2024 北京高考真题

数学（回忆版）

一、选择题。共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.（4分）已知集合 $M=\{x|-3<x<1\}$，$N=\{x|-1\leqslant x<4\}$，则 $M\cup \mathbf{N}=$（　　）

A．$\{x|-1\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|x>-3\}$　　C．$\{x|-3<x<4\}$　　D．$\{x|x<4\}$

2.（4分）若复数 z 满足 $\frac{z}{i}=-1-i$，则 $z=$（　　）

A．$-1-i$　　B．$-1+i$　　C．$1-i$　　D．$1+i$

3.（4分）圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．3　　D．$3\sqrt{2}$

4.（4分）在 $(x-\sqrt{x})^4$ 的展开式中，x^3 的系数为（　　）

A．6　　B．-6　　C．12　　D．-12

5.（4分）设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是向量，则"$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$"是"$\vec{a}=-\vec{b}$ 或 $\vec{a}=\vec{b}$"的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

6.（4分）设函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$．已知 $f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$（　　）

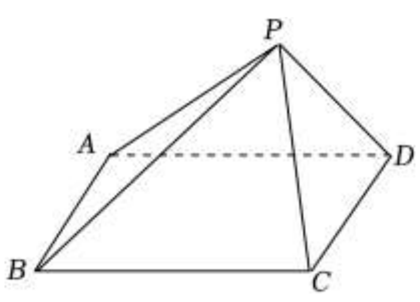
A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7.（4分）生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标，其中 S，N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数．生物丰富度指数 d 越大，水质越好．如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2，生物丰富度指数由2.1提高到3.15，则（　　）

A．$3N_2=2N_1$　　B．$2N_2=3N_1$

C．$N_2^2=N_1^3$　　D．$N_2^3=N_1^2$

8.（4分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为4的正方形，$PA=PB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，该棱锥的高为（　　）



A. 1　　　　　　　B. 2　　　　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　　　　D. $\sqrt{3}$

9.（4分）已知（x_1，y_1），（x_2，y_2）是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点，则（　　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

10.（4分）已知 $M=\{(x,y)|y=x+t(x^2-x),1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant t\leqslant 1\}$是平面直角坐标系中的点集．设 d 是 M 中两点间的距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则（　　）

A. $d=3$，$S<1$　　　B. $d=3$，$S>1$　　　C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

二、填空题。共5小题，每小题5分，共25分。

11.（5分）抛物线 $y^2=16x$ 的焦点坐标为________.

12.（5分）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称．若 $\alpha\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，则 cosβ 的最大值为____________.

13.（5分）若直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点，则 k 的一个取值为____________.

14.（5分）汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器，其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱．若升、斗、斛量器的容积成公比为10的等比数列，底面直径依次为65mm，325mm，325 mm，且斛量器的高为 230mm，则斗量器的高为_________mm，升量器的高为 mm．（不计量器的厚度）

15.（5分）设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是两个不同的无穷数列，且都不是常数列．记集合 $M=\{k|a_k=b_k,k\in\mathbf{N}^*\}$，给出下列四个结论：

①若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等差数列，则 M 中最多有1个元素；

②若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为等比数列，则 M 中最多有2个元素；

③若$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，则 M 中最多有3个元素；

④若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，则 M 中最多有1个元素．

其中正确结论的序号是_______.

三、解答题。共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（10分）在△ABC中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，∠A 为钝角，$a=7$，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求∠A；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得△ABC 存在，求△ABC 的面

积．

条件①：$b=7$；

条件②：$\cos B=\frac{13}{14}$；

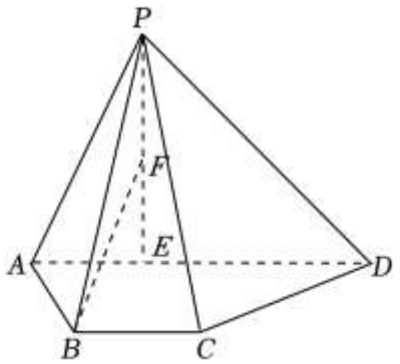
条件③：$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

17．（15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$，$BC//AD$，$AB=BC=1$，$AD=3$，点 E 在 AD 上，且 $PE\perp AD$，$DE=PE=2$．

（1）若 F 为线段 PE 的中点，求证：$BF//$平面 PCD．

（2）若 $AB\perp$平面 PAD，求平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值．



18．（15 分）某保险公司为了解该公司某种保险产品的索赔情况，从合同保险期限届满的保单中随机抽取 1000 份，记录并整理这些保单的索赔情况，获得数据如下表：

索赔次数	0	1	2	3	4
保单份数	800	100	60	30	10

假设：一份保单的保费为 0.4 万元；前三次索赔时，保险公司每次赔偿 0.8 万元；第四次索赔时，保险公司赔偿 0.6 万元．

假设不同保单的索赔次数相互独立．用频率估计概率．

（1）估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率；

（2）一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差．

（i）记 X 为一份保单的毛利润，估计 X 的数学期望 EX；

（ii）如果无索赔的保单的保费减少 4%，有索赔的保单的保费增加 20%，试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与（i）中 EX 估计值的大小，（结论不要求证明）

19．（15 分）已知椭圆方程 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形．过点（0，t）（$t>\sqrt{2}$）且斜率存在的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，过点 A 和 C（0，1）的直线 AC 与椭圆 E 的另一个交点为 D．

（1）求椭圆 E 的方程及离心率；

（2）若直线 BD 的斜率为 0，求 t 的值．

20．（15 分）设函数 $f(x)=x+k\ln(1+x)$（$k\neq0$），直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在点（t，$f(t)$）（$t>0$）处的切线．

（1）当 $k=-1$，求 $f(x)$ 单调区间；

（2）证明：l 不经过（0，0）；

（3）当 $k=1$ 时，设点 $A(t，f(t))$（$t>0$），$C(0，f(t))$，$O(0，0)$，B 为 l 与 y 轴的交点，$S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示△ACO 和△ABO 的面积．是否存在点 A 使得 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立？若存在，这样的点 A 有几个？

（参考数据：$1.09<\ln3<1.10$，$1.60<\ln5<1.61$，$1.94<\ln7<1.95$）

21．（15 分）已知集合 $M=\{(i，j，k，w)|i\in\{1，2\}，j\in\{3，4\}，k\in\{5，6\}，w\in\{7，8\}$，且 $i+j+k+w$ 为偶数$\}$．给定数列 A：a_1，a_2，…，a_8 和序列 Ω：T_1，T_2，…，T_s，其中 $T_t=(i_t，j_t，k_t，w_t)\in M$（$t=1$，2，…，$s$），对数列 A 进行如下变换：将 A 的第 i_1，j_1，k_1，w_1 项均加 1，其余项不变，得到的数列记作 $T_1(A)$；将 $T_1(A)$ 的第 i_2，j_2，k_2，w_2 项均加 1，其余项不变，得到的数列记作 $T_2T_1(A)$；……；以此类推，得到数列 $T_s\cdots T_2T_1(A)$，简记为 Ω（A）．

（1）给定数列 A：1，3，2，4，6，3，1，9 和序列 Ω：（1，3，5，7），（2，4，6，8），（1，3，5，7），写出 Ω（A）；

（2）是否存在序列 Ω，使得 Ω（A）为 a_1+2，a_2+6，a_3+4，a_4+2，a_5+8，a_6+2，a_7+4，a_8+4？若存在，写出一个 Ω，若不存在，请说明理由；

（3）若数列 A 的各项均为正整数，且 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，求证：“存在序列 Ω，使得 Ω（A）的各项都相等”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”．

参考答案

一、选择题。共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】结合并集的定义，即可求解．

【解答】解：集合 $M=\{x|-3<x<1\}$，$N=\{x|-1\leqslant x<4\}$，

则 $M\cup \mathbf{N}=\{x|-3<x<4\}$．

故选：C．

【点评】本题主要考查并集及其运算，属于基础题．

2.【分析】结合复数的四则运算，即可求解．

【解答】解：$\frac{z}{i}=-1-i$，

则 $z=i(-1-i)=1-i$．

故选：C．

【点评】本题主要考查复数的四则运算，属于基础题．

3.【分析】求解圆的圆心坐标，利用点到直线的距离公式求解即可．

【解答】解：圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心（1，－3），

圆 $x^2+y^2-2x+6y=0$ 的圆心到 $x-y+2=0$ 的距离：$d=\frac{|1+3+2|}{\sqrt{1+1}}=3\sqrt{2}$．

故选：D．

【点评】本题考查圆的方程的应用，点到直线的距离公式的应用，是基础题．

4.【分析】利用二项式定理，求解即可．

【解答】解：$(x-\sqrt{x})^4$的通项公式为：$(-1)^r C_4^r\bullet x^{4-r}\bullet x^{\frac{r}{2}}$，$4-r+\frac{r}{2}=3$，可得 $r=2$，

二项展开式中 x^3 的系数：$C_4^2\bullet(-1)^2=6$．

故选：A．

【点评】本题考查二项式定理的应用，是基础题．

5.【分析】根据已知条件，依次判断充分性，必要性的判断，即可求解．

【解答】解：$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=0$，

则$\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$不能推出$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$，充分性不成立，

$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$能推出 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，必要性成立，

故“$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$”的必要不充分条件．

故选：B．

【点评】本题主要考查充分性、必要性的判断，属于基础题．

6.【分析】由已知结合正弦函数的性质即可直接求解．

【解答】解：因为$f(x)=\sin\omega x$，

则$f(x_1)=-1$为函数的最小值，$f(x_2)=1$为函数的最大值，

又$|x_1-x_2|_{min}=\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{T}{2}$，

所以$T=\pi$，$\omega=2$．

故选：B．

【点评】本题主要考查了正弦函数性质的应用，属于基础题．

7.【分析】根据已知条件可得$\dfrac{S-1}{\ln N_1}=2.1$，$\dfrac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，化简即可求解．

【解答】解：根据个体总数由N_1变为N_2可列式，

$\dfrac{S-1}{\ln N_1}=2.1$，$\dfrac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，

所以$2.1\ln N_1=3.15\ln N_2$，

约分可得$2\ln N_1=3\ln N_2$，故$\ln N_1^2=\ln N_2^3$，

所以$N_1^2=N_2^3$．

故选：D．

【点评】本题主要考查函数的实际应用，考查转化能力，属于中档题．

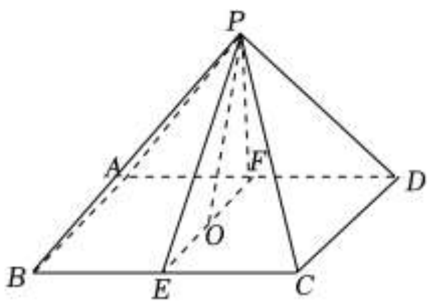
8.【分析】根据题意分析可知平面$PEF\perp$平面$ABCD$，可知$PO\perp$平面$ABCD$，再结合等体积法，即可求解．

【解答】解：底面$ABCD$为正方形，边长为4，

$PA=PB=AB=4$，$PC=PD=2\sqrt{2}$，

别取BC，AD的中点E，F，连接PE，PF，EF，

如图所示：



则$PE\perp BC$，$EF\perp BC$，且$PE\cap BC=E$，PE，$EF\subset$平面PEF，

故$BC\perp$平面PEF，且$BC\subset$平面$ABCD$，

所以平面$PEF\perp$平面$ABCD$，

过P作EF的垂线，垂足为O，即$PO\perp EF$，

由平面$PEF\cap$平面$ABCD=EF$，$PO\subset$平面PEF，

所以$PO\perp$平面$ABCD$，

由题意可得：$PE=2\sqrt{3}$，$PF=2$，$EF=4$，

则 $PE^2+PF^2=EF^2$，即 $PE\perp PF$，

则$\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}PO\cdot EF$，

故$PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\sqrt{3}$，

所以四棱锥的高为$\sqrt{3}$，

故选：D.

【点评】本题主要考查棱锥的结构特征，考查转化能力，属于难题.

9.【分析】根据已知条件，结合基本不等式的公式，以及对数的运算性质，即可求解.

【解答】解：（x_1，y_1），（x_2，y_2）是 $y=2^x$ 上的点，

则$y_1=2^{x_1}$，$y_2=2^{x_2}$，

$2^{x_1}+2^{x_2}\geqslant 2\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2\sqrt{2^{x_1+x_2}}$，当且仅当 $x_1=x_2$时，等号成立，

故$\frac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，

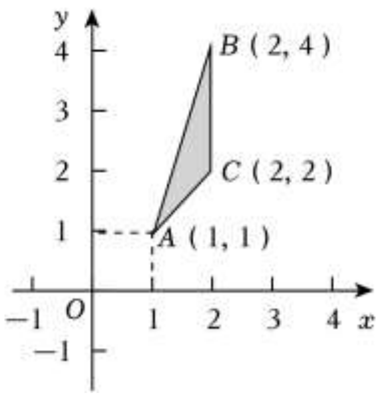
两边同时取对数可得，$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$.

故选：B.

【点评】本题主要考查函数与不等式的综合，考查转化能力，属于中档题.

10.【分析】根据已知条件，作出图象，结合图象即可得出答案.

【解答】解：集合$\{y|y=x+t（x^2-x），0\leqslant t\leqslant 1，1\leqslant x\leqslant 2\}$表示的图形如下图阴影部分所示，



由图象可知，$d=|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$，$S<S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(4-2)\times(2-1)=1$.

故选：C.

【点评】本题考查简单的线性规划问题，涉及了二次函数的图象，考查数形结合思想，属于中档题.

二、填空题。共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.【分析】根据抛物线的标准方程计算可得.

【解答】解：抛物线 $y^2=16x$ 的焦点坐标是（4，0）.

故答案为：（4，0）.

【点评】本题主要考查抛物线的性质，属于基础题．

12．【分析】先求出 β 的范围，再结合余弦函数的单调性，即可求解．

【解答】解：α 与 β 的终边关于原点对称可得，

$\alpha+\pi+2k\pi=\beta$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\cos\beta=\cos(\alpha+\pi+2k\pi)=-\cos\alpha$，

$\alpha\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，$\cos\alpha\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$，

所以 $\cos\beta\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}]$，

故当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\cos\beta$ 的最大值为 $-\frac{1}{2}$．

故答案为：$-\frac{1}{2}$．

【点评】本题主要考查余弦函数的单调性，属于基础题．

13．【分析】根据已知条件，设出直线方程，再与双曲线方程联立，再分类讨论，并结合判别式，即可求解．

【解答】解：联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ y=k(x-3)\end{cases}$，化简可得 $(1-4k^2)x^2+24k^2x-36k^2-4=0$，

因为直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点，

故 $1-4k^2=0$，或 $\Delta=(24k^2)^2+4(1-4k^2)(36k^2+4)=0$，

解得 $k=\pm\frac{1}{2}$ 或 k 无解，

当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时，符合题意．

故答案为：$\frac{1}{2}$（或 $-\frac{1}{2}$）．

【点评】本题主要考查双曲线的性质，考查转化能力，属于中档题．

14．【分析】根据题意求出斛量器的体积和斗量器、升量器的体积，再求对应圆柱的高．

【解答】解：斛量器的体积为 $V_3=\pi\cdot(\frac{325}{2})^2\cdot230$，

则斗量器的体积为 $V_2=\frac{1}{10}V_3=\pi\cdot(\frac{325}{2})^2\cdot23$，

所以斗量器的高为 $23mm$；

设升量器的高为 h，由升量器的体积为 $V_1=\frac{1}{10}V_2=\pi\cdot(\frac{325}{2})^2\cdot2.3=\pi\cdot(\frac{65}{2})^2\cdot h$，

解得 $h=57.5$，所以升量器的高为 $57.5mm$；

所以升量器、斗量器的高度分别 $57.5mm$，$23mm$．

故答案为：23，57.5．

【点评】本题考查了圆柱的体积计算问题，也考查了等比数列的定义应用问题，是基础题．

15．【分析】根据散点图的特征可判断①④的正误，举出反例可判断②的正误，由通项公式的特征以及反证法，即可判断③的正误．

【解答】解：对于①，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等差数列，$M=\{k|a_k=b_k\}$，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$不为常数列且各项均不相同，

故它们的散点图分布在直线上，而两条直线至多有一个公共点，

所以 M 中至多一个元素，故①正确；

对于②，令 $a_n=2^{n-1}$，$b_n=-(-2)^{n-1}$，满足$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等比数列，

但当 n 为偶数时，$a_n=2^{n-1}=b_n=-(-2)^{n-1}$，此时 M 中有无穷多个元素，故②错误；

对于③，设 $b_n=Aq^n(Aq\neq0，q\neq\pm1)$，$a_n=kn+b$（$k\neq0$），

若 M 中至少四个元素，则关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 至少有 4 个不同的正数解，

若 $q<0$，$q\neq\pm1$，考虑关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 奇数解的个数和偶数解的个数，

当 $Aq^n=kn+b$ 有偶数解，此方程即为 $A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个偶数解，且有两个偶数解时 $Akln|q|>0$，

否则 $Akln|q|<0$，因为 $y=A|q|^n$，$y=kn+b$ 单调性相反，

方程 $A|q|^n=kn+b$ 至多一个偶数解，

当 $Aq^n=kn+b$ 有奇数解，此方程即为 $-A|q|^n=kn+b$，

方程至多有两个奇数解，且有两个奇数解时 $-Akln|q|>0$，即 $Akln|q|<0$，

否则 $Akln|q|>0$，

因为 $y=-A|q|^n$，$y=kn+b$ 单调性相反，

方程 $A|q|^n=kn+b$ 至多一个奇数解，

因为 $Akln|q|>0$，$Akln|q|<0$ 不可能同时成立，

若 $q>0$，$q\neq1$，

则由 $y=Aq^n$ 和 $y=kn+b$ 的散点图可得关于 n 的方程 $Aq^n=kn+b$ 至多有两个不同的解，矛盾；

故 $Aq^n=kn+b$ 不可能有 4 个不同的正数解，故③正确．

对于④，因为$\{a_n\}$为单调递增，$\{b_n\}$为递减数列，$M=\{k|a_k=b_k\}$，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$不为常数列且各项均不相同，

前者散点图呈上升趋势，后者的散点图呈下降趋势，

两者至多一个交点，故④正确．

故答案为：①③④．

【点评】本题主要考查等差、等比的性质，考查转化能力，属于难题．

三、解答题。共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．【分析】（1）由已知等式结合二倍角公式和正弦定理求得 $\sin A$，即可得到 A；

（2）分析选条件①不符合要求；

选条件②，由已知结合正弦定理求得 b，由 $\sin C=\sin(A+B)$ 可求得 $\sin C$，再由三角形面积公式求解即可；

选条件③，由（1）及已知可求得 c，结合余弦定理求得 b，再由三角形面积公式求解即可；.

【解答】解：（1）因为 $\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B=2\sin B\cos B$，

因为 A 为钝角，所以 B 为锐角，$\cos B\neq 0$，

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{14}b$，

在△ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

因为 $a=7$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 A 为钝角，

所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

（2）若选条件①，因为 $b=7$，$a=7$，

所以 $B=A=\frac{2\pi}{3}$，与 $A+B+C=\pi$ 矛盾，

此时△ABC 不存在，故条件①不符合要求，不选①；

若选条件②，因为 $\cos B=\frac{13}{14}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

在△ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

所以 $b=\frac{a}{\sin A}\bullet\sin B=\frac{7}{\sin\frac{2\pi}{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=3$，

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+(-\frac{1}{2})\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

所以△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$；

若选条件③，由（1）知 $A=\frac{2\pi}{3}$，

因为 $c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，所以 $c=5$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $7^2=b^2+5^2-2b\times 5\times\cos\frac{2\pi}{3}$，解得 $b=3$，

所以△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

【点评】本题考查正弦定理及余弦定理的应用，考查三角形的面积公式，考查运算求解能力，属于中档

题．

17．【分析】（1）设 M 为 PD 的中点，连接 FM，CM，证明四边形 $BCMF$ 为平行四边形，即可得 $BF/\!/CM$，由线面平行的判定定理即可证明；

（2）易得 $CE\perp$ 平面 PAD，以 E 为坐标原点，建立空间直角坐标系，利用向量法即可求解．

【解答】（1）证明：如图，设 M 为 PD 的中点，连接 FM，CM，

因为 F 是 PE 中点，所以 $FM/\!/ED$，且 $FM=\frac{1}{2}ED$，

因为 $AD/\!/BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，

所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形，$BC/\!/ED$，且 $BC=\frac{1}{2}ED$，

所以 $FM/\!/BC$，且 $FM=BC$，

即四边形 $BCMF$ 为平行四边形，

所以 $BF/\!/CM$，

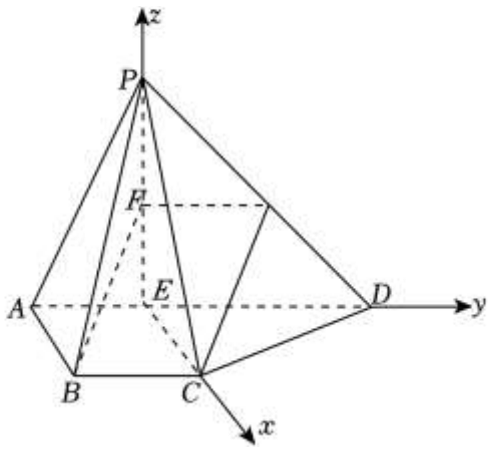
因为 $BF\not\subset$ 平面 PCD，$CM\subset$ 平面 PCD，

所以 $BF/\!/$ 平面 PCD．

（2）解：因为 $AB\perp$ 平面 PAD，

所以 $CE\perp$ 平面 PAD，EP，ED，EC 相互垂直，

以 E 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 P（0，0，2），A（0，﹣1，0），B（1，﹣1，0），C（1，0，0），D（0，2，0），

所以 $\overrightarrow{AB}=$（1，0，0），$\overrightarrow{AP}=$（0，1，2），$\overrightarrow{PC}=$（1，0，﹣2），$\overrightarrow{CD}=$（﹣1，2，0），

设平面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=$（x_1，y_1，z_1），

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB}=x_1=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AP}=y_1+2z_1=0\end{cases}$，取 $z_1=-1$，则 $\overrightarrow{m}=$（0，2，﹣1），

设平面 PCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=$（x_2，y_2，z_2），

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PC}=x_2-2z_2=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-x_2+2y_2=0\end{cases}$，取 $z_2=1$，则 $\overrightarrow{n}=$（2，1，1），

设平面 PAB 与平面 PCD 夹角为 θ，

则 $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|} = \frac{2-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$.

【点评】本题考查线面平行的判定定理，向量法求解二面角问题，属于中档题．

18．【分析】(1) 根据题设中的数据可求赔偿次数不少 2 的概率；

(2)(i) 设 ξ 为赔付金额，则 ξ 可取 0，0.8，1.6，2.4，3，用频率估计概率后可求得分布列及数学期望，从而可求 $E(X)$；

(ii) 先算出下一期保费的变化情况，结合 (i) 的结果可求 $E(Y)$.

【解答】解：(1) 设 A 为"随机抽取一单，赔偿不少于 2 次"，

由题设中的统计数据可得 $P(A) = \frac{60+30+10}{800+100+60+30+10} = \frac{1}{10}$；

(2)(i) 设 ξ 为赔付金额，则 ξ 可取 0，0.8，1.6，2.4，3，

由题可得 $P(\xi=0) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$，$P(\xi=0.8) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$，

$P(\xi=1.6) = \frac{60}{1000} = \frac{3}{50}$，$P(\xi=2.4) = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$，$P(\xi=3) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$，

所以 $E(\xi) = 0\times\frac{4}{5} + 0.8\times\frac{1}{10} + 1.6\times\frac{3}{50} + 2.4\times\frac{3}{100} + 3\times\frac{1}{100} = 0.278$，

因为毛利润是保费与赔偿金额之差，

故 $E(X) = 0.4 - 0.278 = 0.122$（万元）；

(ii) 由 (i) 知未赔偿的概率为 $P(\xi=0) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$，至少赔偿一次的概率为 $1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$，

故保费的变化为 $0.4\times\frac{4}{5}\times(1-4\%) + 0.4\times\frac{1}{5}\times(1+20\%) = 0.4032$，

设 Y 为保单下一保险期的毛利润，

故 $E(Y) = 0.122+0.4032 - 0.4 = 0.1252$（万元）．

所以 $E(X) < E(Y)$．

【点评】本题考查用概率的数学期望的知识解决实际应用问题，属于中档题．

19．【分析】(1) 根据已知条件，结合勾股定理，求出 b，c，再结合椭圆的性质，即可求解；

(2) 先设出直线 AB 的方程，并与椭圆的方程联立，再结合韦达定理，以及判别式，即可求解．

【解答】解：(1) 椭圆方程 C：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，焦点和短轴端点构成边长为 2 的正方形，

则 $b = c = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$，

故 $a^2 = b^2 + c^2 = 2$，解得 $a = \sqrt{2}$；

$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率为$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）显然直线AB斜率存在，否则B，D重合，直线BD斜率不存在与题意矛盾，

同样直线AB斜率不为0，否则直线AB与椭圆无交点，矛盾，

设AB：$y=kx+t$，（$t>\sqrt{2}$），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立$\begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，化简并整理得（$1+2k^2$）$x^2+4ktx+2t^2-4=0$，

由题意可知，$\Delta=16k^2t^2-8(2k^2+1)(t^2-2)=8(4k^2+2-t^2)>0$，即$k$，$t$应满足$4k^2+2-t^2>0$，

由韦达定理可知，$x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-4}{2k^2+1}$，

若直线BD斜率为0，由椭圆的对称性可设D（$-x_2$，y_2），

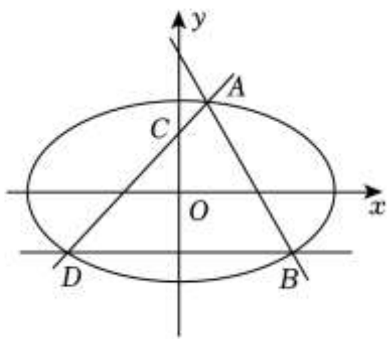
故AD：$y=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}(x-x_1)+y_1$，令$x=0$，

则 $y_C=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}=\frac{x_1(kx_2+t)+x_2(kx_1+t)}{x_1+x_2}=\frac{2kx_1x_2+t(x_1+x_2)}{x_1+x_2}=$

$\frac{4k(t^2-2)}{-4kt}+t=\frac{2}{t}=1$，解得$t=2$，

此时k满足$\begin{cases} k\neq 0 \\ 4k^2+2-t^2=4k^2-2>0 \end{cases}$，解得$k>\frac{\sqrt{2}}{2}$或$k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

综上所述，$t=2$满足题意，此时k的取值范围为$\{k|k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$k>\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.



【点评】本题主要考查直线与椭圆的综合应用，考查转化能力，属于中档题.

20.【分析】（1）直接代入$k=-1$，再利用导数研究其单调性即可；

（2）写出切线方程$y-f(t)=(1+\frac{k}{1+t})(x-t)(t>0)$，将（0，0）代入再设新函数$F(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$，利用导数研究其零点即可；

（3）分别写出面积表达式，代入$2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$得到$13\ln(1+t)-2t-15\frac{t}{1+t}=0$，再设新函数

$h(t)=13\ln(1+t)-2t-\frac{15t}{1+t}(t>0)$研究其零点即可.

【解答】解：（1）$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}(x>-1)$，

当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，

当$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$f(x)$的单调递减区间为$(-1,0)$，单调递增区间为$(0,+\infty)$.

（2）$f'(x)=1+\frac{k}{1+x}$，l的斜率为$1+\frac{k}{1+t}$，

故切线方程为$y-f(t)=(1+\frac{k}{1+t})(x-t)(t>0)$，

代入$(0,0)$，$-f(t)=-t(1+\frac{k}{1+t})$，$f(t)=t(1+\frac{k}{1+t})$，

$t+k\ln(1+t)=t+t\frac{k}{1+t}$，则$\ln(1+t)=\frac{t}{1+t}$，$\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}=0$，

令$F(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$，

若l过$(0,0)$，则$F(t)$在$t\in(0,+\infty)$存在零点.

$F'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1+t-t}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2}>0$，

故$F(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$F(t)>F(0)=0$，

不满足假设，故l不过$(0,0)$.

（3）$k=1$，$f(x)=x+\ln(1+x)$，

$f'(x)=1+\frac{1}{1+x}=\frac{x+2}{1+x}>0$，

$S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}tf(t)$，设$l$与$y$轴交点$B$为$(0,q)$，

$t>0$时，若$q<0$，则此时l与$f(x)$必有交点，与切线定义矛盾.

由（2）知$q\neq0$，

∴$q>0$，则切线l的方程为$y-t-\ln(t+1)=(1+\frac{1}{1+t})(x-t)$，

令$x=0$，则$y=q=\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}$，

∵$2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，则$2tf(t)=15t[\ln(1+t)-\frac{t}{t+1}]$，

∴$13\ln(1+t)-2t-15\times\frac{t}{1+t}=0$，记$h(t)=13\ln(1+t)-2t-\frac{15t}{1+t}(t>0)$，

∴满足条件的A有几个即$h(t)$有几个零点.

$h'(t)=\frac{13}{1+t}-2-\frac{15}{(t+1)^2}=\frac{13t+13-2(t^2+2t+1)-15}{(t+1)^2}=\frac{-2t^2+9t-4}{(t+1)^2}=\frac{(-2t+1)(t-4)}{(t+1)^2}$，

$t\in(0,\frac{1}{2})$时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减；

$t\in(\frac{1}{2},4)$时，$h'(t)>0$，$h(t)$单调递增；

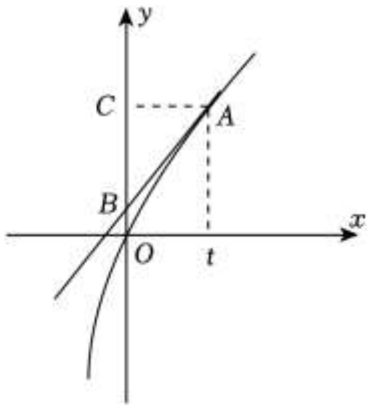
$t\in(4,+\infty)$时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减；

$\because h(0)=0$，$h(\frac{1}{2})<0$，$h(4)=13\ln5-20>13\times1.6-20=0.8>0$，

$h(24)=13\ln25-48-\frac{15\times24}{25}=26\ln5-48-\frac{72}{5}<26\times1.61-48-\frac{72}{5}=-20.54<0$，

$\therefore$由零点存在性定理及 $h(t)$的单调性，$h(t)$在$(\frac{1}{2},4)$上必有一个零点，在$(4,24)$上必有一个零点．

综上所述，$h(t)$有两个零点，即满足 $2S_{ACO}=15S_{ABO}$的 A 有两个．



【点评】本题主要考查利用导数研究函数的单调性，利用导数研究曲线上某点处的切线方程，考查运算求解能力，属于难题．

21．【分析】（1）直接按照 Ω（A）的定义写出 Ω（A）即可；

（2）利用反证法，假设存在符合条件的 Ω，由此列出方程组，进一步说明方程组无解即可；

（3）分充分性和必要性两方面论证．

【解答】解：（1）Ω（A）：3，4，4，5，8，4，3，10；

（2）假设存在符合条件的 Ω，

可知 Ω（A）的第 1，2 项之和为 a_1+a_2+s，第 3，4 项之和为 a_3+a_4+s，

则$\begin{cases}(a_1+2)+(a_2+6)=a_1+a_2+s\\(a_3+4)+(a_4+2)=a_3+a_4+s\end{cases}$，

而该方程组无解，故假设不成立，

故不存在符合条件的 Ω；

（3）证明：设序列 $T_k\ldots T_2T_1$（A）为$\{a_{k,n}\}$（$1\leqslant n\leqslant8$），特别规定 $a_{0,n}=a_n$（$1\leqslant n\leqslant8$）．

必要性：若存在序列 Ω：ω_1，ω_2，⋯，ω_s，使得 Ω（A）为常数列．

则 $a_{s,1}=a_{s,2}=a_{s,3}=a_{s,4}=a_{s,5}=a_{s,6}=a_{s,7}=a_{s,8}$，

所以 $a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$，

根据 $T_k\cdots T_2T_1$（A）的定义，显然有 $a_{k,2j-1}+a_{k,2j}=a_{k-1,2j-1}+a_{k-1,2j}$，$j=1$，2，3，4；$k=1$，2，…，

不断使用该式可以得到：$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，必要性成立．

充分性：若 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$．

由已知，$a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，而 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，

所以 $a_2+a_4+a_6+a_8=4$（a_1+a_2）－（$a_1+a_3+a_5+a_7$）也是偶数．

设 $T_s\ldots T_2T_1$（A）是通过合法的序列 Ω 的变换能得到的所有可能的数列 Ω（A）中，

使得$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$最小的一个．

上面已经证明 $a_{k,2j-1}+a_{k,2j}=a_{k-1,2j-1}+a_{k-1,2j}$，$j=1$，2，3，4，$k=1$，2，…，

从而由 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，可得 $a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$，

由于 $i_k+j_k+S_k+t_k$ 总是偶数，

所以 $a_{k,1}+a_{k,3}+a_{k,5}+a_{k,7}$ 和 $a_{k,2}+a_{k,4}+a_{k,6}+a_{k,8}$ 的奇偶性保持不变，

从而 $a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$ 和 $a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$ 都是偶数．

下面证明不存在 $j=1$，2，3，4 使得$|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}|\geqslant 2$，

假设存在，根据对称性，不妨设 $j=1$，$a_{s,2j-1}-a_{s,2j}\geqslant 2$，

即 $a_{s,1}-a_{s,2}\geqslant 2$．

情况 1：若$|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|=0$，

则由 $a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$ 和 $a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$ 都是偶数，知 $a_{s,1}-a_{s,2}\geqslant 4$．

对该数列连续作四次变换（2，3，5，8），（2，4，6，8），（2，3，6，7），（2，4，5，7）后，

新的$|a_{s+4,1}-a_{s+4,2}|+|a_{s+4,3}-a_{s+4,4}|+|a_{s+4,5}-a_{s+4,6}|+|a_{s+4,7}-a_{s+4,8}|$相比原来的$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$减少 4，

这与$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$的最小性矛盾；

情况 2：若$|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|>0$，不妨设$|a_{s,3}-a_{s,4}|>0$，

情况 2－1：如果 $a_{s,3}-a_{s,4}\geqslant 1$，则对该数列连续作两次变换（2，4，$s$，7），（2，4，6，8）后，

新的$|a_{s+2,1}-a_{s+2,2}|+|a_{s+2,3}-a_{s+2,4}|+|a_{s+2,5}-a_{s+2,6}|+|a_{s+2,7}-a_{s+2,8}|$相比原来的$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$至少减少 2，

这与$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$的最小性矛盾；

情况 2－2：如果 $a_{s,4}-a_{s,3}\geqslant 1$，则对该数列连续作两次变换（2，3，$s$，8），（2，3，6，7）后，

新的$|a_{s+2,1}-a_{s+2,2}|+|a_{s+2,3}-a_{s+2,4}|+|a_{s+2,5}-a_{s+2,6}|+|a_{s+2,7}-a_{s-2,8}|$相比原来的$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|=$至少减少 2，

这与$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$的最小性矛盾．

因此无论如何都会导致矛盾，

所以对任意的 $j=1$，2，3，4 都有$|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}|\leqslant 1$，

假设存在$j=1$，2，3，4使得$|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}|=1$，则$a_{s,2j-1}+a_{s,2j}$是奇数，

所以$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$都是奇数，设为$2\mathbf{N}+1$.

则此时对任意$j=1$，2，3，4，由$|a_{5,2j-1}-a_{5,2j}|\leqslant 1$可知必有$\{a_{5,2j-1}，a_{5,2j}\}=\{N，\mathbf{N}+1\}$，

而$a_{s,1}+a_{s,3}+a_{s,5}+a_{s,7}$和$a_{s,2}+a_{s,4}+a_{s,6}+a_{s,8}$都是偶数，

故集合$\{m|a_{s,m}=N\}$中的四个元素i，j，s，t之和为偶数，对该数列进行一次变换（i，j，s，t），

则该数列成为常数列，新的$|a_{s+1,1}-a_{s+1,2}|+|a_{s+1,3}-a_{s+1,4}|+|a_{s+1,5}-a_{s+1,6}|+|a_{s+1,7}-a_{s+1,8}|$等于零，

比原来的$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$更小，

这与$|a_{s,1}-a_{s,2}|+|a_{s,3}-a_{s,4}|+|a_{s,5}-a_{s,6}|+|a_{s,7}-a_{s,8}|$的最小性矛盾.

综上，只可能$|a_{s,2j-1}-a_{s,2j}|=0$（$j=1$，2，3，4），

而$a_{s,1}+a_{s,2}=a_{s,3}+a_{s,4}=a_{s,5}+a_{s,6}=a_{s,7}+a_{s,8}$，

故$\{a_{s,n}\}=\Omega$（A）是常数列，充分性成立.

【点评】本题属于新概念题，考查了对数列的变化、反证法的应用，关键点是对新定义的理解，以及对其本质的分析，属于难题.