2024北京朝阳高三一模

数　　学

2024.4

（考试时间120分钟　满分150分）

本试卷分为选择题40分和非选择题110分

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集$U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{x\in U\,|\,x<2\}$，则$\complement_U A=$

（A）$\{1\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$\{3,4\}$　　（D）$\{2,3,4\}$

（2）复数$\dfrac{\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$在复平面内对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）在$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则$\angle B=$

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

（4）已知$a\in\mathbf{R}$，则“$0<a<1$”是“函数$f(x)=(1-a)x^3$在$\mathbf{R}$上单调递增”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）已知直线$x-\sqrt{3}y+6=0$和圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A,B两点．若$|AB|=6$，则$r=$

（A）2　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）4　　（D）$3\sqrt{2}$

（6）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1+a_2=1,\ a_3+a_4=4$，则$S_6=$

（A）9　　（B）16　　（C）21　　（D）25

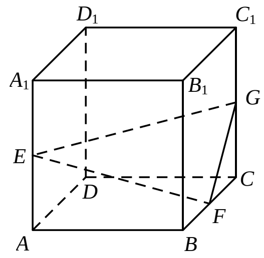
（7）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，过点$F$作垂直于$x$轴的直线$l$，$M,N$分别是$l$与双曲线$C$及其渐近线在第一象限内的交点．若$M$是线段$FN$的中点，则$C$的渐近线方程为

（A）$y=\pm x$　　（B）$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}x$

（8）在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2,BC=2\sqrt{3}$，点P在线段BC上．当$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$取得最小值时，$PA=$

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{7}{4}$

（9）在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别为棱 AA_1,BC,CC_1 的中点，动点 H 在平面 EFG 内，且 $DH=1$．则下列说法正确的是



（A）存在点 H，使得直线 DH 与直线 FG 相交

（B）存在点 H，使得直线 $DH\perp$ 平面 EFG

（C）直线 B_1H 与平面 EFG 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$

（D）平面 EFG 被正方体所截得的截面面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

（10）已知 n 个大于 2 的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，对任意 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，存在 $y_i\geqslant 2$ 满足 $y_i<x_i$，且 $x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$，则使得 $x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 15x_n$ 成立的最大正整数 n 为

（A）14　　（B）16　　（C）21　　（D）23

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $(\sqrt{x}-1)^6$ 的展开式中，x 的系数为________．（用数字作答）

（12）已知抛物线 $x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点为 F，准线方程为 $y=-1$，则 $p=$________；设 O 为原点，点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线上，若 $|OM|=|FM|$，则 $y_0=$________．

（13）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, x\leqslant 2,\\ 5-x,\ x>2.\end{cases}$ 若实数 $a,b,c\ (a<b<c)$ 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $a+b=$________；$a+b+c$ 的取值范围是________．

（14）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$．若曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(x_1,f(x_1))$ 处的切线与其在点 $B(x_2,f(x_2))$ 处的切线相互垂直，则 x_1-x_2 的一个取值为________．

（15）设 A,B 为两个非空有限集合，定义 $J(A,B)=1-\dfrac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$，其中 $|S|$ 表示集合 S 的元素个数．某学校甲、乙、丙、丁四名同学从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物这 6 门高中学业水平等级性考试科目中自主选择 3 门参加考试，设这四名同学的选考科目组成的集合分别为 S_1，S_2，S_3，S_4．已知 $S_1=\{$物理，化学，生物$\}$，$S_2=\{$地理，物理，化学$\}$，$S_3=\{$思想政治，历史，地理$\}$，给出下列四个结论：

①若 $J(S_2,S_4)=1$，则 $S_4=\{$思想政治，历史，生物$\}$；

②若 $J(S_1,S_2)=J(S_1,S_4)$，则 $S_4=\{$地理，物理，化学$\}$；

③若 $S_4=\{$思想政治，物理，生物$\}$，则 $J(S_1,S_4)<J(S_2,S_4)=J(S_3,S_4)$；

④若 $J(S_1,S_4)>J(S_2,S_4)=J(S_3,S_4)$，则 $S_4=\{$思想政治，地理，化学$\}$．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π .

（Ⅰ）若 $A=1,\ f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 φ 的值；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，确定 $f(x)$ 的解析式，并求函数 $h(x)=f(x)-2\cos 2x$ 的单调递增区间.

条件①： $f(x)$ 的最大值为 2 ；

条件②： $f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{5\pi}{12},0)$ 中心对称；

条件③： $f(x)$ 的图象经过点 $(\dfrac{\pi}{12},\sqrt{3})$.

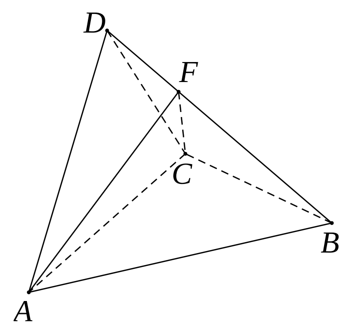
注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，侧面 $DAC\perp$ 底面 ABC ， $AD=DC,\ AB=BC$.

（Ⅰ）求证： $AC\perp BD$ ；

（Ⅱ）已知 $AB=\sqrt{5},\ AC=2,\ AD=\sqrt{2}$ ， F 是线段 BD 上一点，当 $AF\perp BD$ 时，求二面角 $F-AC-B$ 的余弦值.



（18）（本小题 13 分）

为提升学生用数学知识解决现实生活或其他学科领域中的问题的能力，发展学生数学建模素养，某市面向全市高中学生开展数学建模论文征文活动．对于参加征文活动的每篇论文，由两位评委独立评分，取两位评委评分的平均数作为该篇论文的初评得分．从评委甲和评委乙负责评审的论文中随机抽取 10 篇，这 10 篇论文的评分情况如下表所示．

序号	评委甲评分	评委乙评分	初评得分
1	67	82	74.5
2	80	86	83
3	61	76	68.5
4	78	84	81
5	70	85	77.5
6	81	83	82
7	84	86	85
8	68	74	71
9	66	77	71.5
10	64	82	73

（Ⅰ）从这 10 篇论文中随机抽取 1 篇，求甲、乙两位评委的评分之差的绝对值不超过 5 的概率；

（Ⅱ）从这 10 篇论文中随机抽取 3 篇，甲、乙两位评委对同一篇论文的评分之差的绝对值不超过 5 的篇数记为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）对于序号为 $i\,(i=1,2,\cdots,10)$ 的论文，设评委甲的评分为 X_i，评委乙的评分为 Y_i，分别记甲、乙两位评委对这 10 篇论文评分的平均数为 $\bar{X}, \bar{Y}$，标准差为 $s_{甲}, s_{乙}$，以 $\frac{1}{2}(\frac{X_i-\bar{X}}{s_{甲}}+\frac{Y_i-\bar{Y}}{s_{乙}})$ 作为序号为 i 的论文的标准化得分．对这 10 篇论文按照初评得分与标准化得分分别从高到低进行排名，判断序号为 2 的论文的两种排名结果是否相同？（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，A, B 分别是 E 的左、右顶点，P 是 E 上异于 A, B 的点，$\triangle APB$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，点 N 在直线 $x=2$ 上，N, P 分别在 x 轴的两侧，且 $\triangle APB$ 与 $\triangle NBP$ 的面积相等．

（ⅰ）求证：直线 ON 与直线 AP 的斜率之积为定值；

（ⅱ）是否存在点 P 使得 $\triangle APB\cong\triangle NBP$，若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，说明理由．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=(1-ax)\mathrm{e}^x\ (a\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)>a(1-x)$ 无整数解，求 a 的取值范围．

（21）（本小题 15 分）

若有穷自然数数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geqslant 2)$ 满足如下两个性质，则称 A 为 B_n 数列：

① $a_k\geqslant\max\{a_1+a_{k-1},a_2+a_{k-2},\cdots,a_{k-1}+a_1\}\ (k=2,3,\cdots,n)$，其中，$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 这 s 个数中最大的数；

② $a_k\leqslant\min\{a_1+a_{k-1},a_2+a_{k-2},\cdots,a_{k-1}+a_1\}+1\ (k=2,3,\cdots,n)$，其中，$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 这 s 个数中最小的数．

（Ⅰ）判断 $A:2,4,6,7,10$ 是否为 B_5 数列，说明理由；

（Ⅱ）若 $A:a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是 B_6 数列，且 a_1,a_2,a_3 成等比数列，求 a_6；

（Ⅲ）证明：对任意 B_n 数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geqslant 2)$，存在实数 λ，使得 $a_k=[k\lambda](k=1,2,\cdots,n)$．

（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D	（2）A	（3）D	（4）A	（5）D
（6）C	（7）C	（8）B	（9）C	（10）D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）15　　（12）2　$\frac{1}{2}$　　（13）2　$[6,7)$

（14）$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一）　　（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：因为 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$．

所以 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$．

（Ⅰ）因为 $A=1$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$．

又 $f(0)=\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$．……5 分

（Ⅱ）选条件①②：

因为 $f(x)$ 的最大值为 2，所以 $A=2$．

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 中心对称，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$．

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$．

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$．

所以 $h(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-2\cos 2x$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)-2\cos 2x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}+k\pi(k\in \mathbf{Z})$.

所以 $h(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi](k\in \mathbf{Z})$. .... 13 分

选条件①③：

因为 $f(x)$ 的最大值为 2，所以 $A=2$.

因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{12},\sqrt{3})$，

所以 $f(\frac{\pi}{12})=\sqrt{3}$，即 $\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<\varphi+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$.

所以 $\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

下同选条件①②. .... 13 分

选条件②③：

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 中心对称，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi\ \ (k\in \mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}\ \ (k\in \mathbf{Z})$.

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)=A\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

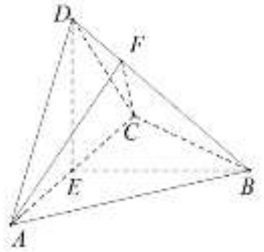
因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{12},\sqrt{3})$，

所以 $A\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

所以 $A=2$.

下同选条件①②. .... 13 分

（17）（共 14 分）



解：（Ⅰ）取 AC 中点 E，连接 DE,BE.

因为 $AD=DC$，所以 $DE\perp AC$.

又因为 $AB=BC$，所以 $BE\perp AC$.

又因为 $BE\bigcap DE=E$，

所以 $AC\perp$ 平面 BED.

又 $BD\subset$ 平面 BED，

所以 $AC\perp BD$. .... 5 分

（Ⅱ）因为侧面 $DAC\perp$ 底面 ABC，且 $DE\perp AC$，$DE\subset$ 平面 DAC，

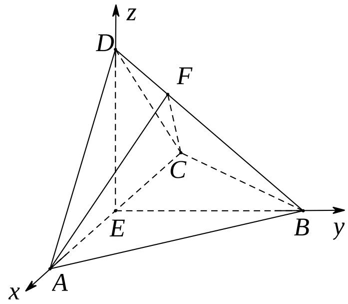
平面 $DAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，

所以 $DE\perp$ 平面 ABC.

又 $EB\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\perp EB$.

又因为 $BE\perp AC$，

如图，建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



因为 $AB=\sqrt{5},AC=2,AD=\sqrt{2}$，所以 $DE=1,EB=2$.

则 $A(1,0,0),B(0,2,0),C(-1,0,0),D(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(-2,0,0),\ \overrightarrow{AD}=(-1,0,1),\ \overrightarrow{DB}=(0,2,-1)$.

因为 F 是线段 BD 上一点，设 $\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DB}(\lambda\in[0,1])$.

所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DB}=(-1,2\lambda,1-\lambda)$.

因为 $AF\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DB}=4\lambda-(1-\lambda)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$.

所以 $\overrightarrow{AF}=(-1,\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5})$.

设平面 FAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-x+\dfrac{2}{5}y+\dfrac{4}{5}z=0,\\ -2x=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $x=0,\ y=-2$. 于是 $\boldsymbol{n}=(0,-2,1)$.

因为 $ED\perp$ 平面 ABC，所以平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{ED}=(0,0,1)$.

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{ED}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{ED}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\times1}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

由题知，二面角 $F-AC-B$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ....14 分

（18）（共 13 分）

解:（Ⅰ）设事件 A 为“从这 10 篇论文中随机抽取 1 篇，甲、乙两位评委的评分之差的绝对值不超过 5”，

在这10篇论文中，甲、乙两位评委的评分之差的绝对值不超过 5 的有 2 篇，

所以 $P(A)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$. ....4 分

（Ⅱ）依题意，X 的可能取值为 $0,1,2$.

$P(X=0)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$,

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

所以 X 的数学期望为 $EX=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$. ....10 分

（Ⅲ）相同. ....13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题知 $S_{\triangle APB}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}\times 2a\times b=ab$，

依题意 $\begin{cases} ab=2\sqrt{2}, \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{2}. \end{cases}$

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ....5 分

（Ⅱ）设 $N(2,t)$， $P(x_0,y_0)\ (x_0\neq\pm2)$，则 $y_0t<0$.

（ⅰ）由题知 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle NBP}$，所以 $\frac{1}{2}|AB||y_0|=\frac{1}{2}|BN|(2-x_0)$，

即 $|t|=\frac{4|y_0|}{2-x_0}$，故 $t=\frac{-4y_0}{2-x_0}$.

设直线 ON 的斜率为 k_{ON}，直线 AP 的斜率为 k_{AP}，

所以 $k_{ON}k_{AP}=\frac{t}{2}\cdot\frac{y_0}{x_0+2}=\frac{-2y_0}{2-x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0+2}=\frac{2y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{4-x_0^2}{x_0^2-4}=-1$.

所以直线 ON 与直线 AP 的斜率之积为定值 -1.

（ⅱ）假设存在点 P 使得 $\triangle APB\cong\triangle NBP$，

因为 $|AB|>|AP|$，$|NP|>|NB|$，$|BP|=|BP|$，

所以 $|AP|=|NB|$.

由（ⅰ）可知 $t=\frac{-4y_0}{2-x_0}=\frac{-2(x_0+2)}{y_0}$.

所以 $\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=2|\frac{x_0+2}{y_0}|$，

即 $(x_0+2)^2+y_0^2=\dfrac{4(x_0+2)^2}{y_0^2}$.

所以 $(x_0+2)^2=\dfrac{y_0^4}{4-y_0^2}$.

又 $y_0^2=2-\dfrac{x_0^2}{2}$，所以 $(x_0+2)^2=\dfrac{(4-x_0^2)^2}{8+2x_0^2}$.

所以 $(x_0+2)^2=\dfrac{(2+x_0)^2(2-x_0)^2}{8+2x_0^2}$ ，

整理得 $\dfrac{(x_0+2)^4}{8+2x_0^2}=0$，解得 $x_0=-2$ ，与 $x_0\neq-2$ 矛盾.

所以不存在点 P 使得 $\triangle APB\cong\triangle NBP$ . ...15 分

（20）（共 15 分）

解： 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时， $f(x)=\mathrm{e}^x$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a\neq0$ 时， $f'(x)=(1-a-ax)\mathrm{e}^x=-a(x-\dfrac{1-a}{a})\mathrm{e}^x$.

①若 $a>0$ ，当 $x>\dfrac{1-a}{a}$ 时， $f'(x)<0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1-a}{a},+\infty)$ 上单调递减，

当 $x<\dfrac{1-a}{a}$ 时， $f'(x)>0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1-a}{a})$ 上单调递增.

②若 $a<0$ ，当 $x>\dfrac{1-a}{a}$ 时， $f'(x)>0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1-a}{a},+\infty)$ 上单调递增，

当 $x<\dfrac{1-a}{a}$ 时， $f'(x)<0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1-a}{a})$ 上单调递减. ....8 分

（Ⅱ）由 $f(x)>a(1-x)$ 可得 $a(x-\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x})<1$.

设函数 $h(x)=x-\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}(x\in\mathbf{R})$，则 $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+x-2}{\mathrm{e}^x}$.

令 $t(x)=\mathrm{e}^x+x-2$ ，则 $t'(x)=\mathrm{e}^x+1>0$ ，

所以函数 $t(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

又 $t(0)=-1<0$ ， $t(1)=\mathrm{e}-1>0$ ，

所以函数 $t(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上存在唯一零点 $x_0\in(0,1)$.

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x\leqslant0$ 时， $h(x)\geqslant h(0)=1$，当 $x\geqslant1$ 时， $h(x)\geqslant h(1)=1$.

①若 $a\leqslant0$，当 $x\leqslant0$ 时， $a\cdot h(x)\leqslant0<1$ ，

此时 $a\cdot h(x)<1$ 有无穷多个整数解，不符合题意.

②若 $a\geqslant1$，因为函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，$h(x)\geqslant\min\{h(0),h(1)\}=1\geqslant\frac{1}{a}$.

所以 $a\cdot h(x)<1$ 无整数解，符合题意.

③若 $0<a<1$，因为 $h(0)=h(1)=1<\frac{1}{a}$，

所以 $0,1$ 是 $a\cdot h(x)<1$ 的两个整数解，不符合题意.

综上，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. ....15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$A:2,4,6,7,10$ 不是 B_5 数列. 理由如下：

因为 $a_1+a_3=8,a_2+a_2=8$，

所以 $\max\{a_1+a_3,a_2+a_2\}=8$.

但 $a_4=7<8$，所以 A 不满足性质①，故不是 B_5 数列. ....4 分

（Ⅱ）根据 B_6 数列的定义，可知 $A:a_1,a_2,\cdots,a_6$ 满足：

$a_2=a_1+a_1$ 或 $a_2=a_1+a_1+1$，$a_3=a_1+a_2$ 或 $a_3=a_1+a_2+1$.

（1）若 $a_2=a_1+a_1$，因为 a_1,a_2,a_3 成等比数列，所以 $a_3=\frac{a_2^2}{a_1}=4a_1$.

又因为 $a_1\neq0$，所以 $a_3\neq a_1+a_2$.

当 $a_3=a_1+a_2+1$ 时，由 $a_3=3a_1+1=4a_1$ 得 $a_1=1$.

（2）若 $a_2=a_1+a_1+1$，因为 a_1,a_2,a_3 成等比数列，所以 $a_3=\frac{a_2^2}{a_1}=\frac{(2a_1+1)^2}{a_1}$.

当 $a_3=a_1+a_2$ 时，由 $a_3=3a_1+1=\frac{(2a_1+1)^2}{a_1}$ 得 $a_1=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，

与 a_1 是自然数矛盾，舍去.

当 $a_3=a_1+a_2+1$ 时，由 $a_3=3a_1+2=\frac{(2a_1+1)^2}{a_1}$ 得 $a_1=-1$，

与 a_1 是自然数矛盾，舍去.

所以 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$.

由 $a_1+a_3=5,a_2+a_2=4$，以及 $\max\{a_1+a_3,a_2+a_2\}\leqslant a_4\leqslant\min\{a_1+a_3,a_2+a_2\}+1$，

可知 $5\leqslant a_4\leqslant5$，所以 $a_4=5$.

由 $a_1+a_4=a_2+a_3=6$，以及 $\max\{a_1+a_4,a_2+a_3\}\leqslant a_5\leqslant\min\{a_1+a_4,a_2+a_3\}+1$，

可知 $6\leqslant a_5\leqslant7$.

由 $7\leqslant a_1+a_5\leqslant8,a_2+a_4=7,a_3+a_3=8$，

以及 $\max\{a_1+a_5,a_2+a_4,a_3+a_3\}\leqslant a_6\leqslant\min\{a_1+a_5,a_2+a_4,a_3+a_3\}+1$，

可知 $8\leqslant a_6\leqslant8$，所以 $a_6=8$. ....9 分

（III）当 $n=2$ 时，根据 B_2 数列的定义，可知 $a_2=2a_1$ 或 $a_2=2a_1+1$．

若 $a_2=2a_1$，取 $\lambda=a_1+0.1>0$，则 $a_1=[\lambda],a_2=[2\lambda]$，结论成立．

若 $a_2=2a_1+1$，取 $\lambda=a_1+0.5>0$，则 $a_1=[\lambda],a_2=[2\lambda]$，结论成立．

假设存在自然数 $t>2$，存在 B_t 数列使得结论不成立，设这样的 t 的最小值为 t_0，

即存在 B_{t_0} 数列 $A: a_1,a_2,\cdots,a_{t_0}$，对任意实数 λ，存在 $k\in\{1,2,\cdots,t_0\}$，使得 $a_k\neq[k\lambda]$．

根据假设，数列 A 的前 t_0-1 项 $a_1,a_2,\cdots,a_{t_0-1}$ 组成的数列是一个 B_{t_0-1} 数列，

从而存在实数 β，使得 $a_k=[k\beta](k=1,2,\cdots,t_0-1)$．

所以 $a_k\leqslant k\beta<a_k+1\,(k=1,2,\cdots,t_0-1)$，

即 $\dfrac{a_k}{k}\leqslant\beta<\dfrac{a_k+1}{k}\,(k=1,2,\cdots,t_0-1)$．

令 $L=\max\{a_1,\dfrac{a_2}{2},\cdots,\dfrac{a_{t_0-1}}{t_0-1}\},U=\min\{a_1+1,\dfrac{a_2+1}{2},\cdots,\dfrac{a_{t_0-1}+1}{t_0-1}\}$，则 $L\leqslant\beta<U$．

令 $L^*=\max\{L,\dfrac{a_{t_0}}{t_0}\},U^*=\min\{U,\dfrac{a_{t_0}+1}{t_0}\}$，则 $L\leqslant L^*,U^*\leqslant U$．

（1）若 $L^*=\dfrac{a_{t_0}}{t_0}$，根据 U 的定义，存在 $u\in\{1,2,\cdots,t_0-1\}$，使得 $U=\dfrac{a_u+1}{u}$，

又 $\dfrac{a_{t_0-u}}{t_0-u}\leqslant L<U=\dfrac{a_u+1}{u}$，

则 $L^*=\dfrac{a_{t_0}}{t_0}\leqslant\dfrac{a_{t_0-u}+a_u+1}{t_0}=\dfrac{a_{t_0-u}+(a_u+1)}{(t_0-u)+u}<\dfrac{a_u+1}{u}=U$，

且 $L^*=\dfrac{a_{t_0}}{t_0}<\dfrac{a_{t_0}+1}{t_0}$，所以 $L^*<U^*$．

（2）若 $L^*=L$，根据 L 的定义，存在 $l\in\{1,2,\cdots,t_0-1\}$，使得 $L=\dfrac{a_l}{l}$，

又 $\dfrac{a_l}{l}=L<U\leqslant\dfrac{a_{t_0-l}+1}{t_0-l}$，

则 $L^*=L=\dfrac{a_l}{l}<\dfrac{a_l+(a_{t_0-l}+1)}{l+(t_0-l)}=\dfrac{a_l+a_{t_0-l}+1}{t_0}\leqslant\dfrac{a_{t_0}+1}{t_0}$，

且 $L^*=L<U$，所以 $L^*<U^*$．

所以 $L\leqslant L^*<U^*\leqslant U$．

令 $\beta'=\dfrac{L^*+U^*}{2}$，则 $L\leqslant L^*<\beta'<U^*\leqslant U$，

即 $\max\{a_1,\dfrac{a_2}{2},\cdots,\dfrac{a_{t_0}}{t_0}\}<\beta'<\min\{a_1+1,\dfrac{a_2+1}{2},\cdots,\dfrac{a_{t_0}+1}{t_0}\}$，

所以 $\dfrac{a_k}{k}<\beta'<\dfrac{a_k+1}{k}\,(k=1,2,\cdots,t_0)$．

所以$a_k < k\beta' < a_k + 1\,(k = 1, 2, \cdots, t_0)$，即$a_k = [k\beta']\,(k = 1, 2, \cdots, t_0)$，与假设矛盾．

综上，结论成立．..15 分