# 2024北京朝阳高三二模

# 数　　学

2024.5

（考试时间120分钟 满分150分）

本试卷分为选择题40分和非选择题110分

## 第一部分（选择题　共40分）

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

（1）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2<10\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{2,3\}$　　（C）$\{3,4\}$　　（D）$\{2,3,4\}$

（2）下列函数中，既是奇函数又在其定义域上是增函数的是

（A）$f(x)=\sin x$　　（B）$f(x)=\cos x$

（C）$f(x)=\sqrt{x}$　　（D）$f(x)=x^3$

（3）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_1=1$，$a_4=7$，则 $S_{10}=$

（A）60　　（B）80　　（C）90　　（D）100

（4）已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F$，点 $P$ 为 $C$ 上一点．若 $|PF|=8$，则点 $P$ 的横坐标为

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8

（5）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\leqslant 1,\\ 2^x-a, x>1\end{cases}$ 存在最小值，则实数 $a$ 的取值范围是

（A）$(-\infty,1]$　　（B）$(-\infty,1)$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$(1,+\infty)$

（6）已知 $\alpha,\beta$ 是两个互相垂直的平面，$l,m$ 是两条直线，$\alpha\cap\beta=l$，则“$m\perp l$”是“$m\perp\alpha$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，锐角 $\alpha$ 以 $O$ 为顶点，$Ox$ 为始边．将 $\alpha$ 的终边绕 $O$ 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 后与单位圆交于点 $P(x,y)$，若 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，则 $y=$

（A）$-\dfrac{4}{5}$　　（B）$-\dfrac{3}{5}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

（8）假设某飞行器在空中高速飞行时所受的阻力 $f$ 满足公式 $f=\dfrac{1}{2}\rho CSv^2$，其中 $\rho$ 是空气密度，$S$ 是该飞行器的迎风面积，$v$ 是该飞行器相对于空气的速度，$C$ 是空气阻力系数（其大小取决于多种其他因素），反映该飞行器克服阻力做功快慢程度的物理量为功率 $P=fv$．当 $\rho,S$ 不变，$v$ 比原来提高10%时，下列说法正确的是

（A）若 $C$ 不变，则 $P$ 比原来提高不超过30%

（B）若 $C$ 不变，则 $P$ 比原来提高超过40%

（C）为使 $P$ 不变，则 $C$ 比原来降低不超过30%

（D）为使 $P$ 不变，则 $C$ 比原来降低超过40%

（9）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F$ ，$c$ 是双曲线 $C$ 的半焦距，点 $A$ 是圆 $x^2+y^2=c^2$ 上一点，线段 $FA$ 与双曲线 $C$ 的右支交于点 $B$ ．若 $|FA|=a,\ \overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{FB}$ ，则双曲线 $C$ 的离心率为

（A）$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　（B）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\sqrt{7}$　　（D）$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

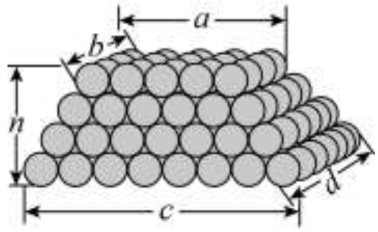
（10）北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中记载了“隙积术”，提出长方台形垛积的一般求和公式．如图，由大小相同的小球堆成的一个长方台形垛积的第一层有 $ab$ 个小球，第二层有 $(a+1)(b+1)$ 个小球，第三层有 $(a+2)(b+2)$ 个小球……依此类推，最底层有 $cd$ 个小球，共有 $n$ 层，由“隙积术”可得这些小球的总个数为 $\dfrac{n[(2b+d)a+(2d+b)c+(c-a)]}{6}$ ．若由小球堆成的某个长方台形垛积共 8 层，小球总个数为240，则该垛积的第一层的小球个数为

（A）1

（B）2

（C）3

（D）4




## 第二部分（非选择题 共 110 分）

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。**

（11）若复数 $z$ 满足 $(1-\mathrm{i})z=2$ ，则 $z$ 的虚部为________．

（12）已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$ ，$\boldsymbol{b}=(-k,2)$ ，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,//\,\boldsymbol{a}$ ，则实数 $k=$ ________．

（13）在 $(1-3x)^n$ 的展开式中，若各二项式系数的和等于 $64$ ，则 $n=$________，此时 $x^2$ 的系数是________．（用数字作答）

（14）若直线 $y=k(x+2)-1$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个不同的交点，则实数 $k$ 的一个取值为________．

（15）设 $n$ 为正整数，已知函数 $f_1(x)=x^2-1,\ f_2(x)=|x-\dfrac{1}{2}|,\ f_3(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2\pi x$ ，当 $k\in\{1,2,3\}$ 时，记

$I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_n)-f_k(a_{n-1})|$ ，其中 $a_i=\dfrac{i}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$ ．给出下列四个结论：

① $\forall n\in\mathbf{N}^*$ ，$I_1=1$ ；

② $\forall n\in\mathbf{N}^*$ ，$I_2<I_3$ ；

③ 若 $n=2023$，则 $I_2<I_1<I_3$；

④ 若 $n=2024$，则 $I_2<I_1<I_3$.

其中所有正确结论的序号是________.

**三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

（16）（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 为锐角，且 $\sin 2A=\frac{6}{5}\cos A$.

（Ⅰ）求 $\cos A$ 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求 $c$.

条件①：$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3}$；

条件②：$a=9$；

条件③：$b=10$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 13 分）

科技发展日新月异，电动汽车受到越来越多消费者的青睐．据统计，2023 年 1 月至 12 月 A，B 两地区电动汽车市场各月的销售量数据如下：

| | 1月 | 2月 | 3月 | 4月 | 5月 | 6月 | 7月 | 8月 | 9月 | 10月 | 11月 | 12月 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A 地区（单位：万辆） | 29.4 | 39.7 | 54.3 | 49.4 | 56.2 | 65.4 | 61.1 | 68.2 | 70.2 | 71.9 | 77.1 | 89.2 |
| B 地区（单位：万辆） | 7.8 | 8.8 | 8.1 | 8.3 | 9.2 | 10 | 9.7 | 9.9 | 10.4 | 9.4 | 8.9 | 10.1 |
| 月销量比 | 3.8 | 4.5 | 6.7 | 6.0 | 6.1 | 6.5 | 6.3 | 6.9 | 6.8 | 7.6 | 8.7 | 8.8 |

月销量比是指：该月 A 地区电动汽车市场的销售量与 B 地区的销售量的比值（保留一位小数）.

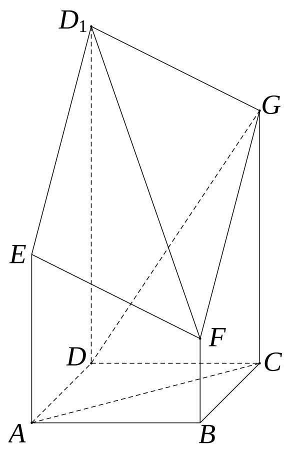
（Ⅰ）在 2023 年 2 月至 12 月中随机抽取 1 个月，求 A 地区电动汽车市场该月的销售量高于上月的销售量的概率；

（Ⅱ）从 2023 年 1 月至 12 月中随机抽取 3 个月，求在这 3 个月中恰有 1 个月的月销量比超过 8 且至少有 1 个月的月销量比低于 5 的概率；

（Ⅲ）记 2023 年 1 月至 12 月 A，B 两地区电动汽车市场各月的销售量数据的方差分别为 $s_1^2,s_2^2$，试判断 $s_1^2$ 与 $s_2^2$ 的大小.（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，六面体 $ABCD-EFGD_1$ 是直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被过点 $D_1$ 的平面 $\alpha$ 所截得到的几何体，$DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$DD_1=4, AE=2, CG=3$.




（Ⅰ）求证：$AC\perp D_1F$；

（Ⅱ）求平面 $EFGD_1$ 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值；

（Ⅲ）在线段 $DG$ 上是否存在一点 $P$，使得 $AP//$ 平面 $EFGD_1$？若存在，求出 $\dfrac{DP}{DG}$ 的值；若不存在，说明理由.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E$ 的两个顶点分别为 $A(-2,0), B(2,0)$，焦点在 $x$ 轴上，且椭圆 $E$ 过点 $C(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆 $E$ 的方程；

（Ⅱ）设 $O$ 为原点，不经过椭圆 $E$ 的顶点的直线 $l$ 与椭圆 $E$ 交于两点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)\ (x_1\neq x_2)$，直线 $BP$ 与直线 $OC$ 交于点 $H$，点 $M$ 与点 $Q$ 关于原点对称.

（ⅰ）求点 $H$ 的坐标（用 $x_1,y_1$ 表示）；

（ⅱ）若 $A,H,M$ 三点共线，求证：直线 $l$ 经过定点.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax-\ln(1-x)\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 $a$ 的值；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 有两个不同的零点 $x_1,x_2$，且 $|x_2-x_1|>\mathrm{e}-1$，求 $a$ 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

设 $n$ 为正整数，集合 $A_n=\{\alpha\mid\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n), a_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}$. 对于 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，设集合 $P(\alpha)=\{t\in\mathbf{N}\mid 0\leqslant t\leqslant n-1, a_{i+t}=a_i, i=1,2,\cdots,n-t\}$.

（Ⅰ）若 $\alpha=(0,1,0,0,1,0), \beta=(0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,0)$，写出集合 $P(\alpha),P(\beta)$；

（Ⅱ）若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，且 $s,t\in P(\alpha)$ 满足 $s<t$，令 $\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-s})\in A_{n-s}$，求证：$t-s\in P(\alpha')$；

（Ⅲ）若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，且 $P(\alpha)=\{s_1,s_2,\cdots,s_m\}\ (s_1<s_2<\cdots<s_m, m\geqslant 3)$，求证：

$2s_{k+1}\geqslant s_k+s_{k+2}\ (k=1,2,\cdots,m-2)$.

# 参考答案

**一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| （1）B | （2）D | （3）D | （4）C | （5）A |
| （6）B | （7）D | （8）C | （9）A | （10）B |

**二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）**

（11）1　　（12）$-\frac{3}{2}$　　（13）6　135

（14）1（答案不唯一）　　（15）① ③

**三、解答题（共 6 小题，共 85 分）**

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sin 2A = \frac{6}{5}\cos A$，

所以 $2\sin A\cos A = \frac{6}{5}\cos A$．

因为 $\angle A$ 为锐角， $\cos A > 0$，

所以 $\sin A = \frac{3}{5}$．

又因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$，

所以 $\cos A = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$． ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）选条件①②：

因为 $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$， 又 $0 < B < \pi$，

所以 $\sin B = \sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}}{3})^2} = \frac{2}{3}$．

由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$， 得 $b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{9\times\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = 10$．

由 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， 得 $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{81+c^2-100}{2\times 9\times c}$，

即 $c^2 - 6\sqrt{5}c - 19 = 0$， 又 $c > 0$，

所以 $c = 8+3\sqrt{5}$． ……………………………………………………13 分

选条件①③：

因为 $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$， 又 $0 < B < \pi$，

所以 $\sin B = \sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}}{3})^2} = \frac{2}{3}$．

由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$， 得 $a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{10\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = 9$．

下同选条件①②． ……………………………………………………13 分

选条件②③：

由$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，得$\frac{4}{5}=\frac{100+c^2-81}{2\times10\times c}$，

即$c^2-16c+19=0$，解得$c=8\pm3\sqrt{5}$．经检验，符合题意．............................13分

（17）（共13分）

解：（Ⅰ）设事件$C$为“A地区电动汽车市场该月的销售量高于上月的销售量”，

在2023年2月至12月中，A地区电动汽车市场该月的销售量高于上月的销售量的月份为2月、3月、5月、6月、8月、9月、10月、11月、12月，共9个月，

所以$P(C)=\frac{9}{11}$．......................................................................................4分

（Ⅱ）设事件$D$为“这3个月中恰有1个月的月销量比超过8且至少有1个月的月销量比低于5”，在2023年1月至12月中，月销量比超过8的只有11月和12月，月销量比低于5的只有1月和2月，

则$P(D)=\frac{C_2^1C_2^1C_8^1+C_2^2C_2^1}{C_{12}^3}=\frac{17}{110}$．..........................................................10分

（Ⅲ）$s_1^2>s_2^2$．..............................................................................................13分

（18）（共14分）

解：（Ⅰ）连接$BD$．因为直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$BF//DD_1$，

所以点$F$在平面$D_1DB$内．

因为$DD_1\perp$底面$ABCD$，且$AC\subset$平面$ABCD$，

所以$DD_1\perp AC$．

又因为底面$ABCD$为正方形，所以$AC\perp BD$．

又因为$DD_1\cap BD=D$，

所以$AC\perp$平面$D_1DBF$．

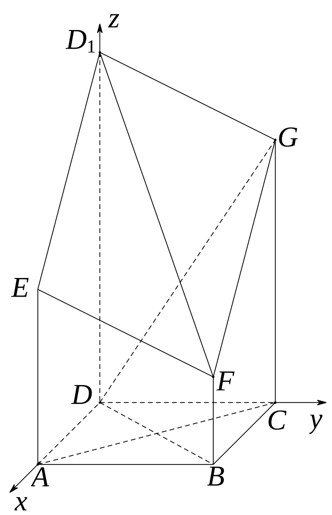
所以$AC\perp D_1F$．..............................................................................................5分

（Ⅱ）因为$DD_1\perp$底面$ABCD$，

所以$DD_1\perp DA, DD_1\perp DC$．

又因为底面$ABCD$为正方形，所以$DA\perp DC$．

如图建立空间直角坐标系$D-xyz$，




则$E(2,0,2),G(0,2,3),D_1(0,0,4)$．

因此$\overrightarrow{D_1E}=(2,0,-2),\overrightarrow{D_1G}=(0,2,-1)$．

设平面$EFGD_1$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1G}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x-2z=0,\\ 2y-z=0.\end{cases}$

令$z=2$，则$x=2,y=1$．于是$\boldsymbol{n}=(2,1,2)$．

因为$DD_1\perp$底面$ABCD$，

所以$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,4)$是平面$ABCD$的一个法向量．

设平面$EFGD_1$与平面$ABCD$的夹角为$\theta$，则

$\cos\theta = |\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{DD_1}\rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DD_1}|} = \dfrac{8}{3\times 4} = \dfrac{2}{3}$.

所以平面 $EFGD_1$ 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$. ........................................ 11 分

（Ⅲ）存在一点 $P$ 使得 $AP //$ 平面 $EFGD_1$，此时 $\dfrac{DP}{DG} = \dfrac{1}{2}$，理由如下：

设 $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DG}(\lambda\in[0,1])$，

则 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{DG} = (-2,0,0) + \lambda(0,2,3) = (-2,2\lambda,3\lambda)$.

线段 $DG$ 上存在一点 $P$ 使得 $AP //$ 平面 $D_1EFG$ 等价于 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n} = 0$，

即 $-4 + 2\lambda + 6\lambda = 0$，

解得 $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

所以 $\dfrac{DP}{DG} = \dfrac{1}{2}$. ..................................................................................................... 14 分

（19）（共 15 分）

**解：**（Ⅰ）设椭圆 $E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$.

由题意得 $\begin{cases} a = 2, \\ \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{2b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$

所以椭圆 $E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ............................................................................ 5 分

（Ⅱ）（ⅰ）由题可知 $x_1 \neq \pm 2$ 且 $x_1 \neq 0$.

直线 $BP$ 的方程为 $y = \dfrac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$，直线 $OC$ 的方程为 $y = \dfrac{1}{2}x$.

由 $\begin{cases} y = \dfrac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2), \\ y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \dfrac{4y_1}{2y_1 - x_1 + 2}, \\ y = \dfrac{2y_1}{2y_1 - x_1 + 2}. \end{cases}$

所以 $H$ 的坐标为 $(\dfrac{4y_1}{2y_1 - x_1 + 2}, \dfrac{2y_1}{2y_1 - x_1 + 2})$. ............................................... 8 分

（ⅱ）由题可知，直线 $l$ 的斜率存在．设直线 $l$ 的方程为 $y = kx + m$，

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$.

由于直线 $l$ 与椭圆 $E$ 交于不同的两点，

所以 $\Delta = (8km)^2 - 4(1 + 4k^2)(4m^2 - 4) = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0$.

则 $x_1 + x_2 = -\dfrac{8km}{1 + 4k^2}, x_1x_2 = \dfrac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}$.

由题可知 $M(-x_2, -y_2)$.

因为 $A, H, M$ 三点共线，

所以 $\dfrac{\dfrac{2y_1}{2y_1-x_1+2}}{\dfrac{4y_1}{2y_1-x_1+2}+2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，化简得 $\dfrac{y_1}{4y_1-x_1+2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，

即 $\dfrac{kx_1+m}{(4k-1)x_1+(4m+2)}=\dfrac{kx_2+m}{x_2-2}$.

所以 $(4k^2-2k)x_1x_2+(4km+2k-m)(x_1+x_2)+(4m^2+4m)=0$.

所以 $(4k^2-2k)\cdot\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}-(4km+2k-m)\cdot\dfrac{8km}{1+4k^2}+(4m^2+4m)=0$.

化简得 $m^2-4k^2+m+2k=0$，即 $(m+2k)(m-2k+1)=0$，

解得 $m=-2k$ 或 $m=2k-1$.

当 $m=-2k$ 时，直线 $l$ 的方程为 $y=k(x-2)$，经过 $(2,0)$，不符合题意.

当 $m=2k-1$ 时，直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+2)-1$，经过 $(-2,-1)$，

其中 $k\in(0,\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{4},1)\cup(1,+\infty)$.

综上，直线 $l$ 经过定点 $(-2,-1)$. ........................................................................ 15 分

（20）（共 15 分）

**解：**（Ⅰ）因为 $f(x)=ax-\ln(1-x)$，所以 $f'(x)=a+\dfrac{1}{1-x}$.

因为 $f(0)=0$，$f'(0)=a+1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(a+1)x$. ........................... 4 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，$f(-1)=-a-\ln 2<0$，不符合题意.

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=1+\dfrac{1}{a}$，

当 $x\in(-\infty,1+\dfrac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1+\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，

当 $x\in(1+\dfrac{1}{a},1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(1+\dfrac{1}{a},1)$ 上单调递增，

所以当 $x=1+\dfrac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(1+\dfrac{1}{a})=a+1+\ln(-a)$.

若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $a+1+\ln(-a)\geqslant 0$.

设 $\varphi(x)=x+1+\ln(-x)\ (x<0)$，则 $\varphi'(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(-1)=0$.

所以 $a+1+\ln(-a)\geqslant 0$ 的解为 $a=-1$.

所以 $a=-1$. .......................................................................................................... 10 分

（Ⅲ）当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意.

当 $a<0$ 时，因为 $f(0)=0$，不妨设 $x_1=0$，

若 $x_1<x_2<1$，则 $|x_2-x_1|<1<\mathrm{e}-1$，不符合题意；

若 $x_2<x_1$，则 $x_2<1-\mathrm{e}$.

由（Ⅱ）可知，只需 $f(1-\mathrm{e})<0$，即 $a(1-\mathrm{e})-1<0$，

解得 $\frac{1}{1-\mathrm{e}}<a<0$.

所以 $a$ 的取值范围为 $(\frac{1}{1-\mathrm{e}},0)$. ............................................................................ 15 分

（21）（共 15 分）

**解：**（Ⅰ）$P(\alpha)=\{0,3,5\},P(\beta)=\{0,5,8,10\}$. ........................................................................ 4 分

（Ⅱ）因为 $s\in P(\alpha)$，所以 $a_{i+s}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s$.

当 $1\leqslant j\leqslant n-t$ 时，$1<j+t-s\leqslant n-t+t-s=n-s$，

所以 $a_{j+t-s+s}=a_{j+t-s}$，即 $a_{j+t}=a_{j+t-s},j=1,2,\cdots,n-t$.

又因为 $t\in P(\alpha)$，所以 $a_{j+t}=a_j,j=1,2,\cdots,n-t$.

所以 $a_{j+t-s}=a_j,j=1,2,\cdots,n-t$.

所以 $t-s\in P(\alpha')$. ........................................................................................................ 9 分

（Ⅲ）对任意 $s\in P(\alpha)$，令 $\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-s})\in A_{n-s}$.

若 $t\in P(\alpha')$ 且 $2t<n-s$，则 $a_{i+t}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s-t$，

所以 $a_{i+2t}=a_i,i=1,2,\cdots,n-s-2t$.

因为 $s\in P(\alpha)$，所以 $a_{j+s}=a_j,j=1,2,\cdots,n-s$.

所以 $a_i=a_{i+2t}=a_{i+2t+s},i=1,2,\cdots,n-s-2t$.

所以 $s+2t\in P(\alpha)$.

对 $s_k,s_{k+1}\in P(\alpha)(k=1,2,\cdots,m-2)$，因为 $s_k<s_{k+1}$，

由（Ⅱ）可知，令 $\alpha_k=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-s_k})$，则 $s_{k+1}-s_k\in P(\alpha_k)$.

若 $2(s_{k+1}-s_k)<n-s_k$，因为 $s_k\in P(\alpha)$，

所以 $s_k+2(s_{k+1}-s_k)\in P(\alpha)$，即 $2s_{k+1}-s_k\in P(\alpha)$.

又因为 $2s_{k+1}-s_k=s_{k+1}+(s_{k+1}-s_k)>s_{k+1}$，

所以 $2s_{k+1}-s_k\geqslant s_{k+2}$.

若 $2(s_{k+1}-s_k)\geqslant n-s_k$，则 $s_k+2(s_{k+1}-s_k)\geqslant n>s_m\geqslant s_{k+2}$，

所以 $2s_{k+1}-s_k>s_{k+2}$.

综上，$2s_{k+1}-s_k\geqslant s_{k+2}$，即 $2s_{k+1}\geqslant s_k+s_{k+2}(k=1,2,\cdots,m-2)$. ........................... 15 分