2025 北京西城高三二模

数　　学

2025.5

本试卷共 6 页， 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,x^2+2x=0\}$，集合 $B=\{x\,|\,x+1>0\}$，那么

（A） $A\cap B=\varnothing$　　（B） $A\subseteq B$

（C） $B\subseteq A$　　（D） $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B\neq\varnothing$

（2）设 i 为虚数单位，则在复平面内，复数 $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）设 $a=\lg 2$， $b=\lg 3$，则 $\lg 15=$

（A） $(1-a)b$　　（B） $1-a+b$

（C） $(1+a)b$　　（D） $1+a-b$

（4）若 $(x^2+1)^4=a_0+a_1x^2+a_2x^4+a_3x^6+a_4x^8$，则 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=$

（A） 0　　（B） 1

（C） 4　　（D） 8

（5）设圆 $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ 的圆心为 M，直线 $y=-x+t$ 与该圆相交于两点 A, B.

若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-4$，则实数 $t=$

（A） 1　　（B） 3 或 1

（C） 3　　（D） 3 或 -1

（6）设 $F(c,0)$ 为双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的右焦点. 已知 a,b,c 成等差数列，那么双曲线 E 的离心率等于

（A） $\dfrac{2}{3}$　　（B） $\dfrac{5}{3}$

（C） $\dfrac{3}{2}$　　（D） 2

（7）设平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线， $k,s\in\mathbf{R}$，则“ $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $s\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线”是“ $sk=2$ ”的

（A）充分不必要条件　　　　　　　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（8）小明在某印刷服务公司看到如下广告："本公司承接图纸复印业务，规格可达 A1，B1 大小 ……". 他不禁好奇：A1，B1 复印纸有多大呢？据查：所有的复印纸均为矩形，其长与宽的比值不变，且两张 A4 纸可以拼接成一张 A3 纸，两张 A3 纸可以拼接成一张 A2 纸 ……. 已知 A4 纸的宽为 $210\ \text{mm}$，那么 A1 纸的长和宽约为

（A）$840\ \text{mm}$，$594\ \text{mm}$　　　　（B）$840\ \text{mm}$，$588\ \text{mm}$

（C）$594\ \text{mm}$，$420\ \text{mm}$　　　　（D）$588\ \text{mm}$，$420\ \text{mm}$

（9）设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P 为正方体表面上一点，且点 P 到直线 AA_1 的距离与它到平面 $ABCD$ 的距离相等. 记动点 P 的轨迹为曲线 W，则曲线 W 的周长为

（A）$3\sqrt{2}$　　　　（B）$2\sqrt{2}+\pi$

（C）$6\sqrt{2}$　　　　（D）$4\sqrt{2}+\pi$

（10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4a, & x\leqslant 1,\\ x^2-2ax+3, & x>1.\end{cases}$ 若对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2)>f(x)$，那么实数 a 的取值范围是

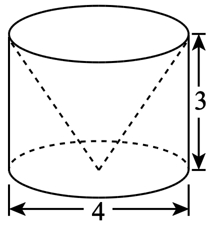
（A）$[-4,4)$　　　　（B）$[-4,2]$

（C）$(-\infty,4)$　　　　（D）$(-\infty,2]$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{3}{x^2}$ 的定义域为____.



（12）一个金属模具的形状、大小如右图所示，它是圆柱被挖去一个倒立的圆锥剩余的部分. 那么该模具的体积为____.

（13）设函数 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$，则使得函数 $f(x+\varphi)\ (|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上存在最大值的一个 φ 值为____.

（14）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=4$，$a_5=-3$，且任意连续三项的和均为 7，则 $a_{2025}=$____；记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则使得 $S_n\leqslant 100$ 成立的最大整数 $n=$____.

（15）数学中有许多形状优美、应用广泛的曲线. 双纽线 C：$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 就是其中之一（如图），其定义为：在平面内，到两个定点 $A(-a,0)$ 和 $B(a,0)\,(a>0)$ 的距离之积为常数 a^2 的点的轨迹. 设 $P(x_0,y_0)\,(y_0\neq 0)$ 为 C 上一点，给出下列四个结论：

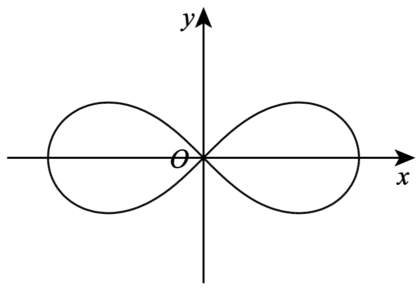
① $|x_0|\leqslant\sqrt{2}a$；

② $|y_0|\leqslant\dfrac{a}{2}$；

③ 若点 P 在第一象限，则 $|OP|<\sqrt{2}x_0$；

④ $\triangle PAB$ 的周长可以等于 $5a$.

其中，所有正确结论的序号是____.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

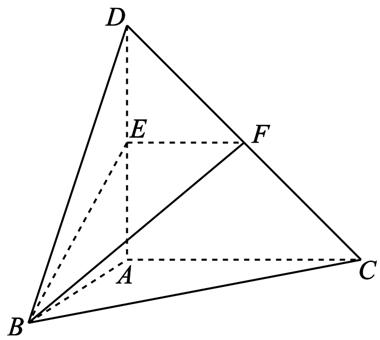
已知$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}\sin A+2\sin^2\dfrac{A}{2}=2$.

（Ⅰ）求$\angle A$的大小；

（Ⅱ）设D为AB的中点，且$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$AC=2$，求$\triangle ABC$的面积.

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥$D-ABC$中，平面$DAB\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，E,F分别为DA,DC的中点.



（Ⅰ）求证：平面$BEF\perp$平面DAB；

（Ⅱ）设$AB=AC=2$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求平面BEF与平面ABC夹角的余弦值.

条件①：$AD=2$；

条件②：$BD=BC$；

条件③：$AB\perp CD$.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 13 分）

网络搜索已成为人们获取信息或解决问题的重要手段. 为研究某传染性疾病的未来流行趋势，收集得到该疾病某月1号至30号的网络搜索量（单位：万次）如下：

时间	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	6 号	7 号	8 号	9 号	10 号	11 号	12 号	13 号	14 号	15 号
搜索量	6.2	5.1	6.1	7.2	6.1	7.4	6.2	6.3	6.4	6.3	7.1	6.3	7.3	7.6	7.9
时间	16 号	17 号	18 号	19 号	20 号	21 号	22 号	23 号	24 号	25 号	26 号	27 号	28 号	29 号	30 号
搜索量	8.5	11.2	10.3	9.1	9.6	10.1	10.6	10.9	8.8	10.4	8.2	11.5	12.1	12.8	13.6

用频率估计概率.

（Ⅰ）从2号至14号中任取1天，求该天的搜索量比其前后两日的搜索量都低的概率；

（Ⅱ）假设该疾病每天的搜索量变化是相互独立的. 在未来的日子里任取 3 天，试估计这 3 天该疾病搜索量的数据中既有高于 10 万又有低于 8 万的概率；

（Ⅲ）记表中30天的搜索量的平均数为 x_1，去除搜索量中最大的3个和最小的3个后剩余24个搜索量的平均数为 x_2，试给出 x_1 与 x_2 的大小关系.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，直线 $x+\sqrt{2}y+2\sqrt{2}=0$ 经过椭圆 E 的左顶点 A 和下顶点 B.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程和离心率；

（Ⅱ）设过点 $G(0,s)\ (s>0)$ 且斜率不为0的直线交椭圆 E 于 C,D 两点，直线 BC, BD 与直线 $y=t$ 的交点分别为 P,Q，线段 $CD,\ PQ$ 的中点分别为 M,N. 若直线 MN 经过坐标原点，求 $s+t$ 的取值范围.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=a(x-1)\mathrm{e}^{x}-\ln x$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线经过点 $(2,2)$，求 a 的值；

（Ⅱ）证明：函数 $f(x)$ 存在极小值；

（Ⅲ）记函数 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$，求 $g(a)$ 的最大值.

（21）（本小题 15 分）

已知 $N(N\geqslant 3)$ 项数列 A：$a_1,a_2,\cdots,a_N$，对于给定 $i\,(i=1,2,\cdots,N)$，定义变换 f_i：将数列 A 中的项 a_i 替换为 t，其余项均保持不变，记得到的新数列为 $f_i(A)$. 其中，当 $i=1$ 时，

$t=\dfrac{a_1+a_2}{2}$；当 $2\leqslant i\leqslant N-1$ 时，$t=\dfrac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$；当 $i=N$ 时，$t=\dfrac{a_{N-1}+a_N}{2}$.

若将数列 $f_i(A)$ 再进行上述变换 $f_j\,(j=1,2,\cdots,N)$，记得到的新数列为 $f_jf_i(A)$，…，重复操作，得到数列 $f_k\cdots f_jf_i(A)$ $(k=1,2,\cdots,N)$，并称 f_i 为第一次 f 变换，f_j 为第二次 f 变换，….

（Ⅰ）若数列 A: $1,-1,3,-4$，求数列 $f_2(A)$ 和 $f_1f_2f_2(A)$；

（Ⅱ）设 A 为递增数列，对 A 进行有限次 f 变换后得到数列 B. 证明：B 为递增数列；

（Ⅲ）当第 $m\,(m\in\mathbf{N}^*)$ 次 f 变换前后两个数列的首项乘积为负数时，令 $\omega_m=1$；否则 $\omega_m=0$.对于给定的 N 项数列 A，进行 2025 次 f 变换，证明：$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{2025}\leqslant N-1$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D　（2）D　（3）B　（4）A　（5）D

（6）B　（7）C　（8）A　（9）D　（10）B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$[-1,0)\cup(0,+\infty)$　（12）8π

（13）$-\dfrac{\pi}{3}$（答案不唯一）　（14）6　44

（15）①②③

注：（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；（15）题全部选对得 5 分，有两个选对且无错选得 3 分，有一个选对且无错选得 2 分，其他得 0 分.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\sqrt{3}\sin A+2\sin^2\dfrac{A}{2}=2$，得 $2\sqrt{3}\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=2\cos^2\dfrac{A}{2}$.　……………… 3 分

由 $A\in(0,\pi)$，得 $\cos\dfrac{A}{2}\neq 0$，故 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.　……………… 5 分

（Ⅱ）由正弦定理，得 $\dfrac{CD}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$，即 $CD=\dfrac{AC\cdot\sin A}{\sin\angle ADC}=\sqrt{7}$.　…………… 8 分

由余弦定理，得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos A$，

即 $(\sqrt{7})^2=2^2+AD^2-2\times2\times AD\times\cos\dfrac{\pi}{3}$，解得 $AD=3$ 或 $AD=-1$（舍）. … 11 分

所以 $AB=2AD=6$，

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\times AB\times\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times6\times\sin\dfrac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$.　……………… 13 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $AC\perp AB$，平面 $DAB\perp$ 平面 ABC，平面 $DAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，

所以 $AC\perp$ 平面 DAB.　……………… 3 分

由 E,F 分别为 DA,DC 中点，得 $EF//AC$，

所以 $EF\perp$ 平面 DAB.

又因为 $EF\subset$ 平面 BEF，

所以平面 $BEF\perp$ 平面 DAB.　……………… 6 分

（Ⅱ）选择条件①②：

因为 $AD=AB=AC=2$， $AB\perp AC$， $BD=BC$，

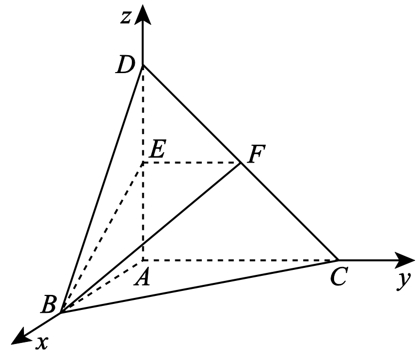
所以 $BD=2\sqrt{2}$，则 $AB^2+AD^2=BD^2$．

所以 $AB\perp AD$．

由 $AC\perp$ 平面 DAB，得 $AC\perp AD$．

故 $AC,\ AD,\ AB$ 两两垂直.　　　　　　　　　　　……………… 7 分

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$， $D(0,0,2)$， $E(0,0,1)$， $F(0,1,1)$． $\overrightarrow{EF}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{BE}=(-2,0,1)$．　　　……………… 8 分



设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ -2x+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=2$．于是 $\boldsymbol{m}=(1,0,2)$．……… 11 分

易知平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$．

设平面 BEF 与平面 ABC 夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

所以平面 BEF 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．　　　……………… 14 分

选择条件①③：

由 $AC\perp$ 平面 DAB，得 $AC\perp AD$．

因为 $AB\perp CD$， $AB\perp AC$， $AC\cap CD=C$，

所以 $AB\perp$ 平面 DAC．

所以 $AB\perp AD$．故 $AC,\ AD,\ AB$ 两两垂直.　　　……………… 7 分

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，以下同选条件①②，略.

选择条件②③：

由 $AC\perp$ 平面 DAB，得 $AC\perp AD$．

因为 $AB\perp CD$， $AB\perp AC$， $AC\cap CD=C$，

所以 $AB\perp$ 平面 DAC．

所以 $AB\perp AD$．故 $AC,\ AD,\ AB$ 两两垂直.

又因为 $AB=AC=2$， $BD=BC$，

所以 $BC^2=AB^2+AC^2=8$， $AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=2$．　　　……………… 7 分

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，以下同选条件①②，略.

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）记事件 A 为“从 2 号至 14 号中任取 1 天，且该天搜索量比其前后两日的搜索量都低”，

根据数据，知仅有 $2, 5, 7, 10, 12$ 号这 5 天的搜索量比其前后两日的搜索量都低，

所以从 2 号至 14 号中任取 1 天，该天搜索量比其前后两日的搜索量都低的概率 $P(A)=\frac{5}{13}$.

………………… 4 分

（Ⅱ）记事件 B 为“在未来的日子里任取 3 天，且这 3 天该疾病搜索量的数据中既有高于 10 万又有低于 8 万”，

根据数据，知在未来的日子里某天该疾病的搜索量高于 10 万的概率可估计为 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$，低于 8 万的概率可估计为 $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.　………………… 7 分

则 $P(B)=\mathrm{C}_3^1\times\frac{1}{3}\times\mathrm{C}_2^1\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\mathrm{C}_3^2\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{2}+\mathrm{C}_3^2\times(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$.

所以在未来的日子里任取 3 天，估计这 3 天该疾病搜索量的数据中既有高于 10 万又有低于 8 万的概率为 $\frac{7}{12}$.　………………… 10 分

（Ⅲ）$x_1>x_2$.　………………… 13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为直线 $x+\sqrt{2}y+2\sqrt{2}=0$ 与坐标轴交点为 $A(-2\sqrt{2},0)$ 和 $B(0,-2)$，

所以 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$.　………………… 2 分

由 $a^2=b^2+c^2$，解得 $c=2$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　………………… 5 分

（Ⅱ）由题意，直线 CD 的斜率存在，故设其方程为 $y=kx+s\,(k\neq 0)$，　…………… 6 分

设点 $C(x_1,y_1), D(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=kx+s, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4ksx+2s^2-8=0$，

所以 $\Delta=16k^2s^2-4(2k^2+1)(2s^2-8)>0$，$x_1+x_2=\frac{-4ks}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2s^2-8}{2k^2+1}$.

所以点 M 的横坐标 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2ks}{2k^2+1}$，纵坐标 $y_M=kx_M+s=\frac{s}{2k^2+1}$.… 9 分

结合直线 MN 过坐标原点，可得直线 MN 的方程为 $x+2ky=0$.

令 $y=t$，得点 N 的坐标为 $(-2kt,t)$.

当 $s\neq 2$ 时，显然点 C,D 不在 y 轴上.

则直线 BC：$y=\frac{y_1+2}{x_1}\cdot x-2$，直线 BD：$y=\frac{y_2+2}{x_2}\cdot x-2$.

令 $y=t$，得点 $P(\frac{(t+2)x_1}{y_1+2},t)$，$Q(\frac{(t+2)x_2}{y_2+2},t)$.

由线段 PQ 的中点为 N，得 $\frac{(t+2)x_1}{y_1+2}+\frac{(t+2)x_2}{y_2+2}=-4kt$， ……………… 11 分

整理，得 $(4k^3t+2kt+4k)x_1x_2+(4k^2t+t+2)(s+2)(x_1+x_2)+4kt(s+2)^2=0$，

即 $(4k^3t+2kt+4k)\cdot\frac{2s^2-8}{2k^2+1}+(4k^2t+t+2)(s+2)\cdot\frac{-4ks}{2k^2+1}+4kt(s+2)^2=0$，

化简，得 $k(s+2)(st-4)=0$.

由 $k\neq 0,\quad s>0$，得 $st=4$. ……………… 13 分

当 $s=2$ 时，由题意，点 C,D 中有一个与点 G 重合（不妨设点 D 与点 G 重合），

则 O 为 BD 中点，且 $Q(0,t)$，

在△BCD 中，$OM//BC$，则直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{2k}x-2$，故 $P(-2k(t+2),t)$.

由 PQ 的中点为 N，得 $-k(t+2)=-2kt$，即 $t=2$，故 $st=4$. …………… 14 分

所以 $s+t\geqslant 2\sqrt{st}=4$，当且仅当 $s=t=2$ 时等号成立.

综上，$s+t$ 的取值范围为 $[4,+\infty)$. ……………… 15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）求导，得 $f'(x)=axe^x-\frac{1}{x}$， ……………… 2 分

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=ae-1$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(ae-1)(x-1)$，

将点 $(2,2)$ 代入切线方程，得 $a=\frac{3}{e}$. ……………… 4 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{ax^2e^x-1}{x}$.

设函数 $m(x)=ax^2e^x-1$，则 $m'(x)=a(x^2+2x)e^x$，

由 $x>0$，得 $m'(x)>0$，

所以函数 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ……………… 6 分

因为 $m(0)=-1<0$，$m(\frac{1}{\sqrt{a}})=e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}-1>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{1}{\sqrt{a}})$，使得 $m(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

故函数 $f(x)$ 存在极小值 $f(x_0)$.　　　　　　………………… 9 分

（III）由（II）知，函数 $f(x)$ 有最小值 $f(x)_{\min}=f(x_0)=g(a)$.

由 $f'(x_0)=ax_0\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，得 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}x_0^2}$.

所以 $g(a)=f(x_0)=a(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{x_0-1}{x_0^2}-\ln x_0$.　　　　………………… 11 分

设函数 $h(x)=\dfrac{x-1}{x^2}-\ln x$，则 $h'(x)=\dfrac{-(x+2)(x-1)}{x^3}$.　　　　………………… 12 分

令 $h'(x)=0$，得 $x=-2$（舍）或 $x=1$.

当 x 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $x=1$ 时，$h(x)_{\max}=h(1)=0$，即当 $x_0=1$ 时，$f(x_0)_{\max}=0$.

结合 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}x_0^2}$，知当 $x_0=1$ 时，$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

由函数 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}x^2}(x>0)$ 的导数 $y'=\dfrac{-(x+2)}{\mathrm{e}^{x}x^3}<0$，知其在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

故当且仅当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时 $x_0=1$.

所以当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$g(a)$ 取得最大值 0.　　　　………………… 15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（I）由题意，得数列 $f_2(A)$：$1,1,3,-4$，数列 $f_2f_2(A)$：$1,\dfrac{5}{3},3,-4$，

故数列 $f_1f_2f_2(A)$：$\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3},3,-4$.　　　　………………… 3 分

（II）若对 A：$a_1,a_2,\cdots,a_N\,(N\geqslant 3)$ 进行 f_1 变换，即将 a_1 替换为 $\dfrac{a_1+a_2}{2}$，其余项不变，

由 $a_1<a_2$，得 $\dfrac{a_1+a_2}{2}<a_2$，故 $f_1(A)$ 仍为递增数列；　　　　………………… 5 分

若对 A 进行 $f_i(i=2,3,\cdots,N-1)$ 变换，即将 a_i 替换为 $\dfrac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$，其余项不变，

由 $a_{i-1}<a_i<a_{i+1}$，得 $a_{i-1}<\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}<a_{i+1}$，故 $f_i(A)$ 仍为递增数列； …… 7 分

若对 A 进行 f_N 变换，即将 a_N 替换为 $\frac{a_{N-1}+a_N}{2}$，其余项不变，

由 $a_{N-1}<a_N$，得 $a_{N-1}<\frac{a_{N-1}+a_N}{2}$，故 $f_N(A)$ 仍为递增数列.

综上，对于任意 $i=1,2,\cdots,N$，对 A 进行 f_i 变换后 $f_i(A)$ 仍为递增数列.

以此类推，知对 A 进行有限次 f 变换后，所得的数列 B 为递增数列. …… 9 分

（Ⅲ）记数列 A：$a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中去除等于 0 的项后得到的数列为 A'（其余项相对位置不变，下同），$f_i(A)$ 中去除为 0 的项后得到的数列为 $f_i'(A)$.

设 A' 中相邻两项乘积为负数的有 S 对，$f_i'(A)$ 中相邻两项乘积为负数的有 S' 对，则 $0\leqslant S\leqslant N-1$. ……………… 11 分

如果对 A 进行 f_1 变换，即将 a_1 替换为 $\frac{a_1+a_2}{2}$，

此时若 a_1 与 a_2 同号，则数列 $f_1'(A)$ 中相邻两项乘积为负数的仍有 S 对，即 $S'=S$；若 a_1 与 a_2 异号，则 $S'=S$ 或 $S'=S-1$；若 a_1 与 a_2 中有 0，则 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 一定不与 a_2 异号，故 $S'=S$.

如果对 A 进行 $f_i(i=2,3,\cdots,N-1)$ 变换，即将 a_i 替换为 $\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$，

此时若 a_i 与 $\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$ 同号，则 $S'=S$；若 a_i 与 $\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$ 异号，有以下三种情况：

① 若 a_{i-1} 与 a_{i+1} 同号，显然 a_i 也与 a_{i-1} 异号，则 $S'=S-2$；

② 若 a_{i-1} 与 a_{i+1} 异号，则 $S'=S$；

③ 若 a_{i-1} 与 a_{i+1} 中有 0，易知只有一个 0，不妨设 $a_{i-1}=0$，则 a_i 与 a_{i+1} 异号，故 $S'=S$，或 $S'=S-1$，或 $S'=S-2$.

若 a_i 与 $\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$ 同为 0，则 $S'=S$；

若 $a_i=0$，$\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}\neq 0$，不妨设 $|a_{i-1}|\geqslant|a_{i+1}|$，则 $\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}$ 与 a_{i-1} 同号，故 $S'=S$；

若 $a_i\neq 0$，$\frac{a_{i-1}+a_i+a_{i+1}}{3}=0$，不妨设 $|a_{i-1}|\geqslant|a_{i+1}|$，则 a_i 与 a_{i-1} 异号，故 $S'=S$ 或 $S'=S-2$；

对 A 进行 f_N 变换与进行 f_1 变换类似.

综上，对 A 进行一次 f 变换后，$0\leqslant S'\leqslant S\leqslant N-1$. ……………… 13 分

以此类推，对 A 进行 2025 次 f 变换，每一次变换后所得数列中去除等于 0 的项后相邻两项乘积为负数的对数 S^* 比变换前的并不会增大，且 $S^*\leqslant N-1$.

在此之中，若某一次变换使得第一项的正负号发生改变，则该变换一定是 f_1 变换，且变换之前数列的第一项与第二项异号，故变换之后所得数列中去除等于 0 的项后相邻两项乘积为负数的对数

比变换前减少 1 对.

所以对 A 进行 2025 次 f 变换时，其第一项的正负号最多发生 $N-1$ 次改变，即 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{2025} \leqslant N-1$. ………………… 15 分