2024 北京西城高三一模
数　学

2024.4

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x<3\}$，$B=\{x\,|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cap \complement_U B=$

（A）$(2,3)$　　（B）$(-\infty,-2)\cup(2,3)$

（C）$[2,3)$　　（D）$(-\infty,-2]\cup[2,3)$

（2）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^2+x$　　（B）$y=\cos x$

（C）$y=2^x$　　（D）$y=\log_2|x|$

（3）在 $(x-\dfrac{2}{x^2})^6$ 的展开式中，常数项为

（A）60　　（B）15

（C）-60　　（D）-15

（4）已知抛物线 C 与抛物线 $y^2=4x$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 C 的准线方程是

（A）$x=-1$　　（B）$x=-2$

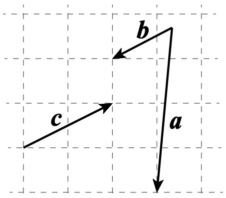
（C）$y=-1$　　（D）$y=-2$

（5）设 $a=t-\dfrac{1}{t}$，$b=t+\dfrac{1}{t}$，$c=t(2+t)$，其中 $-1<t<0$，则

（A）$b<a<c$　　（B）$c<a<b$

（C）$b<c<a$　　（D）$c<b<a$

（6）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为1，则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$



（A）-1　　（B）1

（C）-7　　（D）7

（7）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & -2<x<0, \\ -\sqrt{x}, & 0\leqslant x<c. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 c 的最大值为

（A）$\dfrac{1}{16}$　　（B）$\dfrac{1}{8}$

（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

（8）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_{n_0}>0$．则“$a_{n_0}>a_{n_0+1}$”是“$a_{n_0+1}>a_{n_0+3}$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）关于函数$f(x)=\sin x+\cos 2x$，给出下列三个命题：

① $f(x)$是周期函数；

② 曲线$y=f(x)$关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称；

③ $f(x)$在区间$[0,2\pi)$上恰有3个零点．

其中真命题的个数为

（A）0　　（B）1

（C）2　　（D）3

（10）德国心理学家艾·宾浩斯研究发现，人类大脑对事物的遗忘是有规律的，他依据实验数据绘制出“遗忘曲线”．“遗忘曲线”中记忆率y随时间t（小时）变化的趋势可由函数$y=1-0.6t^{0.27}$近似描述，则记忆率为50%时经过的时间约为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

（A）2 小时　　（B）0.8 小时

（C）0.5 小时　　（D）0.2 小时

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）若复数z满足$(1+2\mathrm{i})\cdot z=3+\mathrm{i}$，则$|z|=$_______．

（12）已知$\alpha,\beta\in(0,\pi)$．使$\tan(\alpha+\beta)<\tan(\alpha-\beta)$成立的一组$\alpha,\beta$的值为$\alpha=$_______，$\beta=$_______．

（13）双曲线$M:x^2-\frac{y^2}{3}=1$的渐近线方程为_______；若M与圆$O:x^2+y^2=r^2\ (r>0)$交于A,B,C,D四点，且这四个点恰为正方形的四个顶点，则$r=$_______．

（14）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_2=-3$．数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．若$\{b_n\}$是公差为 1 的等差数列，则$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=$_______，$a_n$的最小值为_______．

（15）如图，正方形$ABCD$和矩形$ABEF$所在的平面互相垂直．点P在正方形$ABCD$及其内部运动，点Q在矩形$ABEF$及其内部运动．设$AB=2,AF=1$，给出下列四个结论：

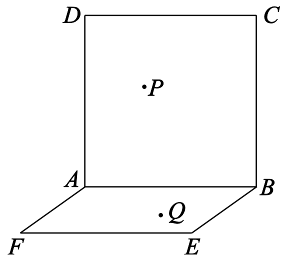
① 存在点 P,Q，使 $PQ=3$；

② 存在点 P,Q，使 $CQ // EP$；

③ 到直线 AD 和 EF 的距离相等的点 P 有无数个；

④ 若 $PA\perp PE$，则四面体 $PAQE$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}$.

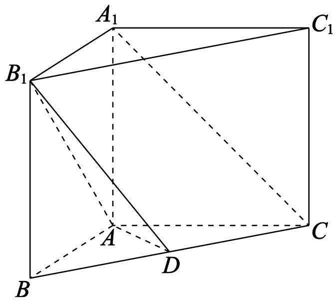
其中所有正确结论的序号是_______.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 A_1ACC_1 为正方形，$AB\perp AC$，$AB=AC=2$，D 为 BC 的中点.



（Ⅰ）求证：$A_1C//$ 平面 AB_1D；

（Ⅱ）若 $A_1C\perp AB$，求二面角 $D-AB_1-A_1$ 的余弦值.

（17）（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a\tan B=2b\sin A$.

（Ⅰ）求 $\angle B$ 的大小；

（Ⅱ）若 $a=8$，再从下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：BC 边上中线的长为 $\sqrt{21}$；

条件②：$\cos A=-\frac{2}{3}$；

条件③：$b=7$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

10 米气步枪是国际射击联合会的比赛项目之一，资格赛比赛规则如下：每位选手采用立姿射击 60 发子弹，总环数排名前 8 的选手进入决赛．三位选手甲、乙、丙的资格赛成绩如下：

环数	6 环	7 环	8 环	9 环	10 环
甲的射击频数	1	1	10	24	24
乙的射击频数	3	2	10	30	15
丙的射击频数	2	4	10	18	26

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的射击成绩相互独立．

（Ⅰ）若丙进入决赛，试判断甲是否进入决赛，说明理由；

（Ⅱ）若甲、乙各射击 2 次，估计这 4 次射击中出现 2 个“9 环”和 2 个“10 环”的概率；

（Ⅲ）甲、乙、丙各射击 10 次，用 $X_i\ (i=1,2,3)$ 分别表示甲、乙、丙的 10 次射击中大于 a 环的次数，其中 $a\in\{6,7,8,9\}$．写出一个 a 的值，使 $D(X_3)>D(X_2)>D(X_1)$．

（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(-2,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 G 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点．直线 l 与椭圆 G 交于 C,D 两点（C,D 不是椭圆的顶点），l 与直线 $x=2$ 交于点 E．直线 AC,AD 分别与直线 OE 交于点 M,N．求证：$|OM|=|ON|$．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x+\ln(ax)+\dfrac{1}{a}xe^x$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率；

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若集合 $\{x\mid f(x)\geqslant -1\}$ 有且只有一个元素，求 a 的值．

（21）（本小题 15 分）

对正整数 $m\geqslant 3, n\geqslant 6$，设数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$，$a_i\in\{0,1\}\ (i=1,2,\cdots,n)$．$B$ 是 m 行 n 列的数阵，b_{ij} 表示 B 中第 i 行第 j 列的数，$b_{ij}\in\{0,1\}\ (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$，且 B 同时满足下列三个条件：① 每行恰有三个 1；② 每列至少有一个 1；③ 任意两行不相同．

记集合 $\{i\mid a_1b_{i1}+a_2b_{i2}+\cdots+a_nb_{in}=0$ 或 $3, i=1,2,\cdots,m\}$ 中元素的个数为 K．

（Ⅰ）若 $A:1,1,1,0,0,0$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$，求 K 的值；

（Ⅱ）若对任意 $p,q\in\{1,2,\cdots,n\}\ (p<q)$，$B$ 中都恰有 r 行满足第 p 列和第 q 列的数均为 1．

（ⅰ）B 能否满足 $m=3r$？说明理由；

（ⅱ）证明：$K\geqslant\dfrac{1}{24}(n^2-4n)$．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　　（2）D　　（3）A　　（4）C　　（5）C

（6）A　　（7）A　　（8）B　　（9）D　　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\sqrt{2}$　　（12）$\frac{\pi}{3}$　$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）

（13）$y=\pm\sqrt{3}x$　$\sqrt{3}$　　（14）$n-6$　-13

（15）①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）连接 A_1B，设 $A_1B\cap AB_1=E$，连接 DE． ………1 分

因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 A_1ABB_1 是平行四边形，

所以 E 为 A_1B 的中点． ………2 分

因为 D 为 BC 的中点，

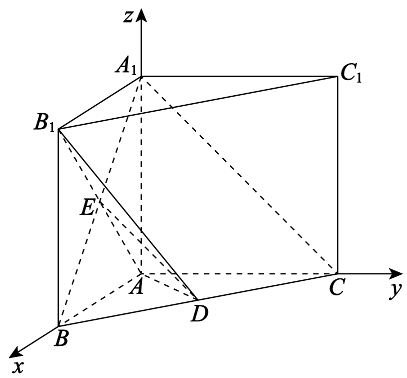
所以 $DE\,//\,A_1C$． ………3 分

又因为 $A_1C\not\subset$ 平面 AB_1D，$DE\subset$ 平面 AB_1D，

所以 $A_1C\,//$ 平面 AB_1D． ………5 分

（Ⅱ）因为 $AB\perp A_1C$，$AB\perp AC$，

所以 $AB\perp$ 平面 A_1ACC_1． ………6 分



所以 $AB\perp AA_1$．

又 $AA_1\perp AC$，所以 AB,AC,AA_1 两两相互垂直．

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$． ………7 分

则 $A(0,0,0)$，$B_1(2,0,2)$，$D(1,1,0)$，$C(0,2,0)$．

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AD}=(1,1,0)$．

设平面 AB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2z=0,\\ x+y=0.\end{cases}$

令 $x=-1$，则 $y=1$，$z=1$．于是 $\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$． ………10 分

因为 $AC\perp$ 平面 A_1ABB_1，

所以 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$ 是平面 A_1ABB_1 的一个法向量． ………11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ………13 分

由题设，二面角 $D-AB_1-A_1$ 的平面角为钝角，

所以二面角 $D-AB_1-A_1$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　　　　　　　………14 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a\tan B=2b\sin A$，得 $a\sin B=2b\sin A\cos B$.　　　　………1 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\sin A\sin B=2\sin A\sin B\cos B$.　　　　………3 分

因为 $\sin A>0,\sin B>0$，

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$.　　　　………4 分

又 $0<\angle B<\pi$，　　　　………5 分

所以 $\angle B=\frac{\pi}{3}$.　　　　………6 分

（Ⅱ）选条件①：BC 边上中线的长为 $\sqrt{21}$.　　　　………7 分

设 BC 边中点为 M，连接 AM，则 $AM=\sqrt{21}$，$BM=4$.

在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得 $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B$，　………9 分

即 $21=AB^2+16-8AB\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

整理得 $AB^2-4AB-5=0$.

解得 $AB=5$ 或 $AB=-1$（舍）.　　　　………11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=10\sqrt{3}$.　　　　………13 分

选条件③：$b=7$.　　　　………7 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，　　　　………9 分

即 $7^2=8^2+c^2-16c\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

整理得 $c^2-8c+15=0$.

解得 $c=3$ 或 $c=5$.　　　　………11 分

当 $c=3$ 时，$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{3}$.

当 $c=5$ 时，$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=10\sqrt{3}$.　　　　………13 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）甲进入决赛，理由如下：

丙射击成绩的总环数为 $2\times6+4\times7+10\times8+18\times9+26\times10=542$，

甲射击成绩的总环数为 $1\times6+1\times7+10\times8+24\times9+24\times10=549$.

因为 $549>542$，所以甲进入决赛.　　　　………3 分

（Ⅱ）根据题中数据，“甲命中9环”的概率可估计为$\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$；

“甲命中10环”的概率可估计为$\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$；

“乙命中9环”的概率可估计为$\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$；

“乙命中10环”的概率可估计为$\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$． ………5分

所以这4次射击中出现2个“9环”和2个“10环”的概率可估计为：

$(\frac{2}{5})^2\times(\frac{1}{4})^2+(\frac{2}{5})^2\times(\frac{1}{2})^2+C_2^1(\frac{2}{5})^2\times C_2^1(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})=\frac{13}{100}$． ………10分

（Ⅲ）$a=7$和8．（写出一个即可） ………13分

（19）（共15分）

解：（Ⅰ）由题设，$\begin{cases} a=2, \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \\ a^2-b^2=c^2. \end{cases}$ ………3分

解得$a^2=4, b^2=3$．

所以椭圆G的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ………5分

（Ⅱ）由题设，直线l的斜率存在，设其方程为$y=kx+m$．

则$E(2,\ 2k+m)$，直线OE的方程为$y=(k+\frac{m}{2})x$． ………6分

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$． ………7分

由$\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$，得$m^2<4k^2+3$．

设$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$． ………8分

直线AC的方程为$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$． ………9分

联立直线AC和OE得$\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=(k+\frac{m}{2})x$．

解得$x_M=\frac{2y_1}{(k+\frac{m}{2})(x_1+2)-y_1}=\frac{4y_1}{mx_1+4k}=\frac{4(kx_1+m)}{mx_1+4k}$． ………11分

同理可得$x_N=\frac{4(kx_2+m)}{mx_2+4k}$．

所以 $x_M+x_N=4\times\dfrac{(kx_1+m)(mx_2+4k)+(kx_2+m)(mx_1+4k)}{(mx_1+4k)(mx_2+4k)}$． ………12 分

因为 $(kx_1+m)(mx_2+4k)+(kx_2+m)(mx_1+4k)$

$=2kmx_1x_2+(4k^2+m^2)(x_1+x_2)+8km$

$=\dfrac{2km(4m^2-12)}{4k^2+3}-\dfrac{8km(4k^2+m^2)}{4k^2+3}+\dfrac{8km(4k^2+3)}{4k^2+3}$

$=0$，

所以 $x_M+x_N=0$，即点 M 和点 N 关于原点 O 对称．

所以 $|OM|=|ON|$． ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x+\ln x+xe^x$，

所以 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}+(1+x)e^x$． ………2 分

所以 $f'(1)=2e+2$．

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 $2e+2$． ………4 分

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，$f(x)=x+\ln(-x)-xe^x$，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$．

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x}-(1+x)e^x=(1+x)(\dfrac{1}{x}-e^x)$． ………6 分

因为 $\dfrac{1}{x}-e^x<0$，

所以 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$；单调递减区间为 $(-1,0)$． ………9 分

（Ⅲ）$f'(x)=(1+x)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{e^x}{a})$．

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．

所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

因为 $f(\dfrac{1}{a})>0$，所以 $a>0$ 不合题意． ………11 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$．

因为 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$；单调递减区间为 $(-1,0)$．

所以 $f(x)_{\max}=f(-1)=-1+\ln(-a)-\dfrac{1}{ae}$． ………13 分

设 $g(x)=-1+\ln(-x)-\dfrac{1}{ex}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{ex^2}=\dfrac{ex+1}{ex^2}$，

因为 $x\in(-\infty,-\dfrac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$；$x\in(-\dfrac{1}{e},0)$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-\dfrac{1}{e})$；单调递增区间为 $(-\dfrac{1}{e},0)$．

所以 $g(x)_{\min}=g(-\frac{1}{e})=-1$.

所以集合 $\{x \mid f(x)\geqslant -1\}$ 有且只有一个元素时 $a=-\frac{1}{e}$. ·········15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）记 $t_i=a_1b_{i1}+a_2b_{i2}+\cdots+a_nb_{in}$.

因为 $t_1=3, t_2=2, t_3=0$ ， ·········3 分

所以 $K=2$. ·········4 分

（Ⅱ）（ⅰ） B 不满足 $m=3r$ ，理由如下：

假设 B 满足 $m=3r$.

因为 B 的每行恰有三个 1，故 B 中满足 $b_{ip}=b_{iq}=1$ 的 (i,p,q) 的个数共有 $3m$ 个.

另一方面，从 B 中任选两列共有 C_n^2 种可能，且对任意两列，都恰有 r 行使得这两列的数均为 1，故 B 中满足 $b_{ip}=b_{iq}=1$ 的 (i,p,q) 的个数共有 $r\mathrm{C}_n^2$ 个.

所以 $3m=r\mathrm{C}_n^2$.

当 $m=3r$ 时，得 $\mathrm{C}_n^2=9$ ，此方程无解.

所以 B 不满足 $m=3r$. ·········9 分

（ⅱ）由（ⅰ）可得 $3m=r\mathrm{C}_n^2$，即 $m=\frac{r\mathrm{C}_n^2}{3}$.

下面考虑满足 $b_{ip}=b_{iq}=1$ ，但 $a_p\neq a_q$ 的 (i,p,q) 的个数：

对 B 中满足 $t_i\neq 0$ 和 3 的 $m-K$ 行，每行恰有两组 (p,q) 使 $b_{ip}=b_{iq}=1$ 且 $a_p\neq a_q$ ，

所以满足 $b_{ip}=b_{iq}=1$ ，但 $a_p\neq a_q$ 的 (i,p,q) 的个数为 $2(m-K)=2(\frac{r\mathrm{C}_n^2}{3}-K)$.

·········11 分

设数列 A 中有 x 项为 1， $n-x$ 项为 0 .

满足 $b_{ip}=b_{iq}=1$ ，但 $a_p\neq a_q$ 的 (p,q) 的个数为 $x(n-x)$.

所以满足 $b_{ip}=b_{iq}=1$ ，但 $a_p\neq a_q$ 的 (i,p,q) 的个数为 $rx(n-x)$. ·········13 分

所以 $rx(n-x)=2(\frac{r\mathrm{C}_n^2}{3}-K)$.

所以 $K=\frac{r\mathrm{C}_n^2}{3}-\frac{rx(n-x)}{2}=\frac{r}{6}(3x^2-3nx+n^2-n)$

$\geqslant\frac{r}{6}(\frac{3n^2}{4}-\frac{3n^2}{2}+n^2-n)=\frac{r}{6}(\frac{n^2}{4}-n)\geqslant\frac{1}{24}(n^2-4n)$. ·········15 分