2023 北京高考真题

数　　学

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $M=\{x\mid x+2\geqslant 0\}$，$N=\{x\mid x-1<0\}$，则 $M\cap N=$

（A）$\{x\mid -2\leqslant x<1\}$　　（B）$\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$

（C）$\{x\mid x\geqslant -2\}$　　（D）$\{x\mid x<1\}$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

（A）$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（B）$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

（C）$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　（D）$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

（3）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,1)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=$

（A）-2　　（B）-1

（C）0　　（D）1

（4）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$f(x)=-\ln x$　　（B）$f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

（C）$f(x)=-\dfrac{1}{x}$　　（D）$f(x)=3^{|x-1|}$

（5）在 $(2x-\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为

（A）-40　　（B）40

（C）-80　　（D）80

（6）已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上．若 M 到直线 $x=-3$ 的距离为 5，则 $|MF|=$

（A）7　　（B）6

（C）5　　（D）4

（7）在 $\triangle ABC$ 中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则 $\angle C=$

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$

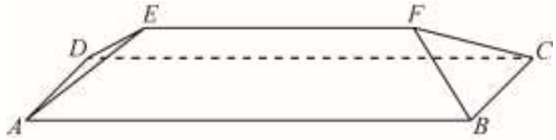
（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

（8）若 $xy\neq 0$，则“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$ ”的

（A）充分不必要条件　　　　　　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（9）坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素．安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若 $AB=25\text{ m}$， $BC=10\text{ m}$，且等腰梯形所在平面、等腰三角形所在平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为



（A）102 m　　　　　　　　　　　（B）112 m

（C）117 m　　　　　　　　　　　（D）125 m

（10）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6\ (n=1,2,3,\cdots)$，则

（A）当 $a_1=3$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，$\exists M\in R$，使得 $n>m$ 时， $a_n>M$ 恒成立

（B）当 $a_1=5$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，$\exists M\leq 6$，使得 $n>m$ 时， $a_n<M$ 恒成立

（C）当 $a_1=7$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，$\exists M>6$，使得 $n>m$ 时， $a_n>M$ 恒成立

（D）当 $a_1=9$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，$\exists M\in R$，使得 $n>m$ 时， $a_n<M$ 恒成立

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$，则 $f(\frac{1}{2})=$_______.

（12）已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$，离心率为 $\sqrt{2}$，则 C 的方程为_______.

（13）已知命题 p：若 α,β 为第一象限角，且 $\alpha>\beta$，则 $\tan\alpha>\tan\beta$．能说明 p 为假命题的一组 α,β 的值为 $\alpha=$_______， $\beta=$_______.

（14）我国度量衡的发展有着悠久的历史，战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”．已知 9 枚环权的质量（单位：铢）从小到大构成项数为 9 的数列 $\{a_n\}$，该数列的前 3 项成等差数列，后 7 项成等比数列，且 $a_1=1$， $a_5=12$， $a_9=192$，则 $a_7=$_______；数列 $\{a_n\}$ 所有项的和为_______.

（15）设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-a, \\ \sqrt{a^2-x^2}, & -a\leqslant x\leqslant a, \\ -\sqrt{x}-1, & x>a. \end{cases}$ 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a\geqslant 1$ 时， $f(x)$ 存在最大值；

③ 设 $M(x_1, f(x_1))$ $(x_1 \leqslant a)$， $N(x_2, f(x_2))$ $(x_2 > a)$，则 $|MN| > 1$；

④ 设 $P(x_3, f(x_3))$ $(x_3 < -a)$， $Q(x_4, f(x_4))$ $(x_4 \geqslant -a)$．若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}]$．

其中所有正确结论的序号是_______.

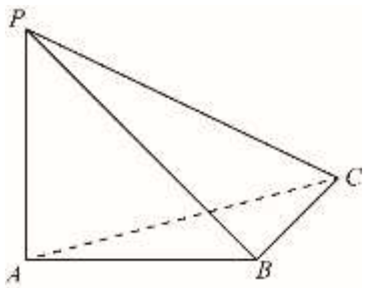
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC， $PA = AB = BC = 1$， $PC = \sqrt{3}$．

（Ⅰ）求证： $BC \perp$ 平面 PAB；

（Ⅱ）求二面角 $A-PC-B$ 的大小．



（17）（本小题 13 分）

设函数 $f(x) = \sin\omega x\cos\varphi + \cos\omega x\sin\varphi$ $(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$．

（Ⅰ）若 $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ 的值；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增， $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$，再从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 ω, φ 的值．

条件 ①： $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$；

条件 ②： $f(-\frac{\pi}{3}) = -1$；

条件 ③： $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减．

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

（18）（本小题 13 分）

为研究某种农产品价格变化的规律，收集得到了该农产品连续 40 天的价格变化数据，如下表所示．在描述价格变化时，用“＋”表示“上涨”，即当天价格比前一天价格高；用“－”表示“下跌”，即当天价格比前一天价格低；用“0”表示“不变”，即当天价格与前一天价格相同．

时　段	价格变化
第 1 天到第 20 天	－ ＋ ＋ 0 － － － ＋ ＋ 0 ＋ 0 － － ＋ － ＋ 0 0 ＋
第 21 天到第 40 天	0 ＋ ＋ 0 － － － ＋ ＋ 0 ＋ 0 ＋ － － － ＋ 0 － ＋

用频率估计概率．

（Ⅰ）试估计该农产品价格“上涨”的概率；

（Ⅱ）假设该农产品每天的价格变化是相互独立的．在未来的日子里任取 4 天，试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率；

（Ⅲ）假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响．判断第 41 天该农产品价格“上涨”、“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大．（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$， A, C 分别是 E 的上、下顶点， B, D 分别是 E 的左、右顶点，$|AC|=4$．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设 P 为第一象限内 E 上的动点，直线 PD 与直线 BC 交于点 M，直线 PA 与直线 $y=-2$ 交于点 N．求证：$MN \,//\, CD$．

（20）（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=x-x^3\mathrm{e}^{ax+b}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$．

（Ⅰ）求 a, b 的值；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）求 $f(x)$ 的极值点个数．

（21）（本小题 15 分）

已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的项数均为 $m(m>2)$，且 $a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n,B_n，并规定 $A_0=B_0=0$．对于 $k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，定义

$$r_k=\max\{i\mid B_i\leqslant A_k, i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\},$$

其中，$\max M$ 表示数集 M 中最大的数.

（Ⅰ）若 $a_1=2,a_2=1,a_3=3$，$b_1=1,b_2=3,b_3=3$，写出 r_0,r_1,r_2,r_3 的值；

（Ⅱ）若 $a_1\geqslant b_1$，且 $2r_j\leqslant r_{j+1}+r_{j-1}$，$j=1,2,\cdots,m-1$，求 r_n；

（Ⅲ）证明：存在 $p,q,s,t\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，满足 $p>q,s>t$，使得 $A_p+B_t=A_q+B_s$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　（2）D　（3）B　（4）C　（5）D

（6）D　（7）B　（8）C　（9）C　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）1　　（12）$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

（13）$\frac{13\pi}{6}$　$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）　（14）48　384

（15）②③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）如图，因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AC$，$PA\perp BC$．

在 Rt△PAC 中，$AC=\sqrt{PC^2-PA^2}=\sqrt{2}$．

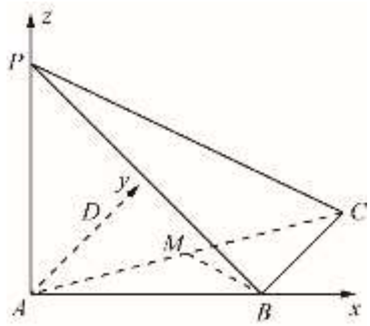
在△ABC 中，因为 $AB=BC=1$，所以 $AC^2=AB^2+BC^2$．

因此 $\angle ABC=90^\circ$，即 $BC\perp AB$．

又 $BC\perp PA$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB．

（Ⅱ）过 A 作 BC 的平行线 AD，由（Ⅰ）可知 $AD\perp$ 平面 PAB．

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,0,1)$．

因此 $\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$．

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}y=0,\\ x-z=0.\end{cases}$$

令 $x=1$，则 $z=1$．于是 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$．

设 AC 的中点为 M，则 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$．

连接 MB．因为 $AB=BC$，所以 $MB\perp AC$．

因为 $PA\perp$ 平面 ABC，且 $MB\subset$ 平面 ABC，所以 $MB\perp PA$．

所以 $MB\perp$ 平面 PAC．因此 $\overrightarrow{MB}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$ 是平面 PAC 的法向量．

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$．

由题知二面角 $A-PC-B$ 为锐角，所以其大小为 60° .

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi$ ，所以 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$.

由 $f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，得 $\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）选择条件②： $f(-\dfrac{\pi}{3})=-1$.

因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ，所以 $f(x)$ 的最小值为 -1 ，最大值为 1 ，

又因为 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，且 $f(-\dfrac{\pi}{3})=-1$ ， $f(\dfrac{2\pi}{3})=1$ ，

所以由三角函数的性质得 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\pi$ ，故 $T=2\pi$.

因为 $\omega>0$ ，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$ ， $f(x)=\sin(x+\varphi)$.

由 $\sin(-\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=-1$ ，得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

选择条件③： $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ，所以 $f(x)$ 的最小值为 -1 ，最大值为 1 .

由题意得 $f(-\dfrac{\pi}{3})=-1$ ，又因为 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，且 $f(\dfrac{2\pi}{3})=1$ ，

所以由三角函数的性质得 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\pi$ ，故 $T=2\pi$.

因为 $\omega>0$ ，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$ ， $f(x)=\sin(x+\varphi)$.

由 $\sin(-\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=-1$ ，得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）根据题中数据，该农产品价格在 40 天中有 16 天“上涨”，所以该农产品价格“上涨”的概率可以估计为 $\dfrac{16}{40}=\dfrac{2}{5}$.

（Ⅱ）设事件 A：该农产品价格“上涨”，事件 B：该农产品价格“下跌”，事件 C：该农产品价格“不变”.

根据题中数据，$P(A)$ 可估计为 $\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$，$P(B)$ 可估计为 $\frac{14}{40}=\frac{7}{20}$，$P(C)$ 可估计为 $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$.

依题意，该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率为 $\mathrm{C}_4^2\times(P(A))^2\times\mathrm{C}_2^1\times P(B)\times P(C)$.

因此所求的概率可估计为 $6\times(\frac{2}{5})^2\times2\times\frac{7}{20}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{125}$.

（Ⅲ）价格“不变”的概率估计值最大.

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$\begin{cases}2b=4,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$

解得 $a=3, b=2$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）设直线 PD 的方程为 $y=k(x-3)$，其中 $k<-\frac{2}{3}$.

由 $\begin{cases}y=k(x-3),\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $P(\frac{27k^2-12}{9k^2+4},\frac{-24k}{9k^2+4})$.

直线 BC 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x-2$.

由 $\begin{cases}y=-\frac{2}{3}x-2,\\ y=k(x-3)\end{cases}$ 得 $M(\frac{9k-6}{3k+2},\frac{-12k}{3k+2})$.

直线 PA 的方程为 $y=-\frac{6k+4}{9k-6}x+2$.

令 $y=-2$，得 $N(\frac{18k-12}{3k+2},-2)$.

设直线 MN 的斜率为 k_1，则

$$k_1=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}$$

$$=\frac{\frac{-12k}{3k+2}+2}{\frac{9k-6}{3k+2}-\frac{18k-12}{3k+2}}$$

$$=\frac{-6k+4}{-9k+6}=\frac{2}{3}.$$

又直线 CD 的斜率为 $\frac{2}{3}$，且直线 MN 与直线 CD 不重合，所以 $MN\parallel CD$.

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）依题意，$f(1)=1-e^{a+b}=0$．

所以 $a+b=0$．

由 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$ 得

$f'(x)=1-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}$，$f'(1)=1-(3+a)e^{a+b}$．

依题意，$f'(1)=-1$，故 $(3+a)e^{a+b}=2$．

由 $\begin{cases} a+b=0, \\ (3+a)e^{a+b}=2 \end{cases}$ 得 $a=-1, b=1$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$g(x)=f'(x)=(x^3-3x^2)e^{1-x}+1$．

所以 $g'(x)=x(-x^2+6x-6)e^{1-x}$．

令 $g'(x)=0$，得 $x=0$，$x=3-\sqrt{3}$ 或 $x=3+\sqrt{3}$．

$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	$(0,3-\sqrt{3})$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$g'(x)$	+	−	+	−
$g(x)$	↗	↘	↗	↘

所以，函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0)$，$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$；单调递减区间是 $(0,3-\sqrt{3})$，$(3+\sqrt{3},+\infty)$．

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $f'(x)=x^2(x-3)e^{1-x}+1$．

因为 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f'(-1)=1-4e^2<0$，$f'(0)=1>0$，所以根据函数零点存在定理与 $f'(x)$ 的单调性可知，$f'(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内存在唯一零点 x_1，且 x_1 是 $f(x)$ 的极小值点.

因为 $f'(x)$ 在区间 $(0,3-\sqrt{3})$ 上单调递减，且 $f'(0)>0$，$f'(3-\sqrt{3})<f'(1)=-1<0$，所以 $f'(x)$ 在区间 $(0,3-\sqrt{3}]$ 内存在唯一零点 x_2，且 x_2 是 $f(x)$ 的极大值点.

因为 $f'(x)$ 在区间 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$ 上单调递增，且 $f'(3-\sqrt{3})<0$，$f'(3+\sqrt{3})>f'(3)=1>0$，所以 $f'(x)$ 在区间 $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$ 内存在唯一零点 x_3，且 x_3 是 $f(x)$ 的极小值点.

当 $x\in(3+\sqrt{3},+\infty)$ 时，因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(3+\sqrt{3},+\infty)$ 内没有极值点.

综上可知，$f(x)$ 共有 3 个极值点.

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$r_0=0$，$r_1=1$，$r_2=1$，$r_3=2$．

（Ⅱ）因为 $A_0=B_0=0$，且 $B_n>0\ (n=1,2,\cdots,m)$，

所以 $r_0=\max\{i\mid B_i\leqslant A_0, i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}=0$．

因为$a_1 \geqslant b_1$，所以$B_1 \leqslant A_1$.

故$r_1 = \max\{ i \mid B_i \leqslant A_1, i \in \{0,1,2,\cdots,m\}\} \geqslant 1$.

由已知得$r_{j+1} - r_j \geqslant r_j - r_{j-1}$，$j = 1,2,\cdots,m-1$.

所以$r_m - r_{m-1} \geqslant r_{m-1} - r_{m-2} \geqslant \cdots \geqslant r_1 - r_0 \geqslant 1$.（*）

所以$r_m = r_m - r_0 = (r_m - r_{m-1}) + (r_{m-1} - r_{m-2}) + \cdots + (r_1 - r_0) \geqslant m$.

又因为$r_m \leqslant m$，所以$r_m = m$.

所以（*）中不等式都取等号，即$r_m - r_{m-1} = r_{m-1} - r_{m-2} = \cdots = r_1 - r_0 = 1$.

所以$r_n = n$.

（Ⅲ）若$B_m = A_m$，则$A_m + B_0 = A_0 + B_m$，结论成立.

若$B_m \neq A_m$，不妨设$B_m > A_m$.

因为$r_k = \max\{ i \mid B_i \leqslant A_k, i \in \{0,1,2,\cdots,m\}\}$，所以$B_{r_k} \leqslant A_k$.

因为$A_k < A_{k+1}$，所以$0 \leqslant r_k \leqslant r_{k+1}$.

因为$B_m > A_m$，所以$r_m \leqslant m-1$.

因此$r_k \leqslant m-1$，$k = 0,1,2,\cdots,m$.

由r_k的定义知$A_k < B_{r_k+1} = B_{r_k} + b_{r_k+1}$.

所以$0 \leqslant A_k - B_{r_k} < b_{r_k+1} \leqslant m$.

又因为$A_k - B_{r_k} \in \mathbf{N}$，所以$A_k - B_{r_k} \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}$，$k = 0,1,2,\cdots,m$.

所以$A_0 - B_{r_0}, A_1 - B_{r_1}, A_2 - B_{r_2}, \cdots, A_m - B_{r_m}$中至少有两个相等.

故存在$p > q$，使得$A_p - B_{r_p} = A_q - B_{r_q}$.

因为$A_p > A_q$，所以$B_{r_p} > B_{r_q}$，因此$r_p > r_q$.

令$s = r_p$，$t = r_q$，则$s > t$.

所以存在$p, q, s, t \in \{0,1,2,\cdots,m\}$，满足$p > q, s > t$，使得$A_p + B_t = A_q + B_s$.

综上，结论成立.