绝密★本科目考试启用前

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数　学

本试卷共 5 页，150 分，考试时长 120 分钟，考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后，将本试卷和答题卡

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}, B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1,0,1\}$　　　（B）$\{0,1\}$

（C）$\{-1,1,2\}$　　　（D）$\{1,2\}$

（2）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,2)$，则 $i\cdot z=$

（A）$1+2i$　　　（B）$-2+i$

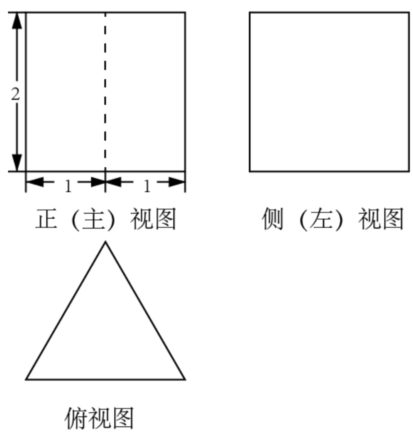
（C）$1-2i$　　　（D）$-2-i$

（3）在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为

（A）-5　　　（B）5

（C）-10　　　（D）10

（4）某三棱柱的底面为正三角形，其三视图如图所示，该三棱柱的表面积为



（A）$6+\sqrt{3}$　　　（B）$6+2\sqrt{3}$

（C）$12+\sqrt{3}$　　　（D）$12+2\sqrt{3}$

（5）已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$，则其圆心到原点的距离的最小值为

（A）4　　　（B）5

（C）6　　（D）7

（6）已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是

（A）$(-1,1)$　　（B）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

（C）$(0,1)$　　（D）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

（7）设抛物线的顶点为 O，焦点为 F，准线为 l；P 是抛物线异于 O 的一点，过 P 做 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线

（A）经过点 O　　（B）经过点 P

（C）平行于直线 OP　　（D）垂直于直线 OP

（8）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-9$，$a_5=-1$，记 $T_n=a_1a_2\ldots a_n(n=1,2,\ldots)$，则数列 $\{T_n\}$

（A）有最大项，有最小项　　（B）有最大项，无最小项

（C）无最大项，有最小项　　（D）无最大项，无最小项

（9）已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则“存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日 (πDay)。历史上，求圆周率 π 的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似，数学家阿尔•卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形（各边均与圆相切的正 $6n$ 边形）的周长，将它们的算术平均数作为 2π 的近似值。按照阿尔•卡西的方法，π 的近似值的表达方式是

（A）$3n(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n})$　　（B）$6n(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n})$

（C）$3n(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n})$　　（D）$6n(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n})$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

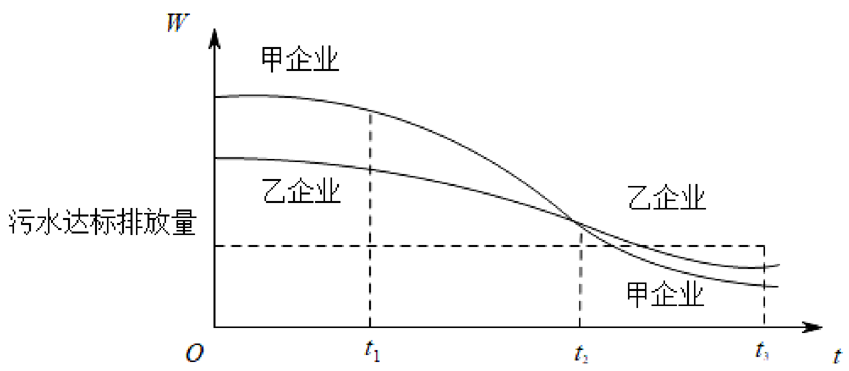
（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是________.

（12）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$，则 C 的右焦点的坐标为________； C 的焦点到其渐近线的距离是________.

（13）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=$ ________； $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$________.

（14）若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个取值为________.

（15）为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改．设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱． 已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示．



给出下列四个结论：

① 在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

② 在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

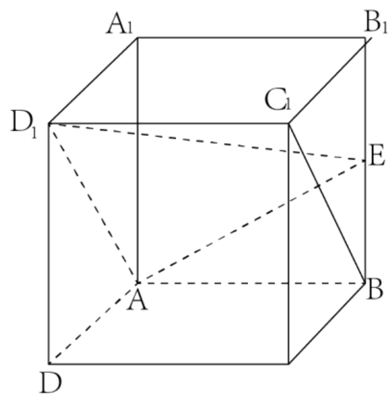
③ 在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放量都已达标；

④ 甲企业在 $[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 这三段时间中，在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强．

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）



如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点.

（Ⅰ）求证：BC_1∥平面 AD_1E；

（Ⅱ）求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

（17）（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a+b=11$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）a 的值；

（Ⅱ）$\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$c=7$，$\cos A=-\dfrac{1}{7}$

条件②，$\cos A=\dfrac{1}{8}, \cos B=\dfrac{9}{16}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

某校为举办甲乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案：方案一、方案二、为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

（Ⅰ）分别估计该校男生支持方案一的概率，该校女生支持方案一的概率：

（Ⅱ）从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率；

（Ⅲ）将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0，假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1，试比较 p_0 与 p_1 的大小.

（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=12-x^2$

（I）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 的斜率等于 -2 的切线方程；

（II）设曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(t，f\left(t\right)\right)$ 处的切线与坐标轴围城的三角形面积为 $S\left(t\right)$，求 $S\left(t\right)$ 的最小值。

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$A(-2,-1)$，且$a=2b$

（I）求椭圆C的方程；

（II）过点$B(-4,0)$的直线l交椭圆C于点M,N，直线MA,NA分别交直线$x=-4$于点P,Q求$\dfrac{|PB|}{|BQ|}$的值

（21）（本小题 15 分）

已知$\{a_n\}$是无穷数列，给出两个性质：

①对于$\{a_n\}$中任意两项$a_i,a_j\ (i>j)$，在$\{a_n\}$中都存在一项a_m，使得$\dfrac{a_i^2}{a_j}=a_m$.

②对于$\{a_n\}$中任意一项$a_n(n\geq 3)$，在$\{a_n\}$都存在两项$a_k,a_l,(k>l)$，使得$a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}$

（I）若$a_n=n\ (n=1,2,\ldots)$，判断$\{a_n\}$是否满足性质①，说明理由：

（II）若$a_n=2^{n-1}\ (n=1,2,\ldots)$，判断数列$\{a_n\}$是否同时满足性质①和性质②，说明理由；

（III）若$\{a_n\}$是递增数列，且同时满足性质①和性质②，证明：$\{a_n\}$为等比数列。

2020 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】根据交集的定义写出 $A\cap B$ 即可．

【解答】解：集合 $A=\{-1，0，1，2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cap B=\{1，2\}$，

故选：D．

【点评】本题考查了交集的定义与运算问题，是基础题目．

2.【分析】根据复数的几何意义先求出 z 的表达式，结合复数的运算法则进行计算即可．

【解答】解：∵复数 z 对应的点的坐标是（1，2），

∴$z=1+2i$，

则 $i\cdot z=i(1+2i)=-2+i$，

故选：B．

【点评】本题主要考查复数的运算，结合复数的几何意义求出复数的表达式是解决本题的关键．比较基础．

3.【分析】在二项展开式的通项公式中，令 x 的幂指数等于 2，求出 r 的值，即可求得 x^2 的系数．

【解答】解：$(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中，通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(-2)^r\cdot x^{\frac{5-r}{2}}$，

令 $\frac{5-r}{2}=2$，求得 $r=1$，可得 x^2 的系数为 $C_5^1\cdot(-2)=-10$，

故选：C．

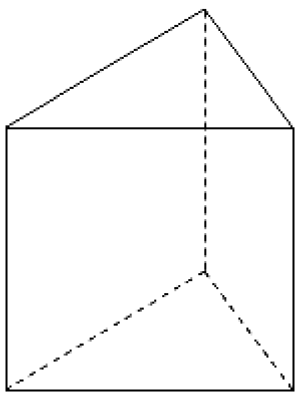
【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项展开式的通项公式，二项式系数的性质，属于基础题．

4.【分析】画出几何体的直观图，利用三视图的数据求解几何体的表面积即可．

【解答】解：几何体的直观图如图：是三棱柱，底面边长与侧棱长都是 2，

几何体的表面积为：$3\times2\times2+2\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=12+2\sqrt{3}$.

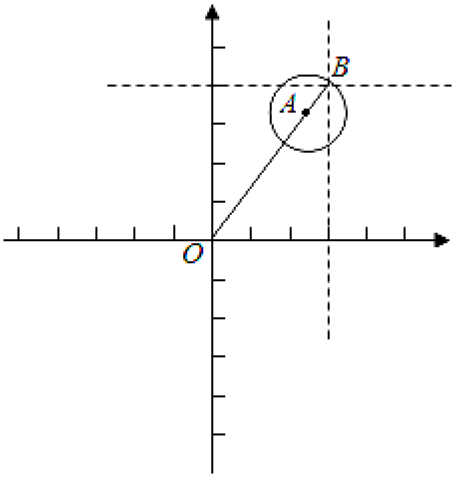
故选：D．



【点评】本题考查三视图求解几何体的表面积，判断几何体的形状是解题的关键，是基本知识的考查．

5．【分析】结合题意画出满足条件的图象，结合图象求出答案即可．

【解答】解：如图示：



，

半径为 1 的圆经过点（3，4），可得该圆的圆心轨迹为（3，4）为圆心，1 为半径的圆，

故当圆心到原点的距离的最小时，

连结 OB，A 在 OB 上且 $AB=1$，此时距离最小，

由 $OB=5$，得 $OA=4$，

即圆心到原点的距离的最小值是 4，

故选：A．

【点评】本题考查了圆的基础知识，考查数形结合思想，是一道常规题．

6．【分析】不等式即 $2^x>x+1$．由于函数 $y=2^x$ 和直线 $y=x+1$ 的图象都经过点（0，1）、（1，2），数形结合可得结论．

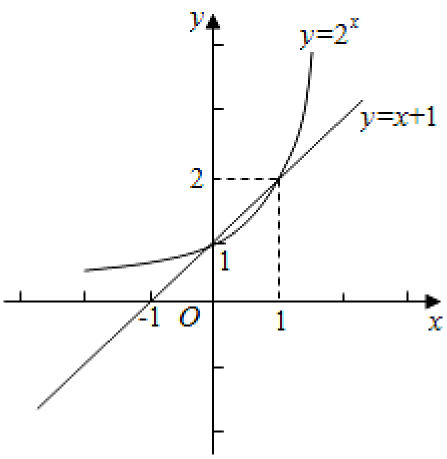
【解答】解：不等式 $f(x)>0$，即 $2^x>x+1$．

由于函数 $y=2^x$ 和直线 $y=x+1$ 的图象都经过点（0，1）、

（1，2），如图所示：

不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，

故选：D．



【点评】本题主要考查其它不等式的解法，函数的图象和性质，属于中档题.

7.【分析】本题属于选择题，不妨设抛物线的方程为 $y^2=4x$，不妨设 P（1，2），可得可得四边形 $QAFP$ 为正方形，根据正方形的对角线互相垂直可得答案.

【解答】解：（本题属于选择题）不妨设抛物线的方程为 $y^2=4x$，则 F（1，0），准线为 l 为 $x=-1$，

不妨设 P（1，2），

∴Q（﹣1，2），

设准线为 l 与 x 轴交点为 A，则 A（﹣1，0），

可得四边形 $QAFP$ 为正方形，根据正方形的对角线互相垂直，

故可得线段 FQ 的垂直平分线，经过点 P，

故选：B.

【点评】本题考查了抛物线的性质和垂直平分线的性质，考查了转化思想，属于中档题.

8.【分析】由已知求出等差数列的通项公式，分析可知数列$\{a_n\}$是单调递增数列，且前 5 项为负值，自第 6 项开始为正值，进一步分析得答案.

【解答】解：设等差数列$\{a_n\}$的首项为 d，由 $a_1=-9$，$a_5=-1$，得 $d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{-1-(-9)}{4}=2$，

∴$a_n=-9+2(n-1)=2n-11$.

由 $a_n=2n-11=0$，得 $n=\frac{11}{2}$，而 $n\in\mathbf{N}^*$，

可知数列$\{a_n\}$是单调递增数列，且前 5 项为负值，自第 6 项开始为正值.

可知 $T_1=-9<0$，$T_2=63>0$，$T_3=-315<0$，$T_4=945>0$ 为最大项，

自 T_5 起均小于 0，且逐渐减小.

∴数列$\{T_n\}$有最大项，无最小项.

故选：B.

【点评】本题考查等差数列的通项公式，考查数列的函数特性，考查分析问题与解决问题的能力，是中档题.

9.【分析】根据充分条件和必要条件的定义，分别讨论 k 为偶数和奇数时，是否成立即可.

【解答】解：当 $k=2n$，为偶数时，$\alpha=2n\pi+\beta$，此时 $\sin\alpha=\sin(2n\pi+\beta)=\sin\beta$，

当 $k=2n+1$，为奇数时，$\alpha=2n\pi+\pi-\beta$，此时 $\sin\alpha=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$，即充分性成立，

当 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 $\alpha=2n\pi+\beta$，$n\in\mathbf{Z}$ 或 $\alpha=2n\pi+\pi-\beta$，$n\in\mathbf{Z}$，即 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$，即必要性成立，

则“存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的充要条件，

故选：C.

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合三角函数值的性质，利用分类讨论思想进行判断是解决本题的关键．难度不大.

10.【分析】设内接正 $6n$ 边形的边长为 a，外切正 $6n$ 边形的边长为 b，运用圆的性质，结合直角三角形的锐角三角函数的定义，可得所求值.

【解答】解：如图，设内接正 $6n$ 边形的边长为 a，外切正 $6n$ 边形的边长为 b，

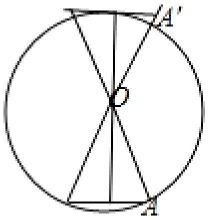
可得 $a=2\sin\frac{360^\circ}{12n}=2\sin\frac{30^\circ}{n}$，

$b=2\tan\frac{360^\circ}{12n}=2\tan\frac{30^\circ}{n}$，

则 $2\pi\approx\frac{6na+6nb}{2}=6n\left(\sin\frac{30^\circ}{n}+\tan\frac{30^\circ}{n}\right)$，

即 $\pi\approx3n\left(\sin\frac{30^\circ}{n}+\tan\frac{30^\circ}{n}\right)$，

故选：A.



【点评】本题考查数学中的文化，考查圆的内接和外切多边形的边长的求法，考查运算能力，属于基础题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．【考点】函数的定义域及其求法.

【专题】对应思想；定义法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】根据函数成立的条件建立不等式组，解不等式即可.

【解答】解：要使函数有意义，则 $\begin{cases}x+1\neq0\\x>0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x\neq-1\\x>0\end{cases}$，所以 $x>0$，

所以函数的定义域为 $\{x|x>0\}$

故答案为：$\{x|x>0\}$

【点评】本题主要考查函数定义域的求解，根据函数成立的条件建立不等式是解决本题的关键，比较基础

12．【分析】根据双曲线的方程可得焦点，再根据点到直线的距离可得.

【解答】解：双曲线 C：$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，则 $c^2=a^2+b^2=6+3=9$，则 $c=3$，则 C 的右焦点的坐标为（3，0），

其渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}x$，即 $x\pm\sqrt{2}y=0$，

则点（3，0）到渐近线的距离 $d=\frac{3}{\sqrt{1+2}}=\sqrt{3}$，

故答案为：（3，0），$\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了双曲线的方程和其性质，以及点到直线的距离公式，属于基础题.

13．【分析】根据向量的几何意义可得 P 为 BC 的中点，再根据向量的数量积的运算和正方形的性质即可求出.

【解答】解：由$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，可得 P 为 BC 的中点，

则$|CP|=1$，

$\therefore |PD|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD})=-\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD})=-\overrightarrow{PC}^2-\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CD}=-1$，

故答案为：$\sqrt{5}$，-1．

【点评】本题考查了向量的几何意义和向量的数量积的运算，属于基础题．

14．【分析】由两角和差公式，及辅助角公式化简得 $f(x)=\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}\sin(x+\theta)$，其中 $\cos\theta=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}}$，$\sin\theta=\frac{1+\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}}$，结合题意可得$\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}=2$，解得 φ，即可得出答案．

【解答】解：$f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi+\cos x=\sin x\cos\varphi+(1+\sin\varphi)\cos x=\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}\sin(x+\theta)$，其中 $\cos\theta=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}}$，$\sin\theta=\frac{1+\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}}$，

所以 $f(x)$ 最大值为$\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}=2$，

所以 $\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2=4$，

即 $2+2\sin\varphi=4$，

所以 $\sin\varphi=1$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{2}$．

故答案为：$\frac{\pi}{2}$．

【点评】本题考查三角恒等变换，辅助角公式，三角函数最值，以及考查运算能力，属于中档题．

15．【分析】由两个企业污水排放量 W 与时间 t 的关系图象结合平均变化率与瞬时变化率逐一分析四个命题得答案．

【解答】解：设甲企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，乙企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=g(t)$．

对于①，在$[t_1，t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力为$-\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$，

乙企业的污水治理能力为$-\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$．

由图可知，$f(t_1)-f(t_2)>g(t_1)-g(t_2)$，$\therefore -\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}>-\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$，

即甲企业的污水治理能力比乙企业强，故①正确；

对于②，由图可知，f（t）在 t_2 时刻的切线的斜率小于 g（t）在 t_2 时刻的切线的斜率，但两切线斜率均为负值，

∴在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强，故②正确；

对于③，在 t_3 时刻，甲，乙两企业的污水排放都小于污水达标排放量，

∴在 t_3 时刻，甲，乙两企业的污水排放都已达标，故③正确；

对于④，由图可知，甲企业在$[0，t_1]$，$[t_1，t_2]$，$[t_2，t_3]$这三段时间中，在$[t_1，t_2]$的污水治理能力最强，

故④错误．

∴正确结论的序号是①②③．

故答案为：①②③．

【点评】本题考查利用数学解决实际生活问题，考查学生的读图视图能力，是中档题．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】（Ⅰ）根据正方体的性质可证得 $BC_1 // AD_1$，再利用线面平行的判定定理即可得证；

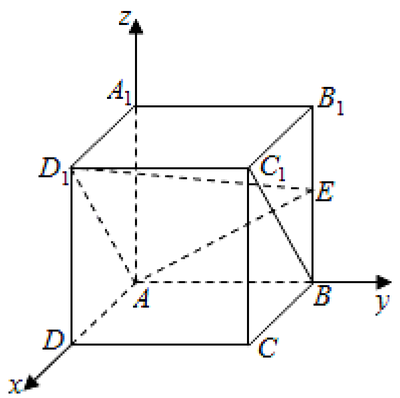
（Ⅱ）以 A 为原点，AD、AB、AA_1 分别为 x、y 和 z 轴建立空间直角坐标系，设直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角为 θ，先求出平面 AD_1E 的法向量$\vec{m}$，再利用 $\sin\theta=|\cos<\vec{m}，\overrightarrow{AA_1}>|=|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}|$以及空间向量数量积的坐标运算即可得解．

【解答】解：（Ⅰ）由正方体的性质可知，$AB // C_1D_1$ 中，且 $AB=C_1D_1$，

∴四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，∴$BC_1 // AD_1$，

又 $BC_1 \not\subset$平面 AD_1E，$AD_1 \subset$平面 AD_1E，∴$BC_1 //$ 平面 AD_1E．

（Ⅱ）以 A 为原点，AD、AB、AA_1 分别为 x、y 和 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



设正方体的棱长为 a，则 A（0，0，0），A_1（0，0，a），D_1（a，0，a），E（0，a，$\frac{1}{2}a$），

∴$\overrightarrow{AA_1}=(0, 0, a)$，$\overrightarrow{AD_1}=(a, 0, a)$，$\overrightarrow{AE}=(0, a, \frac{1}{2}a)$，

设平面 AD_1E 的法向量为$\vec{m}=(x, y, z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}a(x+z)=0\\ a(y+\frac{1}{2}z)=0\end{cases}$，

令 $z=2$，则 $x=-2$，$y=-1$，∴$\vec{m}=(-2，-1，2)$，

设直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{AA_1}\rangle|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}\right|=\frac{2a}{a\cdot 3}=\frac{2}{3}$,

故直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为$\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查空间中线面的位置关系和线面夹角问题，熟练掌握线面平行的判定定理和利用空间向量求线面夹角是解题的关键，考查学生的空间立体感和运算能力，属于基础题．

17．【分析】选择条件①（Ⅰ）由余弦定理求出（$a+b$）（$a-b$）$=49+2b$，再结合 $a+b=11$，即可求出 a 的值，

（Ⅱ）由正弦定理可得 $\sin C$，再根据三角形的面积公式即可求出，

选择条件②（Ⅰ）根据同角的三角函数的关系和正弦定理可得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}$，再结合 $a+b=11$，即可求出 a 的值，

（Ⅱ）由两角和的正弦公式求出 $\sin C$，再根据三角形的面积公式即可求出．

【解答】解：选择条件①（Ⅰ）由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2-b^2=49-14b\times\left(-\frac{1}{7}\right)=49+2b$，

∴（$a+b$）（$a-b$）$=49+2b$，

∵$a+b=11$，

∴$11a-11b=49+2b$，

即 $11a-9b=49$，

联立$\begin{cases}a+b=11\\11a-9b=49\end{cases}$，解得 $a=8$，$b=3$，

故 $a=8$．

（Ⅱ）在△ABC 中，$\sin A>0$，

∴$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

∴$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

选择条件②（Ⅰ）在△ABC 中，$\sin A>0$，$\sin B>0$，$C=\pi-(A+B)$，

∵$\cos A=\frac{1}{8}$，$\cos B=\frac{9}{16}$,

∴$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$,

由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

∴$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}$,

∵$a+b=11$，

∴$a=6$，$b=5$，

故 $a=6$；

（Ⅱ）在△ABC 中，$C=\pi-(A+B)$，

∴$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3\sqrt{7}}{8}\times\frac{9}{16}+\frac{5\sqrt{7}}{16}\times\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

【点评】本题考查了同角的三角函数的关系，两角和的正弦公式，正余弦定理，三角形的面积公式等知识，考查了运算能力求解能力，转化月化归能力，属于中档题．

18.【分析】（Ⅰ）根据古典概型的概率公式直接求解即可；

（Ⅱ）结合（Ⅰ）及相互独立事件同时发生的概率直接求解即可；

（Ⅲ）直接写出结论即可．

【解答】解：（Ⅰ）设“该校男生支持方案一”为事件 A，“该校女生支持方案一”为事件 B，

则$P(A)=\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，

设“这 3 人中恰有 2 人支持方案一”为事件 C，

则$P(C)=C_2^2(\frac{1}{3})^2(1-\frac{3}{4})+C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$；

（Ⅲ）$P_0>P_1$．

【点评】本题考查古典概型及相互独立事件同时发生的概率求法，考查计算能力及推理能力，属于基础题．

19.【分析】（Ⅰ）求得 $f(x)=12-x^2$ 的导数，设切点为 $(m，n)$，可得切线的斜率，解方程可得 m，n，进而得到切线的方程；

（Ⅱ）求得切线的斜率和方程，分别令 $x=0$，$y=0$，求得切线的横截距和纵截距，可得三角形的面积，考虑 $t>0$ 的情况，求得导数和单调区间、极值，然后求出 $S(t)$ 的最小值．

【解答】解：（Ⅰ）$f(x)=12-x^2$ 的导数 $f'(x)=-2x$，

令切点为 $(m，n)$，可得切线的斜率为 $-2m=-2$，

∴$m=1$，∴$n=12-1=11$，

∴切线的方程为 $y=-2x+13$；

（Ⅱ）曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t，f(t))$ 处的切线的斜率为 $k=-2t$，

切线方程为 $y-(12-t^2)=-2t(x-t)$，

令 $x=0$，可得 $y=12+t^2$，令 $y=0$，可得 $x=\frac{1}{2}t+\frac{6}{t}$，

∴$S(t)=\frac{1}{2}\cdot|\frac{1}{2}t+\frac{6}{t}|\cdot(12+t^2)$，

由 $S(-t)=S(t)$，可知 $S(t)$ 为偶函数，

不妨设 $t>0$，则 $S(t)=\frac{1}{4}(t+\frac{12}{t})(12+t^2)$，

$\therefore S'(t)=\frac{1}{4}(3t^2+24-\frac{144}{t^2})=\frac{3}{4}\cdot\frac{(t^2-4)(t^2+12)}{t^2}$，

由 $S'(t)=0$，得 $t=2$，

当 $t>2$ 时，$S'(t)>0$，$S(t)$ 递增；当 $0<t<2$ 时，$S'(t)<0$，$S(t)$ 递减，

则 $S(t)$ 在 $t=2$ 处取得极小值，且为最小值 32，

所以 $S(t)$ 的最小值为 32．

【点评】本题考查导数的运用：求切线的方程和利用导数研究函数的单调性、极值和最值，考查方程思想和运算能力，属于中档题．

20.【分析】(Ⅰ) 由题意可得 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a=2b\end{cases}$，解得 $b^2=2$，$a^2=8$，即可求出椭圆方程；

(Ⅱ) 设直线方程为 $y=k(x+4)$，设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，可得直线 AM 的方程为 $y+1=\frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，直线 AN 的方程为 $y+1=\frac{y_2+1}{x_2+2}(x+2)$，分别令 $x=-4$，求出 $y_P=-\frac{(1+2k)x_1+(8k+2)}{x_1+2}$，$y_Q=-\frac{(1+2k)+(8k+2)}{x_2+2}$，代入化简整理即可求出．

【解答】解：(Ⅰ) 椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2, -1)$，且 $a=2b$，

则 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ a=2b\end{cases}$，解得 $b^2=2$，$a^2=8$，

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，

(Ⅱ) 由题意可得直线 l 的斜率存在，设直线方程为 $y=k(x+4)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+4)\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，

消 y 整理可得 $(1+4k^2)x^2+32k^2x+64k^2-8=0$，

$\therefore \triangle=-32(4k^2-1)>0$，

解得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$，

设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{32k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-8}{1+4k^2}$，

则直线 AM 的方程为 $y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，直线 AN 的方程为 $y+1=\dfrac{y_2+1}{x_2+2}(x+2)$，

分别令 $x=-4$，

可得 $y_P=\dfrac{-2(y_1+1)}{x_1+2}-1=-\dfrac{(2k+1)x_1+(8k+4)}{x_1+2}$，$y_Q=-\dfrac{(2k+1)x_2+(8k+4)}{x_2+2}$

$\therefore |PB|=|y_P|=|\dfrac{(2k+1)x_1+(8k+4)}{x_1+2}|$，$QB|=|y_Q|=|\dfrac{(2k+1)x_2+(8k+4)}{x_2+2}|$，

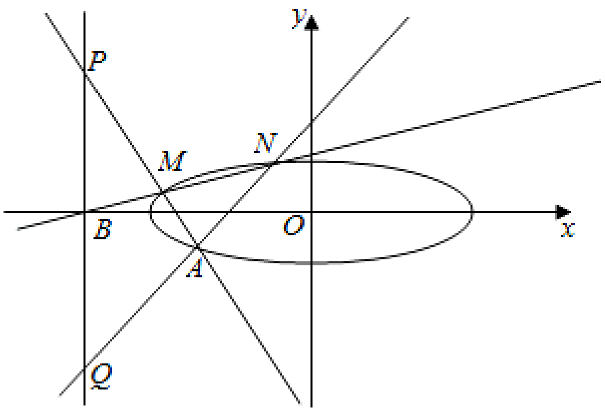
$\therefore \dfrac{|PB|}{|BQ|}=|\dfrac{[(2k+1)x_1+(8k+4)](x_2+2)}{[(2k+1)x_2+(8k+4)](x_1+2)}|=|\dfrac{(2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)+(4k+2)x_2}{(2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)+(4k+2)x_1}|$

$\because (2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)=\dfrac{32k^2(2k+1)}{1+4k^2}$，

$\therefore |\dfrac{(2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)+(4k+2)x_2}{(2k+1)x_1x_2+(4k+2)(x_1+x_2)+8(2k+1)+(4k+2)x_1}|=|\dfrac{(2k+1)(\frac{32k^2}{4k^2+1}+2x_2)}{(2k+1)(\frac{32k^2}{4k^2+1}+2x_1)}|=$

$|\dfrac{-(x_1+x_2)+2x_2}{-(x_1+x_2)+2x_1}|=1$，

故 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}=1$．



【点评】本题考查了直线和椭圆的位置关系，考查了运算求解能力，转化与化归能力，分类与整合能力，属于难题．

21．【分析】（Ⅰ）由 $\dfrac{a_3^2}{a_2}=\dfrac{9}{2}\notin \mathbf{N}^*$，即可知道不满足性质．

（Ⅱ）对于任意的 i 和 j，满足 $\dfrac{a_i^2}{a_j}=2^{2i-j-1}$，$\Rightarrow 2i-j\in \mathbf{N}^*$，必存在 $m=2i-j$，可得满足性质①；对于任意的 n，

欲满足 $a_n=2^{n-1}=\frac{a_k^2}{a_1}=2^{2k-l-1}$，$\Rightarrow n=2k-l$ 即可，必存在有一组 k，l 使使得它成立，故满足性质②.

（III）先用反证法证明数列必然恒正或恒负，再用数学归纳法证明$\{a_n\}$也是等比数列，即可.

【解答】解：（Ⅰ）不满足，理由：$\frac{a_3^2}{a_2}=\frac{9}{2}\notin \mathbf{N}^*$，不存在一项 a_m 使得$\frac{a_3^2}{a_2}=a_m$.

（Ⅱ）数列$\{a_n\}$同时满足性质①和性质②，

理由：对于任意的 i 和 j，满足$\frac{a_i^2}{a_j}=2^{2i-j-1}$，因为 $i\in \mathbf{N}^*$，$j\in \mathbf{N}^*$且 $i>j$，所以 $2i-j\in \mathbf{N}^*$，则必存在 $m=2i-j$，此时，$2^{m-1}\in\{a_i\}$且满足$\frac{a_i^2}{a_j}=2^{2i-j-1}=a_m$，性质①成立，

对于任意的 n，欲满足 $a_n=2^{n-1}=\frac{a_k^2}{a_1}=2^{2k-l-1}$，满足 $n=2k-l$ 即可，因为 $k\in \mathbf{N}^*$，$l\in \mathbf{N}^*$，且 $k>l$，

所以 $2k-l$ 可表示所有正整数，所以必有一组 k，l 使 $n=2k-l$，即满足 $a_n=\frac{a_k^2}{a_1}$，性质②成立.

（III）首先，先证明数列恒正或恒负，

反证法：假设这个递增数列先负后正，

那么必有一项 a_l 绝对值最小或者有 a_l 与 a_{l+1} 同时取得绝对值最小，

如仅有一项 a_l 绝对值最小，此时必有一项 $a_m=\frac{a_l^2}{a_j}$，此时$|a_m|<|a_l|$

与前提矛盾，

如有两项 a_l 与 a_{l+1} 同时取得绝对值最小值，那么必有 $a_m=\frac{a_i^2}{a_{i+1}}$，

此时$|a_m|<|a_l|$，与前提条件矛盾，

所以数列必然恒正或恒负，

在数列恒正的情况下，由②知，存在 k，l 使得$\frac{a_k^2}{a_1}=a_3$，

因为是递增数列，$a_3>a_k>a_l$，

即 $3>k>l$，所以$\frac{a_2^2}{a_1}=a_3$，此时 a_1，a_2，a_3 成等比数列，

数学归纳法：

（1）已证 $n=3$ 时，满足$\{a_n\}$是等比数列，公比 $q=\frac{a_2}{a_1}$，

（2）假设 $n=k$ 时，也满足$\{a_k\}$是等比数列，公比 $q=\frac{a_2}{a_1}$，

那么由①知$\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=qa_k$等于数列的某一项 a_m，证明这一项为 a_{k+1} 即可，

反证法：

假设这一项不是 a_{k+1}，因为是递增数列，所以该项 $a_m=\frac{a_l^2}{a_{l-1}}=qa_k>a_{k+1}$，

那么 $a_k<a_{k+1}<qa_k$，由等比数列$\{a_k\}$得 $a_1q^{k-1}<a_{k+1}<a_1q^k$，

由性质②得 $a_1q^{k-1}<\frac{a_m^2}{a_1}<a_1q^k$，同时 $a_{k+1}=\frac{a_m^2}{a_1}>a_m>a_l$，s 所以 $k+1>m>l$，

所以 a_m，a_l 分别是等比数列$\{a_k\}$中两项，即 $a_m=a_1q^{m-1}$，$a_l=a_1q^{l-1}$，

原式变为 $a_1q^{k-1}<a_1q^{2m-l-1}<a_1q^k$，

所以 $l-1<2m-l-1<k$，又因为 $k\in\mathbf{N}^*$，$m\in\mathbf{N}^*$，$l\in\mathbf{N}^*$，不存在这组解，所以矛盾，

所以知$\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=qa_k=a_{k+1}$，前$\{a_{k+1}\}$为等比数列，

由数学归纳法知，$\{a_n\}$是等比数列得证，

同理，数列恒负，$\{a_n\}$也是等比数列．

【点评】本题属于新定义题，考查等比数列的性质，数学归法等，考查逻辑思维能力，属于难题．