

2024 北京东城高三二模

数 学

2024.5

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | x + 1 \leq 0\}$, $B = \{x | -2 \leq x < 1\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $\{x | x < 1\}$ (B) $\{x | -2 \leq x < 1\}$
(C) $\{x | x \geq -2\}$ (D) $\{x | -2 \leq x \leq -1\}$

(2) 下列函数中，在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减的是

- (A) $f(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = e^{-x}$
(C) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \ln x$

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{7\pi}{12}$, $b = \sqrt{2}$, 则 $a =$

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

(4) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 $(3, \sqrt{2})$, 且一条渐近线的倾斜角为 30° , 则双曲线的方程为

- (A) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ (B) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
(C) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $x^2 - 4y^2 = 1$

(5) 直线 $l: y = -1$ 与圆 $E: x^2 + y^2 - 4x = 0$ 交于 A, B 两点, 若圆上存在点 C , 使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 则点 C 的坐标可以为

- (A) $(0, 0)$ (B) $(4, 0)$ (C) $(1, \sqrt{3})$ (D) $(2, 2)$

(6) 袋中有 5 个大小相同的小球, 其中 3 个白球, 2 个黑球. 从袋中随机摸出 1 个小球, 观察颜色后放回, 同时放入一个与其颜色大小相同的小球, 然后再从袋中随机摸出 1 个小球, 则两次摸到的小球颜色不同的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(7) 已知函数 $f(x) = |x - 1|e^x$ 的图象与直线 $y = 1$ 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $|x_1 - x_2|$ 所在的区间为

- (A) $(0, 1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(3, 4)$

(8) 已知平面向量 e_1, e_2, e_3, e_4 是单位向量, 且 $e_1 \perp e_2$, 则“ $e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_4$ ”是“ $e_3 \cdot e_4 = 0$ ”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 声音是由物体振动产生的，每一个纯音都是由单一简谐运动产生的乐音，其数学模型为

$$h(t) = A \sin \omega t (A > 0, \omega > 0), \text{ 其中 } A \text{ 表示振幅, 响度与振幅有关; } T \text{ 表示最小正周期, } T = \frac{2\pi}{\omega},$$

它是物体振动一次所需的时间; f 表示频率, $f = \frac{1}{T}$, 它是物体在单位时间里振动的次数. 下表为我国古代五声音阶及其对应的频率 f :

音	宫	商	角	徵	羽
频率 f	262Hz	293Hz	330Hz	392Hz	440Hz

小明同学利用专业设备, 先弹奏五声音阶中的一个音, 间隔 $\frac{1}{3}$ 个单位时间后, 第二次弹奏同一个音 (假设两次声音响度一致, 且不受外界阻力影响, 声音响度不会减弱), 若两次弹奏产生的振动曲线在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上重合, 根据表格中数据判断小明弹奏的音是

- (A) 宫 (B) 商 (C) 角 (D) 徵

(10) 设无穷正数数列 $\{a_n\}$, 如果对任意的正整数 n , 都存在唯一的正整数 m , 使得

$a_m = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, 那么称 $\{a_n\}$ 为内和数列, 并令 $b_n = m$, 称 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的伴随数列, 则

- (A) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{a_n\}$ 为内和数列
 (B) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $\{a_n\}$ 为内和数列
 (C) 若内和数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则其伴随数列 $\{b_n\}$ 为递增数列
 (D) 若内和数列 $\{a_n\}$ 的伴随数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 则 $\{a_n\}$ 为递增数列

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 在 $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^6$ 的展开式中, 常数项为_____. (用数字作答)

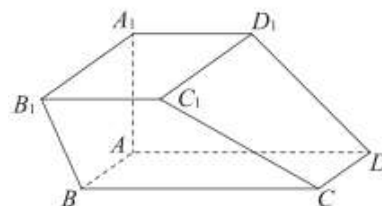
(12) 若复数 z 满足 $\frac{z}{1+i} = 2+i$, 则在复平面内, z 对应的点的坐标是_____.

(13) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ x^2, & |x| \geq 1 \end{cases}$, 则 $f[f(\frac{1}{2})] = \underline{\hspace{1cm}}$, 不等式 $f(x) < f(2x)$ 的解集是_____.

(14) 如图, 在六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是两个全等的矩形, $AB \parallel A_1B_1$,

$AD \parallel A_1D_1$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = B_1C_1 = 2$, $BC = A_1B_1 = 4$,

$AA_1 = 2$, 则 $BB_1 = \underline{\hspace{1cm}}$, 该六面体的任意两个顶点间距离的最大值为_____.



(15) 已知平面内点集 $A = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} (n > 1)$, A 中任意两个不同点之间的距离都不相等.

设集合 $B = \{\overline{P_i P_j} \mid \forall m \in \{1, 2, \dots, n\} (m \neq i), 0 < |\overline{P_i P_j}| \leq |\overline{P_i P_m}|, i = 1, 2, \dots, n\}$,

$M = \{P_j \mid \overline{P_i P_j} \in B, i = 1, 2, \dots, n\}$. 给出以下四个结论:

- ①若 $n = 2$, 则 $A = M$;
- ②若 n 为奇数, 则 $A \neq M$;
- ③若 n 为偶数, 则 $A = M$;
- ④若 $\{\overline{P_{i_1} P_{i_1}}, \overline{P_{i_2} P_{i_2}}, \dots, \overline{P_{i_k} P_{i_k}}\} \subseteq B$, 则 $k \leq 5$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

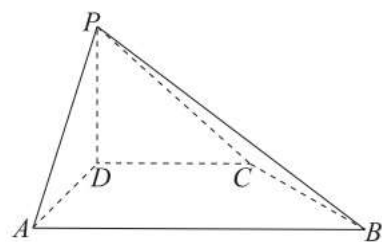
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB=4, CD=2, \angle PDA = 90^\circ$,

平面 $PAD \perp$ 平面 PCD .

(I) 求证: $AD \perp PC$;

(II) 若 $PD = AD = 2, PD \perp DC$,

求平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值.



(17) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

(I) 求 ω 的值;

(II) 从下列三个条件中选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在,

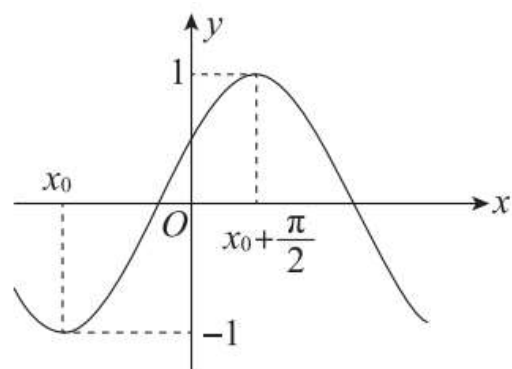
并求函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

条件①: 函数 $f(x + \frac{5\pi}{12})$ 是奇函数;

条件②: 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个

单位长度后得到 $y = \sin \omega x$ 的图象;

条件③: $f(0) = f(\frac{2\pi}{3})$.



注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(18) (本小题 13 分)

北京市共有 16 个行政区，东城区、西城区、朝阳区、丰台区、石景山区和海淀区为中心城区，其他为非中心城区. 根据《北京市人口蓝皮书·北京人口发展研究报告（2023）》显示，2022 年北京市常住人口为 2184.3 万人，由城镇人口和乡村人口两个部分构成，各区常住人口数量如下表所示：

行政区	东城区	西城区	朝阳区	丰台区	石景山区	海淀区	门头沟区	房山区
城镇人口 (万人)	70.4	110	343.3	199.9	56.3	305.4	36.2	102.6
乡村人口 (万人)	0	0	0.9	1.3	0	7	3.4	28.5
行政区	通州区	顺义区	昌平区	大兴区	怀柔区	平谷区	密云区	延庆区
城镇人口 (万人)	137.3	87.8	185.9	161.6	32.8	27.9	34.9	20.5
乡村人口 (万人)	47	44.7	40.8	37.5	11.1	17.7	17.7	13.9

(I) 在 16 个行政区中随机选择一个，求该区为非中心城区且 2022 年乡村人口在 20 万人以下的概率；

(II) 若随机从中心城区选取 1 个，非中心城区选取 2 个行政区，记选出的 3 个区中 2022 年常住人口超过 100 万人的行政区的个数为 X ，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$ ；

(III) 记 2022 年这 16 个区的常住人口、城镇人口、乡村人口的方差分别 s_1^2, s_2^2, s_3^2 ，试判断 s_1^2, s_2^2, s_3^2 的大小关系. (结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$ ，左、右顶点分别为 A, B ，

直线 $l: x = 2\sqrt{2}$ ，且 A 到 F 的距离与 A 到 l 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 设 M, N 为椭圆 C 上不同的两点 (不在坐标轴上)，过点 N 作直线 BM 的平行线与直线 AM 交于点 D ，过点 M 作直线 BN 的平行线与直线 AN 交于点 E . 求证：点 D 与点 E 到直线 l 的距离相等.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = x \sin 2x + \cos 2x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上的极值点个数.

(21) (本小题 15 分)

已知 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 为有穷整数数列, 若 A_n 满足: $a_{i+1} - a_i \in \{p, q\} (i = 1, 2, \dots, n-1)$,

其中 p, q 是两个给定的不同非零整数, 且 $a_1 = a_n = 0$, 则称 A_n 具有性质 T .

(I) 若 $p = -1, q = 2$, 那么是否存在具有性质 T 的 A_5 ? 若存在, 写出一个这样的 A_5 ; 若不存在, 请说明理由;

(II) 若 $p = -1, q = 2$, 且 A_{10} 具有性质 T , 求证: a_1, a_2, \dots, a_9 中必有两项相同;

(III) 若 $p + q = 1$, 求证: 存在正整数 k , 使得对任意具有性质 T 的 A_k , 都有 a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中任意两项均不相同.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A (2) B (3) D (4) A (5) D
 (6) B (7) B (8) D (9) C (10) C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11) 60 (12) (1, 3) (13) $1, (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

(14) $2\sqrt{2}, 6$ (15) ①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（本小题 14 分）

解：(I) 因为 $\angle PDA = 90^\circ$ ，所以 $AD \perp PD$ 。

又因为平面 $PAD \perp$ 平面 PCD ，平面 $PAD \cap$ 平面 $PCD = PD$ ，

所以 $AD \perp$ 平面 PCD 。

又 $PC \subset$ 平面 PCD ，

所以 $AD \perp PC$ 。

.....6 分

(II) 因为 $AD \perp$ 平面 PCD ，

所以 $AD \perp CD, AD \perp PD$ 。又因为 $PD \perp DC$ ，

如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，

则 $P(0, 0, 2), C(0, 2, 0), B(2, 4, 0)$ ，

$$\overrightarrow{PC} = (0, 2, -2), \overrightarrow{CB} = (2, 2, 0),$$

易知平面 PAD 的法向量 $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ 。

设平面 PBC 的法向量 $\mathbf{v} = (x, y, z)$ ，

于是，
$$\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y - z = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

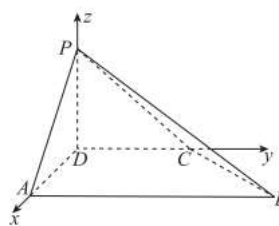
令 $y = 1, z = 1, x = -1$ ，则 $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ 。

所以

$$\cos \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

.....14 分



(17)（本小题 13 分）

解：(I) 由题意知 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, $T = \pi$.

因为 $\omega > 0$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$,

解得 $\omega = 2$3 分

(II) 选择条件①: 函数 $f(x + \frac{5\pi}{12})$ 是奇函数.

$$f(x + \frac{5\pi}{12}) = \sin[2(x + \frac{5\pi}{12}) + \varphi] = \sin(2x + \frac{5\pi}{6} + \varphi).$$

因为函数 $f(x + \frac{5\pi}{12})$ 是奇函数,

$$\text{所以 } \frac{5\pi}{6} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 即 } \varphi = -\frac{5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{因为 } \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{于是, } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}).$$

$$\text{因为 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值为 } 1.$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值为 } -\frac{1}{2}. \quad \text{.....13 分}$$

选择条件②: 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到 $y = \sin \omega x$ 的图象.

$$y = \sin 2[(x - \frac{\pi}{12}) + \varphi] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6} + \varphi\right),$$

因为其图象与 $y = \sin 2x$ 的图象相同,

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{因为 } \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

以下同选条件①.13 分

(18) (本小题 13 分)

解：(I) 在 16 个行政区中有 10 个非中心城区，乡村人口在 20 万人以下的有门头沟区、怀柔区、平谷区、密云区、延庆区，共 5 个.

所以随机选择一个行政区，则该区为非中心城区且农村人口在 20 万人以下的概率为 $\frac{5}{16}$ 4 分

(II) 6 个中心城区中常住人口超过 100 万人的有 4 个区，10 个非中心城区中常住人口超过 100 万人的有 5 个区. X 的所有取值包括 0, 1, 2, 3, 则

$$P(X=0) = \frac{C_2^1 C_5^2}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{2}{27} ;$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_5^2 + C_2^1 C_5^1 C_5^1}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{1}{3} ;$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^1 C_5^1 C_5^1 + C_2^1 C_5^2}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{4}{9} ;$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_6^1 C_{10}^2} = \frac{4}{27} .$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{27}$

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{27} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{4}{27} = \frac{5}{3} . \quad \text{.....10 分}$$

(III) $s_1^2 > s_2^2 > s_3^2$.

(19) (本小题 15 分)

解: (I) 由已知 $A(-a, 0)$, $\frac{a+\sqrt{2}}{a+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a=2$.

因为 $c=\sqrt{2}$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 2 = 2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分

(II) $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$. 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } k_{ND} = k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}, \quad k_{ME} = k_{BN} = \frac{y_2}{x_2 - 2} .$$

$$\text{直线 } AM: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \quad ND: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - x_2) + y_2 ,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \\ y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - x_2) + y_2, \end{cases} \text{ 得 } \left(\frac{y_1}{x_1 + 2} - \frac{y_1}{x_1 - 2} \right) x = -\frac{2y_1}{x_1 + 2} - \frac{x_2 y_1}{x_1 - 2} + y_2 ,$$

整理得, $-4y_1x = (x_1^2 - 4)y_2 - 2y_1(x_1 - 2) - y_1x_2(x_1 + 2)$

因为 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1$, $x_1^2 - 4 = -2y_1^2$,

所以 $-4y_1x = -2y_1^2y_2 - 2y_1(x_1 - 2) - y_1x_2(x_1 + 2)$,

$$x_D = \frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1.$$

同理可得, $x_E = \frac{x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1$.

所以点 D 与点 E 到直线 $l: x = 2\sqrt{2}$ 的距离相等.15 分

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 因为 $f(x) = x \sin 2x + \cos 2x$,

所以 $f'(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x - 2 \sin 2x = 2x \cos 2x - \sin 2x$,

$$\text{所以 } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

故曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$ 处的切线方程为 $y = x + \frac{\pi}{2}$5 分

(II) $f'(x) = 2x \cos 2x - \sin 2x$, 设 $g(x) = f'(x)$,

所以 $g'(x) = 2 \cos 2x - 4x \sin 2x - 2 \cos 2x = -4x \sin 2x$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$,

x	$\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$
$g'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$g(x) = f'(x)$	递增		递减		递减		递增

$$f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad f'(0) = 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \quad f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$$

故存在 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ 上单调递增, 在区间 $[0, x_0]$ 上单调递减, 在区间 $[x_0, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上有且仅有两个极值点.15 分

(21) (本小题 15 分)

解: (I) 不存在具有性质 T 的 A_5 , 理由如下:

设 $A_5: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$,

由于 $a_1 = a_5 = 0$, $a_{i+1} - a_i \in \{-1, 2\} (i=1, 2, 3, 4)$,

设 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4$ 中有 m 个 -1 , $4 - m$ 个 2 ,

则有 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_1 = 0$,

所以有 $(-1) \times m + 2 \times (4 - m) = 8 - 3m = 0$, 这与 m 为整数矛盾,

因此存在具有性质 T 的 A_54 分

(II) 设 $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{10}|$ 中的最大值为 M ,

则存在 a_k , 使 $a_k = M$, 或 $a_k = -M$.

若存在 a_k , 使 $a_k = M$, 下证: $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 可以取遍 0 到 M 之间所有的整数.

假设存在正整数 $m (m < M)$, 使得 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 中各项均不为 m ,

令集合 $B = \{i | a_i > m\}$, 设 i_0 是集合 B 中元素的最大值,

则有 $a_{i_0} > m > a_{i_0+1}$,

这与 $a_{i+1} - a_i \in \{-1, 2\} (i=1, 2, \dots, n-1)$ 矛盾.

所以 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 可以取遍 0 到 M 之间所有的整数.

若 $M = 1$, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 的取值只能为 $0, \pm 1$. 此时 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

若 $M = 2$, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 的取值只能为 $0, \pm 1, \pm 2$ 中的数, 此时 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

若 $M \geq 3$, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 中一定异于 0 和 M 的正整数, 再由 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{10}$ 可以取遍 0 到 M 之间所有的整数, 所以 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.

当 $a_k = -M$, 同理可证: a_1, a_2, \dots, a_k 可以取遍 $-M$ 到 0 之间所有的整数.

从而 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 这 9 个数中必有两项相同.10 分

(III) 不妨设 $p < 0 < q$, 当 $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}$ 中有 q 个 p , $-p$ 个 q ,

由于 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_k - a_{k-1}) = a_k - a_1 = 0$,

所以取 $k = q - p + 1$, 此时 A_k 具有性质 T .

下证: a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中任意两项均不相同.

若存在 $i, j (1 \leq i < j \leq k-1)$, 使得 $a_i = a_j$,

令 $a_i = u_1 p + v_1 q$, $a_j = u_2 p + v_2 q$.

则有 $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq q, 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq -p$.

令 $s = u_2 - u_1, t = v_2 - v_1$, 则有 $ps + qt = 0$, 且 $0 \leq s \leq q, 0 \leq t \leq -p$.

由于 $p + q = 1$, 则有 $s = q(s - t)$,

①若 $s = t$, 则有 $s = 0$, 即 $u_1 = u_2$,

当 $a_i = a_j$ 时, 有 $v_1 = v_2$, 从而 $i = j$, 矛盾.

②若 $s \neq t$ ，则有 $s = q$ 且 $s = t + 1$ ，

因此有 $u_2 = q, u_1 = 0, v_2 = q - 1, v_1 = 0$ ，

所以此时 $a_i = a_1, a_j = a_n$ ，矛盾.

综上所述，存在正整数 k ，使得当 A_k 具有性质 T 时， a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 中任意两项均不相同.15 分