作业一: L'Hôpital's rule 的叙述与证明

赖泽宇
统计学 3190102225

2022 年 6 月 27 日

洛必达法则是一个用于简化不确定形式极限的工具，它可以将不确定形式的求极限问题简化为另一种易求的形式。

1 问题描述

如果满足以下四个条件

- $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \tag{1}$$

  or

  $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty \tag{2}$$

- $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个包含该点 c 的开区间 $\mathcal{I}$ 上可微
- $\forall x \neq c,\ x \in \mathcal{I},\ g^{'}(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to c} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ 存在

则有 $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$

2 证明

下仅给出情况 (1) 的证明。

设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 c 点附近连续可导，$f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 c 点连续，

且值皆为 0，即:

$$f(c)=g(c)=0;\ \lim_{x\to c}f(x)=0;\ \lim_{x\to c}g(x)=0$$

另一方面，两函数的导数比值在 c 点存在，记为:

$$\lim_{x\to c}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=L \tag{3}$$

由极限的定义，对 $\forall\epsilon>0,\exists\eta>0$, s.t.$\forall x\ neqc,\ c-\eta\leq x\leq c+\eta$:

$$L-\epsilon\leq\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}\leq L+\epsilon$$

根据柯西中值定理，$\forall x\neq c, c-\eta\leq xc+\eta$, $\exists\xi$ 介于 a 和 x,s.t.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)} \tag{4}$$

于是, $L-\epsilon\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq L+\epsilon$
因此, $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ 与 (3) 相等，命题得证。