2025 北京海淀高三二模

数　　学

2025.05

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(x,-1)$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $x=$

（A）$-\frac{1}{2}$　　（B）-2　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）2

（2）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$， $B=\{x\,|\,a<x<2\}$. 若 $a\in\mathbf{Z}$ ，且 $A\cap B=\{1\}$，则 $a=$

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

（3）已知 $A(-2,0),B(2,0)$.若动点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$，则 P 的轨迹方程为

（A）$x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　（B）$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\le -1)$

（C）$\frac{y^2}{3}-x^2=1$　　（D）$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\ge 1)$

（4）在 $(x+\frac{a}{x^2})^5$ 的展开式中， x^2 的系数为 -10 ，则 $a=$

（A）-1　　（B）1

（C）-2　　（D）2

（5）圆心为 $(-1,2)$ 且与 x 轴相切的圆的方程是

（A）$(x-1)^2+(y+2)^2=2$　　（B）$(x+1)^2+(y-2)^2=2$

（C）$(x-1)^2+(y+2)^2=4$　　（D）$(x+1)^2+(y-2)^2=4$

（6）设 $a,b,c\in\mathbf{R}$， $abc\ne 0$，且 $a>b>c$，则

（A）$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>2$　　（B）$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}<2$　　（C）$2a>b+c$　　（D）$a+b>c$

（7）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=b_1=1$， $a_3=b_3=3$，则

（A）$a_4<b_4$　　（B）$a_4>b_4$　　（C）$a_5<b_5$　　（D）$a_5>b_5$

（8）已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零平面向量．则“ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}^2$ ”是“ $|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|$ ”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）在锐角△ ABC 中， $\cos A=\cos 2B$ ，则 $\frac{a}{b}$ 的一个取值可能为

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）2　　（D）3

（10）中华人民共和国国家标准（GB11533-2011）中的《标准对数视力表》采用的是五分视力记录方式（缪氏记录法）：$L=5-\lg\frac{kd}{D}$，其中，L 为被测试眼睛的视力值，d 为该眼睛能分辨清楚的最低一行“E”形视标笔划宽度（单位：毫米），D 为眼睛到视标的距离（单位：米），如图 1 所示，k 是与 d,D 无关的常量.

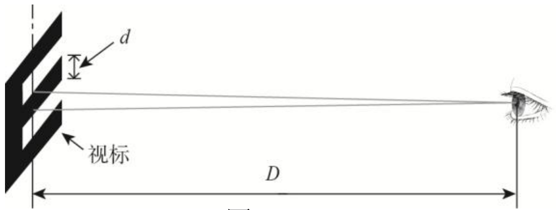


图 1

图 2 是标准视力表的一部分，一个右眼视力值为 5.0 的人在距离视力表 5 米处进行检测，能分辨的最低一行视标为图 2 中虚线框部分. 因条件所限，小明在距离该视力表 3 米处进行检测，若此时他的右眼能分辨的最低一行视标也为图 2 中虚线框部分，不考虑其它因素的影响，则与小明右眼的实际视力值最接近的为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

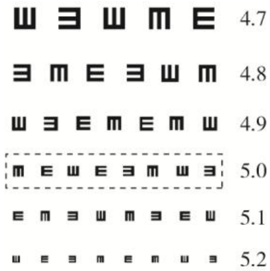


图 2 部分标准视力表示意图

（A）4.5　　（B）4.6　　（C）4.8　　（D）5.0

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

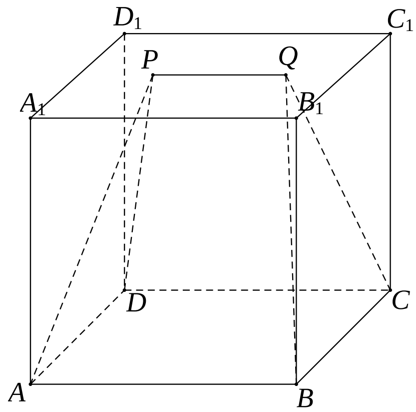
（11）若 $(x+2\mathrm{i})\mathrm{i}=y-\mathrm{i}$ $(x,y\in\mathbf{R},\mathrm{i}$ 为虚数单位$)$，则 $x+y=$____.

（12）抛物线 $x^2=-4y$ 的焦点坐标为____.

（13）在平面直角坐标系 xOy 中，若点 $A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 可得到点 B，则 $|AB|=$___，点 A,B 到直线 $l: x=2$ 的距离之和的最大值为____.

（14）已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+4}$，则 $f(x)$ 的值域为____，曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为____.

（15）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， P,Q 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$（包含边界）内的两个动点，且满足 $PQ=1, PQ // AB$. 给出下面四个结论：



①当 P 与 D_1 重合时，五面体 $PQABCD$ 的体积为 $\frac{10}{3}$ ；

②记直线 AA_1 分别与平面 PAD 和平面 QBC 所成角为 α ， β ，则 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的值不变；

③存在 P , Q ，使得 $DP\perp BQ$ ；

④存在 P , Q ，使得五面体 $PQABCD$ 中，面 $ABCD$ 所在平面与其余四个面所在平面的四个夹角中，有三个相等.

其中，所有正确结论的序号为_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos(\frac{\pi}{3}-2\omega x)+2\sin^2\omega x-1$（ $\omega>0$ ）.

（Ⅰ）若 $\omega=\frac{1}{2}$ ，求 $f(0)$ 及 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定，求 $f(x)$ 的最小正周期.

条件①： $f(0)+f(\frac{\pi}{6})=0$ ；

条件②： $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点；

条件③： $x=\frac{7\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个零点.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(17)（本小题 14 分）

如图 1,五边形 $ABCEF$ 中，$AC // EF$，$AC \perp CE$，$AB \perp BC$，$AC = 2BC = 2CE = 4$．将三角形 ABC 沿 AC 翻折，使得平面 $ABC \perp$ 平面 $ACEF$，如图 2.

（Ⅰ）求证：$AB \perp$ 平面 BCE；

（Ⅱ）记直线 AF 与平面 BEF 所成角为 θ．若 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，求 EF 长.

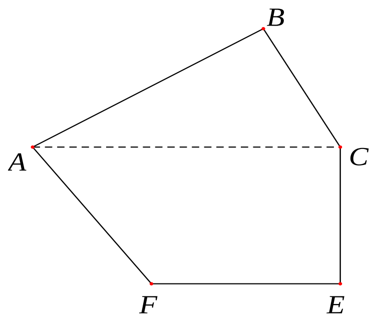


图 1

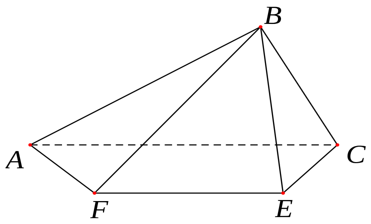


图 2

(18)（本小题 13 分）

某运动品牌拟推出一款青少年新品跑鞋.在前期市场调研时，从某市随机调查了 200 名中小学生对黑、白两种颜色的新品跑鞋的购买意愿，统计数据如下(单位：人)：

颜色	小学生		初中生		高中生	
	愿意	不愿意	愿意	不愿意	愿意	不愿意
黑色	80	20	40	20	20	20
白色	60	40	30	30	30	10

假设所有中小学生的购买意愿相互独立，用频率估计概率.

（Ⅰ）从该市的全体中小学生中随机抽取 1 人，估计其愿意购买黑色新品跑鞋的概率 p；

（Ⅱ）从该市初中生、高中生两个不同群体中各自随机抽取 1 人，记 X 为这 2 人中愿意购买白色新品跑鞋的人数，求 X 的分布列和数学期望 EX；

（Ⅲ）假设该市 A 学校内的小学生、初中生和高中生的人数之比为 $2:2:1$，从 A 学校的全体中小学生中随机抽取 1 人，将其愿意购买黑色新品跑鞋的概率估计值记为 p_A．试比较 p_A 与（Ⅰ）中的 p 的大小.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 设直线$l$： $y=x+m$交椭圆C于不同的两点A,B，与y轴交于点P.

（Ⅰ）当$m=0$时，求$|AB|$的值；

（Ⅱ）若点Q满足$|PQ|=3$且$|QA|=|QB|$，求$\angle AQB$的大小.

（20）（本小题 15 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ln(x+1)-ax$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）求$f(x)$在区间$(-1,0)$上的极值点个数；

（Ⅲ）若$\forall s,t\in(-1,+\infty)$且$s+t\le 0$，都有$f(s)+f(t)\le 0$成立，直接写出$a$的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

记$|M|$表示有穷集合M的元素个数. 已知m,n是正整数，集合$S=\{1,2,...,n\}$. 若集合序列$Q:A_1,A_2,...,A_m$满足下列三个性质，则称Q是“平衡序列”：

①$|A_k|\ge 2$，其中$k=1,2,\cdots,m$；

②$A_k\subsetneqq S$，其中$k=1,2,\cdots,m$；

③对于S中的任意两个不同元素i,j，都存在唯一的$k\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得$\{i,j\}\subseteq A_k$.

（Ⅰ）设$m=n=5$，判断下列两个集合序列是否是“平衡序列”？（结论不要求证明）

$Q_1:\{1,2\},\{1,3,4,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}$

$Q_2:\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,5\}$

（Ⅱ）已知$n\ge 3$且集合序列$Q:A_1,A_2,...,A_m$是“平衡序列”，对于$i=1,2,\cdots n$，定义：

$B_i=\{k\mid i\in A_k,k=1,2,\cdots,m\}$.

证明：

（i）当$1\notin A_1$时，$|B_1|\ge|A_1|$；

（ii）$m\ge n$.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　　（2）B　　（3）D　　（4）C　　（5）D

（6）C　　（7）C　　（8）B　　（9）B　　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-3　　（12）$(0,-1)$　　（13）2，$4+2\sqrt{3}$

（14）$(0,1),\ (2,\frac{1}{2})$　　（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\omega x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x$

$=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$.

若 $\omega=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$，

所以，$f(0)=-\frac{1}{2}$.

因为 $y=\sin x$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（Ⅱ）选条件①.

因为 $\omega>0$，$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{4\omega}\geq\frac{\pi}{3}$，即 $\omega\leq\frac{3}{2}$.

因为 $f(x)=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$，$f(0)+f(\frac{\pi}{6})=0$，

所以 $\sin(-\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=0$，即 $\sin(\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

又因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=6k+1,k\in\mathbf{Z}$，

又 $0<\omega\le\frac{3}{2}$，

所以，$\omega=1$，

所以 $f(x)$ 最小正周期 $T=\pi$.

（Ⅱ）选条件②.

因为 $\omega>0$，$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{4\omega}\ge\frac{\pi}{3}$，即 $\omega\le\frac{3}{2}$.

因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $f(\frac{\pi}{3})=1$，

所以 $\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=3k+1,k\in\mathbf{Z}$，

又 $0<\omega\le\frac{3}{2}$，

所以 $\omega=1$，

所以 $f(x)$ 最小正周期 $T=\pi$.

（17）（本小题 13 分）

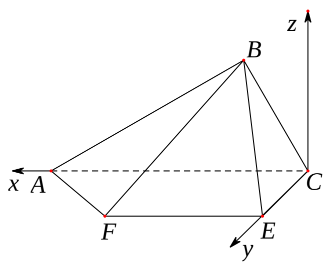
解：（Ⅰ）因为平面 $ABC\perp$ 平面 $ACEF$，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACEF=AC$，$CE\perp AC$，

所以 $CE\perp$ 平面 ABC，

所以 $CE\perp AB$，

又因为 $AB\perp BC$，$BC\cap CE=C$，

所以 $AB\perp$ 平面 BCE.



（Ⅱ）过点 C 在平面 ABC 内作 AC 的垂线 CD，

因为 $CE\perp$ 平面 ABC，

所以 $CD\perp CE$，$CD\perp AC$.

所以建系如图，设 $EF=a$，$a>0$，

则 $A(4,0,0),F(a,2,0)$，$B(1,0,\sqrt{3})$，$E(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AF}=(a-4,2,0),\overrightarrow{BE}=(-1,2,-\sqrt{3}),\overrightarrow{EF}=(a,0,0)$，

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0, \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} -x+2y-\sqrt{3}z=0, \\ ax=0 \end{cases},$$

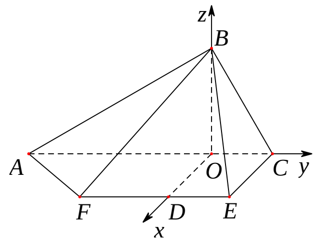
令 $y=\sqrt{3}$，则 $z=2$，于是 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},2)$，

所以，$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{(a-4)^2+4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $a=4$，即 $EF=4$.

其它建系：

（Ⅱ）过点 B 作 $BO\perp AC$，过 O 作 $OD\perp AC$ 交 EF 于 D，



因为平面 $ABC\perp$ 平面 $ACEF$，

所以 $BO\perp$ 平面$ACEF$.

设 $EF=a$，$a>0$，

则 $A(0,-3,0),F(2,1-a,0)$，$B(0,0,\sqrt{3})$，$E(2,1,0)$，$\cdots$7 分

所以，$\overrightarrow{AF}=(2,4-a,0),\overrightarrow{BE}=(2,0,-\sqrt{3}),\overrightarrow{EF}=(0,1-a,0)$，

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0, \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} 2x-\sqrt{3}z=0, \\ (1-a)y=0, \end{cases}$$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $z=2$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,2)$，

所以，$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{4+(4-a)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $a=4$，即 $EF=4$.

（18）（本小题 14 分）

解：

（Ⅰ）依据题目条件用频率估计概率 $p=\dfrac{80+40+20}{200}=0.7$.

（Ⅱ）从该市初中生、高中生两个不同群体中各自随机抽取 1 人，用频率估计概率

初中生愿意购买白色新品跑鞋的概率为 $\dfrac{1}{2}$，

高中生愿意购买白色新品跑鞋的概率为 $\dfrac{3}{4}$，

X 的取值范围为 $\{0,1,2\}$，

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$；

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

期望 $EX=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{8}=\frac{5}{4}$.

（III） $p_A<p$.

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）当 $m=0$ 时， l 为 $y=x$，

代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{2}=1$，解得 $x^2=\frac{3}{2}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{3}$.

（2）由 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-6=0$.

$\Delta=36m^2-16(3m^2-6)=96-12m^2>0$，

解得 $m^2<8$，即 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, AB 中点为 M，

则 $x_1+x_2=-\frac{3}{2}m, x_1x_2=\frac{3m^2-6}{4}$，

可得 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3m}{4}, y_M=x_M+m=\frac{m}{4}$，即 $M(-\frac{3m}{4},\frac{m}{4})$.

由题意可得 $P(0,m)$，

所以 $|MP|=\sqrt{\left(-\frac{3m}{4}\right)^2+\left(\frac{m}{4}-m\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}|m|$，

可得 $|MQ|=\sqrt{|PQ|^2-|MP|^2}=\sqrt{9-\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}|m|\right)^2}=\sqrt{9-\frac{9}{8}m^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{8-m^2}$，

又因为 $|MB|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，

$=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{9m^2}{4}-(3m^2-6)}=\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{8-m^2}$，

因为$|QA|=|QB|$，

所以$QM\perp AB$.

在$Rt\triangle QMB$中，$|MQ|=\sqrt{3}|MB|$，

所以$\angle AQB=\frac{\pi}{3}$.

（20）（本小题15分）

解：（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

因为$f(x)=e^{-x}\ln(x+1)-ax$，

所以$f(0)=0$，$f'(x)=[-\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}]e^{-x}-a$，

所以$f'(0)=1-a$，

所以曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为$y=(1-a)x$.

（Ⅱ）由题设$g(x)=f'(x)$

所以$g'(x)=[\ln(1+x)-\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}]e^{-x}$，

因为$x\in(-1,0)$，所以$\ln(1+x)<0$，$-\frac{2}{1+x}<0$，$-\frac{2}{(1+x)^2}<0$，

所以$g'(x)<0$在$(-1,0)$上恒成立，

所以$g(x)=f'(x)$在区间$(-1,0)$上单调递减，$g(0)=f'(0)=1-a$.

①当$a\le 1$时，$f'(x)>f'(0)=1-a\ge 0$对于任意的$x\in(-1,0)$恒成立，

所以$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，

所以$f(x)$在$(-1,0)$上无极值点.

②当$a>1$时，$f'(0)=1-a<0$，$f'(\frac{1}{a}-1)=(\ln a+a)e^{1-\frac{1}{a}}-a>ae^{1-\frac{1}{a}}-a>a-a=0$，…9分

所以存在唯一的$x_0\in(\frac{1}{a}-1,0)$，使得$f'(x)=0$，其中$-1<\frac{1}{a}-1<0$，

$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-1,x_0)$	x_0	$(x_0,0)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有一个极大值点，无极小值点.

综上，当 $a\le 1$ 时 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上的极值点个数为 0.

当 $a>1$ 时 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上的极值点个数为 1.

（Ⅲ） a 取值范围为 $(-\infty,1]$.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ） Q_1 是平衡的， Q_2 不是平衡的.

（Ⅱ）（ⅰ）当 $1\notin A_1$ 时，对于 A_1 中的每个元素 j ，考虑 $\{1,j\}$.

由③知存在唯一的 $k_j\neq 1$，满足 $\{1,j\}\subseteq A_{k_j}$ ，则 $k_j\in B_1$.

将每一个 $j\in A_1$ 对应到 $k_j\in B_1$，

若 $j\neq j'$，就有 $k_j\neq k_{j'}$， 否则 $\{j,j'\}\subseteq A_1$ 且 $\{j,j'\}\subseteq A_{k_j}$ 与③矛盾.

所以 $|A_1|\le|B_1|$.

（ⅱ）对 $A_1,A_2,...,A_m$ 中所有元素的总个数算两次（重复出现的计多次），

一方面总个数就是 $|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|$，

另一方面，按照每个元素出现的次数计算，这个总个数也是 $|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n|$，

所以 $|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|=|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n|$.（*）

不妨设 $|B_1|,|B_2|,...,|B_n|$ 中最小的（之一）为 $|B_n|$，

且 $B_n=\{1,2,...,t\}$， 由②③知 $1<t<n$.

再不妨设 $s\in A_s$ （ $s=1,2,...,t$ ）.

由（i）的证明方法可证：当 $i\notin A_k$ 时， $|B_i|\ge|A_k|$，

由③知 $s\notin A_{s+1}$ （ $s=1,2,...,t-1$ ）， $t\notin A_1$，

所以 $|A_{s+1}|\le|B_s|$ （ $s=1,2,...,t-1$ ）， $|A_1|\le|B_t|$，

又因为 $n\notin A_{t+1},A_{t+2},...,A_m$， 所以 $|A_{t+1}|,|A_{t+2}|,...,|A_m|$ 都不大于 $|B_n|$，

全部相加得 $|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|\le|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(m-t)|B_n|$，

由 $|B_n|$ 的最小性知 $|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_n|\ge|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(n-t)|B_n|$，

结合（*）可得

$$|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(m-t)|B_n|\ge|B_1|+|B_2|+\cdots+|B_t|+(n-t)|B_n|,$$

所以 $m\ge n$.