满足.

因此有两种情况的解答：

选择条件①②③

因为 $\angle C$ 不可能为钝角，

又因为 $\sin C = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle C = \frac{\pi}{6}$.

因为 $\cos A = \sin B$, 且 $\sin B = \sin(A + C)$,

所以 $\cos A = \sin(A + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A$

所以 $\frac{1}{2} \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A$,

即 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又因为 $A \in (0, \pi)$,

所以 $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \pi - A - C = \frac{2\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

所以 $a \sin B = b \sin A$,

又因为 $b = a + 2$, 所以 $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(a + 2)$.

所以 $a = \sqrt{3} + 1$, 又因为 $\angle A = \angle C$, 所以 $c = \sqrt{3} + 1$, $b = a + 2 = \sqrt{3} + 3$.

(II) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 3) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2} + \sqrt{3}$.

选择条件②③④

由条件④知, $\cos C < 0$, $\angle C$ 为钝角,

又因为 $\sin C = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle C = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\cos C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $c^2 \cdot \cos C = -10\sqrt{3} - 12$, 所以 $c^2 = 20 + 8\sqrt{3}$.

在中, 由余弦定理, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 得

$20 + 8\sqrt{3} = a^2 + (a + 2)^2 - 2a(a + 2)(-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

整理得 $a^2 + 2a - 8 = 0$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -4$ (舍).

(II) 此时 $b = a + 2 = 4$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为2.

* (有余力学生选用) 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$.

- (1) 连接 BD , 从下列三个等式中再选择两个作为条件, 剩余的一个作为结论, 要求构成一个真命题, 并给出证明;

① $AB + AD = 6$; ② $BD = \sqrt{3}AD$; ③ $AB = 4\sin \angle ADB$

备选: 连接 BD , 从上述三个等式中再选择两个作为条件, 剩余的一个作为结论, 构成一个命题, 判断该命题的真假并给出证明;

- (2) 在(1)中真命题的条件下, 求 $\triangle BCD$ 的周长的最大值;
(3) 在(1)中真命题的条件下, 连接 AC , 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

【参考答案】

- (1) ①② \Rightarrow ③为假命题, 证明如下:

在 $\triangle ABD$ 中, 因为 $BD = \sqrt{3}AD$, $\angle ABD = 30^\circ$,

由正弦定理, $\sin A = \sqrt{3} \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\angle A = 60^\circ$ 或 $\angle A = 120^\circ$.

当 $\angle A = 60^\circ$ 时, $\angle ADB = 90^\circ$,

所以 $AB = 2AD$,

又因为 $AB + AD = 6$,

所以 $AB = 4$, $AD = 2$.

此时 $\sin \angle ADB = 1$,

所以 $AB = 4\sin \angle ADB$ 成立.

当 $\angle A = 120^\circ$ 时, $\angle ABD = \angle ADB = 30^\circ$,

所以 $AB = AD$,

又因为 $AB + AD = 6$,

所以 $AB = AD = 3$.

此时 $\sin \angle ADB = \frac{1}{2}$,

$AB \neq 4\sin \angle ADB$.

综上①② \Rightarrow ③为假命题.

②③ \Rightarrow ①为假命题, 证明如下:

因为 $AB = 4\sin \angle ADB$, $\angle ABD = 30^\circ$,

所以 $AD = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \cdot \sin \angle ABD = 4 \times \frac{1}{2} = 2$,

所以 $BD = \sqrt{3}AD = 2\sqrt{3}$.

因为 $\frac{BD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin \angle ABD}$,

所以 $\sin A = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\angle A = 60^\circ$ 或 $\angle A = 120^\circ$.

当 $\angle A = 60^\circ$ 时, $\angle ADB = 90^\circ$

此时 $AB = 4$,

所以 $AB + AD = 6$.

当 $\angle A = 120^\circ$ 时, $\angle ADB = 30^\circ$,

此时 $AB = AD = 2$,

$AB + AD \neq 6$.

综上②③ \Rightarrow ①为假命题.

①③ \Rightarrow ②为真命题, 证明如下:

$$\text{由正弦定理: } \frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$$

$$\text{所以 } AD = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \cdot \sin \angle ABD = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

因为 $AB + AD = 6$,

所以 $AB = 4$,

所以 $\sin \angle ADB = 1$,

$\angle ADB = 90^\circ$

$$\text{所以 } BD = AB \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} = \sqrt{3}AD,$$

证毕.

(2) 由(1)知, $\triangle ABD$ 为直角三角形, 且 $AB = 4$, $BD = 2\sqrt{3}$, $AD = 2$,

$$\text{在} \triangle BCD \text{中, 由余弦定理: } \cos \angle BCD = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD},$$

$$\text{得 } -\frac{1}{2} = \frac{(BC + CD)^2 - 2BC \cdot CD - 12}{2 \cdot BC \cdot CD},$$

$$\text{整理得 } (BC + CD)^2 = BC \cdot CD + 12 \leq \left(\frac{BC + CD}{2}\right)^2 + 12,$$

$$\text{所以 } \frac{3}{4}(BC + CD)^2 \leq 12$$

所以 $BC + CD$ 的最大值为 4,

当且仅当 $BC = CD = 2$ 时上式等号成立.

所以 $\triangle BCD$ 的周长最大值为 $4 + 2\sqrt{3}$.

(3) 在(1)中真命题的条件下, $BD = 2\sqrt{3}$, $AB = 4$, $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{设 } BC = m, m \in (0, 2\sqrt{3}); \angle DBC = \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

在 $\triangle BCD$ 中，因为 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle BCD}$ ，即 $\frac{m}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$ ，可得 $m = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$$\begin{aligned}\text{所以}\triangle ABC\text{的面积 } S &= \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 4m \sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) \\ &= 8\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\end{aligned}$$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ，所以 $\frac{2\pi}{3}-2\alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$.

所以当 $\frac{2\pi}{3}-2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 时， $\triangle ABC$ 的面积取得最大值 4.

4. 如图，矩形 $ACFE$ ， $AE = 1$ ， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB // CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ， $CD = 2$ ，平面 ADF 与棱 BE 交于点 G . 再从条件①、条件②、条件③，这三个条件中选择一个作为已知.

(I) 求证: $AG // DF$;

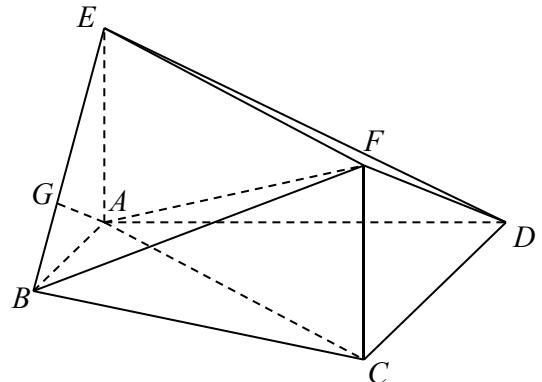
(II) 求直线 CF 与平面 ADF 夹角的正弦值;

(III) 求 $\frac{BG}{BE}$ 的值.

条件①: $AD = 1$;

条件②: $AD = 2$;

条件③: $AD = 3$.



【参考答案】

选择条件①

(I) 证明:

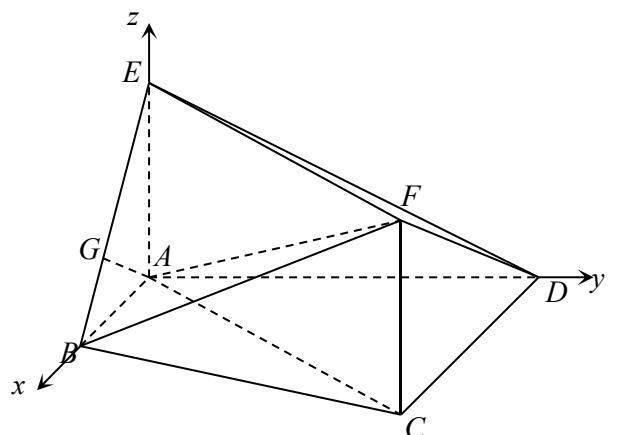
因为 $CD // AB$ ， $CF // AE$ ，且 $AB \cap AE = A$

又因为 $AB, AE \subset$ 平面 ABE ， $CD, CF \subset$ 平面 CDF

所以平面 $ABE //$ 平面 CDF

又因为 $DF \subset$ 平面 CDF ，所以 $DF //$ 平面 CDF

因为 $DF \subset$ 平面 ADF



平面 $ADF \cap$ 平面 $ABE = AG$

所以 $DF // AG$, 即 $AG // DF$

(II) 解:

因为 $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $AE \perp AB$, $AE \perp AD$. 又 $AB \perp AD$

如图, 以 A 为原点, 分别以 AB , AD , AE 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(2,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(2,1,1)$

所以 $\overrightarrow{CF} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{DF} = (2,0,1)$

设平面 ADF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{DF} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

不妨令 $x = 1$, 则 $y = 0$, $z = -2$

所以 $\mathbf{n} = (1, 0, -2)$

$$\cos < \overrightarrow{CF}, \mathbf{n} > = \frac{\overrightarrow{CF} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{CF}| \|\mathbf{n}\|} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

所以直线 CF 与平面 ADF 夹角的正弦值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(III) 设 $\overrightarrow{BG} = \lambda \overrightarrow{BE}$, $\lambda \in [0,1]$

则 $\overrightarrow{BG} = \lambda(-1,0,1) = (-\lambda, 0, \lambda)$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = (1,0,0) + (-\lambda, 0, \lambda) = (1-\lambda, 0, \lambda)$$

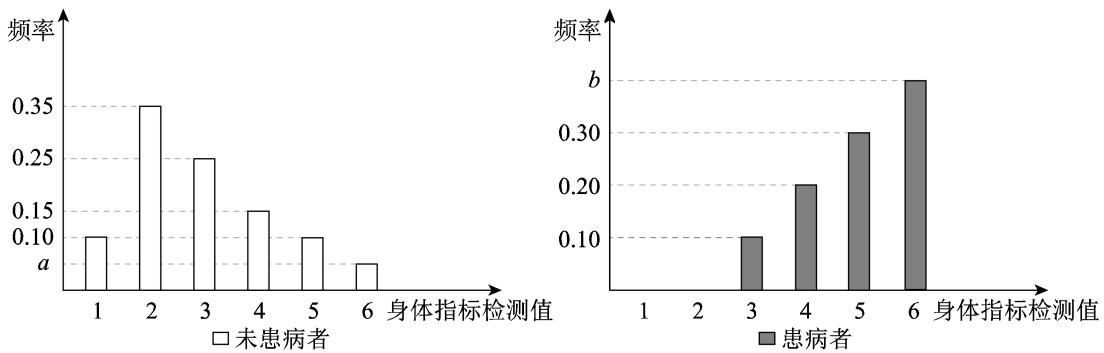
$$\text{又 } \overrightarrow{DF} = (2,0,1)$$

由 (I) 知 $AG // DF$, 所以 $\overrightarrow{AG} // \overrightarrow{DF}$

$$\text{所以 } \frac{1-\lambda}{2} = \frac{\lambda}{1}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{3} \in [0,1]$$

$$\text{所以 } \frac{BG}{BE} = \frac{1}{3}$$

5. 在某地区，某项职业的从业者共约 8.5 万人，其中约 3.4 万人患有某种职业病。为了解这种职业病与某项身体指标（检测值为不超过 6 的正整数）间的关系，依据是否患有职业病，使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者，记录他们该项身体指标的检测值，整理得到



如下统计图：

- (I) 求样本中患病者的人数和图中 a , b 的值；
- (II) 在该指标检测值为 4 的样本中随机选取 2 人，求这 2 人中有患病者的概率；
- (III) 某研究机构提出，可以选取常数 $X_0 = n + 0.5$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，若一名从业者该项身体指标检测值大于 X_0 ，则判断其患有这种职业病；若检测值小于 X_0 ，则判断其未患有这种职业病。从样本中随机选择一名从业者，按照这种方式判断其是否患有职业病。写出使得判断错误的概率最小的 X_0 的值及相应的概率（只需写出结论）。

【参考答案】

解：(I) 根据分层抽样原则，容量为 100 的样本中，患病者的人数为 $100 \times \frac{3.4}{8.5} = 40$ 人。

$$a = 1 - 0.10 - 0.35 - 0.25 - 0.15 - 0.10 = 0.05,$$

$$b = 1 - 0.10 - 0.20 - 0.30 = 0.40.$$

(II) 指标检测数据为 4 的样本中，

有患病者 $40 \times 0.20 = 8$ 人，未患病者 $60 \times 0.15 = 9$ 人。

设事件 A 为“从中随机选择 2 人，其中有患病者”。

$$\text{则 } P(\bar{A}) = \frac{C_9^2}{C_{17}^2} = \frac{9}{34},$$

$$\text{所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{25}{34}.$$

(III) 使得判断错误的概率最小的 $X_0 = 4.5$ 。

当 $X_0 = 4.5$ 时，判断错误的概率为 $\frac{21}{100}$ 。

6. 为迎接 2022 年北京冬季奥运会，普及冬奥知识，某地区的小学学校联合开展了“冰雪答题王”冬奥知识竞赛活动。现从参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机抽取了 30 名学生，将他们的比赛成绩（单位：分）用茎叶图记录如图：

男		女					
		5	8				
	8 0	6	6 9				
9 8 5		7	0 5 6	6 6 8 8			
8 7 6 4 2		8	6 6				
8 6 2 2 0		9	5 8 8				

- (1) 求这组数据的中位数；
- (2) 从选出的 15 名女生中随机抽取 2 人，记其中测试成绩在 90 分以上的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；
- (3) 为便于普及冬奥知识，现从每所小学参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机选取 m 个人作为冬奥宣传志愿者，要求每所学校的志愿者中至少有 1 人的“冰雪答题王”的测试成绩在 80 分以上的概率大于 0.99。根据图表中数据，以频率作为概率，给出 m 的最小值。（只需写出结论）

【参考答案】

(1) 将 30 个数字从小到大排序：58, 60, 66, 68, 69, 70, 75, 75, 76, 76, 76, 78, 78, 79, 82, 84, 86, 86, 86, 87, 88, 90, 92, 92, 95, 96, 98, 98, 98. 则中位数是 $\frac{79+82}{2}=80.5$ 。

(2) 选出的 15 名女生中 90 分以上的有 3 人，则 X 的取值范围为 {0, 1, 2}。

$$P(X=0)=\frac{C_{12}^2 C_3^0}{C_{15}^2}=\frac{22}{35} \quad P(X=1)=\frac{C_{12}^1 C_3^1}{C_{15}^2}=\frac{12}{35} \quad P(X=2)=\frac{C_{12}^0 C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{1}{35}$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$X \text{ 的数学期望 } E(X)=0 \times \frac{22}{35}+1 \times \frac{12}{35}+2 \times \frac{1}{35}=\frac{2}{5}.$$

(3) m 的最小值为 7。

根据图表中数据，30 人中有 15 人的成绩在 80 分以上，由频率估计概率，随机抽取 1 人，

该人成绩在 80 分以上的概率为 $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ 。

设每所学校的志愿者中至少有 1 人的“冰雪答题王”的测试成绩在 80 分以上为事件 A。

则 $P(A)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^m>0.99$ ，则 $m \geq 7$ 。故 m 的最小值为 7。

7. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (x^2 - 2x + 2)e^x$.

(I) 证明: 不论 a 取何值, 曲线 $y = f(x)$ 均与一条定直线相切, 并求出该切线方程;

(II) 若 0 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 求 a 的取值范围;

(III) 曲线 $y = f(x)$ 是否存在两个不同的点关于 y 轴对称, 若存在, 请给出这两个点的坐标及此时 a 的值, 若不存在, 请说明理由.

【参考答案】

解: (I) $f'(x) = 2ax + (x^2 - 2x + 2 + 2x - 2)e^x = 2ax + x^2 e^x$

易得 $f'(0) = 0, f(0) = 2$ 均与 a 无关,

所以不论 a 取何值, 曲线 $y = f(x)$ 都与定直线 $y = 2$ 相切.

(II) $f'(x) = 2ax + x^2 e^x = x(2a + xe^x)$

设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x$,

当 $x \geq -1$ 时 $g'(x) \geq 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(0) = 0$.

① 当 $a = 0$ 时 $f'(x) = x^2 e^x \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 无极值, 不符;

② 当 $a < 0$ 时, 由函数 $g(x)$ 的性质可知:

存在 $x_1 > 0$, 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$,

函数 $f(x)$ 单调递减, 与 0 为函数 $f(x)$ 的极小值点矛盾, 不符;

③ 当 $a > 0$ 时, 由函数 $g(x)$ 的性质可知:

存在 $x_2 < 0$, 当 $x \in (x_2, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

又因为当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 0 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 符合.

综上有 $a \in (0, +\infty)$.

(III) 不存在, 理由如下:

设 $h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, 由(II)可知函数 $h(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

假设曲线 $y = f(x)$ 存在两个不同的点关于 y 轴对称,

设其坐标分别为 $(x_0, y_0), (-x_0, y_0)$, 其中 $x_0 \neq 0$.

由 $f(x_0) = f(-x_0)$ 得: $h(x_0) = h(-x_0)$,

与 $h(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增矛盾,

所以曲线 $y = f(x)$ 不存在两个不同的点关于 y 轴对称.

8. 已知焦点在 x 轴上, 中心在原点, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆经过点 $M(1, \frac{1}{2})$, 动点 A, B (不与

定点 M 重合) 均在椭圆上, 且直线 MA 与 MB 的斜率之和为 1, O 为坐标原点.

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 求证直线 AB 经过定点;

(III) 求 $\triangle ABO$ 的面积 S 的最大值.

【参考答案】

解: (I) 设椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

可知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又因为 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $a^2 = 4b^2$.

由定点 $M(1, \frac{1}{2})$ 在椭圆上可得 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$, 故 $b^2 = \frac{1}{2}$, $a^2 = 2$.

所以椭圆 G 的方程为 $x^2 + 4y^2 = 2$.

(II) 当直线 AB 与 x 轴垂直时, 设 $A(s, t) (s \neq 1)$, 则 $B(s, -t)$. 由题意得: $\frac{t - 1}{s - 1} + \frac{-t - 1}{s - 1} = 1$,

即 $s = 0$. 所以 直线 AB 的方程为 $x = 0$.

当直线 AB 不与 x 轴垂直时, 可设直线 AB 为 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

将 $y = kx + m$ 代入 $x^2 + 4y^2 = 2$ 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 2 = 0$.

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{4m^2 - 2}{1 + 4k^2}$.

由直线 MA 与 MB 的斜率之和为 1 可得 $\frac{y_1 - \frac{1}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{1}{2}}{x_2 - 1} = 1$ ①,

将 $y_1 = kx_1 + m$ 和 $y_2 = kx_2 + m$ 代入 ①,

并整理得 $(2k-1)x_1x_2 + (m-k+\frac{1}{2})(x_1+x_2) - 2m = 0$ ②,

将 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{4m^2 - 2}{1+4k^2}$ 代入 ②

并整理得 $2km + 2m^2 + 2k + m - 1 = 0$,

分解因式可得 $(2k + 2m + 1)(m + 1) = 0$,

因为直线 AB : $y = kx + m$ 不经过点 $M(1, \frac{1}{2})$, 所以 $2k + 2m + 1 \neq 0$, 故 $m = -1$.

所以直线 AB 的方程为 $y = kx - 1$, 经过定点 $(0, -1)$.

综上所述, 直线 AB 经过定点 $(0, -1)$.

(III) 由 (II) 可得: $\Delta = 32k^2 - 8 > 0$, $k^2 > \frac{1}{4}$.

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{4k^2 - 1}}{4k^2 + 1}.$$

因为 坐标原点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $\triangle ABO$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4k^2 - 1}}{4k^2 + 1}$ ($k^2 > \frac{1}{4}$).

令 $\sqrt{4k^2 - 1} = t$, 则 $t > 0$, 且 $S = \frac{\sqrt{2}t}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{t + \frac{2}{t}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $t = \sqrt{2}$, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $\triangle ABO$ 的面积 S 取得最大值 $\frac{1}{2}$.

9. 已知点 A , B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上, 点 A 在第一象限, O 为坐标原点, 且 $OA \perp AB$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 直线 OA 的方程为 $x - 3y = 0$, 求直线 OB 的斜率;

(2) 若 $\triangle OAB$ 是等腰三角形(点 O , A , B 按顺时针排列), 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.

【参考答案】

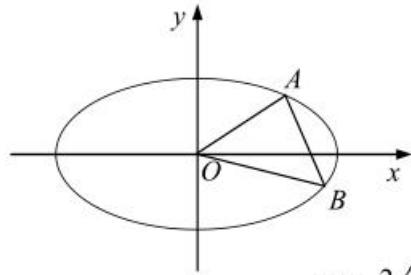
解: (1) 由 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 得椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \\ x - 3y = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

因为点 A 在第一象限, 所以 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

又 $OA \perp AB$,

所以直线 AB 的方程为 $y - \frac{1}{2} = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)$, 即 $3x + y - 5 = 0$.



$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \\ 3x + y - 5 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{12}{7}, \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } B\left(\frac{12}{7}, -\frac{1}{7}\right),$$

所以直线 OB 的斜率为 $k_{OB} = \frac{-\frac{1}{7}}{\frac{12}{7}} = -\frac{1}{12}$.

(2) 法 1: 设直线 OA 的斜率为 $k(k > 0)$, 则直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

因为 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形(点 O, A, B 按顺时针排列),

所以设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), (x_1 > 0, y_1 > 0, x_1 < x_2)$.

又 $OA = AB$, 所以 $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

$$\text{得 } \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1| = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2} |x_1 - x_2|.$$

所以 $y_1 = x_2 - x_1$, 即 $x_2 = x_1 + y_1$.

又由 $OA \perp AB$, 得 $\frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$, 所以 $y_2 = y_1 - x_1$.

因为点 $A(x_1, y_1), B(x_1 + y_1, y_1 - x_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{(x_1 + y_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - x_1)^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 所以 } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{(x_1 + y_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - x_1)^2}{b^2}.$$

$$\text{整理得 } b^2 \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - 2(a^2 - b^2) \frac{y_1}{x_1} + a^2 = 0.$$

所以 $\Delta = 4(a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2 \neq 0$, 即 $(a^2 - b^2 + ab)(a^2 - b^2 - ab) \neq 0$.

因为 $a^2 - b^2 + ab > 0$,

所以 $a^2 - b^2 - ab \neq 0$, 即 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

当 $k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2(a^2 - b^2)}{2b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时, $\frac{b}{a}$ 取最大值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

法 2: 设直线 OA 的斜率为 $k(k > 0)$, 倾斜角为 $\theta(0^\circ < \theta < 90^\circ)$.

因为 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形(点 O, A, B 按顺时针排列), 且 $OA \perp AB$,

所以直线 OB 的斜率为 $k_{OB} = \tan(\theta - 45^\circ)$ 或 $k_{OB} = \tan(\theta + 135^\circ)$.

$$\text{所以 } k_{OB} = \frac{k-1}{1+k}.$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $(x_1 > 0, y_1 > 0, x_1 < x_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 得 } x_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{k-1}{1+k}x, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 得 } x_2^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \left(\frac{k-1}{1+k}\right)^2} = \frac{a^2 b^2 (1+k)^2}{b^2 (1+k)^2 + a^2 (1-k)^2}.$$

$$\text{又 } OB = \sqrt{2}OA, \text{ 所以 } 2OA^2 = OB^2, \text{ 得 } 2(1+k^2)x_1^2 = \left[1 + \left(\frac{k-1}{1+k}\right)^2\right]x_2^2,$$

$$2(1+k^2) \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2} = \left[1 + \left(\frac{k-1}{1+k}\right)^2\right] \frac{a^2 b^2 (1+k)^2}{b^2 (1+k)^2 + a^2 (1-k)^2}.$$

$$\text{整理得 } b^2 k^2 + 2(b^2 - a^2)k + a^2 = 0,$$

$$\text{所以 } \Delta = 4(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \neq 0, \text{ 即 } (a^2 - b^2)^2 - a^2 b^2 \neq 0,$$

$$\text{所以 } (a^2 - b^2 + ab)(a^2 - b^2 - ab) \neq 0.$$

$$\text{因为 } a^2 - b^2 + ab > 0,$$

$$\text{所以 } a^2 - b^2 - ab \neq 0, \text{ 即 } \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 \neq 0,$$

$$\text{所以 } \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{当 } k = -\frac{2(b^2 - a^2)}{2b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 时, } \frac{b}{a} \text{ 取最大值 } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$