CHƯƠNG 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

1.1.1. Ánh xạ, định nghĩa hàm số một biến số

1.1.1.1. Ánh xạ

Định nghĩa

Giả sử X và Y là hai tập hợp tùy ý cho trước. Một ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$.

y gọi *là ảnh* của x qua ánh xạ f hay giá trị của f tại x.

x gọi là một *tạo ảnh* của y.

Tập X gọi là *tập nguồn* hay *tập xác định* của ánh xạ f.

Tập Y gọi là *tập đích* hoặc *tập giá trị* của ánh xạ f.

Ta kí hiệu

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Từ định nghĩa mỗi $x \in X$ có duy nhất một ảnh $y \in Y$, còn mỗi $y \in Y$ có thể có một tạo ảnh, nhiều tạo ảnh hoặc không có tạo ảnh nào.

Tập tất cả các tạo ảnh của y kí hiệu là $f^{-1}(y)$.

Hai ánh xạ f và g từ X vào Y gọi là bằng nhau nếu $f(x) = g(x), \forall x \in X$.

Ví dụ 1.1

Cho

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Quy tắc này xác định một ánh xạ bởi vì mỗi $x \in \mathbb{R}$ có duy nhất một giá trị x^2

Ta có:

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \{0\} \\ f^{-1}(1) &= \{-1,1\} \\ f^{-1}(-1) &= \varnothing \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2

Cho X là một tập hợp bất kì. Ánh xạ

$$id_X : X \to X$$
$$x \mapsto id_X(x) = x$$

biến phần tử x thành chính nó. id_X gọi là *ánh xạ đồng nhất* trên *X*.

Ví dụ 1.3

Cho

$$\begin{aligned}
&A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}, a,b \in \mathbb{R}, a \neq b \\
&f : A \to B \\
&\quad 1 \mapsto a \\
&\quad 1 \mapsto b \\
&\quad 2 \mapsto a \\
&\quad 3 \mapsto b
\end{aligned}$$

Quy tắc này không là ánh xạ vì phần tử 1 cho hai ảnh khác nhau.

Ảnh và tạo ảnh

Cho ánh xạ $f : X \to Y; C \subset X; D \subset Y$

* *Ảnh* của tập *C* qua ánh xạ *f*, kí hiệu *f(C)* là tập gồm tất cả các ảnh của các phần tử $x \in C$

$$f(C) = \{\text{y} \in Y \,/\, \exists x \in C : f(x) = y\} \subset Y$$

Đặc biệt *f(X)* là *tập ảnh* của *f*.

* *Tạo ảnh* của *D* qua hàm *f*, kí hiệu $f^{-1}(D)$ là tập tất cả các phần tử *x* có ảnh thuộc *D*.

$$f^{-1}(D) = \{\text{x} \in X : f(x) \in D\} \subset X$$

Ví dụ 1.4

Cho

$$\begin{aligned}
&a)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\quad x \mapsto x^2 \\
&f\left(\left[-1,2\right)\right) = \left\{y \in \mathbb{R} : y = x^2, x \in \left[-1,2\right)\right\} = \left[0,4\right) \\
&f^{-1}\left(\left[-1,1\right)\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \left[-1,1\right)\right\} = (-1,1) \\
&b)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x+1\right| \\
&f\left(\left[-2,1\right]\right) = \left\{y \in \mathbb{R} : y = \left|x+1\right|, x \in \left[-2,1\right]\right\} = \left[1,2\right] \\
&f^{-1}\left(\left[0,1\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x+1\right| \in \left[0,1\right]\right\} = \left[-2,0\right]
\end{aligned}$$

Tính chất

Cho ánh xạ $f: X \to Y; A_1, A_2, A \subset X; B_1, B_2, B \subset Y$. Khi đó

$$* \begin{array}{l} f^{-1}(f(A)) \supset A \\ f(f^{-1}(B)) \subset B \end{array}$$

$$* \begin{array}{l} f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \\ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \end{array}$$

$$* \begin{array}{l} f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{array}$$

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Cho ánh xạ $f: X \to Y$

* f được gọi là *đơn ánh* nếu mỗi $y \in Y$ có không quá một tạo ảnh.

f đơn ánh $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\Leftrightarrow \forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có tối đa 1 phần tử

* f được gọi là *toàn ánh* nếu mọi $y \in Y$ đều có tạo ảnh.

f toàn ánh $\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X$ để $f(x) = y$

$\Leftrightarrow f(X) = Y$

$\Leftrightarrow \forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có ít nhất một phần tử

* f được gọi là *song ánh* nếu mọi $y \in Y$ tồn tại duy nhất một tạo ảnh.

f là song ánh $\Leftrightarrow f$ vừa đơn ánh, f vừa là toàn ánh.

Ví dụ 1.5

Xét ánh xạ

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto y = f(x) = x^2 \end{array}$$

Theo ví dụ 1.1 f không toàn ánh và cũng không đơn ánh.

Ví dụ 1.6

Xét ánh xạ $f: X \to Y, f(x) = \sin x$ với $X, Y \subset \mathbb{R}$.

- Nếu $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], Y = \left[-1, 1\right]$ thì mọi $y \in Y$ có duy nhất một tạo ảnh. Do đó f là song ánh

- Nếu $X = \mathbb{R}, Y = \left[-1, 1\right]$ thì f là toàn ánh nhưng không song ánh vì mọi $y \in Y$ có nhiều hơn 1 tạo ảnh.

Hợp thành của hai ánh xạ

Cho các ánh xạ $f : X \to Y; g : Y \to Z$. *Hợp thành* của g và f, kí hiệu $g \circ f$ là ánh xạ xác định bởi

$$g \circ f : X \to Z$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ví dụ 1.7

Cho

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 2x \qquad\qquad x \mapsto 3x - 1$$

Khi đó

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x) = 3(x^2 + 2x) - 1 = 3x^2 + 6x - 1$$
$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 1) = (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) = 9x^2 - 1$$

Ánh xạ ngược

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Ta nói f là ánh xạ khả nghịch nếu tồn tại một ánh xạ $g : Y \to X$ sao cho:

$$g \circ f = id_X \text{ và } f \circ g = id_Y$$

Ánh xạ g gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f và ký hiệu là f^{-1}.

Ta có các tính chất sau đây:

(i) Ánh xạ $f : X \to Y$ khả nghịch khi vá chỉ khi f là một song ánh.

(ii) Ánh xạ ngược (nếu có) của một ánh xạ là duy nhất.

(iii) Nếu $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là hai ánh xạ khả nghịch thì $g \circ f$ cũng khả nghịch và $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.1.1.2. Định nghĩa hàm số một biến số

Cho tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ gọi là hàm số một biến số. Tập X được gọi là *tập xác định* thường được kí hiệu là D_f, tập ảnh $Y = f(X)$ của ánh xạ được gọi là *tập giá trị* của hàm số f.

Hàm số thường được ký hiệu:

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned} \quad \text{hoặc} \quad y = f\left(x\right)$$

Ký hiệu trên cho phép ta xác định được giá trị của hàm số tại điểm x, x được gọi là biến số độc lập và $y = f\left(x\right)$ là giá trị của hàm số tại x.

Nếu f cho bởi một biểu thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu tập xác định ở đây là tập hợp tất cả các giá trị của x để biểu thức có nghĩa.

Ví dụ 1.8

a) Cho hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$. Tập xác định là $[-2, 2]$.

b) Hàm số $y = \sin x$ xác định trên toàn trục số.

c) Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}} + \log_2(x - 3)$. Biểu thức có nghĩa khi $5 - x > 0$ và $x - 3 > 0$

Từ đó tập xác định của hàm số là khoảng $(3, 5)$.

1.1.1.3. Đồ thị của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $X \subset \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các điểm $(x, f(x))$, $x \in X$ được gọi là đồ thị của hàm số $f(x)$. Biểu diễn tất cả các điểm $(x, f(x))$, $x \in X$ lên mặt phẳng tọa độ xOy thông thường ta được một đường cong gọi là đồ thị của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 1.9

a) Hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị là một đường parabol

b) Hàm số $y = f(x) = x^2, x \in [0, 2]$ có đồ thị là một cung parabol

1.1.2. Các phép toán trên hàm số một biến số

1.1.2.1. Các phép toán số học trên hàm số một biến số

Giả sử $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hai hàm số xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Khi đó, các hàm số $(f \pm g)(x), (f.g)(x), \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ được định nghĩa như sau:

$$
\begin{array}{lll}
(i) & \left(f \pm g\right)\left(x\right) & = & f\left(x\right) \pm g\left(x\right) \\
(ii) & \left(f.g\right)\left(x\right) & = & f\left(x\right).g\left(x\right) \\
(iii) & \left(\dfrac{f}{g}\right)\left(x\right) & = & \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\ khi\ g\left(x\right) \neq 0
\end{array}
$$

và gọi chúng lần lượt là tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ trên X.

1.1.2.2. Hàm số hợp

Cho hàm số $u = f(x)$ xác định trên $X \subset \mathbb{R}$ và hàm số $y = g(u)$ xác định trên $Y \subset \mathbb{R}$ sao cho $f(X) \subseteq Y$. Hàm hợp của $f(x)$ và $g(u)$, kí hiệu $g \circ f$ là một hàm số xác định bởi công thức $(g \circ f)\left(x\right) = g\left(f\left(x\right)\right), \forall x \in X$

Chẳng hạn, $y = \sin x^2$ là hàm hợp của hai hàm số $y = \sin u$ và $u = x^2$.

Cần chú ý rằng $g \circ f \neq f \circ g$

1.1.2.3. Hàm số ngược

Cho hai tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ là một song ánh. Khi đó, hàm số $f(x)$ có hàm ngược. Hàm số $g(x)$ gọi là hàm ngược của hàm số $f(x)$, ký hiệu $f^{-1}(x)$ nếu $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \forall x \in D_f$ và $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \forall x \in D_g$

Ví dụ 1.10

a) Hàm số $y = 2^x$ có hàm số ngược là $x = \log_2 y$.

b) Hàm số $y = 2x - 3$ có hàm số ngược là $x = \dfrac{y+3}{2}$.

Như vậy, tập xác định của hàm f^{-1} chính là tập giá trị của hàm f và ngược lại. Đồ thị của hàm số $y = f^{-1}\left(x\right)$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = f\left(x\right)$ qua đường phân giác thứ nhất nếu ta dựng đồ thị của hai hàm số này trên cùng một hệ trục Descartes vuông góc *xOy*.

1.1.3. Các tính chất của hàm số một biến số

1.1.3.1. Hàm số đơn điệu

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $X \subset \mathbb{R}$.

Ta nói hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng nghiêm ngặt (hoặc đơn điệu giảm nghiêm ngặt) trên X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right) \text{ (hoặc } f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)\text{)}.$$

Ta nói hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trên X nếu với mọi $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \le f\left(x_2\right) \text{ (hoặc } f\left(x_1\right) \ge f\left(x_2\right)\text{)}.$$

Hàm số đơn điệu tăng hoặc giảm gọi chung là hàm đơn điệu. Tính đơn điệu cho ta hình dung dáng điệu đồ thị của hàm số trên X , đồ thị của hàm đơn điệu tăng (giảm) đi lên (đi xuống) từ trái sang phải.

Ví dụ 1.11

a) Hàm số $f\left(x\right) = x^3$ tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$

b) Hàm số $y = \left[x\right]$ (hàm phần nguyên) tăng trên toàn trục số nhưng không tăng nghiêm ngặt.

c) Hàm số $y = \sin x$ tăng nghiêm ngặt trên các khoảng $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ và giảm nghiêm ngặt trong các khoảng $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$.

1.1.3.2. Hàm số bị chặn

Hàm số $f(x)$ bị chặn trên (hoặc bị chặn dưới) trong tập $X \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại một số *M* sao cho

$$f(x) \le M \text{ (hoặc } f(x) \ge M\text{)} \text{ với mọi } x \in X.$$

Nếu hàm số *f(x)* vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới trên X thì ta nói rằng *f(x)* bị chặn trên *X*. Hay nói cách khác, hàm số *f(x)* bị chặn trong tập X nếu tồn tại một số dương *M* sao cho $\left|f\left(x\right)\right| \leq M$, $\forall x \in X$

Ví dụ 1.12

- Hàm số $y = \sin x$ bị chặn trên $\mathbb{R}$ vì $|\sin x| \leq 1$.
- Hàm số $y = x^2$ không bị chặn trên trên $\mathbb{R}$ nhưng bị chặn dưới vì $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1.1.3.3. Hàm số chẵn và hàm số lẻ

Ta nói một tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ là đối xứng nếu $\forall x \in X \Rightarrow -x \in X$.

Hàm số *f(x)* xác định trên tập hợp đối xứng *X* được gọi là hàm chẵn nếu với mọi $\forall x \in X$ ta đều có $f(x) = f(-x)$.

Chẳng hạn, các hàm số $y = x^2$; $y = \cos x$; $y = 2^{|x|}$, . . . là những hàm chẵn. Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Hàm số *f(x)* xác định trên tập số đối xứng *X* được gọi là hàm lẻ nếu với mọi $\forall x \in X$ ta đều có $f(-x) = -f(x)$.

Các hàm số $y = x^3; y = \sin x$; . . . là những hàm số lẻ. Hàm lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

1.1.3.4. Hàm số tuần hoàn

Hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T > 0$ sao cho với mọi $x \in X$, ta có

$$x + T \in X \text{ và } f\left(x + T\right) = f\left(x\right) \tag{1}$$

Từ định nghĩa ta thấy nếu *T* thoả mãn (1) thì tất cả những số có dạng nT, $n \in \mathbb{N}$ đều thoả mãn (1). Do đó tập xác định của hàm số tuần hoàn không bị chặn.

Số dương nhỏ nhất (nếu có) trong các số *T* thoả mãn (1) được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $f(x)$.

Khi khảo sát các tính chất và dáng điệu của hàm số tuần hoàn ta chỉ cần khảo sát hàm số này trong một khoảng có độ dài bằng chu kỳ của nó.

Ví dụ 1.13

a) Hàm số $\sin x, \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π. Hàm số $tgx, \cot gx$ tuần hoàn với chu kỳ π.

b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1, khi \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, khi \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ là hàm tuần hoàn, không có chu kỳ.

Thật vậy, với mọi số hữu tỉ *r*, ta có *x* + *r* là số hữu tỉ nếu *x* hữu tỷ, ngược lại *x* + *r* là số vô tỷ. Do đó $f(x+r) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Hàm số hằng $f(x) = c$ cũng là hàm tuần hoàn không có chu kỳ.

1.1.4. Các hàm số thường gặp

1.1.4.1. Hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

Miền xác định của hàm số này phụ thuộc vào α.

Nếu $\alpha \in \mathbb{N}$ thì tập xác định là $\mathbb{R}$.

Nếu α nguyên âm thì tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nếu $\alpha > 0$ và α không nguyên thì tập xác định là $[0, +\infty)$.

Nếu $\alpha < 0$ và α không nguyên thì tập xác định là $(0, +\infty)$

Hàm số tăng nghiêm ngặt nếu $\alpha > 0$ và giảm nghiêm ngặt nếu $\alpha < 0$. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm (1,1) và đi qua gốc (0,0) nếu $\alpha > 0$ và không qua gốc nếu $\alpha < 0$.

1.1.4.2. Hàm số mũ $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$

Miền xác đinh: $D = \mathbb{R}$. Miền giá trị $\mathbb{R}_+^*$.

Hàm số tăng nếu $a > 1$ và giảm nếu $0 < a < 1$.

Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm (0,1), nằm phía trên và tiệm cận với trục hoành.

1.1.4.3. Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Miền xác định $D = \mathbb{R}_+^*$, là hàm số ngược của hàm số mũ $y = a^x$. Đồ thị hàm số đối xứng với đồ thị hàm mũ $y = a^x$ qua đường phân giác thức nhất. Hàm số tăng nếu $a > 1$ và giảm nếu $0 < a < 1$.

1.1.4.4. Các hàm số lượng giác

a) Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$. Tập xác định $\mathbb{R}$, tập giá trị là [-1, 1], tuần hoàn với chu kỳ 2π.

b) Hàm số $y = \tan x$; $y = \cot x$

+ Hàm số $y = \tan x$ xác định với mọi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$, tăng nghiêm ngặt trong các khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, tuần hoàn với chu kỳ π.

+ Hàm số $y = \cot x$ xác định với mọi $x \neq k\pi$, tập giá trị là $\mathbb{R}$, tăng nghiêm ngặt trong các khoảng $(k\pi, (1+k)\pi)$, tuần hoàn với chu kỳ π.

1.1.4.5. Các hàm số lượng giác ngược

a) Hàm số $y = \arcsin x$.

Hàm số $y = \sin x$ tăng nghiêm ngặt trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nên có hàm ngược ký hiệu là $x = \arcsin y$.

Nếu dùng chữ *x* chỉ biến số độc lập và biến *y* chỉ biến số phụ thuộc, thì hàm số được ký hiệu là $y = \arcsin x$.

Hàm số $y = \arcsin x$ có tập xác định là [-1,1], tập giá trị là $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Hàm số $y = \arcsin x$ là hàm lẻ, tăng.

b) Hàm số $y = \arccos x$.

Hàm số ngược của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn [0, π] được ký hiệu $y = \arccos x$.

Hàm số $y = \arccos x$ có tập xác định là [-1,1], tập giá trị là [0, π].

Hàm $y = \arccos x$ là hàm giảm.

c) Hàm số $y = \arctan x$ là hàm ngược của hàm số $y = \tan x$ trong $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $y = \arctan x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $y = \arctan x$ là hảm lẻ, tăng.

d) Hàm số $y = arc\cot x$ là hàm ngược của hàm số $y = \cot x$ trong $(0, \pi)$.

Hàm số $y = arc\cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $(0, \pi)$.

Hàm số $y = arc\cot x$ là hàm giảm.

Các hàm số luỹ thừa, mũ, logarit, các hàm lượng giác và hàm số lượng giác ngược được gọi chung là các hàm sơ cấp cơ bản. Từ những hàm sơ cấp cơ bản, bằng một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ nhân, chia và phép hợp hàm ta xây dựng được những hàm phức tạp hơn và gọi là các hàm sơ cấp.

Ví dụ 1.14

Hàm số $y = \dfrac{x\pi + 5}{2^{\sin(x^2+x+1)}}$ là một hàm sơ cấp.

1.1.5. Một số hàm số trong phân tích kinh tế

1. Hàm sản xuất: $Q = f(L)$, Q là lượng sản phẩm, L là lao động.

2. Hàm doanh thu: $R = R(Q)$

3. Hàm chi phí: $C = C(Q)$

4. Hàm lợi nhuận: $\pi = \pi(Q)$. Ta có: $\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$

5. Hàm cung: $Q_s = S(p)$, p là giá

Hàm cung tăng theo p, do đó có hàm ngược là $P = S^{-1}(Q_s)$

6. Hàm cầu: $Q_d = D(p)$

Hàm cầu giảm theo p, do đó có hàm ngược là $R = D^{-1}(p)$

1.2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1.2.1. Giới hạn của dãy số

1.2.1.1. Dãy số

Định nghĩa

Ánh xạ $x : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto x(n) = x_n \quad \text{được gọi là một dãy số, ký hiệu } \{x_n\}_n$$

Thông thường để biểu thị một dãy số, ta liệt kê các giá trị của các phần tử của nó theo thứ tự chỉ số tăng dần $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

x_n được gọi là phần tử thứ *n* (hay số hạng tổng quát) của dãy số, số *n* được gọi là chỉ số của phần tử x_n. Như vậy, một dãy số luôn luôn được hiểu có vô số phần tử.

Đôi khi, ta cũng coi dãy số là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ sang $\mathbb{R}$. Khi đó phần tử đầu tiên của dãy là x_0.

Thông thường, một dãy số được xác định

1) hoặc bởi một quy luật cho phép tính trực tiếp giá trị của phần tử x_n, chẳng hạn

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, ..., x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

2) hoặc bởi một quy luật cho phép tính gián tiếp phần tử x_n qua các phần tử trước nó, chẳng hạn

$$x_1 = 1, x_2 = 3, ..., x_n = x_{n-1}^2 + 2$$

Dãy số bị chặn

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực *M* sao cho

$$x_n \le M \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực *m* sao cho

$$x_n \ge m \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn dưới, vừa bị chặn trên. Nói cách khác, dãy số $\{x_n\}_n$ bị chặn khi và chỉ khi tồn tại số thực $A > 0$ sao cho

$$\left|x_n\right| \le A, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ví dụ 1.15

Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ là dãy bị chặn vì $2 \le x_n \le 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = n^3, n \in \mathbb{N}^*$ là dãy bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.

Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = 1 - n^3$, $n \in \mathbb{N}^*$ là dãy bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.

Dãy số đơn điệu

Cho dãy số $\{x_n\}_n$

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là dãy tăng nếu $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là dãy giảm nếu $x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là dãy tăng nghiêm ngặt nếu $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là dãy giảm nghiêm ngặt nếu $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là đơn điệu nếu $\{x_n\}_n$ tăng hoặc $\{x_n\}_n$ giảm.

- Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là đơn điệu nghiêm ngặt nếu $\{x_n\}_n$ tăng nghiêm ngặt hoặc $\{x_n\}_n$ giảm nghiêm ngặt.

Ví dụ 1.16

Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ là dãy tăng.

Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ là dãy giảm.

Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ là dãy không tăng, không giảm.

1.2.1.2. Giới hạn của dãy số

Định nghĩa

Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là có giới hạn hữu hạn $x \in \mathbb{R}$ khi *n* tiến ra vô cực, ký hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ hoặc $x_n \to x$ khi $n \to +\infty$ nếu với mọi số dương ε cho trước bất kỳ, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$ ta có $\left|x_n - x\right| < \varepsilon$

Như vậy,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* \left(n \ge n_0 \Rightarrow \left|x_n - x\right| < \varepsilon\right)$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy hội tụ, ngược lại gọi là dãy phân kỳ.

Ví dụ 1.17

Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$

Cho trước $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta tìm $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho khi $n \ge n_0$ thì

$$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

Muốn vậy ta cần có $\left|\frac{-2}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}<\varepsilon$

Ta có $\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}$

Vậy ta sẽ chọn $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{2}{n_0}<\varepsilon$ hay chọn $n_0>\frac{2}{\varepsilon}$. Khi $n\geq n_0$ ta sẽ có

$\frac{2}{n}\leq\frac{2}{n_0}<\varepsilon$. Do đó $\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}<\varepsilon$ hay $\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$, tức là $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+1}=2$

Giới hạn vô cực

a) Dãy số $\{x_n\}_n$ có giới hạn là $+\infty$ khi khi *n* tiến ra vô cực, ký hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ hoặc $x_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu

$$\forall A>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*(n\geq n_0\Rightarrow x_n>A)$$

b) Dãy số $\{x_n\}_n$ có giới hạn là $-\infty$ khi khi *n* tiến ra vô cực, ký hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=-\infty$ hoặc $x_n\to-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu

$$\forall A>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*(n\geq n_0\Rightarrow x_n<-A)$$

Chú ý. $+\infty$ và $-\infty$ chỉ là những ký hiệu chứ không phải là những số thực. Các ký hiệu này chỉ mang ý nghĩa hình thức để diễn đạt khái niệm vô hạn. Do, đó, nếu không có quy ước bổ sung thì ta không thể áp dụng các phép toán số học đối với $+\infty$ và $-\infty$. Những dãy số có giới hạn là vô cực ($+\infty$ hoặc $-\infty$) không được gọi là dãy hội tụ.

Ví dụ 1.18

a) Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$

Cho trước $A>0$ bất kỳ. Ta tìm $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho khi $n\geq n_0$ thì $n^2>A$

Muốn vậy ta cần có $n>\sqrt{A}$

Vậy ta sẽ chọn $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $n_0>\sqrt{A}$. Khi $n\geq n_0$ ta sẽ có

$n \ge n_0 > \sqrt{A}$ hay $n^2 > A$, tức là $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

b) Tương tự, ta cũng chứng minh được $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$

Dãy Cauchy

Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \left(m, n \ge n_0 \Rightarrow \left|x_m - x_n\right| < \varepsilon\right)$$

Như vậy, dãy Cauchy là một dãy mà kể từ một chỉ số n_0 nào đó trở đi thì khoảng cách giữa hai phần tử bất kỳ của dãy số đều nhỏ hơn một số dương cho trước bé tùy ý.

Với hai số $m, n \in \mathbb{N}^*$ bất kỳ, giả sử $n < m$ thì $m = n + p$ với $p \in \mathbb{N}^*$ nên ta lại có định nghĩa dãy Cauchy như sau:

Dãy số $\{x_n\}_n$ được gọi là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* \left(n \ge n_0 \Rightarrow \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*\right)$$

Từ định nghĩa của dãy Cauchy ta suy ra

Dãy số $\{x_n\}_n$ không là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists m, n \in \mathbb{N}^* \left(m, n \ge n_0 \text{ và } \left|x_m - x_n\right| \ge \varepsilon\right)$$

hoặc $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}^* \left(n \ge n_0 \text{ và } \left|x_{n+p} - x_n\right| \ge \varepsilon\right)$

Định lý 1.1

Dãy số $\{x_n\}_n$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Ví dụ 1.19

a) Dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k}{k^2} = \dfrac{\cos 1}{1^2} + \dfrac{\cos 2}{2^2} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{\cos n}{n^2}$ là dãy Cauchy

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Ta tìm $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho khi $m, n \ge n_0$ thì

$$\left|x_m - x_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)}{(n+2)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\cos m}{m^2}\right| < \varepsilon$$

Muốn vậy ta cần có

$$\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2}+\frac{\cos(n+2)}{(n+2)^2}+........+\frac{\cos m}{m^2}\right|<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+........+\frac{1}{m^2}<\varepsilon$$

Ta có

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+........+\frac{1}{m^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+........+\frac{1}{(m-1)m}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+.......+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

Vậy ta sẽ chọn $n_0\in\mathbb{N}^*$ sao cho $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$ hay chọn $n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Khi $n\geq n_0$ ta sẽ có

$$\left|x_m-x_n\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

Vậy $\left\{x_n\right\}_n$ là dãy Cauchy nên nó là dãy hội tụ.

b) Dãy số $\left\{x_n\right\}_n$ với $x_n=\left(-1\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ là dãy phân kỳ.

Thật vậy, ta có $\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|\left(-1\right)^{n+1}-\left(-1\right)^n\right|=2$

Vậy nếu ta chọn $\varepsilon=1$, lấy tùy ý $n_0\in\mathbb{N}^*$, chọn $m,n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $n\geq n_0, m=n+1$ thì $\left|x_{n+1}-x_n\right|\geq\varepsilon$

Tóm lại ta đã chứng minh được

$$\exists\varepsilon=1,\forall n_0\in\mathbb{N}^*,\exists m,n\in\mathbb{N}^*\left(n\geq n_0, m=n+1 \text{ và } \left|x_m-x_n\right|\geq\varepsilon\right)$$

Do đó $\left\{x_n\right\}_n$ không là dãy Cauchy nên nó phân kỳ.

1.2.1.3. Tính chất về giới hạn của dãy số

1) Tính duy nhất của giới hạn

Nếu dãy số $\left\{x_n\right\}_n$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất, tức là nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_2$ thì $x_1=x_2$

2) Nếu dãy số $\left\{x_n\right\}_n$ hội tụ thì nó bị chặn.

Chú ý. Điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, dãy số $\{x_n\}_n$ với $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn nhưng không hội tụ.

3) Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Khi đó,

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = x + y \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = x - y \qquad \lim_{n\to+\infty}(\alpha.x_n) = \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$
$$\lim_{n\to+\infty}(x_n.y_n) = x.y \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n^{\,y_n} = x^y \quad (x > 0)$$

4) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = |x|$ (điều ngược lại không đúng)

Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

5) Tính chất về thứ tự của dãy số hội tụ

Định lý 1.2

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$

a) Nếu $x > a$ thì tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_1$ thì $x_n > a$

b) Nếu $x < b$ thì tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_2$ thì $x_n < b$

c) Nếu $a < x < b$ thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $a < x_n < b$

6) Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức

Định lý 1.3

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ và $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $x \leq y$

Chú ý

i) Định lý vẫn đúng nếu điều kiện "$x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$" được thay bằng điều kiện "$x_n \leq y_n$ kể từ một chỉ số n_0 nào đó trở đi".

ii) Nếu $x_n < y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta vẫn có thể có $x = y$. Chẳng hạn, với $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$, thì $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

Như vậy, khi ta chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức thì ta có thể thu được một đẳng thức.

7) Định lý kẹp

Nếu $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$

8) Hội tụ của dãy đơn điệu

Định lý 1.4

a) Dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

b) Dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

1.2.1.4. Các giới hạn cơ bản của dãy số

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} C = C$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad , \ |q| < 1$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^p}{n^\alpha} = 0 \qquad (\alpha > 0, p \in \mathbb{N})$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty \qquad \left(a \ge 1, \alpha \in \mathbb{N}^*\right)$

$+ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

*** Các dạng vô định và phương pháp khử**

Ta có 7 dạng vô định: $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0.\infty; 0^0; 1^\infty; \infty^0$

*** Các phương pháp khử dạng vô định thường dùng**

+ Nhân, chia cho biểu thức liên hợp.

+ Chia tử, mẫu cho cùng một biểu thức khác không.

+ Biến đổi làm xuất hiện các giới hạn đặc biệt.

+ Áp dụng các tính chất của giới hạn dãy số.

Ví dụ 1.20

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + n - 1} - n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5.2^{2n} - 3.5^{n+1}}{10.2^{n+2} + 2.5^{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{2n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n \sin n}{n^2 + 1}$

Giải

a)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-n\right)=\frac{\left(\sqrt{n^2+n-1}-n\right).\left(\sqrt{n^2+n-1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n-1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n-1-n^2}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n-1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{\sqrt{1+0-0}+1}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5.2^{2n}-3.5^{n+1}}{10.2^{n+2}+2.5^{n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5.4^n-15.5^n}{40.2^n-\frac{2}{5}.5^n}$

chia tử và mẫu cho $5^n>0$ ta được

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5.4^n-15.5^n}{40.2^n-\frac{2}{5}.5^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5.\left(\frac{4}{5}\right)^n-15}{40.\left(\frac{2}{5}\right)^n-\frac{2}{5}.}=\frac{5.0-15}{40.0-\frac{2}{5}}=\frac{-15}{-\frac{2}{5}}=\frac{75}{2}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{n-1}\right)^{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n-1}{4}}\right)^{\frac{n-1}{4}.\frac{4(2n+1)}{n-1}}$

mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n-1}{4}}\right)^{\frac{n-1}{4}}=e$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4(2n+1)}{n-1}=8$ nên suy ra

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{2n+1}=e^8$

d) Ta có $0\le|\sin n|\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 0\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+1}\right|,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n^2+1}=0$ nên áp dụng định lý kẹp ta suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+1}\right|=0$

vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sin n}{n^2+1}=0$ (theo tính chất 4 của giới hạn)

1.2.2. Giới hạn của hàm số

1.2.2.1. Điểm tụ (điểm giới hạn)

Cho tập hợp $E\subset\mathbb{R}$, số thực $x_0\in\mathbb{R}$ được gọi là một điểm tụ của tập hợp *E* nếu với mọi số dương ε bất kỳ, khoảng $\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)$ chứa ít nhất một điểm của tập hợp E khác x_0, tức là $\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)\cap\left(E\setminus\left\{x_0\right\}\right)\neq\varnothing$.

Ví dụ 1.21

Với $E=\left(0,1\right)$ thì mọi điểm $x\in[0,1]$ đều là điểm tụ của *E*. Các điểm của tập hợp $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ đều không phải là điểm tụ của *E*.

Ví dụ 1.22

Với $E=\left\{1,\dfrac{1}{2},......,\dfrac{1}{n},.....\right\}$, $x=0$ là điểm tụ duy nhất của *E* trong $\mathbb{R}$.

Điểm tụ của tập hợp *E* có thể thuộc *E* hoặc không thuộc *E*.

Định lý 1.5

Điểm $x_0\in\mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $E\subset\mathbb{R}$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy số $\left\{x_n\right\}_n\subset E$ với $x_n\neq x_m$ nếu $m\neq n$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$

1.2.2.2. Định nghĩa giới hạn hàm số

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X\subset\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp *X*. Ta nói số thực *l* là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi *x* tiến tới x_0 ký hiệu

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ hoặc $f(x)\to l$ khi $x\to x_0$ nếu

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in X\left(0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon\right)$$

Chú ý. Trong định nghĩa giới hạn hàm số thì $x\neq x_0$. Hàm số $f(x)$ có thể xác định tại x_0 hoặc không xác định tại x_0.

Ví dụ 1.23

Chứng minh $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là một số tùy ý cho trước. Ta cần chỉ ra một số $\delta > 0$ tương ứng sao cho khi $0 < \left|x-2\right| < \delta$ thì $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$

vì $x \to 2$ nên $1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$ nên ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

Khi đó, ta có

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{5}, \forall x \in \mathbb{R}\left(0 < \left|x-2\right| < \delta \Rightarrow \left|x^2-4\right| = \left|x-2\right|.\left|x+2\right| < \delta.5 = \varepsilon\right)$$

Trong 1.2.1, chúng ta đã làm quen với khái niệm dãy số và giới hạn của dãy số. Để thấy được mối liên quan giữa giới hạn của hàm số và giới hạn của dãy số, chúng ta có định lý sau đây

Định lý 1.6

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp X. Khi đó, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ khi và chỉ khi

$$\forall \left\{x_n\right\}_n \subset X \setminus \left\{x_0\right\}, \left(\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)\right)$$

Nhận xét. Định lý trên mang lại cách hình dung giới hạn của hàm số thông qua ngôn ngữ giới hạn của dãy số và đồng thời cung cấp một công cụ tiện lợi cho việc chứng minh sự không tồn tại của giới hạn hàm số. muốn vậy, ta chỉ cần xây dựng hai dãy số $\left\{x_n\right\}_n, \left\{x'_n\right\}_n$ cùng tiến tới x_0 sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(x'_n)$

Ví dụ 1.24

Hàm số $y = \sin\dfrac{1}{x}$ không có giới hạn tại $x_0 = 0$. Thật vậy,

chọn hai dãy $\left\{x_n\right\}_n, \left\{x'_n\right\}_n$ với $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta luôn có

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} x'_n = 0$ nhưng $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin x_n = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \sin x'_n$

Giới hạn một phía

i) Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap [x_0, +\infty)$. Ta nói Ta nói số thực *l* là giới hạn phải của hàm số $f(x)$ khi *x* tiến về bên phải x_0 ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ hoặc $f(x) \to l$ khi $x \to x_0^+$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \left(0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon\right)$$

Giới hạn phải của $f(x)$ tại x_0 được ký hiệu là $f(x_0^+)$.

ii) Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp $X \cap (-\infty, x_0]$. Ta nói Ta nói số thực *l* là giới hạn trái của hàm số $f(x)$ khi *x* tiến về bên trái x_0 ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ hoặc $f(x) \to l$ khi $x \to x_0^-$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \left(0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon\right)$$

Giới hạn trái của $f(x)$ tại x_0 được ký hiệu là $f(x_0^-)$.

Ví dụ 1.25

Tính các giới hạn một phía $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ với $f(x) = \dfrac{\left|x - 1\right| + x - 1}{x - 1}$

khi $x > 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x - 1 + x - 1}{x - 1} = 2$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

khi $x < 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{-(x - 1) + x - 1}{x - 1} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

Định lý 1.7

Hàm số $f(x)$ có giới hạn *l* khi *x* tiến tới x_0 khi và chỉ khi $f(x)$ có giới hạn trái và giới hạn phải tại x_0 và cả hai giới hạn đó phải bằng nhau và bằng *l*.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

Giới hạn tại vô cực

Cho tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Ta nói tập hợp *X* bị chặn trên (chặn dưới) nếu tồn tại số thực *M* sao cho $x \le M$, $\forall x \in X$ ($x \ge M$, $\forall x \in X$). Tập hợp *X* được gọi là bị chặn nếu *X* vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại số thực $M > 0$ sao cho $\left|\mathrm{x}\right| \le M$, $\forall x \in X$.

i) Giả sử $X \subset \mathbb{R}$ là tập hợp không bị chặn trên và hàm số $f(x)$ xác định trên *X*. Ta nói số thực *l* là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi *x* tiến tới $+\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ hoặc $f(x) \to l$ khi $x \to +\infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in X \left(x > A \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon\right)$

ii) Giả sử $X \subset \mathbb{R}$ là tập hợp không bị chặn dưới và hàm số $f(x)$ xác định trên *X*. Ta nói số thực *l* là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi *x* tiến về $-\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ hoặc $f(x) \to l$ khi $x \to -\infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in X \left(x < -A \Rightarrow \left|f(x) - l\right| < \varepsilon\right)$

Ví dụ 1.26

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

b) với $a > 1$, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

$0 < a < 1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$

Giới hạn bằng vô cực

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp *X*.

i) Hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng $+\infty$ khi *x* tiến tới x_0, ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ hoặc $f(x) \to +\infty$ khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \left(0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow f(x) > A\right)$$

ii) Hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng $-\infty$ khi *x* tiến tới x_0, ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ hoặc $f(x) \to -\infty$ khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \left(0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow f(x) < -A\right)$$

Tương tự, ta cũng có các khái niệm giới hạn một phía cho các giới hạn bằng vô cực. Bạn đọc có thể tự phát biểu các định nghĩa này.

Ví dụ 1.27

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tgx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tgx=-\infty$

d) với $a>1$, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$

$0<a<1$, ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty$

Giả sử tập hợp $X\subset\mathbb{R}$ không bị chặn trên, hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp *X*.

i) Hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng $+\infty$ khi *x* tiến tới $+\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ hoặc $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu

$\forall A>0,\exists B>0,\forall x\in X\left(x>B\Rightarrow f(x)>A\right)$

ii) Hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng $-\infty$ khi *x* tiến tới $+\infty$, ký hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ hoặc $f(x)\to-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu

$\forall A>0,\exists B>0,\forall x\in X\left(x>B\Rightarrow f(x)<-A\right)$

Ban đọc hãy phát biểu các định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Ví dụ 1.28

a) với $a>1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$; $0<a<1$, ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

b) với $a>1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$

$0<a<1$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$

1.2.2.3. Tính chất giới hạn hàm số và các phép toán về giới hạn

Giả sử $f(x),g(x),h(x)$ là các hàm số xác định trên tập hợp $X\subset\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ là một điểm tụ của tập hợp *X*.

1) Tính duy nhất của giới hạn (nếu tồn tại)

Nếu hàm số $f(x)$ có giới hạn khi x tiến tới x_0 thì giới hạn đó là duy nhất, tức là nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$ thì $l_1 = l_2$

2) Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ thì tồn tại một số dương δ sao cho hàm số $f(x)$ bị chặn trên tập hợp $X \cap \left((x_0 - \delta, x_0 + \delta,) \setminus \{x_0\} \right)$, tức là

$$\exists M > 0 : |f(x)| \le M, \forall x \in X \cap \left((x_0 - \delta, x_0 + \delta,) \setminus \{x_0\} \right)$$

3) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ $\left(l_1, l_2 \in \mathbb{R} \right)$. Khi đó,

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = l_1 + l_2 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (l_2 \ne 0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x) \right] = l_1 + l_2 \qquad \lim_{x \to x_0} \left[\alpha f(x) \right] = \alpha l_1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = l_1.l_2 \qquad \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^{g(x)} = l_1^{l_2} \quad (l_2 > 0)$$

4) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ (điều ngược lại không đúng)

Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

5) Tính chất về thứ tự của giới hạn hàm số

Định lý 1.8

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

a) Nếu $l > a$ thì tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho $\forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > a \right)$

b) Nếu $l < b$ thì tồn tại $\delta_2 > 0$ sao cho $\forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) < b \right)$

c) Nếu $a < l < b$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall x \in X \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < f(x) < b \right)$

6) Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức

Định lý 1.9

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$

Nếu $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ thì $l_1 \le l_2$

7) Định lý kẹp

Giả sử $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

8) Giới hạn của hàm hợp

Giả sử *f(x)* và *g(x)* là hai hàm số sao cho tập giá trị của $f(x)$ nằm trong tập xác định của $g(x)$. Ngoài ra $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(x) = l$. Khi đó, $\lim\limits_{x \to x_0} g\left(f(x)\right) = l$.

Lưu ý

Các tính chất từ (1) $\rightarrow$ (8) ở trên được phát biểu trong trường hợp x_0 là hữu hạn $\left(x_0 \in \mathbb{R}\right)$. Bạn đọc hãy phát biểu các tính chất từ (1) $\rightarrow$ (8) trong trường hợp $x_0 = \infty$ (tức là $x_0 = +\infty$ hay $x_0 = -\infty$).

1.2.2.4. Các giới hạn cơ bản

$+ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0 \quad \left(\alpha > 0\right)$

$+ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$+ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1$

$+ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$+ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x\right)}{x} = 1$

$+ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$+ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{e}$

$+ \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

$+ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\ln x\right)^p}{x^\alpha} = 0 \qquad \left(\alpha > 0, p \in \mathbb{N}^*\right)$

$+ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0 \qquad \left(p \in \mathbb{N}^*\right)$

1.2.2.5. Đại lượng vô cùng bé, vô cùng lớn

a) Định nghĩa.

- Hàm số $f(x)$ gọi là đại lượng vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi *x* tiến tới x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

- Hàm số $f(x)$ gọi là đại lượng vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi *x* tiến tới x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = +\infty$.

Trong định nghĩa trên thì x_0 có thể hữu hạn hoặc $x_0 = \infty$.

- Nếu $f(x)$ là một VCB (VCL) khi *x* tiến tới x_0 thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là một VCL (VCB) khi *x* tiến tới x_0.

b) So sánh các vô cùng bé, vô cùng lớn

i) Cho $\alpha(x),\beta(x)$ là các VCB khi *x* tiến tới x_0. Ta nói chúng là các VCB so sánh được nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$. Khi đó,

+ nếu $c\neq 0, c\neq\infty$ thì ta nói $\alpha(x),\beta(x)$ là những VCB cùng cấp khi *x* tiến tới x_0.

+ nếu $c=0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$ khi *x* tiến tới x_0.

+ nếu $c=\infty$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB cấp thấp hơn $\beta(x)$ khi *x* tiến tới x_0.

ii) Cho $\alpha(x),\beta(x)$ là các VCL khi *x* tiến tới x_0. Ta nói chúng là các VCL so sánh được nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$. Khi đó,

+ nếu $c\neq 0, c\neq\infty$ thì ta nói $\alpha(x),\beta(x)$ là những VCL cùng cấp khi *x* tiến tới x_0.

+ nếu $c=0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCL cấp thấp hơn $\beta(x)$ khi *x* tiến tới x_0.

+ nếu $c=\infty$ thì ta nói $\alpha(x)$ là VCL cấp cao hơn $\beta(x)$ khi *x* tiến tới x_0.

c) Vô cùng bé tương đương

i) Định nghĩa

Cho $\alpha(x),\beta(x)$ là các VCB khi *x* tiến tới x_0. Ta nói chúng là các VCB tương đương khi *x* tiến tới x_0, ký hiệu $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

ii) Tính chất

Giả sử $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$; $\alpha_1(x),\beta_1(x),\alpha_2(x),\beta_2(x)$ là các VCB khi *x* tiến tới x_0. Khi đó, ta có các tính chất sau đây:

1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$

2) Nếu $\alpha(x)\sim\beta(x)$ và $\beta(x)\sim\gamma(x)$ thì $\alpha(x)\sim\gamma(x)$

3) Nếu $\alpha_1(x)\sim\beta_1(x)$ và $\alpha_2(x)\sim\beta_2(x)$ thì $\alpha_1(x).\alpha_2(x)\sim\beta_1(x).\beta_2(x)$

4) Quy tắc thay VCB tương đương

Nếu $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$ và $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$

5) Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

Nếu $\alpha(x), \beta(x)$ đều là tổng của các VCB khác cấp thì giới hạn của tỉ số $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ khi x tiến tới x_0 bằng giới hạn của tỉ số hai VCB cấp thấp nhất trong $\alpha(x)$ và $\beta(x)$.

Giả sử $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha_1(x) + ... + \alpha_i(x) + ... + \alpha_m(x)}{\beta_1(x) + ... + \beta_j(x) + ... + \beta_n(x)}$

và $\alpha_i(x)$ là VCB có cấp thấp nhất trong các VCB $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_m(x)$

$\beta_j(x)$ là VCB có cấp thấp nhất trong các VCB $\beta_1(x), \beta_2(x), ..., \beta_n(x)$

Khi đó, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_i(x)}{\beta_j(x)}$

Một vài VCB tương đương đáng nhớ (khi $x \to 0$)

$+ \sin x \sim x$; $tgx \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $arctgx \sim x$; $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

$+ \ln\left(1 + x\right) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$

$+ \left(1 + x\right)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1.29

a) Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1 - e^x\right).\left(1 - \cos x\right)}{x^3}$

Ta có $1 - e^x \sim -x$, $x \to 0$

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $x \to 0$

$x^3 \sim x^3$, $x \to 0$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1 - e^x\right).\left(1 - \cos x\right)}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(-x).\dfrac{x^2}{2}}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} - \dfrac{x^3}{2x^3} = -\dfrac{1}{2}$

b) Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+tgx\right)}{x+\sin^3 x}$

Ta có $\ln\left(1+tgx\right)\sim tgx\sim x\ ,\ x\to 0$

$x\sim x\ ,\ x\to 0$

$\sin^3 x\sim x^3\ ,\ x\to 0$

Vì x^3 là VCB cấp cao hơn x $\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0\right)$ nên áp dụng quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

ta được $x+\sin^3 x\sim x\ ,\ x\to 0$

Vậy $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+tgx\right)}{x+\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

c) Vô cùng lớn tương đương

i) Định nghĩa

Cho $f(x),g(x)$ là các VCL khi x tiến tới x_0. Ta nói chúng là các VCL tương đương khi x tiến tới x_0, ký hiệu $f(x)\sim g(x)\,,x\to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

ii) Tính chất

Giả sử $f(x),g(x),h(x);\ f_1(x),g_1(x),f_2(x),g_2(x)$ là các VCL khi x tiến tới x_0. Khi đó, ta có các tính chất sau đây:

1) $f(x)\sim f(x)$

2) Nếu $f(x)\sim g(x)$ và $g(x)\sim h(x)$ thì $f(x)\sim h(x)$

3) Nếu $f_1(x)\sim g_1(x)$ và $f_2(x)\sim g_2(x)$ thì $f_1(x).f_2(x)\sim g_1(x).g_2(x)$

4) Quy tắc thay VCL tương đương

Nếu $f_1(x)\sim g_1(x)$ và $f_2(x)\sim g_2(x)$ thì $\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$

5) Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

Nếu $f(x),g(x)$ đều là tổng của các VCL khác cấp thì giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ khi x tiến tới x_0 bằng giới hạn của tỉ số hai VCL cấp cao nhất trong $f(x)$ và $g(x)$.

Giả sử $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x) + ... + f_i(x) + ... + f_m(x)}{g_1(x) + ... + g_j(x) + ... + g_n(x)}$

và $f_i(x)$ là VCL có cấp cao nhất trong các VCL $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$

$g_j(x)$ là VCL có cấp cao nhất trong các VCL $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$

Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_i(x)}{g_j(x)}$

Ví dụ 1.30

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_0 + a_1x + ... + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n} \qquad \left(a_m, b_n \neq 0\right)$

khi $x \to \infty$ thì $a_0 + a_1x + ... + a_m x^m \sim a_m x^m$

$b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n \sim b_n x^n$

Do đó $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_m x^m}{b_n x^n}$

*** Các dạng vô định và phương pháp khử**

Ta có 7 dạng vô định: $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0.\infty; 0^0; 1^\infty; \infty^0$

*** Các phương pháp khử dạng vô định thường dùng**

+ Nhân, chia cho biểu thức liên hợp.

+ Chia tử, mẫu cho cùng một biểu thức khác không.

+ Biến đổi làm xuất hiện các giới hạn đặc biệt.

+ Áp dụng các tính chất của giới hạn hàm số.

+ Sử dụng các VCB, VCL tương đương.

Ví dụ 1.31

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 6x - \sin 8x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}.\left(e^{7\sqrt[3]{x}}-1\right)}{tg\sqrt[3]{x}.\ln\left(1+3x\right)}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right).\left(x+5\right)}{\left(x-1\right).\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x+5\right)}{\left(x+1\right)}=\dfrac{1+5}{1+1}=3$

b)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right).\left(\sqrt{1+2x}+3\right).(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2).\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8).(\sqrt{x}+2)}{(x-4).\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2.(\sqrt{x}+2)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}=\frac{2.\left(\sqrt{4}+2\right)}{\sqrt{1+2.4}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

c) Ta có $0\le\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ nên áp dụng định lý kẹp ta được $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|=0$

suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

$d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=0$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin 6x-\sin 8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 3x.\sin x}{-2\cos 7x.\sin x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x}{\cos 7x}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^{4x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{4}}\right)^{\left(\frac{2x-1}{4}\right).\frac{4.(4x-3)}{(2x-1)}}$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{4}}\right)^{\left(\frac{2x-1}{4}\right)} = e$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4.(4x-3)}{(2x-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4.\left(4-\dfrac{3}{x}\right)}{2-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{4.(4-0)}{2} = 8$

nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{4}}\right)^{\left(\frac{2x-1}{4}\right).\frac{4.(4x-3)}{(2x-1)}} = e^8$

g) Ta có

$\arcsin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}\ ,\ x\to 0$

$e^{7\sqrt[3]{x}}-1 \sim 7\sqrt[3]{x}\ ,\ x\to 0$

$tg\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}\ ,\ x\to 0$

$\ln\left(1+3x\right) \sim 3x\ ,\ x\to 0$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}.\left(e^{7\sqrt[3]{x}}-1\right)}{tg\sqrt[3]{x}.\ln\left(1+3x\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}.\sqrt{x}.7\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}.3x} = \dfrac{7}{3}$

1.3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1.3.1. Khái niệm hàm số liên tục

1.3.1.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in X$. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

+ hàm số $f(x)$ xác định tại x_0

+ tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ký hiệu $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số

$\Delta y = f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ là số gia của hàm số (tương ứng với số gia Δx của biến số).

Ta có thể phát biểu lại định nghĩa hàm số liên tục như sau

Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Vì tính liên tục của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn nên ta còn có những định nghĩa tương đương sau

- Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu với mọi dãy $\left\{x_n\right\}_n$ tiến tới x_0 thì

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(x_n\right) = f\left(x_0\right)$$

Nói cách khác

$f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \forall \left\{x_n\right\}_n \subset X\left(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_n\right) = f\left(x_0\right)\right)$

- Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in X$ thỏa mãn nếu $\left|x - x_0\right| < \delta$ thì $\left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| < \varepsilon$

Nói cách khác

$f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X\left(\left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon\right)$

Ta có thể sử dụng một trong 4 định nghĩa trên tùy thuộc vào hoàn cảnh thích hợp.

- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm của *X* thì ta nói $f(x)$ liên tục trên *X*.

Ví dụ 1.32

Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ m & , x = 0 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ và $f(0) = m$

+ $m = 1$ thì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$

+ $m \neq 1$ thì $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x_0 = 0$

1.3.1.2. Liên tục một phía

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in X$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Định lý 1.10 Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $f(x)$ vừa liên tục phải tại x_0, vừa liên tục trái tại x_0. Nói cách khác,

$$f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f\left(x_0\right)$$

Ví dụ 1.33

Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 2x + 3 & , x > 0 \end{cases}$

với hàm số này ta có $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$

nhưng $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2x + 3\right) = 3 \neq f(0)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trái tại $x_0 = 0$ nhưng không liên tục phải tại $x_0 = 0$.

Ví dụ 1.34

Xét sự liên tục của hàm số sau tại $x_0 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$f(1) = a$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$

+ $x > 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

+ $x < 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$

vì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $f(x)$ không liên tục tại $x_0 = 1$

+ nếu $a = 0$ thì $f(x)$ liên tục phải tại $x_0 = 1$

$a = 1$ thì $f(x)$ liên tục trái tại $x_0 = 1$

+ nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ thì $f(x)$ không liên tục trái cũng không liên tục phải tại $x_0 = 1$

1.3.1.3. Tính chất của hàm số liên tục

1) Hàm số sơ cấp liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.

2) Nếu $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục tại x_0 thì các hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x).g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0) \neq 0\right)$, $\left[f(x)\right]^{g(x)}$ $\left(f(x_0) > 0\right)$ cũng liên tục tại x_0

3) Tính liên tục của hàm hợp

Giả sử hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên tập hợp $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in X$.

Nếu $f : X \to Y$ liên tục tại x_0 và $g : Y \to \mathbb{R}$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì hàm hợp $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ liên tục tại x_0.

1.3.1.4. Điểm gián đoạn

- Nếu hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$. Như vậy, từ điều kiện để hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 ta suy ra hàm số $f(x)$ sẽ gián đoạn tại x_0 nếu một trong ba trường hợp sau đây xảy ra:

+ $x_0 \notin X$

+ không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

- Điểm gián đoạn x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 nếu giới hạn trái, giới hạn phải của hàm số tại x_0 tồn tại hữu hạn.

- Tất cả các điểm gián đoạn không thuộc loại 1 được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Ví dụ 1.35

Xét hàm số $f(x)$ trong ví dụ 1.34 của mục 1.3.1.2 . Ta thấy $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 0$ nhưng giới hạn trái và giới hạn phải của hàm số $f(x)$ tại $x_0 = 0$ tồn tại hữu hạn nên $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

Ví dụ 1.36

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ có các điểm $x = 1, x = -1$ là các điểm gián đoạn loại 2 vì

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$$

1.3.2. Hàm số liên tục trên một đoạn

1.3.2.1. Định nghĩa

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng (a, b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in (a, b)$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) và $f(x)$ liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $[a, b)$ (tương ứng $(a, b]$) nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) và $f(x)$ liên tục phải tại $x = a$ (tương ứng liên tục trái tại $x = b$).

- Đồ thị của hàm số liên tục trong một khoảng được biểu diễn bằng một đường liền nét.

Ví dụ 1.37

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ xác định trong khoảng $(-1, 1)$ nên liên tục trên khoảng đó (do nó là hàm sơ cấp) nhưng không liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ vì nó không xác định tại $x = \pm 1$.

Ví dụ 1.38

Hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 \ , & -1 \le x \le 1 \\ 0 \ \ , & x<-1 \text{ hay } x>1 \end{cases}$ không liên tục tại $x=\pm 1$

nhưng liên tục trên đoạn $[-1,1]$.

1.3.2.2. Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

1) Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó bị chặn trên $[a,b]$, tức là

$$\exists M>0, \forall x \in [a,b] : \left|f(x)\right| \le M$$

2) Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[a,b]$, tức là tồn tại $x_1, x_2 \in [a,b]$ sao cho $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

3) Định lý giá trị trung gian

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a)\ne f(b)$. Khi đó, nếu lấy một giá trị c bất kỳ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ (tức là $f(a)<c<f(b)$ hoặc $f(b)<c<f(a)$) thì tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $f(x_0)=c$.

Hệ quả

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a).\ f(b)<0$ thì tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $f(x_0)=0$.

1.4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1.4.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1.4.1.1. Khái niệm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b) và $x_0 \in (a,b)$. Gọi $\Delta x, \Delta y$ lần lượt là các số gia của biến số và số gia của hàm số tại x_0. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$.

Như vậy: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ hay $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Nhận xét

1) Vì $\Delta x = x - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ nên $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2) Khi $x_0 \in (a,b)$ được chọn cố định thì đạo hàm $f'(x_0)$ (nếu tồn tại) là một số xác định. Do đó, nếu đạo hàm tồn tại với mọi $x \in (a,b)$ thì mỗi giá trị $x \in (a,b)$ cho tương ứng một giá trị xác định của đạo hàm . Khi đó hàm số

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ trên (a,b).

Ví dụ 1.39

a) Hàm số $y = f(x) = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ và $f'(x_0) = \cos x_0$. Thật vậy,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\dfrac{x + x_0}{2}.\sin\dfrac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \cos\frac{x + x_0}{2}.\lim_{x \to x_0} \frac{\sin\dfrac{x - x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}} = \cos x_0$$

b) Hàm số $y = f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$ bởi vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$ không tồn tại

Định lý 1.11

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Lưu ý. Hàm số $f(x)$ liên tục x_0 thì chưa chắc có đạo hàm tại x_0. Thật vậy, ta thấy hàm số $y = f(x) = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

1.4.1.2. Đạo hàm một phía

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên (a,b) và $x_0 \in (a,b)$. Các giới hạn hữu hạn (nếu tồn tại)

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad f'_{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

gọi là đạo hàm một phía, lần lượt là đạo hàm phải và đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0.

Ví dụ 1.40

Tính đạo hàm trái và đạo hàm phải của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ tại $x_0 = 0$.

Ta tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}} . \frac{|x|}{x} \right)$

+ khi $x \to 0^+$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}} . \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow f'_{+}(0) = 1$

+ khi $x \to 0^-$ thì $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}} . \frac{(-x)}{x} = -1 \Rightarrow f'_{-}(0) = -1$

Định lý 1.12

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái, đạo hàm phải tại x_0 và chúng bằng nhau và bằng $f'(x_0)$, tức là

$f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0) = f'(x_0)$

Ví dụ 1.41

a) hàm số $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ không có đạo hàm $x_0 = 0$ bởi vì

$$f'_{+}(0) = 1 \neq -1 = f'_{-}(0)$$

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x < 1 \\ (1 - x)(2 - x) & , 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & , x > 2 \end{cases}$

hàm số trên có đạo hàm tại $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ không ?

tại $x_0 = 1$, ta có

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = -1 \Rightarrow f'_{-}(1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(1 - x)(2 - x) - 0}{x - 1} = -1 \Rightarrow f'_{+}(1) = -1$

Vì $f_+^{'}(1) = f_-^{'}(1) = -1$ nên hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ và $f^{'}(1) = -1$

tương tự, tại $x_0 = 2$, ta có $f_+^{'}(2) = f_-^{'}(2) = 1$

Suy ra hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$ và $f^{'}(2) = 1$

1.4.1.3. Đạo hàm trên một khoảng, một đoạn

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$

- Hàm $f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng (a,b) nếu $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a,b)$.

- Hàm $f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a,b]$ nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) và có đạo hàm phải tại $x = a$ và có đạo hàm trái tại $x = b$.

Ví dụ 1.42

Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x < 1 \\ (1-x)(2-x) & , 1 \le x \le 2 \\ x - 2 & , x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm trên đoạn $[1,2]$ không ?

Giải

+ khi $1 < x < 2$, thì $f(x) = (1-x)(2-x)$ suy ra $f^{'}(x) = 2x - 3$

+ khi $x = 1$ thì $f^{'}(1) = -1$

+ khi $x = 2$ thì $f^{'}(2) = 1$

vậy hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1,2]$ và $f^{'}(x) = \begin{cases} -1 & , x = 1 \\ 2x - 3 & , 1 < x < 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$

1.4.1.4. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(e^x\right)' = e^x$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

1.4.1.5. Các quy tắc tính đạo hàm

a) Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

Nếu các hàm số $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \in (a,b)$ thì tại điểm đó các hàm số $(u+v)(x),(u-v)(x),(ku)(x)$ ($k \in \mathbb{R}$ là hằng số), $(uv)(x)$ cũng có đạo hàm tại $x_0 \in (a,b)$ và

i) $(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$

ii) $(ku)'(x_0) = ku'(x_0)$

iii) $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$

iv) Ngoài ra, nếu $v(x_0) \neq 0$ thì hàm số $\left(\dfrac{u}{v}\right)(x)$ có đạo hàm tại x_0 và

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{\left[v(x_0)\right]^2}$$

b) Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = \varphi(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm tương ứng $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp $y(x) = f\left[\varphi(x)\right]$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đạo hàm của hàm hợp (đạo hàm của *y* theo *x*) được tính theo công thức:

$$y'(x_0) = f'(u_0).\varphi'(x_0)$$

Công thức trên có thể viết dưới dạng: $y'_x = y'_u.u'_x$

Ví dụ 1.43

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^5 x$, $y = e^{\sin x}$

hàm số $y = \sin^5 x$ là hàm hợp của hai hàm cơ bản $y = u^5$ và $u = \sin x$. Theo quy tắc nói trên ta có

$$y'(x) = \left(u^5\right)'(\sin x)' = 5u^4.\cos x = 5\sin^4 x.\cos x$$

tương tự $y'(x) = \left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}.\cos x$

Bảng đạo hàm của hàm hợp

$u=\varphi(x)$

$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}.u'$ $\quad (a^u)' = a^u \ln a.u'$ $\quad (e^u)' = e^u.u'$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$ $\quad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $\quad (\sin u)' = \cos u.u'$

$(\cos u)' = -\sin u.u'$ $\quad (\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $\quad (\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

c) Đạo hàm của hàm ngược

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và g là hàm ngược của $f(x)$. Khi đó, nếu $f'(x_0) \neq 0$ và $g(x)$ liên tục tại điểm $y_0 = f(x_0)$ thì $g(x)$ có đạo hàm tại y_0 và $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Ví dụ 1.44

Xét hàm số $f(x) = \sin x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có hàm ngược $g(y) = \arcsin y$, $y \in (-1,1)$. Rõ ràng các hàm số $f(x), g(y)$ thỏa mãn các điều kiện đã nêu ở trên nên

$$g'(y) = (\arcsin y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Vậy $(\arcsin t)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, t \in (-1,1)$

1.4.1.6. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M(x_0, f(x_0))$.

Như vậy nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ có phương trình là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

1.4.1.7. Vi phân

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi tại điểm $x_0 \in (a,b)$ nếu tồn tại số A (A chỉ phụ thuộc

x_0 và $f(x)$) sao cho số gia của hàm số $f(x)$ tại x_0 có thể được biểu diễn dưới dạng $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \mathrm{O}\left(\Delta x\right)$, trong đó $\mathrm{O}\left(\Delta x\right)$ là VCB bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$.

Đại lượng $A.\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$, tức là $df(x_0) = A.\Delta x$

Định lý 1.13 (mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân)

Hàm số $f(x)$ khả vi tại $x_0 \in (a,b)$ khi và chỉ khi $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và khi đó $f^{'}(x_0) = A$.

Như vậy, nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì $df(x_0) = f^{'}(x_0).\Delta x$

Tổng quát, nếu $f(x)$ khả vi tại mọi $x \in (a,b)$ thì $df(x) = f^{'}(x).\Delta x$

Nhận xét. Đối với hàm số đồng nhất $f(x) = x$ ta có $f^{'}(x) = 1$ do đó $df(x) = \Delta x$ hay $dx = \Delta x$. Vì thế, đối với các hàm số khác, người ta cũng đặt $dx := \Delta x$. Khi đó, $df(x) = f^{'}(x)dx$ (ta thường viết tắt là $df = f^{'}(x)dx$)

Từ định nghĩa vi phân ta có thể kí hiệu đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ là

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Tổng quát, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x \in (a,b)$ tùy ý là $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

Các quy tắc tính vi phân

Từ các quy tắc tính đạo hàm, ta có các quy tắc tương ứng cho vi phân

$$d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$$
$$d\left(cu\right) = cdu$$
$$d\left(u.v\right) = udv + vdu$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad \left(v \neq 0\right)$$

Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0. Khi đó

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f^{'}(x_0).\Delta x + \mathrm{O}\left(\Delta x\right)$$

Nếu bỏ VCB cấp cao $\mathrm{O}\left(\Delta x\right)$ thì ta có công thức gần đúng

$$f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\approx f'\left(x_0\right)\Delta x$$

Khi đó: $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x$

Công thức trên cho phép ta xấp xỉ giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0+\Delta x$ khi việc tính các giá trị $f\left(x_0\right),\ f'\left(x_0\right)$ khá đơn giản.

Ví dụ 1.45. Tính gần đúng $\sqrt[3]{28}$

Ta có $\sqrt[3]{28}=3.\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}}$, xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$ với $x_0=1$ và $\Delta x=\frac{1}{27}$

Khi đó, $f\left(x_0\right)=1$ và $f'(x_0)=\frac{1}{3}$

Vậy $\sqrt[3]{28}\approx 3.\left(1+\frac{1}{3}.\frac{1}{27}\right)\approx 3+\frac{1}{27}\approx 3,04$

1.4.1.8. Các định lý về hàm khả vi

Định nghĩa điểm cực trị của hàm số.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $\left(a,b\right)$ và $x_0\in\left(a,b\right)$. Điểm x_0 được gọi là điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ $(\delta>0)$ sao cho với mọi $x\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ thì $f\left(x_0\right)\geq f\left(x\right)$ $\left(f\left(x_0\right)\leq f\left(x\right)\right)$.

Các điểm cực đại, cực tiểu gọi chung là các điểm cực trị của hàm số.

Chú ý rằng giá trị hàm số tại điểm cực đại (cực tiểu) chưa chắc đã là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số trên $\left(a,b\right)$. Do đó tính chất cực trị chỉ mang tính địa phương. Vì vậy ta nói hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại (cực tiểu) địa phương tại x_0.

Định lí Fermat. Giả sử $f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a,b\right)$. Nếu $f\left(x\right)$ đạt cực trị và khả vi tại $c\in\left(a,b\right)$ thì $f'\left(c\right)=0$.

Ý nghĩa hình học: Nếu $f\left(x\right)$ khả vi tại điểm cực trị x_0 thì tiếp tuyến với đường cong $y=f\left(x\right)$ tại điểm $M\left(x_0,y_0\right)$ song song với trục hoành.

Định lí Rolle. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b) và $f(a)=f(b)$ thì tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $f'(c)=0$.

Ý nghĩa hình học: Nếu hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện của định lí Roole thì phải có điểm $c\in(a,b)$ sao cho tiếp tuyến tại đó song song với trục hoành.

Định lí Cauchy. Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b). Khi đó, tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho:

$$[f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

Nếu $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$ thì $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Định lí Lagrange. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a,b)$ sao cho $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Ý nghĩa hình học: Tồn tại một điểm $c\in(a,b)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng nối hai đầu mút.

Chú thích.

Nếu ta đặt $x_0=a, x_0+\Delta x=b$ thì $\Delta x=b-a$ và với bất kỳ điểm $\theta=\dfrac{c-x_0}{\Delta x}$ $(0<\theta<1)$ hay $c=x_0+\theta.\Delta x$. Từ đó, ta có công thức sau gọi là công thức *số gia hữu hạn* hoặc công thức *số gia giới nội*

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta.\Delta x).\Delta x \quad , \ 0<\theta<1$$

Ví dụ 1.46

a) Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh $f(x)$ là hằng số.

Với $x, x_0\in\mathbb{R}$, theo công thức số gia hữu hạn, ta suy ra tồn tại $\theta\in(0,1)$ sao cho

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta.(x-x_0)).(x-x_0)=0.(x-x_0)=0$$

Vậy với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta đều có $f(x)=f(x_0)=const$

b) Cho hàm số $\varphi(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b); $a,b>0$

Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $\frac{1}{a-b}.\begin{vmatrix} a & b \\ \varphi(a) & \varphi(b)\end{vmatrix} = \varphi(c)-c.\varphi^{'}(c)$

Vế trái của đẳng thức có thể viết lại là $\frac{a.\varphi(b)-b.\varphi(a)}{a-b} = \frac{\frac{\varphi(b)}{b}-\frac{\varphi(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$

Đặt $f(x)=\frac{\varphi(x)}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ thì $f(x)$ và g(x) thỏa mãn giả thiết của định lý Cauchy trên $[a,b]$. Do đó, tồn tại $c\in(a,b)$ sao cho $\frac{1}{a-b}.\begin{vmatrix} a & b \\ \varphi(a) & \varphi(b)\end{vmatrix} = \varphi(c)-c.\varphi^{'}(c)$

1.4.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1.4.2.1. Đạo hàm cấp cao

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm $x\in(a,b)$. Bản thân đạo hàm $f'(x)$ cũng là hàm số theo biến *x* trong (a,b). Giả sử tại điểm $x=x_0$, hàm số $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm này gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$ tại x_0, kí hiệu $f^{''}(x_0)$. Như vậy,

$$f^{''}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{'}(x)-f^{'}(x_0)}{x-x_0}$$

Một cách tổng quát ta định nghĩa đạo hàm cấp *n* của hàm số $f(x)$ tại $x=x_0$ (nếu có) là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(x)$ tại $x=x_0$, ký hiệu đạo hàm cấp *n* của $f(x)$ là $f^{(n)}(x_0)$. Như vậy,

$$f^{(n)}(x_0)=\left(f^{(n-1)}(x_0)\right)'$$

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp *n* tại mọi điểm $x\in(a,b)$ thì ta cũng có

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Quy ước $f(x)^{(0)}=f(x)$. Từ đạo hàm cấp 2 trở đi ta gọi là đạo hàm cấp cao của $f(x)$.

Ví dụ 1.47

$+f(x)=a^x$. Ta có:

$f'(x)=a^x.\ln a$, $f''(x)=a^x.\left(\ln a\right)^2$,...., $f^{(n)}(x)=a^x.\left(\ln a\right)^n$

$+f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Ta có:

$f'(x)=nx^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$,...., $f^{(n)}(x)=n!$

$+f(x)=\sin x$. ta có:

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), f''(x)=\sin\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right),...., f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

$+f(x)=\cos x$. Ta có:

$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), f''(x)=\cos\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right),...., f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n.\frac{\pi}{2}\right)$$

1.4.2.2. Các quy tắc tính đạo hàm cấp cao

$i)$ $\left(cu\right)^{(n)}=c.(u)^{(n)}$ (c là hằng số)

$ii)$ $\left(u+v\right)^{(n)}=\left(u\right)^{(n)}+\left(v\right)^{(n)}$

$iii)$ $\left(u.v\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.\left(u\right)^{(n-k)}.\left(v\right)^{(k)}$

1.4.2.3. Vi phân cấp cao và các quy tắc tính vi phân cấp cao

Giả sử $f(x)$ là hàm số khả vi trên (a,b). Khi đó, biểu thức vi phân $df(x)=f'(x)dx$ là một hàm số theo biến *x*. Nếu hàm số này cũng có vi phân tại *x* thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp 2 của hàm số $f(x)$ tại *x* (vi phân $df(x)=f'(x)dx$ gọi là vi phân cấp 1 của $f(x)$).

Cụ thể ta có

$$d\left(df(x)\right)=d\left(f'(x)dx\right)=d\left(f'(x)\right)dx+f'(x)d(dx)$$

Vì $dx=\Delta x$ là một hằng số không phụ thuộc vào *x* nên $d(dx)=d\left(\Delta x\right)=0$ và với quy ước trong lần lấy vi phân cấp 2, số gia $dx=\Delta x$ được chọn bằng $dx=\Delta x$ của lần lấy vi phân cấp 1. Như vậy, ta có

$$d(df)=d\left(df(x)\right)=d\left(f'(x)dx\right)=f''(x)(dx)^2$$

Ta ký hiệu vi phân cấp 2 của hàm số $f(x)$ tại x là d^2f hoặc $d^2f(x)$ và ký hiệu $d(df) = d^2f$, $\left(dx\right)^2 = dx^2$. Khi đó $d^2f = f''(x)dx^2$

Bằng cách tương tự ta có thể định nghĩa vi phân cấp n của hàm $f(x)$ là vi phân cấp $(n-1)$ của nó (nếu tồn tại), ký hiệu là $d^nf(x)$ và được xác định như sau:

$$d^nf(x) = d\left[d^{n-1}f(x)\right] = f^{(n)}(x)\left(dx\right)^n$$

Từ đó ta có: $$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{(dx)^n}$$

Từ các quy tắc tính đạo hàm cấp cao, ta cũng có các quy tắc tính vi phân cấp cao

$i)$ $d^n(cu) = c.d^n(u)$ (c là hằng số)

$ii)$ $d^n(u+v) = d^n(u) + d^n(v)$

$iii)$ $d^n(uv) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u.d^kv$ $\left(d^0u = u, d^0v = v\right)$

1.4.3. Ứng dụng của phép tính vi phân

1.4.3.1. Khai triển Taylor

+ Công thức Taylor với phần dư Lagrange

Định lý 1.14

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi đến cấp $(n+1)$ trên (a,b) thì với $x, x_0 \in (a,b)$ ta luôn có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x - x_0\right)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \qquad (1)$$

Công thức (1) được gọi là công thức Taylor và biểu diễn hàm số $f(x)$ dưới dạng (1) gọi là khai triển Taylor hữu hạn của hàm số đó tại $x = x_0$.

Biểu thức $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}$ gọi là phần dư dạng Lagrange.

Như vậy (1) là công thức Taylor với phần dư Lagrange.

+ Công thức Taylor với phần dư Peano

Định lý 1.15

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khả vi đến cấp $(n-1)$ trên (a,b) và tồn tại $f^{(n)}(x_0)$ thì với $x, x_0 \in (a,b)$ ta luôn có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k + \mathrm{O}\left((x - x_0)^n\right) \tag{2}$$

trong đó $\mathrm{O}\left((x - x_0)^n\right)$ là VCB bậc cao hơn $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$

Biểu thức $R_n(x) = \mathrm{O}\left((x - x_0)^n\right)$ gọi là phần dư dạng Peano. Công thức (2) là công thức Taylor với phần dư Peano.

Công thức Taylor với $x_0 = 0$ được gọi là công thức Maclaurin, tức là

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

với phần dư $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left(\theta x\right)}{\left(n+1\right)!} x^{n+1} \; (0 < \theta < 1)$

hoặc $R_n(x) = \mathrm{O}(x^n)$

Công thức Maclaurin đối với một vài hàm số sơ cấp

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{O}(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}\left(x^{2n}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathrm{O}(x^n) \quad (x > -1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{O}(x^n) \ (x > -1)$$

Đặc biệt

$$\frac{1}{1-x} = \left(1-x\right)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3.... + x^n + \mathrm{O}\left(x^n\right) \quad (x < 1)$$
$$\frac{1}{1+x} = \left(1+x\right)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + \mathrm{O}\left(x^n\right) \quad (x > -1)$$

Ứng dụng của công thức Taylor

a) Tính gần đúng có đánh giá sai số

Trong công thức Taylor (1) nếu ta bỏ phần dư $R_n(x)$ thì ta có công thức gần đúng

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k$$

Khi đó sai số là $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x - x_0\right)^{n+1}$

Nếu $\exists M > 0 : \left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M, \forall x \in [a,b]$ thì với $x, x_0 \in (a,b)$ sai số $R_n(x)$ được đánh giá $\left|R_n(x)\right| \le \dfrac{M}{\left(n+1\right)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}$

Ví dụ 1.48

Tính gần đúng số *e* với sai số $\varepsilon = 10^{-3}$

Ta có $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + e^{\theta x}\dfrac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)!} \qquad \left(0 < \theta < 1\right)$

Lấy $x = 1$ ta được $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$

với sai số $\varepsilon = |R_n(x)| = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right| \qquad (0 < \theta < 1)$

vì $e^\theta < 3^\theta < 3$ và $0 < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Leftrightarrow (n+1)! > 3.10^3$

suy ra $n \ge 6$, vậy ta chọn $n = 6$. Khi đó

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,718$$

b) Tính giới hạn

Công thức Taylor với phần dư Peano có thể dùng để tính giới hạn

Ví dụ 1.49

Tính $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)$$

Vậy

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)\right) - 2x}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)}{\frac{x^3}{3!} + \mathrm{O}(x^3)} = 2$$

1.4.3.2. Ứng dụng trong toán học

+ Quy tắc L'Hospital khử các dạng vô định

Định lý 1.16

Giả sử

i) Các hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên (a,b);

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$)

iii) Trên (a,b) tồn tại các đạo hàm hữu hạn $f'(x)$, $g'(x)$ và $g'(x) \neq 0$

iv) Tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Chú ý

- Trong định lý trên x_0 có thể là số hữu hạn hoặc $x_0 = \infty$.

- Quy tắc L'Hospital chỉ áp dụng được cho 2 dạng vô định $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$. Các dạng vô định khác phải biến đổi, đưa về 2 dạng này sau đó mới áp dụng quy tắc.

- Nếu $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ mà $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ cũng vẫn còn dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ thì ta có thể áp dụng quy tắc L'Hospital một lần nữa bằng cách xét $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$,….

Ví dụ 1.50

a) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(tgx - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x.(1 - \cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x}\right) = 2$

theo quy tắc L'Hospital ta suy ra $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - x}{x - \sin x} = 2$

b) Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \sin x}{x \ln(1 + 2x)}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1 - \sin x)'}{(x \ln(1 + 2x))'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\ln(1 + 2x) + \dfrac{2x}{1 + 2x}}$

và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-\cos x\right)'}{\left(\ln(1+2x)+\dfrac{2x}{1+2x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{\dfrac{2}{1+2x}+\dfrac{2}{(1+2x)^2}}=\dfrac{1}{4}$

theo quy tắc L'Hospital ta suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{x\ln(1+2x)}=\dfrac{1}{4}$

+ Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Khoảng biến thiên của hàm số

Định lý 1.17

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên (a,b)

i) Nếu $f'(x)=0,\forall x\in(a,b)$ thì $f(x)$ hàm hằng trên (a,b)

ii) Nếu $f'(x)\geq 0\left(f'(x)\leq 0\right),\forall x\in(a,b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) trên (a,b)

Định lý trên cho phép ta xác định các khoảng tăng, giảm của hàm số $f(x)$ thông qua việc xét dấu của đạo hàm $f'(x)$

Ví dụ 1.51

Xét hàm số $f(x)=x-\ln(1+x)$ với $x>-1$

Ta có $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Dễ dàng thấy rằng $f'(x)<0,\forall x\in(-1,0)$ và $f'(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$

Suy ra hàm số $f(x)$ giảm trong khoảng $(-1,0)$, tăng trong khoảng $(0,+\infty)$.

Cực trị của hàm số

Điều kiện cần của cực trị ta đã xét trong định lý Fermat. Định lý cũng cho ta biết hàm số $f(x)$ chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu (gọi là điểm dừng) hoặc tại các điểm mà tại đó hàm số $f(x)$ liên tục nhưng không có đạo hàm.

Các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm được gọi là *điểm tới hạn* của hàm số. Như vậy, để tìm các điểm cực trị của hàm số trước hết ta tìm các điểm tới hạn của hàm số sau đó dùng điều kiện đủ để kiểm tra cho từng điểm tới hạn đã tìm được.

Điều kiện đủ của cực trị

Định lý 1.18

Giả sử x_0 là điểm tới hạn của hàm số $f(x)$ và $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ mang dấu xác định trong mỗi khoảng $(x_0-\delta, x_0)$ và $(x_0, x_0+\delta)$. Khi đó,

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0
- Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0

Định lý 1.19

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi đến cấp n $(n \geq 2)$ trên (a,b) và x_0 là điểm dừng của $f(x)$ sao cho $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots.. = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ và $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Khi đó,

- Nếu n là số chẵn thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0, cụ thể
  - $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$
  - $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$
- Nếu n là số lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b) thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $[a,b]$. Sau đây là quy tắc tìm

- Tính các giá trị $f(a), f(b)$
- Tinh các giá trị của $f(x)$ tại các điểm tới hạn trong (a,b)
- So sánh giá trị của $f(x)$ tại các điểm tới hạn trong (a,b) và $f(a), f(b)$ để tìm ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đường cong

Giả sử hàm số $y = f(x)$ khả vi trên khoảng (a,b). Đường cong $y = f(x)$ được gọi là lồi (lõm) trên khoảng (a,b) nếu mọi điểm của đường cong nằm trên (dưới) tiếp tuyến bất kỳ của đường cong trên khoảng này.

Điểm $(x_0, f(x_0))$ gọi là điểm uốn của đường cong nếu đường cong lồi (lõm) trên khoảng $(x_0-\delta, x_0)$ và lõm (lồi) trên khoảng $(x_0, x_0+\delta)$ với $\delta > 0$ nào đó.

Định lý 1.20

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng (a,b).

- Hàm số $f(x)$ lồi trên (a,b) khi và chỉ khi $f^{''}(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$
- Hàm số $f(x)$ lõm trên (a,b) khi và chỉ khi $f^{''}(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$

1.4.3.3. Ứng dụng trong phân tích kinh tế

a) Ý nghĩa của đạo hàm

Giả sử hai biến *x* và *y* có mối quan hệ hàm $y = f(x)$ (chẳng hạn *x* là giá của một loại hàng hóa và *y* là số lượng hàng hóa đó bán ra). Trong thực tế người ta quan tâm tới xu hướng biến thiên của biến *y* tại x_0 khi *x* thay đổi một lượng nhỏ Δx.

Lượng thay đổi của *y* khi *x* thay đổi một lượng nhỏ Δx là

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Tốc độ thay đổi trung bình của *y* theo *x* trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$ là $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Tốc độ thay đổi tức thời của *y* theo *x* tại x_0 là

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

Khi Δx khá nhỏ thì $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f^{'}(x_0)$ hay $\Delta y \approx f^{'}(x_0).\Delta x$

Vậy khi *x* thay đổi một lượng Δx thì *y* thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $f^{'}(x_0).\Delta x$ (chẳng hạn khi giá thay đổi một lượng Δx thì số hàng bán ra thay đổi một lượng là $f^{'}(x_0).\Delta x$).

Ví dụ 1.52

Hàm cầu của một loại sản phẩm là $P = 50 - Q^2$. Tìm tốc độ thay đổi giá khi lượng cầu *Q* thay đổi. Giá thay đổi như thế nào khi $Q = 1$?

Giải

Tốc độ thay đổi của giá *P* theo *Q* là $P^{'} = -2Q$

Do đó $P^{'}(1) = -2$. Điều này có nghĩa là khi lượng cầu tăng thêm 1 đơn vị sản phẩm thì giá giảm trên một đơn vị sản phẩm là 2 đơn vị tiền.

b) Giá trị cận biên

Trong kinh tế, đại lượng đo tốc độ thay đổi của biến phụ thuộc *y* khi biến độc lập *x* thay đổi một lượng nhỏ gọi là giá trị cận biên của *y* đối với *x*, ký hiệu là $My(x)$. Từ định nghĩa đạo hàm, ta có $My(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}$

Ta thường chọn xấp xỉ $My(x) \approx \Delta y$, tức là $My(x)$ gần bằng lượng thay đổi Δy của *y* khi *x* tăng lên một đơn vị $(\Delta x = 1)$.

1. Giá trị cận biên của chi phí

Cho hàm chi phí $C = C(Q)$. Khi đó ta gọi *MC(Q)* là giá trị cận biên của chi phí. Giá trị này có thể coi là lượng thay đổi của chi phí khi *Q* tăng lên một đơn vị.

Ví dụ 1.53

Cho chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là

$$\overline{C} = 0,0001Q^2 - 0,02Q + 5 + \frac{500}{Q}$$

Tìm giá trị cận biên của chi phí đối với *Q*. Áp dụng với $Q = 50$

Giải

Hàm tổng chi phí sản xuất *Q* đơn vị sản phẩm là

$$C = Q.\overline{C} = 0,0001Q^3 - 0,02Q^2 + 5Q + 500$$

Từ đó giá trị cận của chi phí là

$$MC(Q) = \frac{dC}{dQ} = 0,0003Q^2 - 0,04Q + 5$$

Khi $Q = 50$ thì $MC(50) = 3,75$. Như vậy nếu *Q* tăng lên một đơn vị từ 50 đến 51 thì chi phí tăng lên khoảng 3,75 đơn vị.

2. Giá trị cận biên của doanh thu

Cho hàm doanh thu $R = R(Q)$. Khi đó ta gọi *MR(Q)* là giá trị cận biên của doanh thu.

Ví dụ 1.54

Số vé bán được *Q* và giá vé *P* của một hãng xe bus có quan hệ $Q = 10000 - 125P$. Tìm doanh thu cận biên khi $P = 30, P = 42$.

Giải

Ta có doanh thu $R = QP = \frac{Q(10000 - Q)}{125}$

Suy ra $MR(Q) = \dfrac{10000 - 2Q}{125}$

$P = 30$ thì $Q = 6250 \Rightarrow MR(6250) = -20$

$P = 42$ thì $Q = 4750 \Rightarrow MR(6250) = 4$

3. Xu hướng tiêu dùng và tiết kiệm cận biên

Cho hàm tiêu dùng $C = C(I)$, trong đó I là tổng thu nhập quốc dân.

Xu hướng tiêu dùng cận biên $MC(I)$ là tốc độ thay đổi của tiêu dùng theo thu nhập

$$MC(I) = \frac{dC}{dI}$$

Ta gọi $S = I - C$ là hàm tiết kiệm. Khi đó xu hướng tiết kiệm cận biên là

$$MS(I) = \frac{dS}{dI} = 1 - \frac{dC}{dI} = 1 - MC(I)$$

Ví dụ 1.55

Cho hàm tiêu dùng là $C = \dfrac{5\left(2\sqrt{I^3} + 3\right)}{I + 10}$

Xác định xu hướng tiêu dùng cận biên và xu hướng tiết kiệm cận biên khi $I = 100$

Giải

Ta có $MC(I) = \dfrac{5\left[(I+10)3\sqrt{I} - \left(2\sqrt{I^3} + 3\right)\right]}{\left(I + 10\right)^2} = \dfrac{5\left[\sqrt{I^3} + 30\sqrt{I} - 3\right]}{\left(I + 10\right)^2}$

Từ đó $MC(100) = 5.\dfrac{1297}{12100} \approx 0,536$

$MS(100) = 1 - MC(100) \approx 0,464$

c) Hệ số co dãn

1. Độ thay đổi tuyệt đối và tương đối

Khi đại lượng x tăng thêm một lượng Δx thì ta goi Δx là độ thay đổi tuyệt đối của x; tỉ số $\dfrac{\Delta x}{x}.(100\%)$ gọi là độ thay đổi tương đối của x.

Chẳng hạn, một căn hộ giá 200 triệu đồng. Nếu tăng thêm 1 triệu thì độ thay đổi tuyệt đối là 1 triệu, độ thay đổi tương đối là $\dfrac{1}{200}.100\% = 0,5\%$.

Rõ ràng, độ thay đổi tương đối không phụ thuộc vào đơn vị tính và nó cho ta thấy ngay mức độ thay đổi.

2. Hệ số co dãn

Để đo mức độ phản ứng của biến *y* khi biến *x* thay đổi, người ta đưa vào khái niệm hệ số co dãn.

Hệ số co dãn của đại lượng *y* theo đại lượng *x* là tỉ số giữa độ thay đổi tương đối của *y* và độ thay đổi tương đối của *x*, ký hiệu là ε_{yx}.

Ta có $\varepsilon_{yx} = \dfrac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}.\dfrac{x}{y}$

Từ đó, với Δx khá bé, ta có $\varepsilon_{yx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}.\dfrac{x}{y}\right) = y'(x).\dfrac{x}{y}$

Ví dụ 1.56

Cho hàm cầu $Q = 30 - 4P - P^2$. Tìm hệ số co dãn tại điểm $P = 3$

Giải

Ta có

$$\varepsilon_{QP} = (-4-2P).\frac{P}{30-4P-P^2} = -\frac{2P(2+P)}{30-4P-P^2}$$

Tại $P = 3 \Rightarrow \varepsilon_{QP} = -\dfrac{10}{3} \approx -3,3$

Điều này có ý nghĩa là với mức giá $P = 3$ thì khi giá tăng 1% lượng cầu *Q* sẽ giảm 3,3%.

d) Lựa chọn tối ưu trong kinh tế

Nhiều bài toán kinh tế được đưa về bài toán tìm cực trị của một hàm số $y = f(x)$ nào đó.

Ta gọi *P* là đơn giá, hàm sản lượng $Q = Q(P)$; hàm doanh thu $R = P.Q$; hàm chi phí $C = C(Q)$; hàm lợi nhuận $\pi = R - C$.

Trong kinh tế ta thường phải giải các bài toán sau

+ Tìm *P* để sản lượng *Q* đạt tối đa (cực đại);

+ Tìm *P* hoặc *Q* để doanh thu *R* đạt tối đa;

+ Tìm Q để chi phí C đạt tối thiểu (cực tiểu).

Ví dụ 1.57

Cho hàm cầu $Q = 300 - P$, hàm chi phí là $C = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$.

Tìm Q để lợi nhuận lớn nhất.

Giải

$Q = 300 - P$ hay $P = 300 - Q$

Từ đó doanh thu là $R = (300 - Q)Q$ và hàm lợi nhuận là

$$\begin{aligned}\pi &= (300 - Q)Q - (Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10)\\ &= -Q^3 + 18Q^2 - 33Q - 10\end{aligned}$$

Ta có $\dfrac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 36Q - 33$

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q = 1 \\ Q = 11 \end{array}\right.$$

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 36$$

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2}(1) = 30 > 0\ ,\ \frac{d^2\pi}{dQ^2}(11) = -30 < 0$$

Vậy π đạt cực đại khi $Q = 11$ và $\pi_{\max} = \pi(11) = 474$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1. Cho các hàm số

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+3} \text{ và } g(x)=\lg\left(x-2\right)$$

Tìm tập xác định của các hàm số sau

$a) f(x)\pm g(x)$ $\qquad$ $d) g\left(f(x)\right)$

$b) f(x).g(x)$ $\qquad$ $e) f\left(g(x)\right)$

$c) \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad$ $f) g\left(g(x)\right)$

2. Tìm tập định của các hàm số sau

$a) f(x)=e^{\ln(\sin x)}$ $\qquad$ $c) h(x)=\arccos\left(\lg x\right)$

$b) g(x)=\dfrac{1}{\ln\left(\sin\left(\ln x\right)\right)}$ $\qquad$ $d) k(x)=\cot g\left(\sin x\right)$

3. Cho các hàm số

$$f(x)=\begin{cases}1 \ , & |x|\le 1\\ 0 \ , & |x|>1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}2-x^2 \ , & |x|\le 2\\ 0 \ , & |x|>2\end{cases}$$

Vẽ đồ thị của các hàm số $g\left(f(x)\right)$ và $f\left(g(x)\right)$

4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

$a) f(x)=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{x^3}$ $\qquad$ $c) f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$b) f(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ $\qquad$ $d) f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

5. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau. Hàm số nào tuần hoàn thì tìm chu kỳ của nó

$a) f(x)=2\sin 3x$ $\qquad$ $c) h(x)=\sin^2 x$

$b) g(x)=\sqrt{tgx}$ $\qquad$ $d) k(x)=\sin(x^2)$

6. Chứng minh hàm số $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ có hàm ngược. Tìm hàm ngược của nó.

7. Tính các giới hạn dãy số sau

$a) \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+4n-2}-\sqrt{5n^2-5n+6}\right)$ $\qquad$ $d) \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6.9^n-7.4^{n+3}}{3^{2n+1}-5.6^{n-2}}$

$b) \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n^3}{n-3}$ $\qquad$ $e) \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n+2}$

$c)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3n-2}{1+2+...+n}$ $\qquad$ $f)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}....\sqrt[2^n]{2}\right)$

8. Chứng minh rằng

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q|<1$ $\qquad$ $c)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$b)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$ $\qquad$ $d)\ \lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$ nếu $|q|<1$

9. Tính các giới hạn hàm số sau

$a)\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$ $\qquad$ $c)\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$

$b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$ $\qquad$ $d)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2x+7}-3}$

10. Tính các giới hạn hàm số sau

$a)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{\sin 5x-2x}$ $\qquad$ $d)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$

$b)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $\qquad$ $e)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

$c)\lim\limits_{z\to1}(1-z)tg\dfrac{\pi z}{2}$

11. Tính các giới hạn hàm số sau

$a)\lim\limits_{x\to0}\left[1+\sin\left(x^2-x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$

$b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+1}$ $\qquad$ $d)\lim\limits_{x\to\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$

12. Tính các giới hạn hàm số sau

$a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+1}{\left(x^2+2\right)\left(x^4+x-2\right)}$ $\qquad$ $c)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$

$b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$ $\qquad$ $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

13. Sử dụng các vô cùng bé tương đương để tìm giới hạn sau

$a)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(cos2x)}{\ln(1-4x^2)}$ $\qquad$ $b)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-e^{3x})(1-\cos x)}{2x^4+\sin^3 x}$

$c)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arc}tg(2-x)+2\sin(x-2)}{x^2-4}$ $\qquad d)\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}\left(e^{12x}-1\right)}{tg2x.\ln(1+3x)}$

14. Xác định $f(0)$ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$

$a)f(x)=5-2x\cos\dfrac{1}{x}$ $\qquad b)f(x)=1+e^{-\frac{1}{x^2}}$

15. Xét tính liên tục của các hàm số sau

$$a)f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-1} &, x\neq\pm1\\ 0 &, x=\text{-}1\\ 1 &, x=1\end{cases}\qquad b)f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^x+3^{\frac{1}{x-2}}} &, x\neq 2\\ \dfrac{1}{4} &, x=2\end{cases}$$

$$b)f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln(2x+1)}{e^x-1} &, khi\ x>0\\ x+a &, khi\ x\le 0\end{cases}\qquad d)f(x)=\begin{cases}x^2-x+1 &, khi\ x\ge 1\\ 3x-2 &, khi\ x<1\end{cases}$$

16. Xét tính liên tục của các hàm số sau (A là hằng số)

$$a)f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} &, x\neq 2\\ A &, x=2\end{cases}\qquad c)f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} &, x\neq 0\\ A &, x=0\end{cases}$$

$$b)f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2} &, x\neq -1\\ A &, x=-1\end{cases}\qquad d)f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} &, x\neq 0\\ A &, x=0\end{cases}$$

17. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=a$ thì hàm số $|f(x)|$ cũng liên tục tại $x=a$. Điều ngược lại có đúng không.

18. Chứng minh rằng các phương trình sau đây có nghiệm

$a)x^3+2\sin x-5=0$ $\qquad c)x=m\cos x\ \ (m\in IR)$

$b)2^x-x^2+2=0$ $\qquad d)x^2+\left(m^2+3\right)\cos 2x=0$

19. Cho hàm số $f:[a,b]\to[a,b]$ $(a<b)$. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $x_0\in[a,b]$ sao cho $f(x_0)=x_0$.

20. Tính đạo hàm các hàm số sau tại điểm $x=x_0$ thuộc miền xác định bằng định nghĩa

$a)y=\sqrt{x}$ $\qquad b)y=\sqrt[3]{x}$ $\qquad c)y=\dfrac{1}{x}$

21. Tính đạo hàm các hàm số sau

$a)\, f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$b)\, f(x)=\ln\left(\sin^2 x\right)$

$c)\, f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$

$d)\, f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}\left(2x-3\right)^5}{\sqrt{x}\left(7x-3\right)^{10}}$

$e)\, f(x)=\arcsin\left(\ln x\right)$

$f)\, f(x)=x^{\sin x}$

22. Tính đạo hàm và vi phân cấp 2 các hàm số sau

$a)\, y=\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2}}$

$b)\, y=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[4]{x}-6x+3\right)$

$c)\, y=xe^{\cos 2x}$

$d)\, y=\ln\left(arctgx\right)$

23. Xét tính liên tục và khả vi tại x_0 của các hàm sau

$a)\, f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases} \quad ,\ x_0=0$

$b)\, f(x)=\begin{cases} 2x+4 & ,\ x\geq 1 \\ x^2+5 & ,\ x<1 \end{cases} \quad ,\ x_0=1$

$c)\, f(x)=\begin{cases} x^2-3 & ,\ x\geq 2 \\ x-1 & ,\ x<2 \end{cases} \quad ,\ x_0=2$

$d)\, f(x)=\begin{cases} x^n\cos\dfrac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases} \quad ,\ x_0=0$

24. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng nếu $f'(x)$ tồn tại thì

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$$

b) Nếu có $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$ thì có $f'(x)$ hay không ?

25. Chứng minh rằng hàm số $y=2.e^{\frac{x^2}{2}}$ thỏa mãn phương trình $y''-xy'-y=0$

26. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

$a)\, y=\sin x$ $\qquad b)\, y=\sin^2 x$ $\qquad c)\, y=xe^x$

$d)\, y=\ln x$ $\qquad e)\, y=\dfrac{1}{|x|}$ $\qquad f)\, y=\sqrt{1-3x}$

27.

a) Có thể áp dụng định lý Rolle cho hàm $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ trên đoạn $[-1,1]$ được không?

b) Có thể áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)=|x|$ trên đoạn $[-2,4]$ được không?

c) Có thể áp dụng định lý Cauchy cho hàm $f(x)=x^2$ và $g(x)=x^3$ trên đoạn $[-1,1]$ được không?

28. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$. Tìm $c\in(-1,2)$ sao cho

$f(2)-f(1)=f'(c)(2-(-1))$

29. Khai triển đa thức $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ thành tổng các lũy thừa nguyên dương của $x-2$.

30. Tìm khai triển Taylor của các hàm sau đến bậc 3 trong lân cận của $x=1$

$a) y=e^{-x}$ $\qquad$ $b) y=\ln x$

31.Tìm khai triển Maclaurin đến bậc 4 của các hàm số sau

$a) f(x)=\ln(1+2x)$, tính gần đúng $\ln(1,5)$

$b) f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, tính gần đúng $\sqrt[3]{1,5}$

32. Cho phương trình $x^n+px+q=0$ $\left(p,q\in\mathbb{R};n\in\mathbb{N}^*\right)$. Chứng minh

a) Nếu *n* chẵn thì phương trình không thể có nhiều hơn 2 nghiệm phân biệt (thuộc $\mathbb{R}$).

b) Nếu *n* lẻ thì phương trình không thể có nhiều hơn 3 nghiệm phân biệt (thuộc $\mathbb{R}$).

33.

a) Cho $a>0$. Chứng minh $\dfrac{1}{a+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right)<\dfrac{1}{a}$

b) Chứng minh rằng với mọi $a,b\in\mathbb{R}$: $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$

34. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$ $\qquad$ c) $tgx>x+\dfrac{x^3}{3}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

b) $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$, $x>0$ $\qquad$ d) $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$

35. Tìm khoảng tăng, giảm của các hàm số sau

a) $y=\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ b) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$

36. Tìm cực trị của hàm số

a) $y=x\sqrt{x^3-2}$ b) $y=x+2\sin x$

37. Tìm GTLN, GTNN của hàm số

a) $y=x-2\ln x$, $x\in\left[\frac{3}{2},e\right]$ b) $y=\frac{x}{x^2+1}$, $x\in[0,2]$

38. Tìm khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị các hàm số sau

a) $y=\ln\left(1+x^2\right)$ b) $y=e^{\frac{1}{x}}$

c) $y=(x-1)^4+e^{2x}$ d) $y=e^{arctgx}$

39. Tìm các giới hạn sau

$a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+3\cos x-3}$

$b)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{arctgx}$

$c)\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{x-\pi}$

$d)\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{tgx-x}$

$e)\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

$f)\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

$g)\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\pi-2arctgx\right)\ln x$

$h)\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$i)\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x}$

$j)\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^3}$

$k)\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^{ax}}\right)$

$i)\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^5}\cos^5 x-1}{x^2}$

40. Chứng minh rằng các giới hạn sau tồn tại nhưng không tính được theo quy tắc L'Hospital.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$

41. Tìm giá trị cận biên

a) $C=0,1Q^2+3Q+2$ tại $Q=3$

b) $C=0,04Q^3-0,5Q^2+4,4Q+7500$ tại $Q=5$

c) $C=250Q+45Q^2-Q^3$ tại $Q=5$

42. Hàm tiêu dùng của một quốc gia cho bởi

$$C = \frac{10\sqrt{I} + 0,7\sqrt{I^3} - 0,2I}{\sqrt{I}}$$

Tìm xu hướng tiết kiệm cận biên khi thu nhập là 25

43. Cho hàm cầu $Q = \frac{60}{P} + \ln\left(65 - P^3\right)$

a) Xác định hệ số co dãn khi $P = 4$

b) Nếu giá giảm 2% (từ 4 giảm còn 3,92) thì lượng bán ra thay đổi bao nhiêu phần trăm?

44. Doanh thu của một loại sản phẩm cho bởi $R = 240Q + 57Q^2 - Q^3$. Tìm Q để doanh thu đạt tối đa

45. Cho hàm cầu của một loại sản phẩm là $P = -5Q + 30$. Tìm mức giá để doanh thu đạt tối đa.

46. Một loại sản phẩm có hàm cầu là $P = 42 - 4Q$ và hàm chi phí trung bình là $\overline{C} = 2 + \frac{80}{Q}$. Tìm mức giá để có lợi nhuận tối đa.

47. Trung bình chi phí 1 đơn vị sản phẩm được cho bởi

$$\overline{C} = 2Q^2 - 36Q + 210 - \frac{200}{Q}$$

a) Tìm mức sản xuất Q, $2 \le Q \le 10$ để có chi phí tối thiểu.

b) Tìm mức sản xuất Q, $5 \le Q \le 10$ để có chi phí tối thiểu.

48. Hám cầu của một loại sản phẩm độc quyền là $P = 600 - 2Q$ và tổng chi phí là $C = 0,2Q^2 + 28Q + 200$

a) Tìm mức sản xuất Q để lợi nhuận đạt tối đa. Tìm mức giá P và lợi nhuận lúc đó.

b) Chính quyền đặt thuế là 22 đơn vị tiền cho một đơn vị sản phẩm. Tìm mức sản xuất để lợi nhuận đạt tối đa, tìm mức giá và lợi nhuận trong trường hợp này.

CHƯƠNG 2. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

2.1.1. Định nghĩa và tính chất

2.1.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a,b). Ta gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) nếu $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$.

Định lý 2.1

Nếu trên khoảng (a,b) nào đó, $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)$ thì nó có vô số nguyên hàm khác và tất cả những nguyên hàm này chỉ sai khác nhau một hằng số cộng.

Ta ký hiệu tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ là $\int f(x)dx$ và gọi nó là tích phân bất định của $f(x)$. Hàm số $f(x)$ đuộc gọi là hàm số dưới dấu tich phân. Như vậy, nguyên hàm và tích phân bất định là 2 thuật ngữ chỉ cùng một nội dung và ta có,

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\int f(x)dx=F(x)+C$$

Đặc biệt, do $[f(x)]'=f(x)$ nên $\int f'(x)dx=f(x)+C$

Ví dụ 2.1

a) vì $(\sin x)'=\cos x$ nên $\int\cos xdx=\sin x+C$

b) vì $(x^2)'=2x$ nên $\int 2xdx=x^2+C$

2.1.1.2. Tính chất

Nếu $f(x),g(x)$là các hàm số có nguyên hàm trên khoảng (a,b) thì các hàm $(f+g)(x),(cf)(x)$ $(c\in\mathbb{R})$ cũng có nguyên hàm và

(i) $\quad\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

(ii) $\quad\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$

(iii) $\quad\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)+C;\qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$

(iv) $\quad\int dF(x)dx=\int F'(x)dx=F(x)+C$

2.1.2. Các công thức tính tích phân cơ bản

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \left(a \neq 0\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C$$

$$\int \sin axdx = -\tfrac{1}{a}\cos ax + c, \ \left(a \neq 0\right)$$

$$\int \cos axdx = \tfrac{1}{a}\sin ax + c, \left(a \neq 0\right)$$

$$\int e^{ax}dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} + c, \ \left(a \neq 0\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \left(a \neq 0\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C, \left(a > 0\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C, \left(a > 0\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \left(a > 0\right)$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

Ví dụ 2.2. Tính các tích phân sau đây

$$a)\int\left(x^3 - x^2 + \sqrt{x}\right)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$b)\int\left(2\cos 2x - 8\sin 4x\right)dx = \sin 2x + 2\cos 4x + C$$

$$c)\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx = \int\frac{2x}{x^2+1}dx - \int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx - \int\frac{1}{x^2+1}dx = \ln\left(x^2+1\right) - arctgx + C$$

$$d)\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{(e^x+1-e^x)}{e^x+1}dx = \int \left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = x - \ln\left(e^x+1\right) + C$$

2.1.3. Các phương pháp tính tích phân

2.1.3.1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 2.2

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(t)\right) + C$, với $\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục.

Phương pháp đổi biến số được sử dụng ở 2 dạng sau đây:

a) Giả sử ta đã biết nguyên hàm của $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (2.1)$$

và ta cần tính $\int g(x)dx$. Giả sử tích phân này có thể biểu diễn dưới dạng

$$\int g(x)dx = \int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx \qquad (2.2)$$

khi đó, theo định lý 2 ta được

$$\int g(x)dx = F\left(\varphi(x)\right) + C$$

Một cách hình thức thì khi có (2.2) ta đặt $u = \varphi(x)$, suy ra $du = \varphi'(x)dx$. Do đó, theo (2.1) ta có

$$\int g(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Thay $u = \varphi(x)$ ta được kết quả cần tìm $\int g(x)dx = F\left(\varphi(x)\right) + C$

b) Khi đặt $x = \psi(t)$ với $\psi(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục và có hàm ngược $t = \omega(x)$, ta có thể biểu diễn tích phân dưới dạng

$$\int f(x)dx = \int f\left(\psi(t)\right)\psi'(t)dt$$

Nếu nguyên hàm của $f\left(\psi(t)\right)\psi'(t)$ là $G(t)$ thì

$$\int f(x)dx = G(t) + C = G\left(\omega(x)\right) + C$$

Ví dụ 2.3

a) Tính $I = \int \sin^3 x \cos x dx$

vì $d\left(\sin x\right) = \cos x dx$ nên ta đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

khi đó $I = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

b) Tính $K = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$

đặt $x = t^6$ thì $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2$ và $dx = 6t^5 dt$

khi đó $K = \int \frac{6t^2}{1+t^2} dt = 6\left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right] = 6(t - arctgt) + C = 6\left(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + C$

2.1.3.2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 2.3

Cho $u(x), v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm $u'(x), v'(x)$ liên tục trên khoảng (a,b) và $u'(x).v(x)$ có nguyên hàm. Khi đó, $u(x).v'(x)$ cũng có nguyên hàm và

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx \qquad (2.3)$$

Vì $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$ nên (2.3) thường được viết dưới dạng

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2.4)$$

Công thức (2.4) được gọi là công thức tích phân từng phần. Nó được sử dụng khi tích phân ở vế trái của (2.4) khó lấy tích phân nhưng ở vế phải dễ lấy tích phân.

Ví dụ 2.4

a) Tính $I = \int arctgxdx$

đặt $u = arctgx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$, $dv = dx \Rightarrow v = x$

suy ra $I = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$

b) Tính $I = \int x\cos x dx$

đặt $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

suy ra $I = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$

c) Tính $I = \int x \ln x dx$

đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$, $dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}x^2$

suy ra $I = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \int \dfrac{x}{2}dx = \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C$

Nhận xét

Các tích phân dạng $\int x^k \ln x dx, \int x^k \sin ax dx, \int x^k \cos ax dx, \int x^k e^{ax} dx$ có thể tính được nhờ tích phân từng phần nhiều lần, do đó các tích phân dạng $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \sin ax dx, \int P(x) \cos ax dx, \int P(x) e^{ax} dx$,… trong đó $P(x)$ là đa thức, có thể tính được nhờ tích phân từng phần.

2.1.4. Tích phân một số hàm sơ cấp

2.1.4.1. Tích phân hàm hữu tỉ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Mọi phân thức hữu tỉ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (với $P(x), Q(x)$ là các đa thức với hệ số thực) đều có thể biểu diễn dưới dạng $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$

trong đó $H(x), P_1(x)$ lần lượt là đa thức thương, đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$, bậc của $P_1(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$.

Phân thức hữu tỉ $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ mà bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu được gọi là phân thức hữu tỉ thực sự.

Giả sử $Q(x)$ có thể phân tích dưới dạng

$$Q(x) = C\left(x - a_1\right)^{k_1} \ldots \left(x - a_r\right)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{h_1} \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{h_s}$$

trong đó các số $a_i\left(i = \overline{1, r}\right)$ là các nghiệm thực của đa thức, $x^2 + p_j x + q_j\left(j = \overline{1, s}\right)$ là những tam thức bậc hai không có nghiệm thực.

Mệnh đề. Phân thức hữu tỉ thực sự $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ khai triển được thành tổng các phân thức đơn giản loại 1 $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ và loại 2 $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ với $m,k\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}=H(x)+\ldots+\frac{A_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}}+\frac{A_{k_{i-1}}}{(x-a_i)^{k_{i-1}}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a_i)}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{h_j}x+C_{h_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{h_j}}+\frac{B_{h_{j-1}}x+C_{h_{j-1}}}{(x^2+p_jx+q_j)^{h_{j-1}}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_jx+q_j)}+\ldots$$

Vì vậy, muốn tính tích phân $\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ ta chỉ cần tính tích phân đa thức $H(x)$ và tính tích phân các phân thức đơn giản loại 1 $\int\dfrac{dx}{(x-a)^k}$ và loại 2 $\int\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m}dx$

Ta tính các tích phân đơn giản loại 1 và loại 2.

$$+\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{cases}\ln|x-a|+C & ,\ k=1\\ \dfrac{1}{k-1}.\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} & ,\ k>1\end{cases}$$

$$+\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}.arctg\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+C & ,\ \Delta<0\\ -\dfrac{2}{2ax+b}+C & ,\ \Delta=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}.\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|+C & ,\ \Delta>0\end{cases}\qquad\left(\Delta=b^2-4ac\right)$$

$$+I_m=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}=\frac{-1}{(m-1).\Delta}.\left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{m-1}}+(4m-6).a.I_{m-1}\right]\ (m>1)$$

Công thức này đúng cho trường hợp $\Delta<0$ và $\Delta>0$.

Khi $\Delta=0$ thì $I_m=-\left(\dfrac{2^{2m-1}.a^{m-1}}{2m-1}\right).\dfrac{1}{(2ax+b)^{2m-1}}+C$

$$+J_m=\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^m}dx=\begin{cases}\ln|ax^2+bx+c|+C & ,\ m=1\\ \dfrac{1}{1-m}.(ax^2+bx+c)^{1-m} & ,\ m>1\end{cases}$$

$$+J=\int\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}dx=\int\frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+N-\frac{Mb}{2a}}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}dx$$

$$=\frac{M}{2a}.\int\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right).\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^m}$$

$$=\frac{M}{2a}.J_m+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right).I_m$$

Ví dụ 2.5

a) Tính $I=\int\frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^3+3x^2-4x-12}$

ta phân tích hàm số dưới dấu tích phân thành tổng các phân thức đơn giản

$$\frac{x^2+1}{x^3+3x^2-4x-12}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$$

$$=\frac{A(x+2)(x-2)+B(x-2)(x+3)+C(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2+1=A(x+2)(x-2)+B(x-2)(x+3)+C(x+3)(x+2)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

cho $x=3:5A=10\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$x=-2:-4B=5\Rightarrow B=-\frac{5}{4}$

$x=2:20C=5\Rightarrow C=\frac{1}{4}$

Vậy $\frac{x^2+1}{x^3+3x^2-4x-12}=\frac{1}{2(x+3)}-\frac{5}{4(x+2)}+\frac{1}{4(x-2)}$

Suy ra $I=\int\frac{1}{2(x+3)}dx-\int\frac{5}{4(x+2)}dx+\int\frac{1}{4(x-2)}dx$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+3|-\frac{5}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+C$$

b) Tính $J=\int\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x-1\right)^2}dx$

Ta có $\frac{\left(x+2\right)^2}{x\left(x-1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{\left(x-1\right)^2}=\frac{A\left(x-1\right)^2+Bx(x-1)+Cx}{x\left(x-1\right)^2}$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}$$

Cân bằng hệ số 2 vế ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+C=4 \\ A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \\ C=9 \end{cases}$$

Vậy $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} = \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{9}{(x-1)^2}$

Suy ra $\displaystyle\int \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{4}{x}dx - \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{9}{(x-1)^2}dx$

$$= 4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

2.1.4.2. Tích phân hàm lượng giác $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Để tính $\int R(\sin x, \cos x)dx$, ta đặt $t = tg\dfrac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$

Ta có,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ , } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ , } x = 2arctgt \text{ , } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Khi đó,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Rõ ràng, biểu thức dưới dấu tích phân ở vế phải là hữu tỉ đối với *t*.

Ví dụ 2.6

Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$

đặt $t = tg\dfrac{x}{2}$, ta có $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Khi đó,

$$I = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}} + C$$

Lưu ý. Trong một vài trường hợp riêng, ta có thể đổi biến số khác để tính toán đơn giản hơn. Chẳng hạn:

i) Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì ta đặt $t = \cos x$

ii) Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì ta đặt $t = \sin x$

iii) Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì ta đặt $t = tgx$

Ví dụ 2.7

a) Tính $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$

Hàm dưới dấu tích phân chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$.

Đặt $t = tgx \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Khi đó,

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} . \frac{1}{\cos^2 x} . \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2 \left(1 + t^2\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

b) Tính $I = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\sin x$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Khi đó,

$$I = -\int \frac{\left(1 - t^2\right) dt}{2 + t} = \int \left(t - 2 + \frac{3}{t + 2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t + 2| + C$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln\left(\cos x + 2\right) + C$$

c) Tính $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

Hàm dưới dấu tích phân lẻ đối với $\cos x$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Khi đó,

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} . \cos x dx = \int \frac{1 - t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - t \right) dt$$

$$= \ln|t| - \frac{t^2}{2} + C = \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

2.1.4.3. Tích phân một số hàm vô tỉ

Để tính tích phân các hàm số vô tỉ, người ta tìm một biến số mới $t = \varphi(x)$ sao cho biểu thức dưới dấu tích phân trở thành hữu tỉ đối với biến *t*. Bây giờ ta xét một số lớp các hàm có thể "hữu tỉ hóa" bằng cách đó.

* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, trong đó *R* là ký hiệu hàm hữu tỉ; $n = 2,3,...; a,b,c,d$ cho trước.

đặt $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, ta sẽ được tích phân hàm hữu tỉ theo *t*.

Ví dụ 2.8

Tính $I = \int \sqrt{\frac{x}{2-x}}.\frac{1}{x}dx$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \Rightarrow t^2 = \frac{x}{2-x} \Rightarrow x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \; dx = \frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$

Ta có $I = \int t.\frac{1+t^2}{2t^2}.\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C$

* $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

i) Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$ (hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$)

ii) Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ (hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$)

iii) Nếu ax^2+bx+c có 2 nghiệm thực phân biệt α, β thì

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha).(x-\beta)$$

Khi đó, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = t.(x-\alpha)$

Ví dụ 2.9

a) Tính $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x}}$

đặt $\sqrt{x^2-2x}=t-x$ thì $x=\dfrac{t^2}{2(t-1)}$, $dx=\dfrac{t^2-2t}{2(t-1)^2}dt$

và $\sqrt{x^2-2x}=t-\dfrac{t^2}{2(t-1)}=\dfrac{t^2-2t}{2(t-1)}$

Khi đó,

$$I=\int\frac{2}{t^2}dt=-\frac{2}{t}+C=-\frac{2}{x+\sqrt{x^2-2x}}+C$$

b) Tính $J=\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

đặt $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$ thì $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1}$, $dx=-\dfrac{2(t^2-t+1)}{\left(t^2-1\right)^2}dt$

và $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t^2-t+1}{t^2-1}$, $x+\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t}{t-1}$

Khi đó,

$$J=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{3}{2(t-1)}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C$$

thay $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$ và rút gọn, ta được

$$J=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+1+x}+2\ln\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1-x\right|$$

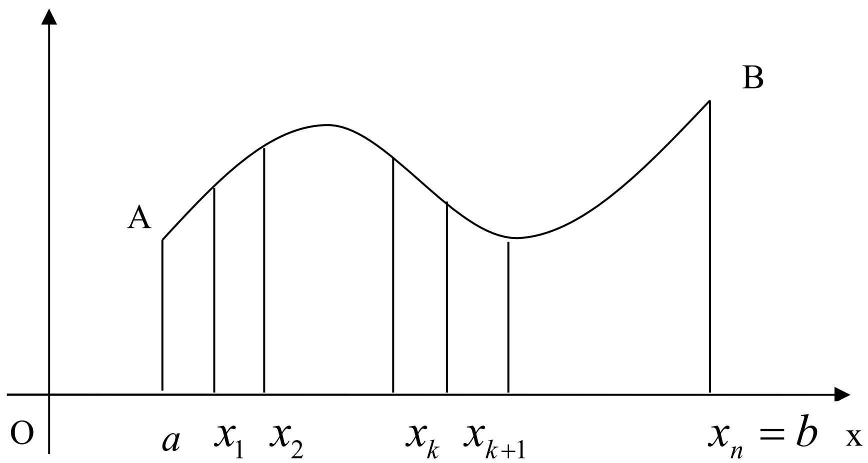
$$-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1+x\right|+C$$

2.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.2.1. Khái niệm tích phân xác định

2.2.1.1. Bài toán diện tích hình thang cong

Để minh họa cho khái niệm tích xác định, trước hết ta xét một bài toán hình học: Tính diện tích hình phẳng giới hạn phía trên bởi đường cong liên tục $y=f(x)$, phía dưới là trục Ox và 2 bên là 2 đường thẳng $x=a, x=b$. Ta gọi hình phẳng loại này là hình thang cong.

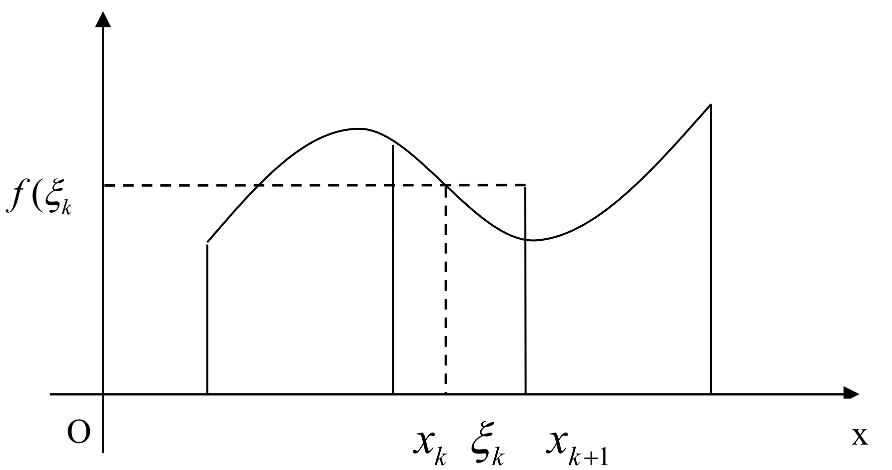


Hình 2.1a

Để tính diện tích hình thang cong $aABb$, ta chia đoạn $[a,b]$ một cách tùy ý thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia

$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_k < x_{k+1} < .... < x_n = b$ (2.5)

Qua các điểm chia đó ta kẻ các đoạn thẳng song song với Oy. Như vậy, ta đã chia hình thang cong $aABb$ thành n hình thang cong nhỏ với đáy là $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ (hình 2.1a).



Hình 2.1b

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ nên giá trị của $f(x)$ trên từng đoạn nhỏ $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ khác nhau rất ít khi độ dài của đoạn thẳng này là $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ đủ bé. Do đó, ta có thể coi giá trị của $f(x)$ trên $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ bằng giá trị của $f(x)$ tại một điểm ξ_k nào đó thuộc $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ với sai số càng bé khi Δx_k càng nhỏ. Về mặt hình học, điều này có nghĩa là ta thay hình thang cong nhỏ bởi hình chữ nhật có đáy $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ và chiều cao $f\left(\xi_k\right)$ (hình 2.1b).

Khi đó, diện tích hình thang cong nhỏ gần bằng $f\left(\xi_k\right).\left(x_{k+1}-x_k\right)=f\left(\xi_k\right).\Delta x_k$

Diện tích cả hình thang cong $aABb$: $S \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right).\Delta x_k$ (2.6)

Sai số của (2.6) tiến về 0 khi tất cả các độ dài $\Delta x_k \to 0$.

Nếu đặt $d=\max\limits_{0\le k\le n-1}\left\{\Delta x_k\right\}$ thì diện tích của hình thang cong $aABb$ được định nghĩa là:

$$S=\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right).\Delta x_k \qquad (2.7)$$

Trong toán học, giới hạn (2.7) được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

2.2.1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Bài toán diện tích hình thang cong là một trong các bài toán cơ bản dẫn đến khái niệm tích phân xác định. Trong bài toán diện tích hình thang cong, $f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên $[a,b]$. Bây giờ, ta sẽ đề cập đến khái niệm tích phân xác định của hàm số $f(x)$ bất kỳ, xác định trên $[a,b]$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Chia $[a,b]$ một cách tùy ý thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia (2.5). Đặt $d=\max\limits_{0\le k\le n-1}\left\{\Delta x_k\right\}$, với $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ $\left(k=0,1,....,n-1\right)$

Trên mỗi đoạn nhỏ $\left[x_k, x_{k+1}\right]$, lấy điểm tùy ý $x=\xi_k$ và lập tổng $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right).\Delta x_k$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I=\lim\limits_{d\to 0}\sigma=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_k\right).\Delta x_k$ (2.8)

và giới hạn đó không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và cách chọn điểm ξ_k thì hàm số $f(x)$ được gọi là hàm khả tích trên $[a,b]$ và số I được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$, ký hiệu $I=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Các số a,b tương ứng là cận dưới, cận trên của tích phân. Tổng σ được gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x)$.

Ví dụ 2.10. Tính $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)=c$ (với c là hằng số)

Với mọi cách chia đoạn $[a,b]$ và mọi cách chọn các điểm $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, ta có:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k).\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} c.\Delta_k = c.(b-a)$$

theo định nghĩa tích phân, ta có $\lim_{d\to 0}\sigma = \lim_{d\to 0} c.(b-a) = c.(b-a)$ $\left(d = \max_{0\le k\le n-1}\{\Delta x_k\}\right)$

Vậy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c.(b-a)$

Lưu ý

1) Tích phân xác định của hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ là một số xác định (trong khi tích phân bất định của $f(x)$ là hàm số của biến số *x*. Do đó, tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc các cận a,b và hàm số lấy tích phân $f(x)$ mà không phụ thuộc biến số tích phân, tức là $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

2) Khi định nghĩa tích phân xác định, ta xét hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$, tức là ta đã giả thiết $a<b$. Trường hợp $a>b$ và $a=b$, khái niệm tích phân được hiểu theo quy ước sau đây:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

2.2.1.3. Điều kiện khả tích

Định lý 2.4

Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó.

Định lý 2.5

Hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$, $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện dưới đây:

- $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$;
- $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên $[a,b]$;
- $f(x)$ bị chặn và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a,b]$.

Chú ý. Khi hàm số $f(x)$ đã khả tích trên $[a,b]$ thì giới hạn (2.8) không phụ thuộc cách chia đoạn $[a,b]$ và cách chọn điểm ξ_k. Ta có thể chia đều đoạn $[a,b]$ và chọn ξ_k là đầu mút trái, đầu mút phải hoặc là trung điểm của đoạn $[x_k, x_{k+1}]$.

Ví dụ 2.11. Tính $\int_0^1 x dx$

Vì $f(x) = x$ liên tục trên $[0,1]$ nên $f(x)$ khả tích trên $[0,1]$.

để tính $\int_0^1 x dx$ ta chia đoạn $[0,1]$ ra thành *n* đoạn nhỏ bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài bằng $\frac{1}{n}$. Trên mỗi đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ ta chọn $\xi_k = x_{k+1}$ $(k = 0,1,...,n-1)$. Khi đó,

$$x_0 = 0\ ,\ x_1 = \frac{1}{n}\ ,\ x_2 = \frac{2}{n}\ ,....,\ x_n = \frac{n}{n} = 1$$

$$f(\xi_k) = f(x_{k+1}) = \frac{k+1}{n}\ ,\ \Delta x_k = \frac{1}{n}\ ,\ k = 0,1,...,n-1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k).\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right).\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n}{n}\right] = \frac{n+1}{2n}$$

Theo định nghĩa, ta có $\int_0^1 x dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

2.2.2. Tính chất của tích phân xác định

Giả sử các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a,b]$. Khi đó, ta có các tính chất sau đây:

1) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (*c* là hằng số)

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad , c \in [a,b]$

4) Nếu $f(x) \geq 0 \left(f(x) > 0 \right)$ $\forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ $\left(\int_a^b f(x)dx > 0 \right)$

5) Nếu $f(x) \leq g(x) \left(f(x) < g(x) \right)$ $\forall x \in [a,b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \left(\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \right)$$

6) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$

7) Nếu $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

8) Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

2.2.3. Công thức cơ bản của phép tính tích phân

2.2.3.1. Tích phân với cận trên thay đổi

Giả sử hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ nên $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a,x] \subset [a,b]$ $,\forall x \in [a,b]$. Khi đó, tích phân $\phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ tồn tại với mọi $x \in [a,b]$.Như vậy, $\phi(x)$ là hàm số theo biến số x. Hàm số này có tính chất sau đây

Định lý 2.6

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì tại mọi điểm $x \in (a,b)$ ta có

$$\phi'(x) = \left(\int_a^x f(x)dx \right)' = f(x)$$

2.2.3.2. Công thức Newton – Leibnitz

Định lý 2.7

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm bất kỳ của nó thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Công thức Newton – Leibnitz vẫn đúng trong trường hợp $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$. Công thức này cho phép ta tính tích phân xác định của hàm số thông qua nguyên hàm của nó.

Ví dụ 2.12

a) Tính $I = \int_0^1 x^3 dx$

Ta có $I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

b) Tính $J = \int_a^b \frac{1}{x}dx \quad (0 < a < b)$

Ta có $J = \int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_a^b = \ln b - \ln a$

2.2.4. Các phương pháp tính tích phân

2.2.4.1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 2.8

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả sử phép đổi biến số $x = \varphi(t)$ thỏa mãn các điều kiện

i) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$ nào đó

ii) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

iii) Khi t biến thiên trên $[\alpha,\beta]$ thì x biến thiên trên $[a,b]$.

Khi đó, $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \qquad (2.9)$$

Nhận xét. Thuận lợi của công thức (2.9) là sau khi đổi biến số ta không cần phải trở về biến số cũ.

Ví dụ 2.13

Tính $I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} x\sqrt{2+x^2}dx$

Đặt $t = \sqrt{2+x^2} \Rightarrow t^2 = 2 + x^2 \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận: $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$

$x = \sqrt{7} \Rightarrow t = 3$

Vậy $I = \int_2^3 t dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$

Định lý 2.9

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$. Giả sử phép đổi biến số $t = \varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện

i) $\varphi(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$.

ii) $f(x)dx$ trở thành $g(t)dt$ với $g(t)$ là hàm số liên tục trên $\left[\varphi(a), \varphi(b)\right]$

Khi đó, $$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt \qquad (2.10)$$

Nhận xét. Khi sử dụng công thức (2.10) cần chú ý rằng hàm số $t = \varphi(x)$ phải đơn điệu trên $[a,b]$ vì nếu không thì có thể xảy ra trường hợp $\varphi(a) = \varphi(b)$ với $a \neq b$. Lúc đó tích phân ở vế phải của (2.10) bằng không còn tích phân ở vế trái có thể khác không nên (2.10) không còn đúng nữa.

2.2.4.2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 2.10

Nếu các hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = u(b).v(b) - u(a).v(a) - \int_a^b u'(x).v(x)dx$$

Công thức tích phân từng phần thường được viết dưới dạng

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Ví dụ 2.14

Tính $I = \int_0^{\ln 2} x.e^{-x}dx$

Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$I=-x.e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}e^{-x}dx=-x.e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}-\left(e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}\right)=-\ln 2.e^{-\ln 2}-\left(e^{-\ln 2}-1\right)=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$$

2.3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

2.3.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

2.3.1.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,+\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a,A]$ $(A>a)$. Khi đó, tích phân $\int\limits_a^A f(x)dx$ tồn tại với mọi $A>a$. Giới hạn (nếu có) của tích phân $\int\limits_a^A f(x)dx$ khi $A\to+\infty$ gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $[a,+\infty)$, ký hiệu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Như vậy,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

Nếu $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $f(x)$ khả tích trên $[a,+\infty)$. Nếu $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ không tồn tại hoặc bằng vô cực thì ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự như vậy, ta định nghĩa tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty,a]$ là

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx \quad (B<a)$$

và trên $(-\infty,+\infty)$ là

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_B^A f(x)dx$$

trong đó, $A\to+\infty$, $B\to-\infty$ một cách độc lập với nhau.

Ta còn có thể định nghĩa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{với } a \in \mathbb{R} \text{ tùy ý})$$

Tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Nếu một trong hai tích phân $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ 2.15

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 1$

vậy $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ

b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \left(\ln x\Big|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\ln A - \ln 1 \right) = +\infty$

vậy $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ

Sau đây, khi nghiên cứu tích phân suy rộng, ta chỉ quan tâm tới tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, đối với tích phân $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ta chỉ cần đổi biến số $x = -x'$ là đưa được về trường hợp nói trên, còn đối với tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ thì chỉ cần phân tích thành tổng

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ (với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý).

2.3.1.2. Tính chất

1) Giả sử hàm số $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$ và $b \in [a, A]$. Khi đó các tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

2) Nếu các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ và C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý

thì $\int_a^{+\infty} [C_1.f(x) + C_2.g(x)]dx$ cũng hội tụ và

$$\int_a^{+\infty} [C_1.f(x) + C_2.g(x)]dx = C_1.\int_a^{+\infty} f(x)dx + C_2.\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

2.3.1.3. Dấu hiệu hội tụ khi $f(x)$ là hàm không âm

Định lý 2.11 (Dấu hiệu so sánh)

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$ với $A > a$. Nếu $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Từ đó suy ra

+ Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

+ Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Định lý 2.12

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$ với $A > a$. Nếu $f(x),\ g(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$ và

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K \ \left(0 < K < +\infty\right)$

thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Định lý 2.13. Tích phân $\int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ $\left(a > 0, \alpha > 0\right)$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

Ví dụ 2.16. Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau đây

a) $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}$

Giải

Ta có $0 < \dfrac{1}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}.\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{x^{7/6}}$, $\forall x \geq 1$

mà $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{7/6}}$ hội tụ (định lý 2.13) nên $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+x^2}}$ hội tụ.

b) $J = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}$

Giải

Ta có $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}$ liên tục và dương trên $[1, +\infty)$

$g(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$

và $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}} = 1$

mà $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ phân kỳ nên $J = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}$ phân kỳ

2.3.1.4. Hội tụ tuyệt đối

Tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu tích phân $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

Định lý 2.14. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nhận xét. Chiều ngược lại của định lý 2.14 không đúng, tức là nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì chưa chắc $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ mà $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ là bán hội tụ.

Ví dụ 2.17

Xét sự hội tụ, phân kỳ của tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{x^4}}dx$

Giải

Ta có $\left|\sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{x^4}}\right| \le \dfrac{1}{x^{4/3}}$, $\forall x \ge 1$

mà $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{4/3}}$ hội tụ nên $\int\limits_1^{+\infty} \left|\sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{x^4}}\right| dx$ hội tụ hay $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{\cos x}{x^4}} dx$ hội tụ tuyệt đối

2.3.2. Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

2.3.2.1. Định nghĩa

Nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$ nhưng không bị chặn trên khoảng $[b-\varepsilon, b)$ (tức là $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$) thì *b* được gọi là điểm bất thường của hàm số $f(x)$.

Giới hạn (nếu có) của tích phân $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ khi $\varepsilon \to 0$ gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $[a,b)$, ký hiệu $\int\limits_a^b f(x)dx$. Như vậy,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Nếu $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ và $f(x)$ khả tích trên $[a,b)$. Nếu $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ không tồn tại hoặc bằng vô cực thì ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự như vậy, nếu hàm số $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a+\varepsilon', b]$ $(0 < \varepsilon' < b-a)$ nhưng không bị chặn trên khoảng $(a, a+\varepsilon']$ thì *a* được gọi là điểm bất thường của hàm số $f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty\right)$. Ta định nghĩa

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon'}^{b} f(x)dx$$

Nếu $f(x)$ không bị chặn tại *c* $(a < c < b)$ thì ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tức là tích phân ở vế trái hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân ở vế phải đều hội tụ. Nếu một trong hai tích phân ở vế phải phân kỳ thì tích phân tích phân ở vế trái sẽ phân kỳ.

Ví dụ 2.18 Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau đây

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$

Giải

Ta có $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ nên $x = 1$ là điểm bất thường

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\ln(1-x)\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon) = +\infty$$

Vậy $I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ phân kỳ

b) $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Giải

Ta có $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ nên $x = 1$ là điểm bất thường

$$J = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)) = \frac{\pi}{2}$$

Vậy $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ

Tương tự như tích phân suy rộng với cận vô hạn, sau đây chúng ta sẽ nêu một số tính chất và dấu hiệu hội tụ của tích phân suy rộng đối với hàm số không bị chặn. Các tính chất và định lý dưới đây được phát biểu trong trường hợp b là điểm bất thường của hàm số $f(x)$. Trường hợp a là điểm bất thường thì các tính chất và định lý này được phát biểu hoàn toàn tương tự. Bạn đọc hãy tự mình phát biểu các tính chất và định lý đó.

2.3.2.2. Tính chất

1) Hai tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_A^b f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ với mọi $A \in (a,b)$.

2) Nếu các tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ và C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý thì $\int_a^b [C_1.f(x) + C_2.g(x)]dx$ cũng hội tụ và

$$\int_a^b [C_1.f(x) + C_2.g(x)]dx = C_1.\int_a^b f(x)dx + C_2.\int_a^b g(x)dx$$

2.3.2.3. Dấu hiệu hội tụ khi $f(x)$ là hàm không âm

Định lý 2.15 (Dấu hiệu so sánh)

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định trên $[a,b)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn

$[a,b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$. Nếu $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b)$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Từ đó suy ra

+ Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

+ Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

Định lý 2.16

Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số xác định trên $[a,b)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a,b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$. Nếu $f(x),\ g(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ $(0 < K < +\infty)$ thì các tích phân $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Định lý 2.17

i) Tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(\alpha > 0\ ,\ a < b)$ hội tụ khi $\alpha < 1$, phân kỳ khi $\alpha \ge 1$.

ii) Tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $(\alpha > 0\ ,\ a < b)$ hội tụ khi $\alpha < 1$, phân kỳ khi $\alpha \geq 1$.

Ví dụ 2.19 Xét sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân sau đây

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$

Giải

Ta có $0 < \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ \forall x \in (0,1]$

mà $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ hội tụ

b) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$

Giải

Ta có $f(x) = \frac{1}{\cos x} > 0\ ,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$g(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} > 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

và $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} = 1$

mà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{\pi}{2} - x}$ phân kỳ nên $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ phân kỳ

2.3.2.4. Hội tụ tuyệt đối

Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ.

Định lý 2.18 Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nhận xét. Chiều ngược lại của định lý 2.18 không đúng, tức là nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì chưa chắc $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ. Nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ mà $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói $\int_a^b f(x)dx$ là bán hội tụ.

Ví dụ 2.20

Tích phân $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$ hội tụ tuyệt đối vì

$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\forall x \in (0,1]$ và tích phân $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ hội tụ.

2.4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

2.4.1. Ứng dụng của tích phân bất định

i) Xác định quỹ vốn dựa theo lượng đầu tư

Giả sử việc đầu tư được tiến hành liên tục theo thời gian. Ta xem lượng đầu tư *I* và quỹ vốn *K* là các biến số phụ thuộc hàm số vào thời gian *t*:

$$I = I(t)\ ,\ K = K(t)$$

Lượng đầu tư $I(t)$ tại thời điểm t chính là lượng bổ sung quỹ vốn tại thời điểm đó. Nói cách khác, $I(t)$ là tốc độ tăng của $K(t)$ nên $I(t) = K'(t)$.

Nếu biết hàm đầu tư $I(t)$ thì ta có thể xác định được quỹ vốn $K(t)$.

$$K(t) = \int I(t)dt$$

Hằng số *C* trong tích phân bất định được xác định nếu ta biết quỹ vốn ban đầu $K_0 = K(0)$.

Ví dụ 2.21

Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm *t* được xác định dưới dạng hàm số $I(t) = 140t^{0,75}$ và quỹ vốn tại thời điểm xuất phát là $K(0) = 150$. Quỹ vốn tại thời điểm *t* là

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 140t^{0,75}dt = 140.\frac{4}{7}t^{\frac{7}{4}} + C$$

Tại thời điểm xuất phát $K(0)=150$, do đó $K(t)=80.t^{\frac{7}{4}}+150$

ii) Nếu hàm $y(x)$ trong kinh tế có hàm giá trị cận biên là $My(x)$ thì ta có

$$y(x)=\int My(x)dx$$

Ví dụ 2.22

a) Cho hàm giá trị cận biên của doanh thu theo sản lượng của một loại sản phẩm là

$$MR=\frac{dR}{dQ}=10000-Q^2$$

Tìm hàm cầu của loại sản phẩm này

Giải

Hàm doanh thu là $R=\int\left(10000-Q^2\right)dQ=10000Q-\frac{Q^3}{3}+C$

Khi chưa bán hàng $(Q=0)$ thì chưa có doanh thu $\left(R(Q)=0\right)$.

Do đó $R(0)=10000.0-\frac{0}{3}+C=0$. Suy ra $C=0$

Vậy $R=10000Q-\frac{Q^3}{3}$. Vì doanh thu $R=PQ$, P là đơn giá của một đơn vị sản phẩm nên hàm cầu là $P=\frac{R}{Q}=10000-\frac{Q^2}{3}$

b) Cho hàm cầu cận biên của chi phí theo sản lượng là $MC=Q+1000$, chi phí cố định là $Cf=10000$. Tím hàm chi phí.

Giải

Ta có $C(Q)=\int(Q+1000)dQ=\frac{Q^2}{2}+1000Q+C$

Vì $Cf=C(0)$ (chi phí lúc chưa xuất phát) nên $10000=0+C$ hay $C=10000$

Vậy hàm chi phí là $C(Q)=\frac{Q^2}{2}+1000Q+10000$

c) Cho hàm giá trị cận biên của lợi nhuận theo sản lượng là $M\pi=-5Q+500$

Nếu chỉ bán được 50 sản phẩm thì bị lỗ 13500 đơn vị tiền. Tìm lợi nhuận $\pi(Q)$.

Giải

Ta có $\pi(Q)=\int(-5Q+500)dQ=-\frac{5}{2}Q^2+500Q+C$

Vì $\pi(50)=-13500$ nên $-\frac{5}{2}.50^2+500.50+C=-13500$

Suy ra $C=-32250$

Vậy $\pi(Q)=-\frac{5}{2}Q^2+500Q-32250$

2.4.2. Ứng dụng của tích phân xác định

Giả sử có một dãy thu chi liên tục trong khoảng thời gian từ $t=0$ đến $t=T$ với *t* là năm và lãi gộp liên tục theo *r* chu kỳ, mức thu chi tại thời điểm *t* trong mỗi kỳ là $f(t)$. Chia đoạn $[0,T]$ thành các đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia $0=t_0<t_1<t_2<....<t_n=T$ sao cho độ dài mỗi đoạn $[t_{i-1},t_i]$ là $\Delta t=t_i-t_{i-1}$ khá bé sao cho thu chi trong đoạn này xấp xỉ bằng $f(t_i).\Delta t$.

Theo công thức tính lãi gộp, giá trị hiện tại của thu chi tại thời điểm t_{i-1} trong đoạn $[t_{i-1},t_i]$ xấp xỉ bằng $e^{-rt_i}.f(t_i).\Delta t$. Từ đó giá trị hiện tại *A* của thu chi tại $t=0$ trong đoạn $[0,T]$ có xấp xỉ là $A\approx\sum_{i=1}^{n}e^{-rt_i}.f(t_i).\Delta t$

Cho $\Delta t\to 0$, theo định nghĩa tích phân xác định ta có $A=\int_0^T e^{-rt}f(t)dt$ (*)

Ví dụ 2.23

Muốn gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,05/năm, mội năm lời 10 triệu trong 8 năm thì bậy giờ cần gửi bao nhiêu?

Giải

Theo công thức (*) ta có

$$A=\int_0^8 10e^{-0,05t}dt=10.\frac{1}{-0,05}.e^{-0,05t}\Big|_0^8 = 20 \text{ triệu}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Tính các tích phân sau

$a)\int\left(3-x^2\right)^3 dx$ $\qquad$ $b)\int\frac{2x^6-x^5+3x^2-1}{x^3}dx$

$c)\int\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$ $\qquad$ $d)\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$

2. Tính các tích phân sau

$a)\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $b)\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

$c)\int\cos 5x.\sin x dx$ $\qquad$ $d)\int xe^{x^2}dx$

$e)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$ $\qquad$ $f)\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

3. Chứng minh rằng nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ thì $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a\neq 0$

Áp dụng tính

$a)\int(5x+1)^{20}dx$ $\qquad$ $b)\int\sqrt[5]{2-3x}dx$

4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trong một khoảng (a,b). Chứng minh

$$\int f(x)dx = xf(x)-\int xf'(x)dx$$

Áp dụng tính

$a)\int\ln x dx$ $\qquad$ $b)\int arctgx dx$

5. Tính các tích phân sau

$a)\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad$ $b)\int\frac{\sin x.\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

$c)\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ $\qquad$ $d)\int\frac{\sin 4x}{\cos^4 2x+4}dx$

6. Tính các tích phân sau

$a) \int x^2 \sin 2x dx$

$b) \int x^2 \ln x dx$

$c) \int x^2 arctgx dx$

$d) \int \sin \sqrt[3]{x} dx$

$e) \int \frac{xe^{arctgx}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

$f) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} dx$

7. Dùng tích phân xác định, tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2+....+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2\right]$$

$$b) \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+....+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$c) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+....+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$d) \lim_{n\to+\infty} \frac{1^p+2^p+....+n^p}{n^{p+1}}\ ,\ p>0$$

8. Tính đạo hàm

$a) \frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t dt$

$b) \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$

9. Tính các tích phân sau

$a) \int_0^2 |x-1| dx$

$b) \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$

10. Tính các tích phân sau

$a)\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$ $\qquad$ $b)\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

$c)\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ $\qquad$ $d)\int_{0}^{\sqrt{3}}xarctgxdx$

$e)\int_{0}^{1}\left(x^3+x^7\right)\left(x^4+1\right)^7dx$ $\qquad$ $f)\int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+2}}$

$g)\int_{0}^{1}\left(e^x-5\right)e^xdx$ $\qquad$ $h)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx$

$i)\int_{0}^{1}x^2e^{-x}dx$ $\qquad$ $j)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos xdx$

$k)\int_{1}^{e}x^2\ln^2 xdx$ $\qquad$ $l)\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

11. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ thì

(i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos x\right)dx$

(ii) $\int_{0}^{\pi}xf\left(\sin x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f\left(\sin x\right)dx$

Áp dụng tính

$a)\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ $\qquad$ $b)\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a,a]$. Chứng minh

a) Nếu $f(x)=-f(-x)$, $\forall x\in[-a,a]$ thì $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

b) Nếu $f(x)=f(-x)$, $\forall x\in[-a,a]$ thì $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$

13. Tính các tích phân sau

$a)\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx$ $\qquad$ $b)\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$

$c)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\qquad$ $d)\int_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

14. Tính các tích phân sau

$a)\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}}$ $\qquad$ $b)\int_{0}^{2} \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$c)\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ $\qquad$ $d)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

15. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$a)\int_{0}^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2-x+1}dx$ $\qquad$ $b)\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^6\right)}$

$c)\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin^2 x+1}{x+1}$ $\qquad$ $d)\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x\cos x}{x^4+1}dx$

$e)\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ $\qquad$ $f)\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}dx$

$g)\int_{2}^{+\infty} \frac{4x^3-x}{\sqrt{x^2+1}(x^4-2)}dx$ $\qquad$ $h)\int_{1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$

16. Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$a)\int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{x+1}$ $\qquad$ $b)\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

$c)\int_{0}^{1} \frac{dx}{tgx-x}$ $\qquad$ $d)\int_{0}^{2} \frac{dx}{\ln x}$

$e)\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ $\qquad$ $f)\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$

$g)\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ $\qquad$ $h)\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}$

CHƯƠNG 3. PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ.

3.1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

3.1.1. Hàm hai biến số

3.1.1.1. Định nghĩa

Cho không gian $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ và tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$.

Ánh xạ $f:\ D \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto z = f(x,y)$$

được gọi là hàm số hai biến xác định trên tập *D*.

Như vậy, mỗi cặp số thực $(x,y) \in D$ sẽ tương ứng với một số thực $z = f(x,y)$. Ta gọi các biến số x, y là các biến số độc lập, còn biến số z là biến số phụ thuộc vào x, y ; $f(x,y)$ là giá trị của hàm số hai biến ứng với cặp số $(x,y) \in D$.

Ví dụ 3.1

Cho $D = \mathbb{R}^2$ và $f(x,y) = x^3 - x^2 + xy$. Tập xác định của hàm số là cả không gian $\mathbb{R}^2$.

Ứng với cặp số $(x,y) = (2,-1) \in D$, ta có $z = f(2,-1) = 2^3 - (-1)^2 + 2.(-1) = 5$

Ứng với cặp số $(x,y) = (3,2) \in D$, ta có $z = f(3,2) = 3^3 - 2^2 + 3.2 = 29$.

Thông thường khi cho hàm số, người ta phải cho trước tập xác định *D* và ánh xạ f để có thể tính được giá trị tương ứng của hàm số. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, người ta chỉ cho ánh xạ f mà không cho tập xác định. Khi đó ta quy ước tập xác định *D* của hàm số là tập hợp tất cả các cặp số $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho giá trị của biểu thức $f(x,y)$ là số thực.

Ví dụ 3.2

a) Hàm số $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$. Rõ ràng, muốn $f(x,y)$ là số thực ta phải có $y - x^2 \geq 0$. Như vậy, tập xác định của hàm số đó là tập $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

b) Hàm số $f(x,y) = \ln(x - 2y + 1)$ có tập xác định là tập $D = \{(x,y) \in R^2 : 2x - y + 1 > 0\}$

3.1.1.2. Đồ thị của hàm số hai biến

Cho hàm hai biến số $z = f(x,y)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$. Tập hợp tất cả các điểm $P(x,y,z)$ trong không gian $\mathbb{R}^3$, trong đó $(x,y) \in D$ còn $z = f(x,y)$ là giá trị của hàm số tại $(x,y) \in D$ được gọi là đồ thị của hàm số $f(x,y)$. Thông thường tập đó là một mặt cong S nên được gọi là mặt cong đồ thị của hàm số $f(x,y)$.

Ví dụ 3.3

Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có mặt cong đồ thị là nửa mặt cầu tâm $O(0,0,0)$, bán kính 1, nằm phía trên mặt phẳng tọa độ *Oxy* (vì $z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$)

3.1.2. Hàm số *n* biến số

Cho không gian $\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| x_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,\ldots,n \right\}$ và tập $D \subset \mathbb{R}^n$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} &f : D \to \mathbb{R} \\ &x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Được gọi là hàm số n biến số xác định trên tập hợp *D.*

Như vậy, mỗi bộ gồm *n* số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ sẽ tương ứng với một số thực $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Các biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các biến số độc lập, biến số u là biến số phụ thuộc vào $x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là giá trị của hàm số *n* biến ứng với một bộ *n* số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Ví dụ 3.4

Lấy $n = 3, D = \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 2x - y + yz$ là hàm số ba biến số xác định trên $\mathbb{R}^3$.

Ứng với $(x,y,z) = (1,2,3)$ ta có $u = f(1,2,3) = 2.1 - 2^2 + 2.3 = 4.$

Tương tự như hàm hai biến số, tập xác định của hàm số *n* biến là tập hợp tất cả các bộ *n* số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho giá trị của $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một số thực.

3.1.3. Một số hàm quan trọng trong phân tích kinh tế

a) Hàm sản xuất

Hàm sản xuất là hàm $Q = Q(K,L)$, trong đó K là vốn, L là lao động.

Hàm Cobb-Douglas là hàm sản xuất $Q = aK^{\alpha}L^{\beta}$, trong đó a, α, β là hằng số dương.

b) Hàm tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng lợi nhuận

Hàm tổng chi phí là hàm $TC = TC(Q),$ trong đó $Q = Q(K, L).$ Nếu tính theo các yếu tố sản xuất thì $TC = W_K K + W_L L + C_0$ trong đó W_K là giá thuế một đơn vị vốn, W_L là giá thuế đơn vị lao động, C_0 là chi phí cố định.

Hàm tổng doanh thu là hàm $TR = PQ = PQ(K, L),$ trong đó P là giá thị trường của sản phẩm.

Hàm tổng lợi nhuận là hàm $TT = TR - TC$

c) Hàm lợi ích

Người ta dùng biến lợi ích *u* để biểu diễn mức độ ưa thích của người tiêu dùng đối với mỗi tổ hợp hàng hóa trong cơ cấu tiêu dùng. Mỗi tổ hợp hàng hóa gọi là một giỏ hàng. Giả sử cơ cấu của người tiêu dùng có 3 mặt hàng thì mỗi giỏ hàng là một bộ ba số thực (x, y, z). Hàm lợi ích cho tương ứng mỗi giỏ hàng với một giá trị duy nhất $u = u(x, y, z).$

d) Hàm cung, hàm cầu

Giả sử thị trường có n loại hàng hóa với giá trị tương ứng là $P_1, P_2, \ldots, P_n.$ Khi đó

Hàm cung $Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

Hàm cầu $Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

3.2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ *n* BIẾN SỐ

3.2.1. Giới hạn của hàm hai biến số

3.2.1.1. Giới hạn của dãy điểm trên mặt phẳng

Cho dãy điểm $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n), \ldots$ Điểm $M(x, y)$ được gọi là giới hạn của dãy $\{M_n(x_n, y_n)\}_n$ (hay dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ hội tụ đến điểm $M(x, y)$) nếu cho trước $\varepsilon > 0,$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$

Kí hiệu $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n(x_n, y_n) = M(x, y)$ hoặc $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$

Định lý 3.1

Dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}_n$ hội tụ đến điểm $M(x, y)$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y.$

Điều này có nghĩa là $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n(x_n, y_n) = M(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y. \end{cases}$

Định lý trên cho thấy sự hội tụ của dãy điểm trên mặt phẳng tương đương với sự hội tụ theo tọa độ.

Ví dụ 3.5

Tìm giới hạn của dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}_n$ với $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{2n^2}{n^2+1}, \dfrac{\sin n}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2, \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Theo định lý trên ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} M_n\left(\frac{2n^2}{n^2+1}, \frac{\sin n}{n}\right) = M(2,0)$$

3.2.1.2. Giới hạn của hàm hai biến số

a) Điểm tụ (điểm giới hạn)

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $A(a_1, a_2)$ được gọi là điểm tụ của tập D nếu với mọi $\varepsilon > 0$, hình tròn tâm A, bán kính ε, ký hiệu $S(A,\varepsilon)$ chứa ít nhất một điểm của tập hợp D khác với A, tức là $S(A,\varepsilon) \cap \left(D \setminus \{A(a_1, a_2)\}\right) \neq \varnothing$ trong đó

$$S(A,\varepsilon) = \left\{M(x,y) \middle| MA = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \varepsilon\right\}.$$

$S(A,\varepsilon)$ còn được gọi là lân cận bán kính ε của điểm $A(a_1, a_2)$.

Điểm tụ của tập hợp D có thể thuộc D hay không thuộc D.

Định lý 3.2

Điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là một điểm tụ của tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy điểm $\{M_n(x_n, y_n)\}_n$ với $M_n(x_n, y_n) \neq M_m(x_m, y_m)$ nếu $n \neq m$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} M_n(x_n, y_n) = M_0(x_0, y_0)$$

b) Định nghĩa giới hạn của hàm hai biến số

Giả sử hàm số hai biến số $f(x,y)$ xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ và $M_0(x_0,y_0)$ là một điểm tụ của D. Hàm số $f(x,y)$ được gọi là có giới hạn L (L có thể hữu hạn hoặc bằng vô cực) khi $M(x,y)$ dần tới $M_0(x_0,y_0)$ nếu với bất kỳ dãy $\{M_n(x_n,y_n)\}_n \in D \setminus \{M_0(x_0,y_0)\}$ dần tới $M_0(x_0,y_0)$ thì dãy các giá trị tương ứng $f(x_n,y_n)$ của hàm cũng phải dần tới L.

Kí hiệu là $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L$ hoặc $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = L$ (3.1)

Nói cách khác

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L \Leftrightarrow \left[\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (x_0,y_0) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = L\right]$$

Ví dụ 3.6

Chứng minh rằng $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x^2+y) = 5$

Giải

Ta có $f(x,y) = 3x^2 + y$ xác định trên $\mathbb{R}^2$ và $x_0 = 1, y_0 = 2$. Lấy bất kỳ dãy $\{M_n(x_n,y_n)\}_n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{M_0(1,2)\}$ hội tụ đến điểm $M_0(1,2)$. Khi đó

$f(x_n,y_n) = 3x_n^2 + y_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1, \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty}(3x_n^2 + y_n) = 3.1^2 + 2 = 5$$

Vậ theo định nghĩa ta có $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x^2+y) = 5$

c) Tính chất

1) Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ tồn tại thì giới hạn đó là duy nhất

2) Giả sử $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = L_1, \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = L_2$ $(L_1, L_2 \in \mathbb{R})$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y) \pm g(x,y)\right] = L_1 \pm L_2$$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[\alpha f(x,y)\right] = \alpha L_1$ α là hằng số

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y).g(x,y)\right]=L_1.L_2$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{L_1}{L_2}\ \ (L_2\neq 0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)\right]^{g(x,y)}=L_1^{L_2}\ \ (L_1>0)$$

3) Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left|f(x,y)\right|=\left|L\right|$

Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left|f(x,y)\right|=0$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=0$

4) Định lý kẹp

GIả sử $f(x,y)\le g(x,y)\le h(x,y),\forall(x,y)\in D\setminus\left\{(x_0,y_0)\right\}$

Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y)=L$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=L$

Ví dụ 3.7

Tính giới hạn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

Giải

Ta có $x^2+y^2\ge 2\left|xy\right|$ suy ra $0<\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^2y}{2xy}\right|=\left|\dfrac{x}{2}\right|$

Vì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{x}{2}\right|=0$ nên $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=0$. Suy ra $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

Chú ý. Từ định nghĩa giới hạn hàm số, để chứng minh hàm số $f(x,y)$ không tồn tại giới hạn khi $(x,y)\to(x_0,y_0)$ ta chọn 2 dãy $\left\{(x_n,y_n)\right\}_n,\left\{(x_n',y_n')\right\}_n\in D\setminus\left\{(x_0,y_0)\right\}$ cùng tiến về (x_0,y_0) nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n',y_n')$.

Ví dụ 3.8. Chứng minh rằng $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ không tồn tại

Giải

Thật vậy, ta chọn dãy $\left\{(x_n,y_n)\right\}_n$. Với $x_n=y_n=\dfrac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \text{ nhưng } \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ khi } n \to +\infty$$

Chọn dãy $\{(x'_n, y'_n)\}_n$ với $x'_n = \frac{1}{n}, y'_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} x'_n = \lim_{n\to+\infty} y'_n = 0 \text{ nhưng } \frac{x'_n y'_n}{\left(x'_n\right)^2 + \left(y'_n\right)^2} = 0 \to 0 \text{ khi } n \to +\infty$$

Vậy giới hạn trên không tồn tại.

d) Giới hạn lặp

Giới hạn định nghĩa ở trên còn được gọi là giới hạn bội hoặc giới hạn kép vì cả hai biến x, y đồng thời tiến về x_0, y_0 độc lập với nhau, Ngoài giới hạn kép ta còn có thể xét các giới hạn lặp trong đó hai biến x, y không đồng thời tiến về x_0, y_0 (có biến tiến tới trước, có biến tiến tới sau), chẳng hạn nếu $x \to x_0$ trước, $y \to y_0$ sau thì ta viết

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) \qquad (3.2)$$

Còn ngược lại thì ta viết

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) \qquad (3.3)$$

Nói chung giới hạn kép (3.1) và các giới hạn lặp (3.2), (3.3) là các giới hạn khác nhau, thậm chí các giới hạn lặp (3.2), (3.3) cũng có thể khác nhau

Ví dụ 3.9

a) Cho $f(x, y) = x \sin\frac{1}{y}$

vì $0 < \left| x \sin\frac{1}{y} \right| \le |x|$

mà $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x| = 0$ nên $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \sin\frac{1}{y} = 0$

Ta có $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{y} = 0$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} x \sin\frac{1}{y} = 0$

b) $f(x, y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$. Ta có

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2 - y}{y} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2}{x} = 1$$

Rõ ràng ta thấy $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \neq \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$

3.2.2. Giới hạn của hàm số n biến số

3.2.2.1. Giới hạn của dãy điểm trong không gian $\mathbb{R}^n$

Cho dãy điểm $M_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), M_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, M_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}), \ldots$.Điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là giới hạn của dãy $\{M_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})\}_m$ (hay dãy điểm $\{M_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})\}_m$ hội tụ đến điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nếu cho trước $\varepsilon > 0$, tồn tại $m_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $m \geq m_0$ thì $\sqrt{(x_{m1} - x_1)^2 + (x_{m2} - x_2)^2 + \ldots + (x_{mn} - x_n)^2} < \varepsilon$

Kí hiệu $\lim\limits_{m\to +\infty} M_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hoặc

$\lim\limits_{m\to +\infty}(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Định lý 3.3

Dãy điểm $\{M_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})\}_m$ hội tụ đến điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{m\to +\infty} x_{mk} = x_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n.$

3.2.2.2. Giới hạn của hàm số *n* biến số

a) Điểm tụ

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ được gọi là điểm tụ của tập hợp D nếu với mọi $\varepsilon > 0$, hình cầu tâm A, bán kính ε, kí hiệu $S(A, \varepsilon)$ chứa ít nhất một điểm của tập hợp D khác với A, tức là $S(A,\varepsilon) \cap \left(D \setminus \{A(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}\right) \neq \varnothing$

Trong đó

$$S(A,\varepsilon) = \left\{M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| MA = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon\right\}$$

$S(A,\varepsilon)$ còn được gọi là lân cận bán kính ε của điểm $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Điểm tụ của tập hợp D có thể thuộc D hay không thuộc D

Định lý 3.4

Điểm $M(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ là điểm tụ của tập hợp $D\subset\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy điểm $\{M_m(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn})\}_m$ với $M_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in})\neq M_j(x_{j1},x_{j2},\dots,x_{jn})$ nếu $i\neq j$ sao cho $\lim\limits_{m\to+\infty} M_m(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn})=M(x_1,x_2,\dots,x_n)$

b) Định nghĩa giới hạn của hàm số *n* biến số

Giả sử cho hàm số *n* biến số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ xác định trên tập hợp $D\subset\mathbb{R}^n$ và điểm $M_0(x_{01},x_{02},\dots,x_{0n})$ là một điểm tụ của D. Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ được gọi là có giới hạn L (L có thể hữu hạn hoặc bằng vô cực) khi $M(x_1,x_2,\dots,x_n)$ dần tới $M_0(x_{01},x_{02},\dots,x_{0n})$ nếu với bất kỳ dãy $\{M_m(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn})\}_m\subset D\setminus\{M_0\}$ dần tới $M_0(x_{01},x_{02},\dots,x_{0n})$ thì dãy các giá trị tương ứng $f(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn})$ của hàm số cũng dần tới L và ký hiệu là $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_{01}\\ \dots\\ x_n\to x_{0n}}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=L$ hoặc $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=L$

Nói cách khác

$$\lim_{\substack{x_1\to x_{01}\\ \dots\\ x_n\to x_{0n}}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=L\Leftrightarrow\left[\lim_{m\to+\infty}(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn})=(x_{01},x_{02},\dots,x_{0n})\Rightarrow\lim_{m\to+\infty} f(x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mn})=L\right]$$

c) Tính chất

Các tính chất về giới hạn của hàm số *n* biến số cũng tương tự như các tính chất về giới hạn của hàm số hai biến số. Bạn đọc có thể tự mình phát biểu các tính chất này mà không gặp khó khăn gì.

3.3. TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ *n* BIẾN SỐ

3.3.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ xác định trên tập hợp $D\subset\mathbb{R}^n$ và $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)\in D$.

Hàm số $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ được gọi là liên tục tại $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ nếu

$$\lim_{\substack{x_1\to\overline{x}_1\\ \dots\dots\\ x_n\to\overline{x}_n}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$$

Vì tính liên tục của hàm số n biến số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn nên ta còn có định nghĩa tương đương sau

Hàm số n biến số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ liên tục tại $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ nếu với mọi dãy $\{X_m(x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn})\}_m$ tiến tới $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ ta đều có

$$\lim_{m\to+\infty} f(x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn}) = f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$$

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ liên tục tại $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n) \Leftrightarrow \forall\{X_m(x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn})\}_m \subset D$

$$\left(\lim_{m\to+\infty} X_m(x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn}) = \overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n) \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} f(x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn}) = f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)\right)$$

Nếu hàm số n biến số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ không liên tục tại $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ thì $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ được gọi là điểm gián đoạn của hàm số hay hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ gián đoạn tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$.

Hàm số n biến số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ được gọi là liên tục trên tập hợp $D\subset\mathbb{R}^n$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập D

3.3.2. Tính chất

1) Hàm số sơ cấp liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.

2) Nếu $f(x_1,x_2,\ldots,x_n), g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (để cho gọn ta có thể viết là $f(X), g(X)$ với $X = X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$) liên tục tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$ thì các hàm số

$$f(X)+g(X), f(X)-g(X), f(X).g(X), \frac{f(X)}{g(X)}\ (g(\overline{X})\neq 0), \left[f(X)\right]^{g(X)}\ (f(\overline{X})>0)$$

cũng liên tục tại $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$

3) Giả sử hàm số $f(X)$ xác định và liên tục trên tập

$D=\left\{X(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : a_1\le x_1\le b_1, a_2\le x_2\le b_2,\ldots,a_n\le x_n\le b_n\right\}\subset\mathbb{R}^n$. Khi đó

i) Nếu $f(a_1,a_2,\ldots,a_n).f(b_1,b_2,\ldots,b_n)\le 0$ thì tồn tại $C(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in D$ sao cho $f(c_1,c_2,\ldots,c_n)=0.$

ii) Hàm số $f(X)$ bị chặn trên D, tức là $\exists M>0: |f(X)|\le M, \forall X\in D$

iii) Hàm số $f(X)$ đạt GTNN, GTLN trên D tức là tồn tại $X_1(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n}), X_2(x_{21},x_{22},\ldots,x_{2n})\in D$ sao cho

$$f(X_1)=\max_{X\in D} f(X), f(X_2)=\min_{X\in D} f(X)$$

Ví dụ 3.10

a) Hàm số $f(x,y) = \sin(x^2 + 2y)$ liên tục tại mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (do nó là hàm số sơ cấp)

b) Xét tính liên tục của hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Giải

Hàm số $f(x,y)$ xác định trên $\mathbb{R}^2$

$+ (x,y) \neq (0,0)$

Vì $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ là hàm số sơ cấp nên nó liên tục tại mọi $(x,y) \neq (0,0)$

$+ (x,y) = (0,0)$

Ta có $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$

Suy ra $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$

Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

3.4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM SỐ *n* BIẾN SỐ

3.4.1. Số gia riêng và số gia toàn phần

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0(x_0, y_0) \in D.$ Nếu ta cố định $y = y_0$ và cho x số gia Δx (Δx đủ nhỏ sao cho điểm $M_1(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$) thì $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ gọi là số gia riêng theo biến x của hàm số $f(x,y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$.

Tương tự, nếu ta cố định $x = x_0$ và cho y số gia Δy (Δy đủ nhỏ sao cho điểm $M_2(x_0, y_0 + \Delta y) \in D$) thì đại lượng $\Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ gọi là số gia riêng theo biến y của hàm số $f(x,y)$ tại (x_0, y_0).

Nếu ta cho x số gia Δx, y số gia Δy ($\Delta x, \Delta y$ đủ nhỏ sao cho điểm $M_3(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$) thì đại lượng $\Delta_y f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ được gọi là số gia toàn phần của hàm số $f(x,y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$.

Khái niệm số gia riêng và số gia toàn phần được định nghĩa tương tự cho hàm số n biến số. Xét hàm số n biến $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots., \overline{x}_n) \in D$. Khi đó,

- Số gia riêng theo biến $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\Delta_{x_i} f = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i + \Delta x_i, \ldots, \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n)$$

- Số gia toàn phần

$$\Delta f = f(\overline{x}_1 + \Delta x_1, \ldots, \overline{x}_i + \Delta x_i, \ldots, \overline{x}_n + \Delta x_n) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n)$$

3.4.2. Đạo hàm riêng và vi phân cấp 1

3.4.2.1. Đạo hàm riêng

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) và ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ hay $f'_x(x_0, y_0)$.

Tương tự, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến y của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) và ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ hay $f'_y(x_0, y_0)$.

Tổng quát

Cho hàm số n biến $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots., \overline{x}_n)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i + \Delta x_i, \ldots, \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n)}{\Delta x_i}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng theo biến x_i của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots., \overline{x}_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n)$ hay $f'_{x_i}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n)$ (có thể kí hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{X}\right)$ hoặc $f'_{x_i}\left(\overline{X}\right)$).

Chú ý.

- Qua định nghĩa trên ta thấy rằng việc tính đạo hàm riêng thực chất là việc tính đạo hàm của hàm số một biến số (ta coi một trong các biến số độc lập là biến số, các biến còn lại xem như hằng số). Do đó việc tính đạo hàm riêng không đòi hỏi những quy tắc mới mà chỉ việc áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến số.

- Đạo hàm riêng của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo một trong các biến độc lập tại một điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots., \overline{x}_n)$ nào đó (nếu tồn tại) là một số xác định. Nếu hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có đạo hàm riêng theo biến x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ tại mọi điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ thì $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$) là một hàm số xác định trên D

Ví dụ 3.11

Tính đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y) = x^3 y - x\sin y + y^4$

Giải

Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y - \sin y, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 - x\cos y + 4y^3$

3.4.2.2. Vi phân

Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x, y)$ xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ và điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$. Xét số gia toàn phần của hàm số tại $M_0(x_0, y_0)$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Nếu tồn tại hai số A, B (A, B chỉ phụ thuộc vào điểm $M_0(x_0, y_0)$ và hàm số $f(x, y)$, không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$) sao cho số gia toàn phần của hàm số $f(x, y)$ có thể viết được dưới dạng $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \mathrm{O}(\rho)$ với $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ và $\mathrm{O}(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn ρ khi $\rho \to 0$

Đại lượng $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x, y)$ tại $M_0(x_0, y_0)$ và được ký hiệu là $df = A\Delta x + B\Delta y$

Nếu hàm số $f(x, y)$ có vi phân tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì ta nói $f(x, y)$ khả vi tại điểm đó.

Định nghĩa trên không cho ta biết được điều kiện tồn tại vi phân đối với một hàm số cho trước và cũng không biết được cách tìm các số A, B. Các định lý sau đây sẽ giải quyết những vấn đề này.

Định lý 3.5

i) Nếu hàm số $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì nó có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0, y_0)$ và $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$

ii) Nếu tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$, các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}$ của hàm số $f(x, y)$ tồn tại và liên tục thì $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ và $df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$

Tương tự như hàm một biến số biểu thức vi phân có thể viết dưới dạng

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

Thay điểm $M_0(x_0, y_0)$ bởi điểm $M(x, y)$ bất kỳ tại đó hàm khả vi ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Ví dụ 3.12

Cho $f(x, y) = \sin(x^2 + 2y)$. Ta có $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y = 2x\cos(x^2 + 2y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\cos(x^2 + 2y)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên $f(x, y)$ khả vi tại mọi điểm $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $df = 2x\cos(x^2 + 2y)dx + 2\cos(x^2 + 2y)dy$.

Mở rộng cho trường hợp n biến

Giả sử hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$ và điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in D$. Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là khả vi tại $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ nếu

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\overline{x}_1 + \Delta x_1, \overline{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \overline{x}_n + \Delta x_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \\ &= A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots A_n\Delta x_n + \mathrm{O}(\rho)\end{aligned}$$

trong đó $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$ và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các số không phụ thuộc vào $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$

Biểu thức $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots., \overline{x}_n)$ và ta cũng có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{X})\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{X})\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{X})\Delta x_n$$

Thay điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots., \overline{x}_n)$ bởi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bất kỳ tại đó hàm khả vi ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\Delta x_n$$

3.4.3. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

3.4.3.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có đạo hàm riêng theo biến $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tại mọi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một hàm số xác định trên D. Đạo hàm riêng theo biến x_k (nếu có) của hàm số $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay $f''_{x_i x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

(ta cũng có thể ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(X)$ hay $f''_{x_i x_k}(X)$).

Thay cho các ký hiệu trên ta có thể sử dụng ký hiệu đơn giản $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ hoặc $f''_{x_i x_k}$.

Như vậy, theo định nghĩa ta có $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$

Nếu $i = k$ thì ta có thể viết $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Ví dụ 3.13

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x, y) = arctg\frac{x}{y}$

Giải

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x, y)$ là

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y)$ là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Ví dụ 3.14

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y,z)=x^3y^4z^5$

Giải

Các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $f(x,y,z)$ là

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4z^5,\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3z^5,\frac{\partial f}{\partial z}=5x^3y^4z^4$$

Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y,z)$ là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^4z^5\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12x^2y^3z^5\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=15x^2y^4z^4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=12x^2y^3z^5\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^3y^2z^5\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=20x^3y^3z^4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=15x^2y^4z^4\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=20x^3y^3z^4\quad,\quad\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}=20x^3y^4z^3$$

Các đạo hàm riêng cấp 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}$ (với $i\neq k;i=1,2,\ldots,n;k=1,2,\ldots,n$) được gọi là đạo hàm riêng hỗn hợp. Mỗi bộ hai biến độc lập cho tương ứng một cặp đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2. Nói chung hai đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 theo cùng một cặp biến số nhưng sai khác ở thứ tự lấy đạo hàm có thể không bằng nhau. Như vậy thì hai đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 theo cùng một cặp biến số phải thỏa điều kiện gì để chúng bằng nhau, định lý sau đây sẽ giải quyết vấn đề này.

Định lý 3.6

Giả sử hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trong lân cận nào đó của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$. Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ và các đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$. Nếu các đạo hàm riêng hỗn hợp đó liên tục tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ thì tại điểm đó chúng bằng nhau, tức là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\overline{X}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\overline{X})$$

Một cách tổng quát, đạo hàm riêng cấp m $(m > 1)$ của hàm n biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo biến x_i là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp $(m-1)$ của nó tức là

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_i^{m-1}}\right) \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Đạo hàm riêng cấp *m* của hàm số *n* biến là đạo hàm lặp liên tiếp *m* lần, mỗi lần lấy đạo hàm riêng theo một biến tùy ý. Đạo hàm lặp *m* lần không theo cùng một biến nhất định được gọi là đạo hàm riêng hỗn hợp cấp *m*. Có thể chứng minh được rằng nếu hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp *m* liên tục thì các đạo hàm riêng hỗn hợp đó bằng nhau. Chẳng hạn, nếu các đạo hàm riêng hỗn hợp $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ cùng tồn tại và liên tục thì chúng bằng nhau.

3.4.3.3. Ma trận Hess

Giả sử hàm số *n* biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có n^2 đạo hàm riêng cấp 2 $f''_{x_i x_j}\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Khi đó, ma trận vuông cấp *n*

$$H = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận Hess của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nếu hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục thì ma trận Hess là ma trận đối xứng.

Ví dụ 3.15

Ma trận Hess của hàm 3 biến $f(x, y, z) = x^3y^4z^5$ là ma trận

$$H = \begin{bmatrix} 6x^2y^4z^5 & 12x^2y^3z^5 & 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 & 12x^3y^2z^5 & 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 & 20x^3y^3z^4 & 20x^3y^4z^3 \end{bmatrix}$$

3.4.3.3. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số *n* biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 liên tục trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi phân toàn phần của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n$$

Để đơn giản ta có thể sử dụng ký hiệu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ thay cho $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Như vậy $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

Rõ ràng df cũng là một hàm theo n biến số $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nếu hàm số này lại có vi phân tại điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ thì ta gọi vi phân của nó $d(df)$ là vi phân cấp 2 của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và ký hiệu là $d^2 f$,

nghĩa là $d(df) = d^2 f$.

Như vậy, vi phân cấp 2 của hàm n biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được tính theo công thức

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k$$

Công thức tính vi phân cấp 2 của hàm *n* biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có thể được viết theo cách như sau

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n \right)^2 f$$

Biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 $d^2 f$ là một dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ với hệ số của $dx_i dx_k$ là $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(i,k = 1,2,\ldots,n)$. Ma trận của dạng toàn phương $d^2 f$ là ma trận Hess của hàm số $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Tổng quát

Nếu hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có các đạo hàm riêng cho tới cấp m $(m > 1)$ liên tục thì ta có thể lấy vi phân toàn phần của nó tới cấp *m*. Vi phân toàn phần cấp *m* của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ là vi phân toàn phần của vi phân toàn phần cấp $(m-1)$ của nó tại điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và được ký hiệu là $d^m f$. Như vậy

$$d^m f = d(d^{m-1} f)$$

Vi phân toàn phần cấp m của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được tính theo công thức

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f$$

3.4.4. Đạo hàm và vi phân của hàm hợp, hàm ẩn

3.4.4.1. Đạo hàm và vi phân của hàm hợp

- Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$, trong đó x, y lại là những hàm số của $t : x = \varphi(t), y = \psi(t)$ cùng xác định trên khoảng (a,b) nào đó và với $t \in (a,b)$ thì $(x, y) \in D$. Khi đó ta có hàm hợp $z = f(x, y) = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ là hàm một biến xác định trên (a,b). Giả sử $f(x, y)$ khả vi trên *D* và các hàm $\varphi(t), \psi(t)$ khả vi trên (a,b). Khi đó hàm hợp $f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ khả vi trên (a,b) và ta có.

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}.x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}.y'(t)$$

Đặc biệt, nếu y là hàm theo biến x, tức là $y = \varphi(x)$ thì đạo hàm của $f(x, y)$ theo x được tính theo công thức

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.y'(x)$$

- Giả sử $z = f(x,y)$ là hàm số khả vi trên $D \subset \mathbb{R}^2, x = \varphi(t,s), y = \psi(t,s)$ là các hàm số khả vi đối với biến số t,s trong $G \subset \mathbb{R}^2$ và có tập giá trị là $D_1 \subset D$. Khi đó hàm hợp $z = f\left[\varphi(t,s),\psi(t,s)\right]$ là hàm số của hai biến số t,s xác định trên G. Đạo hàm riêng của hàm số $z = f\left[\varphi(t,s),\psi(t,s)\right]$ được tính theo công thức

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial fy}{\partial s}$$

Tổng quát

Nếu hàm số n biến số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ khả vi trên $D \subset \mathbb{R}^n$, trong đó $x_1 = x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m), x_2 = x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots, x_n = x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ cũng là những hàm khả vi trên $G \subset R^m$ và có tập giá trị $D_1 \subset D$ thì ta có hàm hợp $u = f\left(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_m), x_2(t_1,t_2,\ldots,t_m),\ldots, x_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)\right)$ xác định trên G. Khi đó đạo hàm riêng theo biến $t_j \, (j = 1,2,\ldots,m)$ được tính theo công thức

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

Ví dụ 3.16

Cho hàm số $z = f(x,y) = e^x \sin(x+y)$

a) Tính $z'(t)$ nếu $x = t^2, y = t^3$

Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{2}e^x \sin(x+y+\frac{\pi}{4}), \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos(x+y)$$

Theo công thức ta được $z'(t) = 2\sqrt{2}te^{t^2}\sin(t^2+t^3+\frac{\pi}{4}) + 3t^2e^{t^3}\cos(t^2+t^3)$

b) Tính $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s}$ nếu $x = ts, y = t+s$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sqrt{2}se^{ts}\sin(ts+t+s+\frac{\pi}{4}) + e^{ts}\cos(t+s+ts)$$

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \sqrt{2}te^{ts}\sin(ts+t+s+\frac{\pi}{4}) + e^{ts}\cos(ts+t+s)$$

3.4.4.2. Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

a) Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn một biến số

Khái niệm

Giả sử ta có phương trình $F(x,y)=0$ với $F(x,y)$ là hàm số hai biến xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu với mỗi $x \in (a,b)$ nào đó tồn tại duy nhất giá trị của y thỏa mãn phương trình $F(x,y)=0$ thì phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm số $y = y(x), x \in (a,b)$.

Hàm số $y = y(x)$ được gọi là hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x,y)=0$. Ta nói phương trình $F(x,y)=0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$ trong khoảng (a,b) khi và chỉ khi

$$F(x, y(x)) = 0, \forall x \in (a,b).$$

Nếu giải được phương trình $F(x,y)=0$ để có thể biểu diễn y theo x bằng biểu thức thì hàm ẩn $F(x,y)=0$ có thể đưa về dạng hàm "hiện".

Ví dụ 3.17

Phương trình $F(x,y) = x + y^3 - 1 = 0$

với $x \in \mathbb{R}$, phương trình trên xác định duy nhất giá trị $y = \sqrt[3]{1-x}$ thỏa mãn

$$F\left(x, y(x)\right) = x + (1-x) - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Như vậy ta nói phương trình $x + y^3 - 1 = 0$ xác định hàm $y = \sqrt[3]{1-x}$ dưới dạng ẩn trong $\mathbb{R}$. Trong ví dụ này, hàm ẩn có thể biểu diễn dưới dạng hàm hiện $y = \sqrt[3]{1-x}$.

Ví dụ 3.18

Phương trình $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Với mỗi $x \in [-1,1]$, có tương ứng hai giá trị $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ thỏa mãn $F(x,y)=0$ nên hệ thức này không xác định cho ta hàm ẩn nào cả. Trong nhiều trường hợp, mặc dù ta có thể chứng minh được rằng phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm số $y = y(x)$ nhưng ta không thể biểu diễn y theo x một cách trực tiếp. Trong trường hợp đó ta phải xét hàm số $y = y(x)$ gián tiếp dưới dạng phương trình $F(x, y) = 0$. Kí hiệu $y = y(x)$ chỉ mang ý nghĩa hình thức để nói y là hàm số của biến số x.

Sự tồn tại của hàm ẩn

Định lý 3.7

Giả sử hàm số $F(x, y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại $M_0(x_0, y_0)$ thỏa mãn các điều kiện :

$$F(x_0, y_0) = 0 \ , \ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Khi đó

+ tồn tại $\delta > 0$ sao cho phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số

$$y = y(x), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$+ y(x_0) = y_0$

+ hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Đạo hàm của hàm ẩn

Định lý trên khẳng định sự tồn tại của hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$ và đạo hàm của hàm ẩn (khi các điều kiện của định lý được thỏa mãn). Như vậy, để tính đạo hàm của hàm ẩn (khi đã biết đạo hàm tồn tại) ta chỉ cần áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp $F\left(y, y(x)\right) = 0.$

Giả sử hàm số $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$ thế thì $F\left(y, y(x)\right) = 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).y'(x) = 0$$

vì $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ nên $y'(x) = \dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$

Ví dụ 3.19

Xét hàm ẩn xác định từ phương trình $2x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ta có $F(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$

do đó,

$$y'(x)=\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}=\frac{-4x}{2y}=\frac{-2x}{y}$$

Ta có thể tính đạo hàm cấp hai của hàm ẩn từ đạo hàm cấp một theo quy tắc hàm hợp.

Ví dụ 3.20. Tiếp theo ví dụ 3.19

$$y''(x)=\frac{-2y-y'(x)(-2x)}{y^2}=\frac{-2y+2xy'(x)}{y^2}$$

Thay $y'(x)=\dfrac{-2x}{y}$ ta được

$$y''(x)=\frac{-2y+2x\dfrac{-2x}{y}}{y^2}=\frac{-2y^2-4x^2}{y^3}$$

Tương tự như vậy ta có thể tính đạo hàm cấp m của hàm ẩn $y=y(x)$ xác định bởi phương trình $F(x,y)=0$ bằng công thức $y^{(m)}(x)=\left(y^{(m-1)}(x)\right)'\ (m>1)$

b) Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn nhiều biến

Giả sử ta có phương trình $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ với $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ là hàm số $(n+1)$ biến số xác định trên tập $E\subset\mathbb{R}^{n+1}$ Nếu với mỗi $X(x_1,x_2,\dots,x_n)$ thuộc tập hợp $D\subset\mathbb{R}^n$ tồn tại duy nhất một giá trị của y sao cho $(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ thỏa mãn phương trình $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ thì phương trình $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ xác định một hàm số $y=y(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Hàm số $y=y(x_1,x_2,\dots,x_n)$ xác định thông qua phương trình $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ được gọi là hàm ẩn. Ta nói phương trình $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$ xác định hàm ẩn $y=y(x_1,x_2,\dots,x_n)$ trong tập hợp $D\subset\mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi

$$F\left(x_1,x_2,\dots,x_n,y(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)=0\ ,\ \forall X(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D$$

Định lý về sự tồn tại hàm ẩn

Giả sử hàm số $F(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n,\overline{y})$ và tại điểm $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n,\overline{y})$ thỏa mãn các điều kiện:

$$F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y}) = 0 \ , \ \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y}) \neq 0$$

Khi đó,

+ phương trình $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$.

+ $y(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = \overline{y}$

+ $y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$

Việc tính đạo hàm riêng của hàm ẩn nhiều biến được thực hiện tương tự như việc tính đạo hàm riêng của hàm ẩn một biến. Như vậy, đạo hàm riêng của hàm ẩn $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo biến $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ được tính theo công thức

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Các đạo hàm riêng cấp cao cũng được tính tương tự như tính đạo hàm cấp cao của hàm ẩn một biến.

Ví dụ 3.21

Tính các đạo hàm riêng của hàm ẩn $z = z(x, y)$ được xác định từ phương trình

$$x + 2y + 3z = e^z$$

Giải

Đặt $F(x, y, z) = x + 2y + 3z - e^z$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{3 - e^z} = \frac{1}{e^z - 3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2}{3 - e^z} = \frac{2}{e^z - 3}$$

3.5. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ n BIẾN SỐ

3.5.1. Cực trị của hàm số n biến số

3.5.1.1. Cực trị không có điều kiện ràng buộc

a) Định nghĩa

Cho hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định và liên tục trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$

$D = \left\{ X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \; ; \; a_i, \, b_i \in \mathbb{R} \; ; \; i = 1, 2, \dots, n \right\}$

Ta nói hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n) \in D$ nếu tồn tại một lân cận $S(\overline{X}, r) \in D$ ($r > 0$ đủ nhỏ) sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n)$ $\left(f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n) \right)$ với mọi $X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S(\overline{X}, r)$ và $X \neq \overline{X}$.

Điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n)$ mà tại đó hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của nó. Điểm cực đại, điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

b) Điều kiện cần để có cực trị

Định lý 3.8

Nếu hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong D và đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n) \in D$ thì

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n) = 0 \; , \; i = 1, 2, \dots, n \qquad (3.4)$$

Đó là điều kiện cần để có cực trị. Điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots., \overline{x}_n)$ thỏa mãn điều kiện (3.4) được gọi là điểm dừng của hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Từ định lý trên ta thấy rằng hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng. Tuy nhiên đây chỉ là điều kiện cần, chưa phải là điều kiện đủ. Điều kiện đủ dưới đây sẽ giúp ta kiểm tra xem tại điểm dừng hàm số có cực trị hay không.

c) Điều kiện đủ để có cực trị

Giả sử $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm dừng của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp hai liên tục.

Đặt $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

Khi đó ma trận Hess của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là ma trận đối xứng, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận H có n định thức con chính

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_2 \end{vmatrix}, \ldots, D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định lý 3.9

i) Nếu $D_1 > 0, D_2 > 0, \ldots, D_n > 0$ thì $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

ii) Nếu $D_1 < 0, D_2 > 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0$ thì $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm cực đại của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

iii) Nếu $D_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nhưng không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ không phải là điểm cực trị.

iv) Nếu $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, \ldots, D_n \geq 0$ và tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $D_i = 0$ hoặc $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, \ldots, (-1)^n D_n \geq 0$ và tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $D_i = 0$ thì chưa thể kết luận về cực trị địa phương của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tại $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$. Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$. Muốn có được kết luận ta phải sử dụng phương pháp khác.

Hệ quả

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ và điểm $M_0(x_0,y_0)$ là điểm dừng của hàm số $f(x,y)$. Ta đặt

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0), C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0), \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Khi đó

i) Nếu $\begin{cases} A>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$ thì $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x,y)$

ii) Nếu $\begin{cases} A<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$ thì $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực đại của hàm số $f(x,y)$

iii) Nếu $\Delta<0$ thì $M_0(x_0,y_0)$ không là điểm cực trị của hàm số $f(x,y)$

iv) Nếu $\Delta=0$ thì chưa có kết luận.

Ví dụ 3.22

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

Giải

Ta tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của $f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y, \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Điểm dừng của hàm số $f(x,y)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Ta được hai điểm dừng $M_0(0,0), M_1(1,1)$

+ Tại $M_0(0,0)$, ta có

$A=0, B=-3, C=0 \Rightarrow \Delta=AC-B^2=-9<0.$ Vậy hàm số $f(x,y)$ không đạt cực trị tại $M_0(0,0).$

+ Tại $M_1(1,1)$, ta có

$A=6, B=-3, C=6 \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 27 > 0$. Vậy hàm số $f(x,y)$ đạt cực tiểu tại $M_1(1,1)$ và $f_{CT} = f(1,1) = -1$.

Ví dụ 3.23

Tìm cực trị của hàm số $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$.

Giải

Điểm dừng của hàm số $f(x,y,z)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y - 2z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có hai điểm dừng $M_1(1,-2,\frac{1}{2}), M_2(\frac{-1}{2},\frac{-5}{4},\frac{-1}{4})$. Các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4$$

+ Tại $M_1(1,-2,\frac{1}{2})$

Ma trận Hess của hàm số $f(x,y,z)$ là $H = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$D_1 = 6 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 > 0, D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Suy ra $f(x,y,z)$ đạt cực tiểu tại $M_1(1,-2,\frac{1}{2})$ và $f_{CT} = f\left(1,-2,\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{2}$

+ Tại $M_2(\frac{-1}{2},\frac{-5}{4},\frac{-1}{4})$

Ma trận Hess của hàm số $f(x,y,z)$ là $H = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$D_1 = -3 < 0, D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 < 0, D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Suy ra $f(x,y,z)$ không đạt cực trị tại $M_2(\frac{-1}{2},\frac{-5}{4},\frac{-1}{4})$.

3.5.1.2. Cực trị có điều kiện ràng buộc

a) Cực trị có điều kiện ràng buộc với hai biến chọn và một phương trình ràng buộc.

Trong 3.5.1.1 ta đã xét bài toán tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ trong đó các biến số x, y không có điều kiện ràng buộc. Ta gọi đó là cực trị tự do hay cực trị không điều kiện. Ở mục này ta sẽ xét bài toán tìm cực trị của hàm 2 biến $z = f(x,y)$ khi x, y bị ràng buộc với nhau với một điều kiện nào đó.

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x,y),\ \varphi(x,y)$ xác định và liên tục trên tập $D = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d;\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$ Ta nói hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ nếu tồn tại lân cận $S(M_0, r) \subset D$ ($r > 0$ đủ nhỏ) sao cho $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ $\left(f(x,y) \ge f(x_0,y_0)\right)$ với mọi điểm $M(x,y) \in S(M_0,r), M \ne M_0$ và $\varphi(M) = \varphi(x,y) = 0.$

Thông thường phương trình $\varphi(x,y) = 0$ cho ta một đường cong (C) nào đó. Như vậy ta chỉ so sánh $f(x_0,y_0)$ với $f(x,y)$ khi điểm $M(x,y)$ nằm trên (C) mà thôi.

Điều kiện cần để có cực trị

Định lý 3.9

Giả sử $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $z=f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=0$ trong đó $f(x,y),\varphi(x,y)$ là các hàm số có đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Khi đó tồn tại $\lambda\in\mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}\qquad(3.5)$$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange. Hàm số $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ được gọi là hàm số Lagrange.

Như vậy, hệ phương trình (3.5) có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0,y_0)=0\end{cases}\qquad(3.6)$$

Điều kiện đủ để có cực trị

Giả sử (x_0,y_0,λ) là điểm dừng của hàm số Lagrange $L(x,y)$, tức là một nghiệm của hệ phương trình (3.6) với giả thiết các hàm số $f(x,y),\varphi(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại điểm $M_0(x_0,y_0)$. Khi đó, hàm số $L(x,y)$ cũng có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại điểm $M_0(x_0,y_0)$. Ta xét định thức

$$D=\begin{vmatrix}0 & \varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12}\\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22}\end{vmatrix}$$

Trong đó

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\ ,\ \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda)\ ,\ L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda) = L_{21}$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda)$$

Định lý 3.10

Nếu $D > 0$ thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm số $f(x, y)$.

Nếu $D < 0$ thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số $f(x, y)$.

Nếu $D = 0$ thì chưa có kết luận gì về điểm $M_0(x_0, y_0)$ đang xét.

Ví dụ 3.24

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Hàm Lagrange $L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 = 1)$.

Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} \\ y_1 = \dfrac{3}{5} \\ \lambda_1 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = \dfrac{-4}{5} \\ y_2 = \dfrac{-3}{5} \\ \lambda_2 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

Ta tính cá đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ và các đạo hàm riêng cấp 2 của $L(x, y)$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda\ , L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21} = 0\ ,\ L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x\ ,\ \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda y^2 - 8\lambda x^2 = -8\lambda(x^2 + y^2).$$

+ Tại $M_1(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ và $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ thì $D = -20 < 0$ nên $M_1(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ là điểm cực tiểu và

$$f_{CT} = f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$$

+ Tại $M_2(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5})$ và $\lambda_2 = \frac{-5}{2}$ thì $D = 20 > 0$ nên $M_2(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5})$ là điểm cực đại và

$$f_{CD} = f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$$

b) Cực trị có điều kiện ràng buộc với n biến chọn và một phương trình ràng buộc

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định và liên tục trên tập

$D = \left\{X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \ ; \ a_i, \ b_i \in \mathbb{R} \ ; \ i = 1, 2, \ldots, n\right\}$

Ta nói hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đạt cực đại địa phương (cực tiểu địa phương) tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in D$ với điều kiện $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ nếu tồn tại lân cận $S(\overline{X}, r) \subset D$ ($r > 0$ đủ nhỏ) sao cho $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ $\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)\right)$ với mọi điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S(\overline{X}, r), X \neq \overline{X}$ và $\varphi(X) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

Điều kiện cần để có cực trị

Định lý 3.11

Giả sử $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ là điểm cực trị của hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với điều kiện $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ trong đó $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là các hàm số có đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ và tại $\overline{X}$ có ít nhất một trong các đạo hàm riêng của $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ khác 0. Khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) - \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = 0 \end{cases} \qquad (3.7)$$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange. Hàm số

$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\lambda\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ được gọi là hàm số Lagrange.

Như vậy, hệ phương trình (3.7) có thể được viết lại

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n)=0\ ;\ i=1,2,\ldots,n\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n)=0\end{cases} \tag{3.8}$$

Điều kiện đủ để có cực trị

Giả sử $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n,\lambda)$ là điểm dừng của hàm số $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)$, tức là một nghiệm của hệ (3.8) với giả thiết các hàm số $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n)$. Khi đó hàm số $L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)$ cũng có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại điểm $\overline{X}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n)$.

Ta lập ma trận

$$H=\begin{bmatrix}0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n\\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n}\\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_n & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn}\end{bmatrix}$$

Trong đó

$$\varphi_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n)\ ;\ k=1,2,\ldots,n$$
$$L_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,....,\overline{x}_n,\lambda)\ ;\ i,j=1,2,\ldots,n$$

Ta xét các định thức

$$D_k=\begin{vmatrix}0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_k\\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1k}\\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_k & L_{k1} & L_{k2} & \cdots & L_{kk}\end{vmatrix}\ (k=2,3,\ldots,n)$$

Định lý 3.12

Nếu $D_2 > 0, D_3 < 0, \dots, (-1)^n D_n > 0$ thì $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Nếu $D_2 < 0, D_3 < 0, \dots, D_n < 0$ thì $\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

3.5.2. Ứng dụng trong kinh tế

3.5.2.1. Bài toán tối đa hóa lợi ích

Giả sử P_1, P_2 là giá của các mặt hàng x, y mà một người tiêu dùng cần mua với tổng số tiền là m. Giả sử $u(x, y)$ là lợi ích khi sử dụng hai mặt hàng này. Bài toán tối đa hóa lợi ích có nội dung như sau:

Chọn (x, y) để hàm lợi ích $u(x, y)$ đạt cực đại với điều kiện $P_1 x + P_2 y = m$

Ta sẽ xem xét bài toán tối đa hóa lợi ích với giả thiết rằng hàm lợi ích có các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 liên tục trong miền $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. Để cho gọn, ta ký hiệu các đạo hàm riêng như sau:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{21}, u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda\left(P_1 x + P_2 y - m\right)$

Điều kiện cần để (x, y) cho lợi ích tối đa là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = u_1 + \lambda P_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = u_2 + \lambda P_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = Px_1 + P_2 y - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-u_1}{P_1} = \dfrac{-u_2}{P_2} \\ Px_1 + P_2 y = m \end{cases} \qquad (3.9)$$

Gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ phương trình (3.9), giá trị tương ứng của nhân tử Lagrange được xác định theo công thức

$$\lambda = \frac{-u_1(x_0, y_0)}{P_1} = \frac{-u_2(x_0, y_0)}{P_2}$$

Để xét điều kiện đủ (đối với điểm dừng của hàm số Lagrange) ta tính các đạo hàm riêng của hàm số

$\varphi(x,y) = Px_1 + P_2 y$ và các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $L(x,y,\lambda)$.

Ta có

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = P_1 \ , \ \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = P_2$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0,y_0,\lambda) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0) = u_{11}$$

$$L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,\lambda) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = u_{12}$$

$$L_{21} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0,y_0,\lambda) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = u_{21}$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0,y_0,\lambda) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0) = u_{22}$$

Ta lập ma trận $H = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & L_{11} & L_{12} \\ \varphi_2 & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & u_{11} & u_{12} \\ P_2 & u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$

Điều kiện đủ để hàm lợi ích đạt cực đại là

$$D = \det H = 2P_1P_2u_{12} - P_1^2u_{22} - P_2^2u_{11} > 0.$$

3.5.2.2. Bài toán tối thiểu hóa chi phí

Khi quyết định mua sắm hàng hóa và dịch vụ, không phải người tiêu dùng nào cũng sử dụng toàn bộ thu nhập để hưởng lợi ích tối đa. Một xu hướng lựa chọn khác là người ta đặt ra một mức lợi ích u_0 nhất định và thực hiện lợi ích đó với chi phí nhỏ nhất. Bài toán về sự lựa chọn của người tiêu dùng trong trường hợp này được đặt ra như sau:

Chọn (x,y) để chi phí tiêu dùng $P_1x + P_2y = C$ đạt giá trị cực tiểu với điều kiện $u(x,y) = u_0$. Bài toán này được gọi là bài toán tối thiểu hóa chi phí người tiêu dùng.

Lập hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = P_1x + P_2y + \lambda\left[u(x,y) - u_0\right]$

Điều kiện trong trường hợp này là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = P_1 + \lambda u_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = P_2 + \lambda u_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = u(x, y) - u_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{-u_1}{P_1} = \dfrac{-u_2}{P_2} \\ u(x, y) = u_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ phương trình (3.10), giá trị tương ứng của nhân tử Lagrange được tính theo công thức

$$\lambda = -\frac{P_1}{u_1(x_0, y_0)} = -\frac{P_2}{u_2(x_0, y_0)}$$

Điều kiện đủ để hàm chi phí $C = P_1 x + P_2 y$ với điều kiện $u(x, y) = u_0$ đạt giá trị cực tiểu tại điểm (x_0, y_0, λ) là

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & \lambda u_{11} & \lambda u_{12} \\ u_2 & \lambda u_{21} & \lambda u_{22} \end{vmatrix} = \lambda(u_1 u_2 u_{12} + u_1 u_2 u_{21} - u_2^2 u_{11} - u_1^2 u_{22}) < 0$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$a) f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

$b) f(x,y)=\frac{x^2-5xy+1}{x-y-3}$

$c) f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$

$d) f(x,y)=2\sqrt{x}+3\sqrt{y}-\sqrt{x+y-4}$

$e) f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-2y}}{\sqrt{4-x-y}+1}$

$f) f(x,y)=\arcsin\frac{y-1}{x}$

2. Tìm các giới hạn lặp và giới hạn bội (nếu có) tại $(0,0)$ của các hàm số sau

$a) f(x,y)=\frac{x^2+y^2+x-y}{x+y}$

$b) f(x,y)=\frac{e^{xy}-1}{x}$

$c) f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$

$d) f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

$e) f(x,y)=\frac{x\cos\frac{1}{x}+y}{x+y}$

$f) f(x,y)=\frac{\sin xy}{y}$

3. Tìm $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ và $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ nếu

$a) f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4},\ a=\infty, b=\infty$

$b) f(x,y)=\frac{1}{xy}tg\frac{xy}{1+xy},\ a=0, b=+\infty$

$c) f(x,y)=\frac{x^y}{1+x^y},\ a=+\infty, b=0^+$

$d) f(x,y)=\log_x(x+y),\ a=1, b=0$

4. Tìm các giới hạn sau

$a) \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

$b) \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

$c) \lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{x^3+y^2}{x^4+y^4}$

$d) \lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$

5. Xác định tập các điểm liên tục của các hàm số sau

$a) f(x,y) = x^4 + \sin xy - 4x + 1$

$b) f(x,y) = \dfrac{x^2 - 2xy + 3}{x + y - 1}$

$c) f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

$d) f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. Tìm $f_x^{'}(x,y), f_y^{'}(x,y), f_{xx}^{''}(x,y), f_{xy}^{''}(x,y), f_{yy}^{''}(x,y)$ của các hàm số sau

$a) f(x,y) = x^3 + y^2 + 6xy - 2x + 1$

$b) f(x,y) = e^{x-y^2} + 3x - 2y + \sin x$

$c) f(x,y) = arctg(x^2 + y^2) + \ln(x^2 + 2y)$

$d) f(x,y) = \arcsin(xy)$

7. Cho $z = f(x^2 - y^2)$ trong đó f là hàm số một biến khả vi. Chứng minh rằng

$y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau

$a) z = \dfrac{1}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

$b) z = x^2y^4 + x^3y^3 + x^4y^2$

$c) u = x^{\frac{y}{z}}$

$d) u = yz^2e^{xyz}$

9. Tìm vi phân toàn phần cấp hai của các hàm số sau

$a) z = \sin^2(2x + 3y)$

$b) z = \ln(x^2 + y)$

10. Sử dụng hệ thức $f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f_x^{'}\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f_y^{'}\left(x_0, y_0\right)\Delta y$ tính gần đúng

$a) 0,97^{1,05}$

$b) \ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$

11. Tính đạo hàm của hàm hợp

$a) z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$ .Tính $\dfrac{dz}{dt}$

$b) z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.Tính $\dfrac{dz}{dt}$

$c) z = arctg\dfrac{x}{y}$, $x = u + v$, $y = u - v$.Tính $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

$d) z = x^2 + 2y^2$, $x = t\cos s$, $y = t\sin s$.Tính $\dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$

12. Tìm $\dfrac{dy}{dx}$

$a) x^2 y - x^3 + 2y = 0$ $\qquad$ $b) tgy = xy$

13. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$a) x^2 - y^2 + z^2 = 0$ $\qquad$ $b) xy - yz + zx = 0$

14. Tìm $\dfrac{dy}{dx}$ và $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

$a) x^2 - xy + y^2 = 0$ $\qquad$ $b) y = \ln(x + y)$

15. Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số $z = z(x, y)$ với

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

16. Tìm cực trị của các hàm số sau

$a) f(x, y) = (x + y - 94)(4x + 3y) - 6xy$

$b) f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$c) f(x, y) = x\sin xy$

$d) f(x, y) = x + y - ye^x$

$e) f(x, y) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

$f) f(x, y) = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{y}{2} - 4$

17. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số sau

$a) f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + 2y = 2$

$b) f(x, y) = 3x^2 + 5xy$ với điều kiện $x + y = 16$

$c) f(x, y) = 2x + 9y + 1$ với điều kiện $x^2 + 3y^2 = 31$

$d)\ f(x,y,z)=x-2y+2z$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$

$e)\ f(x,y,z)=5x+4y+3z$ với điều kiện $x^2+2y^2+3z^2=36$

CHƯƠNG 4. TÍCH PHÂN BỘI

4.1. TÍCH PHÂN BỘI HAI

4.1.1. Miền phẳng

- Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}^2$. Điểm $M(x,y) \in A$ được gọi là điểm trong của A nếu tồn tại hình tròn $S(M,\varepsilon)$ tâm M, bán kính $\varepsilon > 0$ nằm hoàn toàn trong A ($S(M,\varepsilon) \subset A$). Tập hợp tất cả các điểm trong của A được gọi là phần trong của A và được ký hiệu là A^0.

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là tập mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của nó.

Ví dụ 4.1

a) Hình tròn $S(M_0,\varepsilon)$ là tập mở. Với mọi $M \in S(M_0,\varepsilon)$ đều có một hình tròn $S(M,\varepsilon')$ sao cho $S(M,\varepsilon') \subset S(M_0,\varepsilon)$.

b) Phần trong D^0 của tập hợp D bất kỳ là một tập mở.

- Điểm $M(x,y)$ được gọi là điểm biên của tập hợp $A \subset \mathbb{R}^2$. nếu bất kỳ một lân cận nào của điểm $M(x,y)$ cũng có ít nhất một điểm thuộc A và một điểm không thuộc A, tức là,

$M(x,y)$ là điểm biên của $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} S(M,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \\ S(M,\varepsilon) \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus A\right) \neq \varnothing \end{cases}$

- Tập hợp tất cả các điểm biên của A được ký hiệu là ∂A.
- Biên của tập hợp A có thể thuộc A hoặc không thuộc A.

Ví dụ 4.2

$$A = S(M_0,\varepsilon) = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : MM_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon \right\}$$
$$\partial A = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : MM_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \varepsilon \right\}$$

- Tập hợp $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là tập đóng nếu D chứa tất cả điểm biên của nó tức là $D = D \cup \partial D$

Ví dụ 4.3

a) Hình tròn $S'(M_0,\varepsilon) = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \le \varepsilon \right\}$ là tập đóng.

b) Hình vuông $H'(M_0,\varepsilon) = \left\{ M(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|x - x_0\right| \le \varepsilon, \left|y - y_0\right| \le \varepsilon \right\}$ là tập đóng.

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là bị chặn (giới nội) nếu tồn tại số dương C sao cho với mọi $M(x,y) \in D$, ta có $OM = \sqrt{x^2 + y^2} \le C$ trong đó $O(0,0)$ là gốc tọa độ.

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là tập liên thông nếu với hai điểm bất kỳ $A \in D, B \in D$ luôn tồn tại một đường cong nối A và B và đường cong này nằm hoàn toàn trong D.

Ví dụ 4.4

Hình tròn $S'(M_0, \varepsilon)$ là tập liên thông, nếu tập D gồm hai hình tròn không giao nhau thì D không là tập liên thông.

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là miền (hay miền phẳng) nếu D là tập mở và liên thông.

- Các khái niệm tập mở, tập đóng, miền, tập liên thông…trong không gian $\mathbb{R}^n (n > 2)$ được định nghĩa tương tự như trong không gian $\mathbb{R}^2$. Độc giả có thể tự phát biểu các định nghĩa này.

4.1.2. Định nghĩa tích phân bội 2

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là một miền giới nội. Gọi ∂D là biên của D và ký hiệu miền D đóng là $\overline{D} = D \cup \partial D$. Hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền $\overline{D}$. Ta chia $\overline{D}$ thành hữu hạn các miền con tùy ý $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ và gọi diện tích của các miền con này là $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. Ta ký hiệu T là phép chia (phép phân hoạch) nói trên. Trong mỗi $\overline{\sigma_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $\left(\overline{\sigma_i} = \sigma_i \cup \partial\sigma_i\right)$ ta lấy một điểm tùy ý và lập tổng $S_n(f, T, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$.

Tổng này phụ thuộc hàm số $f(x,y)$, phép phân hoạch T và phép chọn các điểm $P_i \in \overline{\sigma_i}$ và được gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x,y)$ ứng với phép phân hoạch T và phép chọn các điểm $P_i \in \overline{\sigma_i}$. Ta gọi đường kính của σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là đường kính của hình tròn bé nhất chứa σ_i và gọi $\lambda(T)$ là đường kính lớn nhất của các σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ và giới hạn này không phụ thuộc vào phép phân hoạch T và cách chọn các điểm $P_i \in \overline{\sigma_i}$ thì I được gọi là tích phân bội 2 (tích phân kép) của hàm số $f(x,y)$ lấy trên miền D và được ký hiệu là

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Hàm $f(x,y)$ mà đối với nó tồn tại tích phân bội 2 nói trên được gọi là hàm khả tích trên miền $\overline{D}$.

4.1.3. Tính chất của tích phân bội 2

1) Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng bị chặn $\overline{D}$ thì $f(x,y)$ khả tích trên $\overline{D}$

2) Nếu hàm số $f(x,y)$ khả tích trên miền đóng bị chặn $\overline{D}$ thì $f(x,y)$ bị chặn trên $\overline{D}$

3) Nếu $f(x,y) = 1$ với mọi $x, y \in D$ và diện tích của miền D bằng S thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D dxdy = S$$

4) Nếu $f(x,y), g(x,y)$ là hai hàm số khả tích trên miền D và C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý thì hàm số $C_1 f(x,y) + C_2 g(x,y)$ cũng khả tích trên miền D và

$$\iint_D [C_1 f(x,y) + C_2 g(x,y)]dxdy = C_1 \iint_D f(x,y)dxdy + C_2 \iint_D g(x,y)dxdy$$

5) Nếu $D = D_1 \cup D_2$ với D_1 và D_2 rời nhau thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

6) Nếu $f(x,y), g(x,y)$ khả tích trên miền D và $f(x,y) \le g(x,y), \forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$$

Đặc biệt, nếu $f(x,y) \ge 0, \forall (x,y) \in D$ thì $\iint_D f(x,y)dxdy \ge 0.$

7) Nếu $f(x,y)$ khả tích trên miền D và $m \le f(x,y) \le M, \forall (x,y) \in D$ thì

$mS \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MS$ (trong đó S là diện tích miền D)

4.1.4. Phương pháp tính tích phân bội 2

4.1.4.1. Phương pháp tính tích phân bội 2 trong tọa độ Descartes

a) Trường hợp miền là hình chữ nhật $D = [a,b] \times [c,d]$

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên $D = [a,b] \times [c,d]$ thì ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

Nếu $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ thì $\iint_D f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)dy\right)$

b) Trường hợp miền là hình chữ nhật cong (hình cong)

Định lý 4.1

Giả sử D là hình chữ nhật cong, có hai cạnh thẳng song song Oy giới hạn bởi

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\}$$

Trong đó $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ là những hàm số liên tục trên $[a,b]$

Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên D thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Định lý 4.2

Giả sử D là hình chữ nhật cong, có hai cạnh thẳng song song Ox giới hạn bởi

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\ ,\ c \le y \le d\right\}$$

Trong đó $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ là những hàm số liên tục trong $[c,d]$

Nếu $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên D thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

Ví dụ 4.5

a) Tính tích phân $\iint_D x^2ydxdy$ với D là tam giác có các đỉnh là $O(0,0); A(1,0); B(1,1)$

Đường thẳng OB có phương trình là $y = x$ nên D có thể viết dưới dạng

$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le x\right\}$. Từ đó

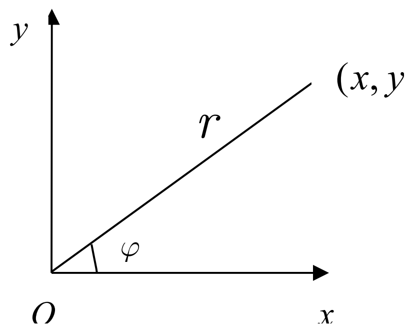
$$I = \iint_D x^2ydxdy = \int_0^1 dx\int_0^x x^2ydy = \int_0^1\left(x^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4dx = \left.\frac{x^5}{10}\right|_0^1 = \frac{1}{10}$$

b) Tính tích phân $\iint\limits_D xydxdy$ với D là miền xác định bởi các đường $x=\sqrt{y}$, trục hoành và đường thẳng $x+y=2$.

Ta có thể D dưới dạng $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{y}\le x\le 2-y \ , \ 0\le y\le 1\right\}$. Do đó

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} xydx=\frac{1}{2}\int_0^1 y\left[(2-y)^2-y\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^1(4y-5y^2+y^3)dy=\frac{7}{24}$$

4.1.4.2. Phương pháp tính tích phân bội 2 trong tọa độ cực



Nếu đặt r và φ như trong hình vẽ thì ta có

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} (*)$$

Điểm (x,y) hoàn toàn được xác định bởi độ dài r và góc φ. Cặp (r,φ) là tọa độ cực của điểm (x,y).

Nếu $r>0, 0\le\varphi\le 2\pi$ thì (*) xác định một phép đổi biến số giữa tọa độ vuông góc (x,y) và tọa độ cực (r,φ).

Nếu $(x,y)\in D \Leftrightarrow (r,\varphi)\in\Delta$ $\left(\Delta=\left\{(r,\varphi): 0\le\varphi\le 2\pi \ , \ r>0\right\}\right)$ thì ta có công thức

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

Ví dụ 4.6

Tính tích phân $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ trong đó D là nửa trên hình tròn $(x-1)^2+y^2\le 1$.

Đặt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$ với $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ và $0\le r\le 2\cos\varphi$

$$\Delta=\left\{(r,\varphi): 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \ , \ 0\le r\le 2\cos\varphi\right\}$$

Khi đó

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \iint\limits_\Delta \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\kappa} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \left(-\sqrt{4-r^2}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin\varphi)d\varphi = 2\left(\varphi + \cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

4.2. TÍCH PHÂN BỘI BA

4.2.1. Định nghĩa

Giả sử $V \subset \mathbb{R}^3$ là tập mở, bị chặn có biên là $\partial V, f(x,y,z)$ là hàm số xác định trên $\overline{V} = V \cup \partial V$. Ta thực hiện phép phân hoạch T tùy ý chia $\overline{V}$ thành hữu hạn miền con $v_1, v_2, \ldots, v_n$ có thể tích $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$. Trong mỗi $\overline{v}_i$, ta lấy điểm $P_i(x_i, y_i, z_i)$ tùy ý $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và lập tổng $S_n(f, T, P_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$. Ta gọi đường kính của v_i là đường kính của hình cầu bé nhất chứa v_i và gọi $\lambda(T)$ là đường kính lớn nhất của các v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$ và giới hạn này phụ thuộc vào phép phân hoạch T và cách chọn các điểm $P_i \in \overline{v}_i$ thì I được gọi là tích phân bội 3 của hàm số $f(x,y,z)$ lấy trên miền V và được ký hiệu là

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

Hàm số $f(x,y,z)$ mà đối với nó tồn tại tích phân bội 3 nói trên được gọi là hàm khả tích trên miền V.

4.2.2. Tính chất của tích phân bội 3

1) Nếu hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn $\overline{V}$ thì $f(x,y,z)$ khả tích trên $\overline{V}$

2) Nếu $f(x,y,z)$ khả tích trên $\overline{V}$ thì $f(x,y,z)$ bị chặn trên $\overline{V}$

3) Nếu $f(x,y,z) = 1$ với mọi $(x,y,z) \in V$ và thể tích của miền V là ΔV thì

$$\iiint\limits_V dxdydz = \Delta V$$

4) Nếu $f(x,y,z), g(x,y,z)$ là hai hàm số khả tích trên miền V và C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý thì hàm số $C_1 f(x,y,z) + C_2 g(x,y,z)$ cũng khả tích trên miền V và

$$\iiint_V [C_1 f(x,y,z) + C_2 g(x,y,z)] dxdydz = C_1 \iiint_V f(x,y,z) dxdydz + C_2 \iiint_V g(x,y,z) dxdydz$$

5) Nếu $V = V_1 \cup V_2$ với V_1, V_2 rời nhau thì

$$\iiint_V f(x,y,z) dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z) dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z) dxdydz$$

6) Nếu $f(x,y,z) \le g(x,y,z), \forall (x,y,z) \in V$ thì

$$\iiint_V f(x,y,z) dxdydz \le \iiint_V g(x,y,z) dxdydz$$

Đặc biệt, nếu $f(x,y,z) \ge 0, \forall (x,y,z) \in V$ thì $\iiint_V f(x,y,z) dxdydz \ge 0$

7) Nếu $m \le f(x,y,z) \le M, \forall (x,y,z) \in V$ thì $m\Delta V \le \iiint_V f(x,y,z) dxdydz \le M\Delta V$

(ΔV là thể tích của miền V).

4.2.3. Phương pháp tính tích phân bội 3

4.2.3.1. Trường hợp miền V là hình hộp chữ nhật $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

Giả sử hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên hình hộp chữ nhật $\overline{V} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Khi đó,

$$\iiint_V f(x,y,z) dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz$$

và thứ tự tích phân theo các biến x, y, z có thể hoán vị cho nhau.

4.2.3.2. Trường hợp miền V là hình trụ đáy cong

Giả sử V hình trụ đáy cong có mặt bên tạo bởi các đường sinh song song với trục Oz. Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là miền phẳng D_{xy}. Đáy dưới của hình trụ là mặt cong S_1 có phương trình $z = z_1(x,y)$. Đáy trên của hình trụ là mặt cong S_2 có phương trình $z_2(x,y)$.

Định lý 4.3

Giả sử V là hình trụ cong trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$\overline{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in \overline{D}_{xy},\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\right\}$ trong đó D_{xy} là miền phẳng, hình chiếu V xuống mặt phẳng $Oxy; z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$ là các hàm liên tục trong $\overline{D}_{xy}$ biểu thị lần lượt phương trình mặt cong S_1 giới hạn bên dưới và giới hạn bên trên hình trụ.

+ Nếu hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trên miền V thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

+ Nếu miền D_{xy} xác định bởi $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$ thì từ công thức trên ta có

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Ví dụ 4.7

a) Tính tích phân $I = \iiint\limits_V xdxdydz$ với

$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le z \le 4\right\}$

Hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy là một phần tư hình tròn

$D: x^2 + y^2 \le 4; x \ge 0, y \ge 0$ hay $D: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$

Miền V xác định bởi $(x,y) \in D: x^2 + y^2 \le z \le 4$

Do đó

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{4} xdz = \iint\limits_D x(4 - x^2 - y^2)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} x(4 - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= \frac{-1}{3}\int\limits_0^2 (4 - x^2)^{3/2} d(4 - x^2) = \frac{-2}{15}\left(4 - x^2\right)^{5/2}\Big|_0^2 = \frac{64}{15}$$

b) Tính tích phân $I = \iiint\limits_V (1 - x - y)dxdydz$, V giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + y + z = 1$.

Ta có V xác định bởi $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y$. Do đó

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(1-x-y)dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2 dy=\int_0^1\left[\left.\frac{-(1-x-y)^3}{3}\right|_0^{1-x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3 dx=\left.\frac{-1}{12}(1-x)^4\right|_0^1=\frac{1}{12}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Tính các tích phân bội 2 sau đây

$a)\iint\limits_D xy(x+y)dxdy \ \ , D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

$b)\iint\limits_D x\cos y dxdy \ \ , D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$c)\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D giới hạn bởi $y = \sqrt{2ax - x^2}$; $y = 0$

$d)\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D giới hạn bởi $y = x^2$ và $x = y^2$

$e)\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, D giới hạn bởi $y = 0$, $y = x$, $x + y = \dfrac{\pi}{2}$

2. Tính các tích phân bội 2 sau đây

$a)\iint\limits_D \left(x^2 + 4y^2 + 9\right)dxdy$, D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 4$

$b)\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$

$c)\iint\limits_D x^2y^2 dxdy$, D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$

$d)\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, $D:\ x^2 + y^2 \le Rx$

$e)\iint\limits_D arctg\dfrac{y}{x}dxdy$, $D:\ x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 5$, $y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x\sqrt{3}$, $x \ge 0$

3. Tính các tích phân bội 3 sau đây

$a)\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, V là hình hộp $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$, $x \le 3$, $y \le 3$

$b)\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(x+y+z+1\right)^3}$, V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng

$$x = 0 \ ,\ y = 0 \ ,\ z = 0 \ ,\ x + y + z = 1$$

$c)\iiint\limits_V xydxdydz$, V là miền giới hạn bởi các mặt

$$z = xy \ , \ x + y = 1 \ , \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ z = 0$$

$d)\iiint\limits_V (2x + 3y - z)dxdydz$, V là lăng trụ tam giác giới hạn bởi các mặt

$$z = 0 \ , \ z = a \ , \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ x + y = b \ (a > 0, b > 0)$$

$e)\iiint\limits_V x^2dxdydz$, V là hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le a$

CHƯƠNG 5. LÝ THUYẾT CHUỖI

5.1. CHUỖI SỐ

5.1.1. Định nghĩa

Cho dãy số thực vô hạn $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$. Biểu thức

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad (5.1)$$

được gọi là một chuỗi số. Các số $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ được gọi là các số hạng của chuỗi số. Số u_n là số hạng thứ *n* và được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi (5.1).

Tổng của *n* số hạng đầu tiên của chuỗi được gọi là tổng riêng thứ *n*. Ta có

$$S_1 = u_1 \qquad S_2 = u_1 + u_2 \qquad S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ hữu hạn thì chuỗi số được gọi là hội tụ tới giá trị *S* và *S* được gọi là tổng của chuỗi số (5.1). Ta viết

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Đặt $R_n = S - S_n = S - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, R_n gọi là phần dư thứ *n* của chuỗi số.

Trong trường hợp ngược lại, nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ hoặc không tồn tại, ta nói chuỗi số phân kì.

Ví dụ 5.1. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad\qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n+1}{n}$$

Giải

a) Ta có: $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Do đó $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ là số hữu hạn. Vậy chuỗi số hội tụ và có tổng là 1.

b) Ta có: $S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + ... + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n}$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + ... + \left(\ln n - \ln(n-1)\right) + \left(\ln(n+1) - \ln n\right)$$
$$= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

Do đó $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Vậy chuỗi số phân kì.

Ví dụ 5.2. Xét chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...$

Đây là tổng của cấp số nhân vô hạn với công bội q. Với $q \neq 1$ ta có:

$$S_n = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Ta có

- Nếu $|q| < 1$ thì chuỗi số hội tụ và có tổng $S = \frac{1}{1-q}$
- Nếu $|q| > 1$ thì chuỗi số phân kì.
- Nếu $q = 1$, ta có $S_n = n \to +\infty$. Do đó chuỗi phân kì.
- Nếu $q = -1$, ta có $S_n = 0$ nếu n chẵn và $S_n = 1$ khi *n* lẻ. Khi $n \to +\infty$ thì S_n không tiến tới một giới hạn nào cho nên chuỗi phân kì.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ hội tụ khi $|q| < 1$; phân kì khi $|q| \geq 1$.

Định lý 5.1

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chú ý. Đây chỉ là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ.

Ví dụ 5.3. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ có $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Tuy nhiên

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty$$

Vậy chuỗi trên phân kì.

5.1.2 Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy

Định lý 5.2

Điều kiện cần và đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số n_0 nguyên dương (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $n \ge n_0$ và với mọi $p \in N^*$ ta có

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

Hệ quả

Điều kiện cần và đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $n_0 \in N^*$, tồn tại $n > n_0$ và $p \in N^*$ để

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p} \right| > \varepsilon$$

Ví dụ 5.4

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{2^n}$ là chuỗi hội tụ. Vì với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $n_0 = 1 + \left[\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right]$

sao cho với mọi $n \ge n_0$ và với mọi $p \in N^*$, ta có

$$\left| \frac{\sin x}{2^{n+1}} + \frac{\sin x}{2^{n+2}} + ... + \frac{\sin x}{2^{n+p}} \right| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

b) Chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kì. Vì với $\varepsilon = \frac{1}{3}$ thì với mọi $n_0 \in N^*$, tồn tại $n > n_0$ và $p = n$ để:

$$\left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1} \right| > \frac{1}{3}$$

5.1.3 Tính chất của chuỗi số

i) Chuỗi số không thay đổi tính chất (hội tụ hay phân kì) nếu ta thêm vào hay bớt đi một số hữu hạn các số hạng của chuỗi số.

ii) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Nếu $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi số phân kì.

iii) Cho các chuỗi số hội tụ $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S; \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = S'$. Ta có

$$i)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x_n + y_n\right) = S + S' \qquad ii)\sum_{n=1}^{+\infty} k.x_n = kS$$

với *k* là một hằng số.

Ví dụ 5.5. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n+3} \qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n$$

Giải

a) Do $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+3} = 2$ nên chuỗi đã cho phân kì.

b) Do $\lim_{n\to+\infty}\ln n = +\infty$ nên chuỗi đã cho phân kì.

5.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

5.2.1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $u_n > 0$ với mọi $n = 1,2,3\dots$

Ta có: $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} > S_n \left(do\ u_{n+1} > 0\right)$nên $\{S_n\}_n$ là một dãy tăng.

Nếu dãy $\{S_n\}_n$ bị chặn trên thì chuỗi hội tụ.

Nếu dãy $\{S_n\}_n$ không bị chặn trên thì chuỗi phân kì.

Chú ý. Nếu tất cả các số hạng của chuỗi đều là số không âm thì chuỗi gọi là chuỗi không âm. Khi xét tính hội tụ, phân kỳ hay tính tổng của chuỗi không âm ta có thể loại bỏ các số hạng bằng 0 nên chuỗi số không âm cũng thường được gọi là chuỗi số dương.

Ví dụ 5.6. Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+3^n} = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3^2} + \dots + \frac{1}{1+3^n} + \dots$$

Giải.

Ta có

$$S_n = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3^2} + ... + \frac{1}{1+3^n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+3^n} \le \frac{1}{2}$.

5.2.2 Các định lý so sánh

Định lý 5.3 (Qui tắc so sánh)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Giả sử $x_n \ge y_n, \forall n \ge n_0$. Khi đó

i) Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ cũng hội tụ.

ii) Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ cũng phân kì.

Nhận xét. Hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n + y_n\right)$ hội tụ.

Ví dụ 5.7. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 4n}$ $\qquad$ $b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Giải.

a) Ta có $\frac{1}{3^n + 4n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n \ge 1$ mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ. Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 4n}$ hội tụ.

b) Ta có: $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ge \frac{1}{n}, \forall n \ge 1$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ phân kì.

Định lí 5.4 (Tiêu chuẩn tương đương)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = k$. Khi đó

- Nếu $0 < k < +\infty$ thì hai chuỗi số đó cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.
- Nếu $k = 0$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ hội tụ.
- Nếu $k = +\infty$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ phân kì thì $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ cũng phân kì.

Chú ý. Khi sử dụng các định lí so sánh, ta thường so sánh các chuỗi số chưa biết tính chất với các chuỗi số đã biết tính chất. Chẳng hạn, chuỗi số sau đây

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{hội tụ khi } \alpha > 1\text{, phân kì khi } \alpha \le 1.$$

Chứng minh của kết quả này ta có thể xem ở Ví dụ 5.11.

Ví dụ 5.8. Xét sự hội tụ của chuỗi số

$a)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ $\qquad$ $b)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n-1}{n^2+n+2}$ $\qquad$ $c)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)$

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kì nên theo tiêu chuẩn tương

đương chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ cũng phân kì.

b) Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3n-1}{n^2+n+2}}{\dfrac{1}{n}} = 3$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kì nên theo tiêu chuẩn

tương

đương chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3n-1}{n^2+n+2}$ cũng phân kì.

c) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)}{\dfrac{\pi}{3^n}}=1$. Mà $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\pi}{3^n}$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)$ cũng hội tụ.

Chú ý. Khi dùng tiêu chuẩn tương đương để xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sẽ rất thuận lợi nếu ta nắm vững các qui tắc xét vô cùng bé, vô cùng lớn tương đương khi $n\to+\infty$.

5.2.3. Các tiêu chuẩn sự hội tụ của chuỗi số

Định lý 5.5 (Tiêu chuẩn D'Alembert)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=r$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ hội tụ khi $r<1$; phân kì khi $r>1$. Tính hội tụ hay phân kì của chuỗi chưa kết luận ngay được trong trường hợp $r=1$.

Ví dụ 5.9. Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n-1}{2^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{3^n}$

Giải.

a) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{n}{2^{n+1}}}{\dfrac{n-1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2(n-1)}=\dfrac{1}{2}<1$. Vậy chuỗi hội tụ.

b) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\dfrac{n!}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{3}=+\infty$. Vậy chuỗi phân kì

Định lý 5.6 (Tiêu chuẩn Cauchy)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=r$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ hội tụ khi $r<1$; phân kì khi $r>1$. Tính hội tụ hay phân kì của chuỗi chưa kết luận ngay được trong trường hợp $r=1$.

Ví dụ 5.10. Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n-1}{3n+4}\right)^n$

Giải

a) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}<1$. Vậy chuỗi hội tụ.

b) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n-1}{3n+4}\right)=+\infty$. Vậy chuỗi phân kì.

Định lý 5.7 (Tiêu chuẩn tích phân)

Cho hàm $f(x)$ liên tục, dương và đơn điệu giảm trên $[1,+\infty)$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ trong đó $x_n=f(n)$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ 5.11. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\ln^q n}\ (q>0)$

Giải.

a) Đặt $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ là hàm số dương, liên tục và giảm trên $[1,+\infty)$ và $x_n=f(n)$.

Do đó, theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx$ sẽ có cùng tính chất hội tụ hay phân kì.

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_1^{t}\dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\ln(t+1)-\ln 2\right]=+\infty$

Vậy tích phân phân kì nên chuỗi đã cho phân kì.

b) Nếu $\alpha \le 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ne 0$ nên chuỗi đã cho phân kì.

Nếu $\alpha = 1$ thì ta có chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

Nếu $0 < \alpha \ne 1$ ta xét hàm $f\left(x\right) = \frac{1}{x^\alpha}$ là hàm đơn điệu giảm trên $[1;+\infty)$

Ta lại có:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f\left(x\right)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha}-1\right)\right] = \begin{cases} +\infty & ,0<\alpha<1 \\ \dfrac{-1}{1-\alpha} & ,\alpha<1 \end{cases}$$

Vậy chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kì khi $\alpha \le 1$.

c) Hội tụ khi $q > 1$; phân kì khi $q \le 1$.

Định lý 5.8 (Tiêu chuẩn Raabe)

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$. Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r$. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ hội tụ khi $r > 1$; phân kì khi $r < 1$. Tính hội tụ hay phân kì của chuỗi chưa kết luận ngay được trong trường hợp $r = 1$.

Ví dụ 5.12. Xét sự hội tụ của chuỗi: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{\left(1+\alpha\right)\left(2+\alpha\right)...\left(n+\alpha\right)}$ $\left(\alpha > 0\right)$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{n+1+\alpha}{n+1} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\alpha}{n+1} = \alpha$

Vậy nếu $\alpha \in \left(0;1\right)$ thì chuỗi phân kì. Nếu $\alpha > 1$ thì chuỗi hội tụ.

5.3. CHUỖI SỐ CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ

5.3.1 Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ

Xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ với các số hạng x_n có dấu bất kỳ.

Định lý 5.9

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|x_n\right|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ cũng hội tụ.

Chú ý. Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|x_n\right|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ hội tụ chứ không phải là điều kiện cần. Điều này có nghĩa là có trường hợp $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|x_n\right|$ phân kỳ nhưng $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ lại hội tụ.

Định nghĩa.

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|x_n\right|$ hội tụ.
- Chuỗi gọi là bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|x_n\right|$ phân kì nhưng $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ hội tụ.

5.3.2. Chuỗi số đan dấu

Định nghĩa. Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ... \text{ với } x_i > 0, \forall i = 1,2,3,... \qquad (5.2)$$

hay $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n}x_n = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - ...$ với $x_i > 0, \forall i = 1,2,3,...$

Xét sự hội tụ của các chuỗi đan dấu ta chỉ cần xét trong trường hợp chuỗi có dạng sau

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + ... = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}x_n$$

Trường hợp còn lại ta chỉ cần đổi dấu với lưu ý sự hội tụ hay phân kì của chuỗi dạng này không thay đổi.

Định lý 5.10 (Tiêu chuẩn Leibnizt)

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}x_n$. Nếu dãy số dương $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ giảm và dần về 0 khi $n \to +\infty$ thì chuỗi số hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}x_n = S < x_1$$

Ví dụ 5.13. Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Ta có: $x_n = \frac{1}{n}$ là dãy dương, giảm về 0 nên theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi này hội tụ.

Mặt khác, chuỗi tuyệt đối $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kì. Vậy chuỗi đã cho bán hội tụ.

Ví dụ 5.14. Xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu sau

$a)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}\ \ (\alpha > 0)$ $\qquad$ $b)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2-\left(-1\right)^n}{3n+2}$

Giải.

a) Ta có: $x_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(\alpha > 0\right)$ là dãy dương, giảm về 0 nên chuỗi hội tụ.

b) Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-\left(-1\right)^n}{3n+2} = 0$. Tuy nhiên dãy $\left\{x_n\right\}_n$ không đơn điệu giảm nên ta không áp dụng được tiêu chuẩn Leibnitz. Ta viết lại chuỗi như sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2-\left(-1\right)^n}{3n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{3n+2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n+2}$$

Dễ thấy, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{3n+2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n+2}$ phân kì theo tiêu chuẩn tương đương.

Vậy chuỗi đã cho là chuỗi phân kì.

Định lý 5.11 (Dấu hiệu Dirichlet)

Giả sử rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n.y_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

i) Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ có tổng riêng bị chặn.

ii) Dãy y_n đơn điệu và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.y_n$ hội tụ.

Định lý 5.12 (Dấu hiệu Abel)

Giả sử rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.y_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

iii) Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ hội tụ.

iv) Dãy y_n đơn điệu và bị chặn

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.y_n$ hội tụ.

5.4. CHUỖI HÀM SỐ

5.4.1. Định nghĩa

Tổng vô hạn

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \qquad (5.3)$$

trong đó $u_n(x)$ là các hàm số xác định trên $E \subset \mathbb{R}$, được gọi là chuỗi hàm số. Hàm $u_n(x)$ gọi là số hạng thứ *n* của chuỗi hàm.

Điểm $x_0 \in E$ mà tại đó chuỗi số tương ứng $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ hội tụ gọi là điểm hội tụ, ta nói chuỗi hàm hội tụ tại x_0. Tập hợp tất cả các điểm hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm. Kí hiệu là *X*.

Với $x \in X$ (là miền hội tụ của chuỗi hàm). Ta đặt

$$S_n\left(x\right) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

$$S\left(x\right) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

$$R_n\left(x\right) = u_{n+1}(x) + u_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

Ta có: $S_n\left(x\right), S\left(x\right), R_n\left(x\right)$ là các hàm số xác định trên *X*. $S_n\left(x\right)$ gọi là tổng riêng thứ *n* của chuỗi hàm; $S\left(x\right)$ gọi là tổng của chuỗi hàm và $R_n\left(x\right)$ gọi là phần dư thứ *n* của chuỗi hàm. Dễ thấy: $S\left(x\right) = S_n\left(x\right) + R_n\left(x\right)$. Với mọi giá trị $x \in X$, ta có $\lim_{n\to+\infty} S_n\left(x\right) = S\left(x\right)$ và $\lim_{n\to+\infty} R_n\left(x\right) = 0$.

Ví dụ 5.15. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

Ở phần trước ta đã biết chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$. Vậy chuỗi hàm số hội tụ khi và chỉ khi: $\ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $X = \left(e; +\infty\right)$.

Ví dụ 5.16. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n ne^{nx}$.

Số hạng tổng quát của chuỗi hàm: $a_n = \left(-1\right)^n ne^{nx}$.

Xét $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n+1\right)e^{\left(n+1\right)x}}{ne^{nx}} = e^x$.

Theo tiêu chuẩn D' Alembert ta có

- $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^x > 1$ thì chuỗi phân kì.
- $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^x < 1$ thì chuỗi hội tụ. Vậy chuỗi hội tụ khi $x \in \left(-\infty; 0\right)$.

Tại $x = 0$ ta có chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n ne^{n0} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-1\right)^n n$. Đây là chuỗi phân kì vì số hạng tổng quát không tiến về 0.

Vậy, miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là: $X = \left(-\infty; 0\right)$.

5.4.2. Hội tụ đều

Với $x_0 \in X$, ta đều có: $\lim_{n\to+\infty} S_n\left(x_0\right) = S\left(x_0\right)$

Và theo tính chất của giới hạn dãy số thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số nguyên $n_0 > 0$ phụ thuộc vào x_0 và ε sao cho

$$\left|S_n\left(x_0\right) - S\left(x_0\right)\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại số nguyên dương n_0 chỉ phụ thuộc vào ε sao cho

$$\left|S_n\left(x\right) - S\left(x\right)\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall x \in X$$

Khi đó ta nói chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều tới hàm $S(x)$ trên tập *X*.

Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm số

Định lý 5.13 (Tiêu chuẩn Cauchy)

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập X khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $m > n \geq n_0$. Ta có

$$\left|S_m\left(x\right) - S_n\left(x\right)\right| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Định lý 5.14 (Tiêu chuẩn Weierstrass)

Nếu với mọi $x \in X$ ta có $u_n(x) \leq a_n$ kể từ một n_0 nào đó trở đi và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối trên *X*.

5.4.3. Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lí 5.15

Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Nếu các số hạng $u_n(x)$ liên tục trên tập *D* và chuỗi hàm số hội tụ đều về hàm *S(x)* trên *D* thì *S(x)* liên tục trên *D*.

Định lí 5.16

Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Nếu các số hạng $u_n(x)$ liên tục trên [*a,b*] và chuỗi hàm số hội tụ đều về hàm *S(x)* trên [a;b] thì

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

Định lí 5.17

Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến hàm số *S(x)* trên (a,b). Nếu các số hạng $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a,b) và chuỗi đạo hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ hội tụ đều trên (a,b) thì

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$$

5.5. CHUỖI HÀM LŨY THỪA

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... \quad (*)$$

hay dạng
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \quad (5.4)$$

trong đó $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ là các hằng số và gọi là các hệ số của chuỗi lũy thừa, hệ số a_n gọi là hệ số tổng quát của chuỗi. Ta gọi $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ là số hạng tổng quát của chuỗi lũy thừa. Số x_0 là hằng số cho trước, còn x là biến số thực.

Ví dụ 5.17

Các chuỗi sau là chuỗi lũy thừa

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2n-1} = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x-1)^3}{5} + ... + \frac{(x-1)^n}{2n-1} + ...$

Nhận xét. Nếu đặt $X = x - x_0$ thì có thể đưa chuỗi (*) về chuỗi (5.4). Do đó ta chỉ cần xét chuỗi dạng (5.4), các kết quả thu được vẫn đúng cho dạng (*).

+ Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ luôn hội tụ tại $x_0 = 0$.

+ Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ luôn hội tụ tại x_0.

Định lý 5.18 (Định lý Abel)

Nếu chuỗi lũy thừa (5.4) hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó sẽ hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm *x* thỏa mãn $\left|x\right| < \left|x_0\right|$.

Hệ quả.

Nếu chuỗi (5.4) phân kỳ tại $x = x_0$ thì nó sẽ phân kỳ tại mọi *x* thỏa $\left|x\right| > \left|x_0\right|$.

Gọi *X* là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa. Theo định lý Abel, nếu $x_0 \in X$ thì $\left(-\left|x_0\right|, \left|x_0\right|\right) \subset X$. Đặt $R = \sup\left\{\left|x_0\right| : x_0 \in X\right\}$. Số *R* như vậy được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi (5.4).

5.5.2. Qui tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lý 5.19

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$ thì bán kính hội tụ của chuỗi (5.4) được xác định như sau

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & ,0 < k < +\infty \\ 0 & ,k = +\infty \\ +\infty & ,k = 0 \end{cases}$$

Định lý 5.20

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left|a_n\right|} = k$ thì bán kính hội tụ của chuỗi (5.4) được xác định như sau

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & ,0 < k < +\infty \\ 0 & ,k = +\infty \\ +\infty & ,k = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 5.18. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{2n^2 - 1}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$

Giải

a) Hệ số tổng quát: $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi là $R = +\infty$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ với mọi *x*, có nghĩa là $X = \mathbb{R}$.

b) Hệ số tổng quát: $a_n = \left(-1\right)^n \dfrac{1}{2n^2-1}$. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-1}{2\left(n+1\right)^2-1} = 1$

Vậy $R = 1$ nên chuỗi hội tụ trong khoảng $\left(-1;1\right)$.

Ta xét sự hội tụ của chuỗi tại $x_0 = 1$ và $x_0 = -1$.

Tại $x_0 = -1$ ta có chuỗi số: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\left(-1\right)^n}{2n^2-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n^2-1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Tại $x_0 = 1$ ta có chuỗi số: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\left(1\right)^n}{2n^2-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{2n^2-1}$. Đây là chuỗi đan dấu và chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{x^n}{2n^2-1}$ là $X = \left[-1;1\right]$

Cách khác. Cho chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ta xét chuỗi dương tương ứng $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$

Ta dùng tiêu chuẩn D' Alembert hay Cauchy để tìm điều kiện của *x* chuỗi hội tụ tuyệt đối. Sau đó, ta xét sự hội tụ tại các đầu mút.

Lưu ý.

- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$ hội tụ trong $\left(-R;R\right)$ thì chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối trong $\left(-R;R\right)$.
- Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ bằng bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|a_n x_n\right|$.

Ví dụ 5.19. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2^n}}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{2^n}(2x-1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-5)^{2n-1}}{n^2 4^n}$

Giải

a) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{x^n}{\sqrt{2^n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{2^n}}$. Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{2^n}}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$

Như vậy chuỗi này hội tụ khi $\frac{|x|}{\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$. Chuỗi này sẽ phân kì khi $|x| > \sqrt{2}$. Tại $x = \sqrt{2}$, chuỗi thành: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$ phân kì. Tại $x = -\sqrt{2}$, chuỗi thành: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

b) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{(2n+1)}{3^n}(2x-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)}{3^n}|(2x-1)|^n$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n+3)}{3^{n+1}}|(2x-1)|^{n+1}}{\frac{(2n+1)}{3^n}|(2x-1)|^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)3^n|2x-1|}{(2n+1)3^{n+1}} = \frac{|2x-1|}{3}$

Vậy chuỗi hội tụ nếu $\frac{|2x-1|}{3} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

Tại $x = -1$ chuỗi thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)$ phân kì.

Tại $x = 2$ chuỗi thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{3^n}(3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)(-1)^n$ phân kì.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $-1 < x < 2$

c) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left|\left(3x-5\right)\right|^{2n-1}}{n^2 4^n}$

Ta có: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\left|\left(3x-5\right)\right|^{2n+1}}{\left(n+1\right)^2 4^{n+1}}}{\frac{\left|\left(3x-5\right)\right|^{2n-1}}{n^2 4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left|\left(3x-5\right)\right|^2 \frac{n^2.4^n}{\left(n+1\right)^2 4^{n+1}} = \frac{\left(3x-5\right)^2}{4}$

Chuỗi hội tụ nếu $\frac{\left(3x-5\right)^2}{4} < 1 \Leftrightarrow -2 < 3x-5 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{7}{3}$

Tại $x=-1$ chuỗi thành: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-8\right)^{2n-1}}{n^2 4^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{8n^2}$ phân kì.

Tại $x=\frac{7}{3}$ chuỗi thành: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2 4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho: $-1 < x \le \frac{7}{3}$

5.5.3. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ có miền hội tụ $\left(-R;R\right)$.

Tính chất 1. Tổng của chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ là một hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

Tính chất 2. Với $\left[a;b\right] \subset \left(-R;R\right)$ ta có

$$\int_a^b S\left(x\right)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

Đặc biệt $\int_0^x S\left(t\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Chuỗi mới này vẫn là chuỗi lũy thừa và có miền hội tụ là $\left(-R;R\right)$.

Tính chất 3. Với mọi $x \in \left(-R;R\right)$, ta có

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$$

Chuỗi mới ở vế phải vẫn là chuỗi lũy thừa và có miền hội tụ là $(-R; R)$.

Hệ quả

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ có bán kính hội tụ là $R > 0$ và $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$. Khi đó $S(x)$ là hàm khả vi vô hạn trong $(-R; R)$.

5.5.4. Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

Định lý 5.21

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ và

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R)$. Khi đó

i) $f(x)$ là hàm khả vi vô hạn trong $(x_0 - R; x_0 + R)$.

ii) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \forall n \in N^*$ và $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Định nghĩa

Giả sử $f(x)$ là hàm khả vi vô hạn trong lân cận nào đó của x_0. Khi đó chuỗi

$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ tại x_0.

- Nếu $x_0 = 0$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm $f(x)$.
- Nếu chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ hội tụ về chính nó trên tập X nào đó thì ta nói hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor trên X.

Định lý 5.22

Nếu trong lân cận $\left(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon\right)$ hàm $f\left(x\right)$ có đạo hàm mọi cấp và tồn tại $M>0$ sao cho

$$\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\le M,\forall n\in N^*,\forall x\in\left(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon\right)$$

thì hàm $f\left(x\right)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại x_0.

Chú ý. Chuỗi Taylor của hàm $f\left(x\right)$ là $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ chưa chắc đã hội tụ về $f\left(x\right)$.

Một số khai triển lũy thừa của các hàm sơ cấp

i) $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ ,\left(-\infty<x<+\infty\right)$

ii) $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\ ,\left(-\infty<x<+\infty\right)$

iii) $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}\quad ,\left(-\infty<x<+\infty\right)$

iv) $\ln\left(x+1\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad ,\left(-\infty<x<+\infty\right)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Tìm tổng của của các chuỗi sau đây nếu có

$$a)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n} \qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n} \qquad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$$

$$d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \qquad e)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad f)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$$

2. Chứng minh các chuỗi số sau phân kì

$$a)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n-3}{3n+2} \qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\cos 3n \qquad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{1}{n}$$

$$d)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad e)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{\ln^2 n} \qquad f)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$h)\sum_{n=1}^{+\infty}n\arctan\frac{1}{n} \qquad i)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^5} \qquad j)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-3n\right)$$

3. Dùng tiêu chuẩn so sánh xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau

$$a)\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad b)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$$

$$c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}} \qquad d)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n^2+3)^{5/3}}$$

4. Dùng tiêu chuẩn D'Alembert xét sự hội tụ của những chuỗi số dương sau

$$a)\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!} \qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}} \qquad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{4.8.12...4n}$$

5. Dùng tiêu chuẩn Côsi xét sự hội tụ của những chuỗi số sau

$$a)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)} \qquad b)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n \qquad c)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

6. Xét sự hội tụ tuyệt đối của các chuỗi có dấu bất kì sau

$$a)1+\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\cos 2\alpha}{2^2}+\frac{\cos 3\alpha}{2^3}+...+\frac{\cos n\alpha}{2^n}+...$$

$$b)\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+...+\sin\frac{n\pi}{3}+...$$

7. Xét sự hội tụ tuyệt đối của các chuỗi đan dấu sau

$$a)\ \frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+...+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{\ln\left(n+1\right)}+...$$
$$b)\ \frac{1}{7}-\frac{1.4}{7.9}+\frac{1.4.7}{7.9.11}-...+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1.4.7...\left(3n-2\right)}{7.9.11...\left(2n+5\right)}+...$$
$$c)\ \frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\left(\frac{3}{7}\right)^{3}-...+\left(-1\right)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}+...$$

8. Chứng tỏ rằng chuỗi đan dấu

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+...+\left(-1\right)^{n}\frac{1}{n^{3}+1}+...$$

hội tụ. Tính gần đúng giá trị của tổng chuỗi trên với độ chính xác đến 0,01.

9. Tìm miền hội tụ và tính tổng các chuỗi hàm sau

$$a)\ \frac{2.1!}{2!}x^{2}+\frac{2^{2}.2!}{4!}x^{4}+\frac{2^{3}.3!}{6!}x^{6}+...+\frac{2^{n}n!}{\left(2n\right)!}x^{2n}+...$$
$$b)\ \frac{3x}{2}+\frac{3^{2}x^{2}}{\sqrt{2^{2}}}+\frac{3^{3}x^{3}}{\sqrt{2^{3}}}+...+\frac{3^{n}x^{n}}{\sqrt{2^{n}}}+...$$
$$c)\ \frac{1}{2}+\frac{x+1}{2.2.3}+\frac{\left(x+1\right)^{2}}{2^{2}.3.4}+...+\frac{\left(x+1\right)^{n}}{2^{n}.\left(n+1\right)\left(n+2\right)}+...$$

10. Tìm miền hội tụ và tính tổng các chuỗi hàm sau

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+5}}{3^{2n}\left(2n+1\right)}\qquad b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{\left(4n-3\right)}\qquad c)\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n+1\right)x^{n-2}$$
$$d)\sum_{n=0}^{\infty}\left(4n^{2}+9n+5\right)x^{n+1}\qquad e)\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)x^{n+2}\qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$$
$$g)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)}\qquad h)\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}\qquad i)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n}$$

11. Khai triển các hàm số f(x) thành tổng của chuỗi lũy thừa trong lân cận của x_0

$$a)\ f\left(x\right)=\ln\left(6x^{2}+5x+1\right);\ x_{0}=0$$
$$b)\ f\left(x\right)=\cos^{2}x;\ x_{0}=0$$
$$c)\ f\left(x\right)=\sin^{3}x;\ x_{0}=0$$

CHƯƠNG 6. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.1.1. Định nghĩa

Phương trình mà trong đó có xuất hiện biến số độc lập, hàm cần tìm và các đạo hàm (hay vi phân) của nó gọi chung là phương trình vi phân.

Ví dụ 6.1 Các phương trình sau đây là các phương trình vi phân

$$y\left(y'+x\right)-x^2y'=0 \quad ; \qquad \frac{dy}{dx}=2xy$$

Phân loại phương trình vi phân

- Phương trình vi phân thường: là phương trình vi phân mà hàm phải tìm chỉ phụ thuộc một biến số độc lập.

Phương trình vi phân thường có dạng tổng quát như sau

$$F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$$

trong đó, x là biến số độc lập; y là hàm cần tìm; $y',y'',...,y^{(n)}$ là đạo hàm các cấp của hàm số đó.

- Phương trình đạo hàm riêng: là phương trình mà hàm phải tìm phụ thuộc từ hai biến số độc lập trở lên.

6.1.2. Cấp của phương trình vi phân

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình.

- Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng:

$$F\left(x,y,y'\right)=0 \quad hay \quad y'=f\left(x,y\right)$$

- Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng:

$$F\left(x,y,y',y''\right)=0 \quad hay \quad y''=f\left(x,y,y'\right)$$

- Phương trình vi phân cấp *n* là phương trình có dạng:

$$F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$$

Ví dụ 6.2

a) $y\left(y'+x\right)-x^2y'=0$ là phương trình vi phân cấp 1.

b) $y''=4xy^2-2xy'$ là phương trình vi phân cấp 2.

c) $\left(2x+1\right)dx + x^2\left(y-1\right)dy = 0$ là phương trình vi phân cấp 1.

6.1.3. Nghiệm của phương trình vi phân

Nghiệm của phương trình vi phân là hàm số $y = \varphi\left(x\right)$ sao cho khi ta thay

$$y = \varphi\left(x\right); \quad y' = \varphi'\left(x\right);\ldots \quad y^{(n)} = \varphi^{(n)}\left(x\right)$$

vào phương trình thì được đẳng thức đúng, nghĩa là

$$F\left(x, \varphi\left(x\right), \varphi'\left(x\right), \ldots, \varphi^{(n)}\left(x\right)\right) = 0$$

Đối với phương trình vi phân cấp *n* ta thường tìm nghiệm dưới dạng

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$$

Với C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 6.3.

a) Phương trình $y' = 2y$ có nghiệm là hàm $y = C_1.e^{2x}$ xác định trên $\mathbb{R}$

(C_1 là hằng số tùy ý).

b) Phương trình $y' = 1 + y^2$ có nghiệm là hàm $y = tgx$ xác định trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2: $y'' = e^{2x}$ là $y = \dfrac{1}{4}e^{2x} + C_1.x + C_2$.

6.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

6.2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \quad hay \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (6.1)$$

trong đó, hàm *F* xác định trong miền $G \subset \mathbb{R}^3$, *x* là biến độc lập, y là hàm cần tìm, y' là đạo hàm của *y* theo *x*.

Nếu trong miền *G*, từ phương trình (6.1) ta giải được y'

$$y' = f\left(x, y\right) \qquad (6.2)$$

thì ta có phương trình vi phân cấp 1 đã giải ra với đạo hàm.

6.2.2. Định lý tồn tại duy nhất nghiệm Cauchy – Peano

Cho phương trình (6.2) $y' = f(x,y)$ và điểm $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$

Định lý 6.1

Nếu $f(x,y)$ liên tục trong miền *D* thì tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ xác định trong lân cận của x_0 sao cho $y(x_0) = y_0$. Ngoài ra, nếu $f'_y(x,y)$ liên tục trên *D* thì nghiệm $y = y(x)$ đó tồn tại duy nhất.

Điều kiện $y(x_0) = y_0$ gọi là điều kiện đầu. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (6.2) thỏa mãn điều kiện đầu gọi là bài toán Cauchy.

6.2.3. Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1

Nghiệm tổng quát

Hàm $y = \varphi(x, C)$ trong đó *C* là hằng số tùy ý, được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trong miền *D* nếu

a) Hàm $y = \varphi(x, C)$ thỏa mãn phương trình vi phân với mọi giá trị của *C*.

b) Với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, ta có thể tìm được giá trị $C = C_0$ sao cho

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0$$

Nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn

Hệ thức $\phi(x, y, C) = 0$ hay $\psi(x, y) = C$ gọi là nghiệm tổng quát (hay tích phân tổng quát) của phương trình vi phân trong miền *D* nếu nó xác định nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ của phương trình trong *D*.

Nghiệm riêng

Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với hằng số $C = C_0$ xác định được gọi là nghiệm riêng.

Nghiệm riêng: $y = \varphi(x, C_0)$

Tích phân riêng: $\phi(x, y, C_0) = 0$

Nghiệm kỳ dị

Nghiệm kỳ dị là nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát với bất kỳ giá trị nào của C.

Ví dụ 6.4. Xét phương trình: $y' = 2\sqrt{y}$

Giả sử $y > 0$, chia hai vế của phương trình cho $2\sqrt{y}$ ta có:

$$\left(\sqrt{y}\right)' = 1 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x + C \left(x > -C\right)$$

Do đó trong miền $D = \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$ phương trình có nghiệm tổng quát là

$$y = \left(x + C\right)^2 , \left(x > -C\right)$$

Cho $C = 0$, ta có một nghiệm riêng là: $y = x^2, \left(x > 0\right)$. Ngoài ra ta thấy $y\left(x\right) = 0$ cũng là nghiệm của phương trình. Nghiệm này gọi là nghiệm kì dị của phương trình vì nó không nhận được từ nghiệm tổng quát với bất kì giá trị nào của *C*.

6.3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 THƯỜNG GẶP

6.3.1. Phương trình biến số phân li

6.3.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 có biến số phân li là phương trình có dạng

$$g\left(y\right)dy = f\left(x\right)dx \qquad (6.3)$$

trong đó $y' = \dfrac{dy}{dx}$, *g* là hàm chỉ phụ thuộc biến *y* ; *f* là hàm chỉ phụ thuộc biến *x* và $f(x), g(y)$ là các hàm số liên tục trên khoảng (a, b) nào đó.

Phương pháp giải phương trình có biến số phân li là lấy tích phân bất định 2 vế của phương trình (6.3).

Phương trình (6.3) có dạng

$$g\left(y\right).y'\left(x\right)dx = f\left(x\right)dx$$

Lấy tích phân hai vế theo biến *x* ta có

$$\int g\left(y\left(x\right)\right)y'\left(x\right)dx = \int f\left(x\right)dx \Leftrightarrow \int g\left(y\right)dy = \int f\left(x\right)dx \Leftrightarrow G\left(y\right) = F\left(x\right) + C$$

Ví dụ 6.5. Giải phương trình $ydy = \frac{2x}{1+x^2}dx$

Giải. Lấy tích phân 2 vế của phương trình ta có

$$\int ydy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + C \Leftrightarrow y^2 = 2\ln\left(1+x^2\right) + 2C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y^2 = 2\ln\left(1+x^2\right) + 2C \ \ (C \text{ là hằng số tùy ý})$$

Chú ý. Vì hằng số cộng được chọn tùy ý nên trong bài trên ta có thể làm như sau

$$\int ydy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + \frac{C}{2} \Leftrightarrow y^2 = 2\ln\left(1+x^2\right) + C$$

và nghiệm tổng quát là: $y^2 = 2\ln\left(1+x^2\right) + C$

hay một cách khác

$$\int ydy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \ln\left(1+x^2\right) + \frac{\ln C}{2} \Leftrightarrow y^2 = \ln C\left(1+x^2\right)^2 \left(C>0\right)$$

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát: $y^2 = \ln C\left(1+x^2\right)^2 \quad \left(C>0\right)$

Do đó, nếu hằng số cộng được chọn một cách hợp lý thì nghiệm tổng quát sẽ được biểu diễn đơn giản và gọn hơn nhiều.

6.3.1.2. Phương trình vi phân biến số phân li được

a) Xét phương trình vi phân có dạng

$$f_1\left(x\right)g_1\left(y\right)dy = g_2\left(y\right)f_2\left(x\right)dx \tag{6.4}$$

trong đó f_1, f_2, g_1, g_2 *là các hàm liên tục trên miền đang xét.*

*** Phương pháp giải**

Giả sử $f_1\left(x\right).g_2\left(y\right) \neq 0$. Phương trình này có thể đưa về dạng biến số phân li bằng cách chia 2 vế của (6.4) cho $f_1\left(x\right).g_2\left(y\right) \neq 0$. Khi đó, (6.4) trở thành

$$\frac{g_1\left(y\right)}{g_2\left(y\right)}dy = \frac{f_2\left(x\right)}{f_1\left(x\right)}dx$$

Chú ý.

+ **N**ếu $y = a$ là nghiệm của phương trình $g_2\left(y\right) = 0$ thì ta thay $y = a$ và phương trình (6.4) ta suy ra $y = a$ cũng là nghiệm của (6.4).

+ Nếu trong (6.4) ta có thể thay đổi vai trò của *y* và *x* thì phương trình còn có nghiệm $x = b$, trong đó *b* là nghiệm của phương trình $f_1\left(x\right) = 0$.

Ví dụ 6.6

Giải phương trình: $x^2\left(y+1\right)dx + \left(x^3 - 1\right)\left(y-1\right)dy = 0$

Giải

Với $y + 1 \neq 0, x^3 - 1 \neq 0$ phương trình có thể viết:

$$\frac{x^2}{\left(x^3-1\right)}dx + \frac{\left(y-1\right)}{\left(y+1\right)}dy = 0 \Leftrightarrow \int \frac{x^2}{\left(x^3-1\right)}dx + \int \frac{\left(y-1\right)}{\left(y+1\right)}dy = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + y - 2\ln\left|y+1\right| = C$$

Thay trực tiếp $y = -1;\ x = 1$ vào phương trình ta cũng có $y = -1;\ x = 1$ là nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm:

+ Tích phân tổng quát: $\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + y - 2\ln\left|y+1\right| = C$.

+ Nghiệm $y = -1$.

+ Nghiệm $x = 1$.

b) Xét phương trình vi phân có dạng

$$y' = f\left(ax + by\right) \tag{6.5}$$

Đặt $z = ax + by$ *và xem z là hàm số của x ta có:* $z' = a + by'$

Phương trình trở thành: $z' = a + bf\left(z\right)$. *Đây là phương trình biến số phân li.*

Ví dụ 6.7. Giải phương trình: $y' = 3x - y$

Giải.

Đặt $z = 3x - y \Rightarrow z' = 3 - y' \Rightarrow y' = 3 - z'$

Thay vào ta được

$$3 - z' = z \Leftrightarrow z' = 3 - z \Leftrightarrow \frac{dz}{3-z} = dx \Leftrightarrow -\ln\left|3 - z\right| = x + \ln\left|C\right| \quad \left(C \neq 0\right)$$

Do đó: $\frac{1}{z-3} = Ce^x$ hay $\frac{1}{3x-y-3} = Ce^x$. Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

6.3.2. Phương trình đẳng cấp cấp 1

Định nghĩa

Phương trình đẳng cấp cấp 1 là phương trình dạng

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.6}$$

*** Phương pháp giải**

Đặt $t = \frac{y}{x}$ và xem t là hàm của x.Ta có: $y = tx \Rightarrow y' = t + x.t'$

Thay vào phương trình, ta có: $t + x.t' = f\left(t\right) \Leftrightarrow xt' = f\left(t\right) - t$

Ta có dạng phương trình biến số phân li.

Ví dụ 6.8. Giải phương trình $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

Giải.

Ta biến đổi: $y' = \dfrac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$

Vậy phương trình đã cho là phương trình đẳng cấp.

Đặt $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = t.x \Rightarrow y' = t + x.t'$. Thay thế vào phương trình ta có:

$$t + x.t' = \frac{1+t^2}{2t} \Leftrightarrow t'x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Giải phương trình trên với biến số phân li: $\frac{2tdt}{1-t^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2tdt}{t^2-1} = 0$

Lấy tích phân tổng quát của phương trình này ta được

$$\ln|x| + \ln|t^2 - 1| = \ln|C| \Leftrightarrow x(t^2 + 1) = C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R})$$

Hay $$x\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C_1 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = C_1 x$$

6.3.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

6.3.3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{6.7}$$

trong đó p(x), q(x) là các hàm liên tục trong khoảng (a,b) nào đó.

- Nếu $q(x) = 0, \ \forall x$ thì (6.7) gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.
- Nếu $q(x) \neq 0$ thì (6.7) gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

6.3.3.2. Phương pháp giải.

- **Giải phương trình thuần nhất:** $y' + p(x)y = 0$

(6.8)

Phương trình thuần nhất được viết lại là

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

Nếu $y \neq 0$ .Chia hai vế (6.8) cho y

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Lấy tích phân hai vế phương trình trên ta được

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|, \qquad (C_1 \neq 0)$$

$$y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx}, \qquad (C_1 \neq 0)$$

Hay $$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \qquad (C \neq 0) \tag{6.9}$$

Ta thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình (6.9). Nghiệm này có thể nhận được từ (6.9) nếu trong (6.9) ta lấy cả giá trị $C = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất (6.8) có dạng

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \ (C \in \mathbb{R}) \tag{6.10}$$

- **Giải phương trình không thuần nhất** *(phương pháp biến thiên hằng số)*

$$y' + p(x)y = q(x) \ \left(q(x) \neq 0\right) \tag{6.11}$$

Bước 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$

Bước 2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (6.11) dưới dạng

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Ở đây, hằng số *C* được xem như hàm số của biến *x*. Ta có:

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)\left(-p(x)\right)e^{-\int p(x)dx} \tag{6.12}$$

Thay vào phương trình (6.11) ta có:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

Hay $\qquad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$

Do đó ta có: $\qquad C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + T$

với *T* là một hằng số tùy ý.

Bước 3. Lập nghiệm tổng quát của (6.11)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + T\right) \ (T \in \mathbb{R})$$

Hay $$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \quad (C \in \mathbb{R}) \tag{6.13}$$

Phương pháp tìm nghiệm của phương trình trên xuất phát từ định lý sau

Định lý 6.2

Giả sử phương trình thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ có nghiệm tổng quát kí hiệu là $\overline{y}$ và phương trình (6.11) có nghiệm riêng kí hiệu là y^* thì $y = \overline{y} + y^*$ là nghiệm tổng quát của phương trình (6.11).

Ví dụ 6.9. Giải phương trình: $y' - \frac{1}{x} y = 2x$.

Tìm nghiệm riêng thỏa mãn $y\left(1\right) = -1$

Giải.

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 với $p\left(x\right) = -\frac{1}{x}$; $q\left(x\right) = 2x$

Áp dụng công thức nghiệm (6.13) , ta có

$$y = \left(\int 2xe^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right) e^{\int \frac{dx}{x}} = \left(\int 2xe^{-\ln x} dx + C\right) e^{\ln x} = \left(\int 2dx + C\right) x = \left(2x + C\right) x$$

Vậy $y = 2x^2 + Cx$.

Với điều kiện đầu $y\left(1\right) = -1$, ta tìm được $C = -3$.

Vậy nghiệm riêng cần tìm là: $y = 2x^2 - 3x$

Ví dụ 6.10. Giải phương trình: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Giải.

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 với $p\left(x\right) = 2x$, $q\left(x\right) = xe^{-x^2}$. Áp dụng công thức nghiệm ta có

$$y = \left(\int x.e^{-x^2}.e^{\int 2xdx} dx + C\right) e^{-\int 2xdx} = \left(\int 2xdx + C\right) e^{-x^2} = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2}$$

Vậy nghiệm cần tìm là $y = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2}$

6.3.4. Phương trình Bernoulli

6.3.4. 1. Định nghĩa

Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p\left(x\right) y = q\left(x\right) y^{\alpha} \tag{6.14}$$

với *p(x), q(x)* là các hàm liên tục trên khoảng *(a,b)* nào đó và $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

6.3.4. 2. Phương pháp giải

Giả sử $y \neq 0$, nhân 2 vế phương trình (6.14) cho $y^{-\alpha}$ ta được

$$y^{-\alpha} y' + p\left(x\right) y^{1-\alpha} = q\left(x\right) \tag{6.15}$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ là hàm theo biến x, ta có: $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \quad hay \quad y^{-\alpha}y' = \dfrac{z'}{1-\alpha}$.

Thay vào phương trình (6.15) ta có phương trình tuyến tính cấp 1 dạng

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

Chú ý.

+ Ta thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (6.15) khi $\alpha > 0$.
+ Khi $\alpha > 1$ thì $y = 0$ là nghiệm riêng.
+ Khi $0 < \alpha < 1$ thì $y = 0$ là nghiệm kì dị.

Ví dụ 6.11. Giải phương trình $y - xy' = y^2$

Giải

Ta có: $y - xy' = y^2 \Leftrightarrow y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$

Phương trình cuối là phương trình Bernoulli với $\alpha = 2$. Giả sử $y \neq 0$, nhân 2 vế của phương trình cuối với y^{-2} và đặt $z = y^{-1}$ ta có phương trình tuyến tính cấp 1 sau

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$$

Giải phương trình này ta được nghiệm tổng quát $z = \dfrac{1}{x}(x + C)$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \dfrac{x}{x+C}$. Ngoài ra nó còn có nghiệm $y = 0$.

Như vậy phương trình có các nghiệm là $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{x+C} \\ y = 0 \end{array}\right.$

6.3.5. Phương trình vi phân toàn phần

6.3.5.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \tag{6.16}$$

trong đó, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}, \forall (x,y) \in D$

Với điều kiện trên, vế trái phương trình là vi phân toàn phần của một hàm hai biến $u\left(x,y\right)$ nào đó. Điều này có nghĩa là

$$du = f\left(x,y\right)dx + g\left(x,y\right)dy$$

Khi đó phương trình viết lại như sau: $du = 0$ hay $u\left(x,y\right) = C$

Như vậy việc đi giải phương trình trên trở thành việc đi tìm hàm hai biến

$$u\left(x,y\right) \text{ sao cho } \frac{\partial u}{\partial x} = f\left(x,y\right),\ \frac{\partial u}{\partial y} = g\left(x,y\right).$$

Hai cách giải phương trình dạng này như sau

+ Cách 1

- Lấy tích phân hai vế theo biến *x*: $\int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int f\left(x,y\right)dx$ (xem *y* như hằng số)
- Giả sử ta có: $u\left(x,y\right) = \int f\left(x,y\right)dx + C\left(y\right)$
- Lấy đạo hàm 2 vế và thay vào biểu thức $\frac{\partial u}{\partial y} = g\left(x,y\right)$. Từ đây ta tìm được hàm *C(y)* tương ứng.
- Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $u\left(x,y\right) = \int f\left(x,y\right)dx + C\left(y\right)$

Ví dụ 6.12. Giải phương trình sau: $\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(2xy + \cos y\right)dy = 0$

Giải.

Ta có: $f\left(x,y\right) = \left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\qquad g\left(x,y\right) = \left(2xy + \cos y\right) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 2y$

Vậy phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.

Ta tìm hàm *u(x,y)* thỏa mãn $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 + y^2\right) & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left(2xy + \cos y\right) & (2) \end{cases}$

Lấy tích phân hai vế của (1) theo *x* ta được

$$u\left(x,y\right) = \int \left(x^2 + y^2\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C\left(y\right)$$

Ta có: $u\left(x,y\right)=\frac{1}{3}x^3+xy^2+C\left(y\right)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=2xy+C'\left(y\right)$

Thay *u(x,y)* vừa tìm được vào (2) ta có

$$2xy+C'\left(y\right)=2xy+\cos y\Rightarrow C\left(y\right)=\sin y+C$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\frac{1}{3}x^3+xy^2+\sin y+C=0$

+ Cách 2

Vì $du=f\left(x,y\right)dx+g\left(x,y\right)dy$ nên

$$u\left(x,y\right)=\int_{x_0}^{x}f\left(x,y\right)dx+\int_{y_0}^{y}g\left(x_0,y\right)dy$$

hoặc $$u\left(x,y\right)=\int_{x_0}^{x}f\left(x,y_0\right)dx+\int_{y_0}^{y}g\left(x,y\right)dy$$

trong đó $M_0\left(x_0;y_0\right)$ là một điểm chọn tùy ý nằm trong miền xác định chung của hai hàm số $f\left(x,y\right)$ và $g\left(x,y\right)$.

Ví dụ 6.13. Giải phương trình sau: $\left(x^3+xy^2\right)dx+\left(x^2y+y^3\right)dy=0$

Giải.

$$f\left(x,y\right)=\left(x^3+xy^2\right)\Rightarrow f'_y=2xy$$
$$g\left(x,y\right)=\left(x^2y+y^3\right)\Rightarrow g'_x=2xy$$

Đây là phương trình vi phân toàn phần. Ta chọn $M_0\left(0,0\right)$. Thay vào công thức nghiệm tổng quát ta được

$$u\left(x,y\right)=\int_0^x f\left(x,0\right)dx+\int_0^y g\left(x,y\right)dy$$

$$u\left(x,y\right)=\int_0^x x^3dx+\int_0^y\left(x^2y+y^3\right)dy=\frac{1}{4}\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $\frac{1}{4}\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)=C$

6.3.5.2. Thừa số tích phân

Có nhiều trường hợp phương trình (6.16) không phải là phương trình vi phân toàn phần, nhưng ta có thể chọn hàm số $\alpha\left(x,y\right)$ sao cho phương trình

$$\alpha\left(x,y\right)f\left(x,y\right)dx+\alpha\left(x,y\right)g\left(x,y\right)dy=0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Có nghĩa là

$$\frac{\partial(\alpha f)}{\partial y}=\frac{\partial(\alpha g)}{\partial x}$$

Khi đó hàm số $\alpha\left(x,y\right)$được gọi là thừa số tích phân của phương trình (6.16) và chú ý rằng nghiệm của phương trình vi phân toàn phần mới này cũng chính là nghiệm của phương trình (6.16).

Cách tìm thừa số tích phân trong trường hợp một biến

$$\alpha\left(x,y\right)=\alpha\left(x\right)\ \ hay\ \ \alpha\left(x,y\right)=\alpha\left(y\right)$$

+ **Trường hợp 1**. Nếu $\dfrac{f_y^{'}-g_x^{'}}{g\left(x,y\right)}=\phi\left(x\right)$ ta chọn $\alpha\left(x,y\right)=\alpha\left(x\right)=e^{\int\phi\left(x\right)dx}$

+ **Trường hợp 2**. Nếu $\dfrac{f_y^{'}-g_x^{'}}{f\left(x,y\right)}=-\phi\left(y\right)$ ta chọn $\alpha\left(x,y\right)=\alpha\left(x\right)=e^{-\int\phi\left(y\right)dy}$

Ví dụ 6.14. Giải phương trình: $ydx-\left(4x^2y+x\right)dy=0$

Giải.

Ta có $f\left(x,y\right)=y$, $g\left(x,y\right)=-\left(4x^2y+x\right)$

$\Rightarrow f_y^{'}=1$, $g_x^{'}=-\left(8xy+1\right)$ và $\dfrac{f_y^{'}-g_x^{'}}{g\left(x,y\right)}=-\dfrac{2}{x}=\phi\left(x\right)$

Ta tính: $\alpha\left(x\right)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\dfrac{1}{x^2}$

Nhân hai vế phương trình ban đầu cho $\alpha\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$ ta có:

$$\frac{y}{x^2}dx-\frac{\left(4x^2y+x\right)}{x^2}dy=0$$

Dễ dàng kiểm tra đây là phương trình vi phân toàn phần với

$$f\left(x,y\right)=\frac{y}{x^2};\ g\left(x,y\right)=-\frac{\left(4x^2y+x\right)}{x^2}$$

Chọn $M_0\left(1;0\right)$ ta có tích phân tổng quát của phương trình là

$$u\left(x,y\right)=\int_1^x\frac{y}{x^2}dx-\int_0^y\left(4y+1\right)dy=C\Leftrightarrow-\frac{y}{x}+y-\left(2y^2+y\right)=C$$

hay $-\frac{y}{x}-2y^2=C$

6.4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

6.4.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng:

$$F\left(x,y,y',y''\right)=0\ \ hay\ \ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \qquad (6.17)$$

trong đó, hàm *F* xác định trong miền $V\subset\mathbb{R}^4$, *x* là biến độc lập, y là hàm cần tìm, y',y'' là các đạo hàm của *y* theo *x*.

Nếu từ (6.17) ta giải được y'' thì ta có phương trình vi phân cấp 2 đã giải ra với đạo hàm

$$y''=f\left(x,y,y'\right) \qquad (6.18)$$

Cho phương trình (6.18) $y''=f\left(x,y,y'\right)$ và điểm $\left(x_0,y_0,y'_0\right)\in G\subset\mathbb{R}^3$.

Định lý 6.3

Nếu $f\left(x,y,y'\right)$ liên tục trong miền *G* thì tồn tại ít nhất một nghiệm $y=y\left(x\right)$ xác định trong lân cận của x_0 sao cho $y\left(x_0\right)=y_0$ và $y'\left(x_0\right)=y'_0$. Ngoài ra, nếu $f'_y,f'_{y'}$ liên tục trên *G* thì nghiệm $y=y\left(x\right)$ đó tồn tại duy nhất.

Điều kiện $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y'_0$ gọi là điều kiện đầu. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (6.18) thỏa mãn điều kiện đầu gọi là bài toán Cauchy.

Tương tự như đối với phương trình vi phân cấp 1, ta có khái niệm nghiệm của phương trình vi phân cấp 2 như sau:

6.4.2. Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2

Nghiệm tổng quát

Hàm $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$trong đó C_1, C_2 là hằng số tùy ý, được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trong miền *G* nếu

a) Hàm $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$ thỏa mãn phương trình vi phân với mọi giá trị của C_1, C_2.

b) Với mọi điểm $\left(x_0, y_0, y_0'\right) \in G$, ta có thể tìm được giá trị $C_1 = C_0^1; C_2 = C_0^2$ sao cho $\varphi\left(x_0, C_0^1; C_0^2\right) = y_0; \quad \varphi'\left(x_0, C_0^1; C_0^2\right) = y_0'$

Nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn

Hệ thức $\phi\left(x, y, C_1, C_2\right) = 0$ hay $\psi\left(x, y\right) = C$ gọi là nghiệm tổng quát (hay tích phân tổng quát) của phương trình vi phân trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu nó xác định nghiệm tổng quát $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$của phương trình trong *D*.

Nghiệm riêng

Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát của phương trình với giá trị xác định của các hằng số $\left(C_1, C_2\right)$được gọi là nghiệm riêng của phương trình. Nghiệm của phương trình không phải là nghiệm riêng được gọi là nghiệm kì dị của phương trình.

Nghiệm riêng có dạng : $y = \varphi\left(x, C_0^1, C_0^2\right)$.

Tích phân riêng có dạng: $\phi\left(x, y, C_0^1, C_0^2\right) = 0$

Các định nghĩa trên có thể tổng quát lên phương trình vi phân cấp *n* hoàn toàn tương tự. Sau đây chúng ta sẽ xét một số phương trình vi phân cấp 2 cơ bản.

6.4.3. Phương trình vi phân cấp 2 giảm cấp được

6.4.3.1. Phương trình vi phân dạng $y'' = f\left(x\right)$ (khuyết $y; y'$)

***Phương pháp giải**

Lấy tích phân bất định hai vế liên tiếp hai lần theo *x*

$$y'' = f\left(x\right) \Rightarrow y' = \int f\left(x\right)dx + C_1 \Rightarrow y = \int\left(\int f\left(x\right)dx\right)dx + C_1x + C_2$$

Ví dụ 6.15. Giải phương trình $y'' = \sin x$

Giải

Đây là phương trình vi phân cấp hai khuyết y, y'.

Lấy tích phân bất định lần thứ nhất, ta được

$$y' = -\cos x + C_1$$

Lấy tích phân bất định lần thứ hai, ta được

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 6.16. Giải phương trình $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

Giải

Trước hết, ta tìm nghiệm tổng quát.

Lấy tích phân bất định hai lần ta được

$$\begin{aligned} y' &= \int xe^x dx = (x-1)e^x + C_1, \\ y &= \int \left((x-1)e^x + C_1\right) dx = (x-2)e^x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Thay điều kiện ban đầu vào y, y', ta được

$$\begin{cases} 1 = (0-1)e^0 + C_1 \\ 2 = (0-2)e^0 + C_1 0 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 4 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm riêng cần tìm là hàm số $y = (x-2)e^x + 2x + 4$

Ví dụ 6.17

Giải phương trình $y'' = 3x^2 + 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Giải

Ta có:

$$y'' = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y' = x^3 + x^2 + x + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C2$$

Thay vào điều kiện ban đầu ta được

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1;\ y'(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 1$$

6.4.3.2. Phương trình vi phân dạng $y'' = f\left(x, y'\right)$ (khuyết *y*)

*** Phương pháp giải**

Đặt $z = y'$ (*z* là hàm theo *x*), ta được phương trình vi phân cấp 1 theo *z* và *x*.

Ví dụ 6.18. Giải phương trình $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

Giải

Đặt $z = y' \Rightarrow z' = y''$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right) \Leftrightarrow z' = \frac{z}{x}\ln\left(\frac{z}{x}\right)$$

Đây là phương trình đẳng cấp theo z, x.

Đặt $t = \frac{z}{x} \Rightarrow z = tx \Rightarrow z' = t'x + t.$ Thay vào phương trình đẳng cấp, ta có

$$t'x + t = t\ln t \Leftrightarrow \frac{dt}{dx}x = t\ln t - t$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x} \qquad (\ln t - 1 \neq 0)$$

Đây là phương trình phân li, lấy tích phân bất định hai vế, ta được

$$\ln\left(\ln t - 1\right) = \ln x + \ln c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln t - 1 = c_1 x$$

$$\ln\frac{z}{x} = c_1 x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = xe^{c_1 x + 1}$$

Thay $z = y'$ và lấy tích phân bất định, ta có

$$y = \int xe^{c_1 x + 1}dx = \frac{x}{c_1}e^{c_1 x + 1} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1 x + 1} + c_2$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Xét trường hợp

$$\ln t = 1 \quad hay \quad t = e \quad \Leftrightarrow z = ex \quad \Rightarrow z' = e$$

Thay vào phương trình đẳng cấp, ta thấy thoả mãn. Vậy, đây là nghiệm kì dị của phương trình. Khi đó $y' = ex \Rightarrow y = \frac{e}{2}x^2.$

Như vậy, phương trình đã cho có một nghiệm tổng quát và một nghiệm kì dị.

Ví dụ 6.19

Giải phương trình $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$

Giải

Đặt $z = y'$ ta có phương trình

$$z' - \frac{z}{x-1} = x(x-1)$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1. Theo công thức nghiệm tổng quát ta có

$$z = \left(\int x\left(x-1\right)e^{-\int \frac{1}{x-1}dx}dx + C\right)e^{\int \frac{1}{x-1}dx}$$

$$z = \left(\int x\left(x-1\right)\frac{1}{\left|x-1\right|}dx + C\right)\left|x-1\right| = \left(\int xdx + C_1\right)\left(x-1\right) = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\left(x-1\right)$$

Vậy

$$y' = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\left(x-1\right) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1x - C_1 \Rightarrow y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 - C_1x + C_2$$

Với điều kiện đầu $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$. ta có: $C_1 = -3; C_2 = \frac{1}{3}$

Vậy nghiệm riêng cần tìm: $y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{3}$

Ví dụ 6.20. Giải phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Giải.

Đặt $z = y'$ ta được phương trình:

$$z' - \frac{z}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln\left|z\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right| \Leftrightarrow z = Cx$$

Từ đây ta có: $y' = Cx \Leftrightarrow y = C\frac{x^2}{2} + C_2 = C_1x^2 + C_2$

Vậy nghiệm tổng quát: $y = C_1x^2 + C_2$

6.4.3.3. Phương trình vi phân dạng $y'' = f\left(y', y\right)$ (khuyết *x*)

*** Phương pháp giải**

Đặt $z = y'$ (z là hàm theo y), ta có: $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'_y.y'_x \Rightarrow y'' = z'.z$

Thay vào ta được phương trình vi phân cấp 1 theo z và y.

Ví dụ 6.21. Giải phương trình $y'' - y'^2 = 0$

Giải

Đặt $z = y' = \dfrac{dy}{dx}$ và xem z là hàm số của y. Khi đó $y'' = z.z'$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$z.z' - z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(z' - z) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z = 0 & (1) \\ z' = z & (2) \end{array}\right.$$

Ta có

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = c.$

$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dz}{dy} = z \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dz}{z} = dy \quad \Leftrightarrow \quad \ln z = y + c_1$

$\Leftrightarrow \quad z = e^{y+c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = e^{y+c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dy}{e^{y+c_1}} = dx$

$\Leftrightarrow \quad e^{-y-c_1}dy = dx \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-y-c_1} = x + c_2.$

BỔ TÚC VỀ SỐ PHỨC

Định nghĩa về số phức

Số phức là số có dạng: $z = a + bi$

Trong đó $a, b \in \mathbb{R}$; i là kí hiệu của đơn vị ảo $(i^2 = -1)$

Vậy mỗi số phức có thể coi như là một đa thức với biến i.

Ta ký hiệu: $a = \operatorname{Re} z$ và $b = \operatorname{Im} z$ gọi lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức.

Nếu $\operatorname{Im} z = 0$ thì z là số thực. Nếu $\operatorname{Re} z = 0$ và $\operatorname{Im} z \neq 0$ thì z gọi là số ảo

Các phép toán trên số phức

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ ta có

$i)$ $\quad z_1 \pm z_2 = \left(a_1 \pm a_2\right) + \left(b_1 \pm b_2\right)i$

$ii)$ $\quad z_1.z_2 = \left(a_1a_2 - b_1b_2\right) + \left(a_1b_2 + a_2b_1\right)i$

$iii)$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$

Lưu ý. Trong phép chia hai số phức đòi hỏi số chia là số khác 0.

Các tính chất đối với phép cộng, trừ, nhân, chia đối với số phức có tính chất tương tự như đối với phép cộng, trừ, nhân và chia đối với các số thực. Ví dụ: giao hoán, kết hợp, phân phối.

Khi tính toán cụ thể, ta nên thực hiện theo các qui tắc chung hơn là theo công thức.

Số phức liên hợp

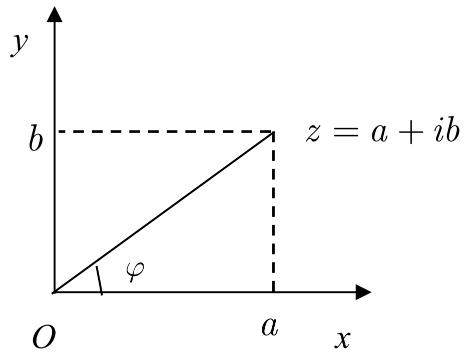
Cho số phức $z = a + bi$. Số phức $\overline{z} = a - bi$ gọi là số phức liên hợp của số phức đã cho. Ta có các tính chất sau

$i)$ $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z;$ $z - \overline{z} = \left(2\operatorname{Im} z\right)i$

$ii)$ $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};$ $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

$iii)$ $z.\overline{z} = a^2 + b^2 = \left(\operatorname{Re} z\right)^2 + \left(\operatorname{Im} z\right)^2$

Dạng lượng giác của số phức



Số phức z trong hình vẽ hoàn toàn xác định nếu biết độ dài *r* và góc φ có cạnh đầu O*x* và cạnh cuối O*z*. Độ dài *r* gọi là mô đun của z, kí hiệu $\left|z\right|$. Góc φ gọi là argumen của z.Tập tất cả các argumen của z kí hiệu là $Argz$. Ta có: $Argz = \varphi + 2k\pi, k \in Z$.

Công thức Euler

Khi nghiên cứu hàm mũ phức, ta dùng công thức sau gọi là công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Sử dụng công thức Euler, mỗi số phức z được viết dưới dạng mũ $z = re^{i\varphi}$, trong đó r là mô đun của z, φ gọi là argumen của z.

Nếu $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ thì

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Từ đó, nếu $z = re^{i\varphi}$ thì

$$z^n = r^ne^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Đặc biệt, với $n = 1$ thì ta có công thức Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

6.4.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

Định nghĩa.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 là phương trình dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (6.19)$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là các hàm của biến *x*.

- Nếu $f(x) \equiv 0$: phương trình (6.19) là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2.
- Nếu $f(x) \not\equiv 0$: phương trình (6.19) là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp 2.

6.4.4.1. Giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6.20)$$

Định nghĩa

Hai nghiệm riêng $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình thuần nhất (6.20) gọi là độc lập tuyến tính nếu tỉ số $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ khác hằng số. Ngược lại hai nghiệm đó phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 6.4

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (6.20) là

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Nhận xét

- Giải phương trình thuần nhất thực chất là đi tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình này. Công việc có vẻ đơn giản tuy nhiên vẫn chưa có một phương pháp tổng quát nào để tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (6.20).
- Nhưng nếu ta biết được một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình thuần nhất (6.20) thì bao giờ cũng tìm được nghiệm riêng thứ hai $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1(x)$.

Nghiệm $y_2(x)$ được tìm dưới dạng $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, với $u(x)$ khác hằng số, $u(x)$ được xác định khi thay $u(x)$ vào $y_2(x), y_2'(x), y_2''(x)$ của phương trình thuần nhất.

Ví dụ 6.22

Giải phương trình $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ biết phương trình có một nghiệm riêng $y_1(x) = \frac{1}{x}$

Giải

Ta tìm nghiệm $y_2(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ dưới dạng

$$y_2(x) = u(x).y_1(x) = u(x)\frac{1}{x}$$

Ta có: $y_2' = \frac{u'.x - u}{x^2} = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$; $y_2'' = \frac{u''}{x} - 2\frac{u'}{x^2} + 2\frac{u}{x^3}$

Thay vào phương trình trên ta được

$$\frac{u''}{x} - 2\frac{u'}{x^2} + 2\frac{u}{x^3} + \frac{1}{x}\left(\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{u}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{u''}{x} - \frac{u'}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xu'' - u' = 0$$

Đặt $z = u'$ ta có: $xz' - z = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow z = Cx$. Chọn $C = 1 \Rightarrow z = x$

Ta có: $u' = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C_1$. Chọn $u = \frac{x^2}{2}$, nghiệm riêng $y_2(x) = u(x)\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{x}{2}$

6.4.4.2. Giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Cơ sở để giải phương trình này dựa vào định lí sau đây

Định lý 6.5

Nếu $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

và y^* là một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \overline{y} + y^*$$

Để tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất y^* ta dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange như sau

Bước 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Giả sử $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ là nghiệm tổng quát.

Bước 2. Ta tìm nghiệm riêng y^* dưới dạng

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

Trong đó các hàm số $C_1(x)$, $C_2(x)$được xác định từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Ví dụ 6.23

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = x$

Giải

Phương trình thuần nhất $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$ có nghiệm tổng quát là

$$\overline{y} = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{x}{2}$$

Ta tìm nghiệm riêng y^* dạng: $y^* = C_1(x)\frac{1}{x} + C_2(x)\frac{x}{2}$

Thay vào phương trình ta có:

$$\begin{cases} C_1'(x)\frac{1}{x} + C_2'(x)\frac{x}{2} = 0 \\ C_1'(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C_2'(x)\frac{1}{2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\frac{x^3}{2} \\ C_2'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\frac{x^4}{8} \\ C_2(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Do đó: $y^* = -\frac{x^4}{8}.\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}\frac{x}{2} = \frac{x^3}{8}$. Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}$$

6.4.5. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

Định nghĩa.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng là phương trình có dạng:

$$y'' + p.y' + q.y = f\left(x\right) \tag{6.21}$$

trong đó *p, q* là các hằng số thực và $f(x)$ là hàm của biến x.

***Phương pháp giải.**

A. Giải phương trình thuần nhất $\quad y'' + p.y' + qy = 0 \qquad (6.22)$

Giải phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0$

a) Nếu phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt k_1, k_2 thì $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (6.22). Do đó, nghiệm tổng quát của (6.22) là

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

b) Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép là k thì $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính (6.22). Do đó, nghiệm tổng quát của (6.22) là

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = \left(C_1 + C_2x\right)e^{kx}$$

c) Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ người ta chứng minh được $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}sin\beta x$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính (6.22). Do đó, nghiệm tổng quát của (6.22) là

$$y = \left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$$

Ví dụ 6.24

Giải các phương trình sau

$a) y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad b) y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad c) y'' - 2y' + 5y = 0$

Giải

a) Phương trình đặc trưng: $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$, $k = 2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

b) Phương trình đặc trưng: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

c) Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 5 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm 2i$ $\left(\Delta' = -4 = \left(2i\right)^2\right)$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $y = e^x\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$

B. Giải phương trình không thuần nhất $y'' + p.y' + q.y = f\left(x\right)$

Bước 1. Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y}$ của phương trình thuần nhất. Giả sử nghiệm này có dạng $\overline{y} = C_1 y_1\left(x\right) + C_2 y_2\left(x\right)$

Bước 2. Tìm một nghiệm riêng *y** của phương trình (6.21)

Trường hợp 1. Tìm *y** bằng phương pháp biến thiên hằng số tổng quát.

Trường hợp 2. Dùng khi *f(x)* có các dạng đặc biệt như sau

a) Trường hợp $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x có các hệ số cho trước, *a* là số thực. Khi đó,

+ Nếu a không là nghiệm của phương trình đặc trưng ta tìm *y** dưới dạng

$y^* = e^{ax} Q_n(x)$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x có các hệ số chưa biết.

+ Nếu a là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì

$$y^* = x e^{ax} Q_n(x)$$

+ Nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì

$$y^* = x^2 e^{ax} Q_n(x)$$

b) Trường hợp $f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n, m của x có các hệ số cho trước. Khi đó

+ Nếu $a \pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì

$$y^* = e^{ax}\left(H_k(x)\cos\beta x + L_k(x)\sin\beta x\right)$$

trong đó $H_k(x)$, $L_k(x)$ là các đa thức bậc $k = \max(n,m)$ của x có các hệ số chưa biết. Để tìm các hệ số này, ta thay y^* và các đạo hàm của nó vào phương trình đã cho rồi đồng nhất hai vế.

+ Nếu $a \pm ib$ là nghiệm phức của phương trình đặc trưng thì

$$y^* = xe^{ax}\left(H_k(x)\cos bx + L_k(x)\sin bx\right)$$

Bước 3. Nghiệm tổng quát của phương trình (6.21)

$$y = \overline{y} + y^*$$

Ví dụ 6. 25 Giải phương trình $y'' - y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Giải

Đây là phương trình không thuần nhất nên nghiệm tổng quát có dạng

$$y = \overline{y} + y^*$$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Ta tìm nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất dạng

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2\left(1+e^x\right)} \\ C_2'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{2\left(1+e^x\right)} \end{cases}$$

Từ đây ta có

$$C_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right) + \xi_1 \qquad C_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right) + \xi_2$$

Do chỉ cần một nghiệm riêng nên ta chọn: $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là

$$y^* = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right)\right]e^x + \left[-\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln\left(1+e^x\right)\right]e^{-x}$$

$$y^* = \frac{1}{2}\left[x - \ln\left(1 + e^x\right)\right]e^x - \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x}\ln\left(1 + e^x\right)\right]$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \ln\left(1 + e^x\right)\right)e^x - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x}\ln\left(1 + e^x\right)\right) + C_1e^x + C_2e^x$$

Ví dụ 6.26 Giải phương trình: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

Giải

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$

Nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất dạng

$$y^* = C_1\left(x\right)\cos x + C_2\left(x\right)\sin x$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} C_1'\left(x\right)\cos x + C_2'\left(x\right)\sin x = 0 \\ -C_1'\left(x\right)\sin x + C_2'\left(x\right)\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'\left(x\right) = -1 \\ C_2'\left(x\right) = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$$

Từ đây ta có

$$C_1\left(x\right) = -x + \xi_1 \qquad\qquad C_1\left(x\right) = \ln\left|\sin x\right| + \xi_2$$

Chọn $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Vậy nghiệm riêng cần tìm là:

$$y^* = -x\cos x + \left(\ln\left|\sin x\right|\right)\sin x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = -x\cos x + \left(\ln\left|\sin x\right|\right)\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

Ví dụ 6.27

Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = (6x + 7)e^{-x}$

Giải

Đây là phương trình không thuần nhất nên nghiệm tổng quát có dạng

$$y = \overline{y} + y^*$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1,\ k = 2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$

Ta tìm y^* là nghiệm riêng của phương trình đã cho

Ta nhận thấy vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^{-x}P_1(x)$ có $a = -1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên

$$y^* = e^{-x}Q_1(x) = e^{-x}(Ax + B)$$

Suy ra $(y^*)' = e^{-x}(-Ax + A - B), \quad (y^*)'' = e^{-x}(Ax - 2A + B)$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$\begin{aligned} &(y^*)'' - 3(y^*)' + 2y^* = (6x + 7)e^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & e^{-x}(Ax - 2A + B) - 3e^{-x}(-Ax + A - B) + 2e^{-x}(Ax + B) = (6x + 7)e^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & (6Ax - 5A + 6B)e^{-x} = (6x + 7)e^{-x} \end{aligned}$$

Đồng nhất hai vế, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ -5A + 6B = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Do đó nghiệm riêng là $y^* = e^{-x}(x + 2)$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{-x}(x + 2)$$

Ví dụ 6.28

Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$

Giải

Đây là phương trình không thuần nhất nên nghiệm tổng quát có dạng

$$y = \overline{y} + y^*$$

Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1,\ k = 2$.

Phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát: $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Ta tìm y^* là nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^xP_0(x)$ có $a = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên

$$y^* = xe^xQ_0(x) = Axe^x$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$\begin{aligned}&\left(y*\right)'' - 3\left(y*\right)' + 2y* = 2e^{x}\\ \Leftrightarrow\ & Ae^{x}(x+2) - 3Ae^{x}(x+1) + 2Ae^{x} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\\ \Leftrightarrow\ & Ae^{x} = 2e^{x} \quad \Leftrightarrow \quad A = 2\end{aligned}$$

Do đó nghiệm riêng là $y* = 2xe^{x}$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + 2xe^{x}$$

Chú ý. *Do nghiệm y^* là nghiệm riêng của phương trình (6.21) nên thường ta đi chọn nghiệm riêng với các hệ số cộng tự do là 0. Khi đó, theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, nếu nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất dạng*

$$\begin{aligned}&y = \overline{y} + y^* = C_1y_1\left(x\right) + C_2y_2\left(x\right) + \left[U_1\left(x\right)y_1\left(x\right) + U_2\left(x\right)y_2\left(x\right)\right]\\ &y = \left(U_1\left(x\right) + C_1\right)y_1\left(x\right) + \left(U_2\left(x\right) + C_2\right)y_2\left(x\right)\end{aligned}$$

Trong đó $U_1\left(x\right) = \int C_1'\left(x\right)dx$, $U_2\left(x\right) = \int C_2'\left(x\right)dx$ *với hệ số tự do chọn là 0.*

Như vậy nếu trong phương trình tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, nếu ta cho các hệ số cộng tự do các giá trị tùy ý thì nghiệm đó cũng chính là nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho.

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất có thể tìm dưới dạng sau

$$y = C_1\left(x\right)y_1\left(x\right) + C_2\left(x\right)y_2\left(x\right)$$

Với điều kiện các hằng số cộng tùy ý.

Điều này có nghĩa là ta không cần thiết phải làm phép cộng $y = \overline{y} + y*$ *mà có thể lấy luôn nghiệm riêng của phương trình với tham số tự do làm nghiệm tổng quát*

Ví dụ 6.29 Giải phương trình $y'' + y = tgx$

Giải

Ta tìm $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y'' + y = 0$$

Xét phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm i$.

Do đó $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho dạng

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

Theo phương pháp Lagrange ta có hệ sau

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tgx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -tgx.\sin x \\ C_2'(x) = \sin x \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$C_1(x) = -\int tgx.\sin x dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx = \sin x - \ln\left|tg\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\right| + \xi_1$$
$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + \xi_2$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = \left[\sin x - \ln\left|tg\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\right| + \xi_1\right]\cos x + \left[-\cos x + \xi_2\right]\sin x$$
$$hay \quad y = \xi_1 \cos x + \xi_2 \sin x - \cos x.\ln\left|tg\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\right|$$

với ξ_1 , ξ_2 là các hằng số tùy ý.

6.4.6. Nguyên lý chồng chất nghiệm

Định lý 6.6

Nếu y_1^* là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

và y_2^* là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^* + y_2^*$ là một nghiệm riêng của phương trình.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Nhận xét.

+ Định lý trên dùng để tìm nghiệm riêng của phương trình thuần nhất khi hàm số $f\left(x\right)$ở vế phải không có dạng đặc biệt nhưng lại là tổng của hai hàm $f_1\left(x\right)$, $f_2\left(x\right)$ có dạng đặc biệt.

+ Định lí trên có thể mở rộng cho trường hợp là tổng của nhiều hàm dạng đặc biệt.

Ví dụ 6.30 Giải phương trình $y'' + y = e^x + 5x$.

Giải

Bước 1. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$

$$\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Bước 2. Ta thấy $f\left(x\right) = e^x + 5x = f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right)$, trong đó $f_1\left(x\right)$, $f_2\left(x\right)$ có dạng đặc biệt.

$$f_1\left(x\right) = e^x \ , \ f_2\left(x\right) = 5x$$

Bước 3. Ta tìm nghiệm riêng y_1^* ứng với $f_1\left(x\right) = e^x$. Do $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $y_1^* = ae^x$. Thay vào phương trình ta được

$$\left(ae^x\right)'' + ae^x = e^x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Vậy $y_1^* = \frac{1}{2}e^x$

Bước 4. Ta tìm nghiệm riêng y_2^* ứng với $f_2\left(x\right) = 5x$

Dễ thấy $y_2^* = \left(ax + b\right)$. Thay vào phương trình ta được:

$$\left(ax + b\right)'' + \left(ax + b\right) = 5x \Rightarrow a = 5; b = 0$$

Vậy $y_2^* = 5x$.

Bước 5. Kết luận nghiệm tổng quát của phương trình.

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x + 5x$$

Ví dụ 6.31

Giải phương trình $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + x$.

Giải.

Theo ví dụ trước nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

là $\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Ta tìm các nghiệm riêng của các phương trình:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \quad \text{và} \qquad y'' + 3y' + 2y = x$$

Dễ thấy một nghiệm riêng của phương trình: $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ là $y_2^* = xe^{-x}$.

Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm riêng của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình: $y'' + 3y' + 2y = x$ có dạng: $y_2^* = ax + b$

Thay vào phương trình ta có

$3a + 2\left(ax + b\right) = x \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_2^* = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + xe^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

1. Giải các phương trình vi phân biến số phân li sau

$a) y' = \dfrac{x^2y - y}{x+1}$ $\quad b) 2x\sqrt{1-y^2} + y.y' = 0$ $\quad c) \left(xy^2 + 4x\right)dx + \left(y + x^2y\right)dy = 0$

$d) y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$ $\quad e) y' = \cos\left(x - y\right)$ $\quad f) y' = \left(2x + y - 1\right)^2$

$g) x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0,\ y\left(0\right) = 0$ $\quad h) \left(x^3 - 1\right)y' + 2x^2y = 0, y\left(0\right) = 1$

$i) \sin x dy - y \ln y dx = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$ $\quad j) y' = 2^{x-y}, y\left(-3\right) = 5$

2. Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau

$a) y' + 2xy = xe^{-x^2}$ $\quad b) y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ $\quad c) ydx + 2\left(x + y\right)dy = 0$

$d) xy' - 2y = 2x^4$ $\quad e) y = x\left(y' - x\cos x\right)$ $\quad f) xy' + \left(x+1\right)y = 3x^2e^{-x}$

$g) \left(xy' - 1\right)\ln x = 2y$ $\quad h) xy' = x + 2y,\ y\left(1\right) = 0$ $\quad i) y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

$j) y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3},\ y\left(1\right) = 1$ $\quad k) y' - y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}, y\left(0\right) = 0;$ $\quad l) y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$

3. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau

$a) y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ $\quad b) xy' = y - xe^{\frac{x}{y}}$ $\quad c) xy'\ln\dfrac{y}{x} = x + y + x\ln\dfrac{x}{y}$

$d) x\sin\dfrac{y}{x}.y' + x = y\sin\dfrac{y}{x}$ $\quad e) y' = \dfrac{-x-y+2}{x-y+4}$ $\quad f) y' = \dfrac{-2x+2y+1}{x-y+1}$

$g) xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ $\quad h) xy' - y = \left(x+y\right)\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$

$i) y' = \dfrac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$ $\quad j) \left(x + y + 2\right)dx + \left(2x + 2y - 1\right)dy = 0$

$k) xdy - \left(x + y\right)dx = 0, y\left(1\right) = 0$ $\quad l) \left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$

4. Giải các phương trình vi phân Bernoulli sau

$a) y' + 2xy = 2x^3y^3$ $\quad b) y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}, y\left(0\right) = 1$ $\quad c) y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^4$

$d) y' - y = xy^2,\ y\left(0\right) = 0$ $\quad e) xy' - y = y^2, y\left(1\right) = 0$ $\quad f) x\left(e^y - y'\right) = 2$

$g) y' = y^4\cos x + y\tan x$ $\quad h) y' - xy = -y^3e^{-x^2}$ $\quad i) \left(xy + x^2y^3\right)y' = 1$

5. Giải các phương trình vi phân toàn phần sau

$a)\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx;$ $b)e^y dx+\left(xe^y-2\right)dy=0;$

$c)y.x^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$ $d)\left(y^2-x^2\right)dy-2xydy=0;$

$e)\left(2x-y+1\right)dx+\left(2y-x-1\right)dy=0;$ $f)\left(x+e^{\frac{y}{x}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$

$g)\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy=0;$ $h)2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}dy=0;$

$i)\left(x^2-2xy\right)dx-\left(x^2+y^2\right)dy=0$ $j)\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

6. Giải các phương trình vi phân toàn phần sau bằng phương pháp thừa số tích phân

$a)\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$ $b)\left(y^2-6xy\right)dx+\left(3xy-6x^2\right)dy=0$

$c)y\left(1+xy\right)dx-xdy=0$ $d)\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy=0$

$e)\left(x^2+y\right)dx=xdy$ $f)\left(x+y\right)dx+\left(x-y\right)dy=0$

$g)\left(x-y\right)dx+\left(2y-x\right)dy=0$ $h)\left(x^2+y\right)dx=xdy$

7. Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau

$a)y''+y'=0$ $b)y''+y.y'=0$ $c)y''=\left(y'\right)^2$

$d)2\left(y'\right)^2=\left(y-1\right)y''$ $e)\left(y''\right)^2=1+\left(y'\right)^2$ $f)\left(y''\right)^2=y'$

$g)y''-\dfrac{y'}{x}+x=0$ $h)y.y''+\left(y'\right)^2=y^2.\ln y$ $i)y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

$j)y''=xe^{-x},y\left(0\right)=1;y'\left(0\right)=0$

8. Giải các phương trình sau khi biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng

$a)xy''-2xy'+2y=2x^3,\ y_1=x$ $b)y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=x-1,y_1=e^x$

$c)y''+\dfrac{1}{x^2\ln x}y=e^x\left(\dfrac{2}{x}+\ln x\right),y_1=\ln x$ $d)x^2y''-5xy'+9y=0,y_1=x$

$e)\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0,y_1=x$ $f)4x^2y''+y=0,y_1=\sqrt{x}$

9. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$a)xy''-\left(2x+1\right)y'+\left(x+1\right)y=0$ $b)xy''+y'=x^2$

$c)y''+\dfrac{2}{x}y'+y=\dfrac{\cot x}{x}$ biết một nghiệm của phương trình thuần nhất là: $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$

10. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng sau

$a)\quad y'' - 2y' = 0$ $\qquad b)\quad y'' + 4y' + 3y = 0$

$c)\quad y'' + 2y' + 10y = 0$ $\qquad d)\quad 2y'' - 5y' + 2y = 0$

$e)\quad y'' + 4y = 0$ $\qquad f)\quad y'' - 4y' + 5y = 0$

11. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng sau

$a)\quad y'' + 3y' - 4y = e^x$ $\qquad b)\quad y'' + 2y' + y = e^{-x}$

$c)\quad y'' + 5y' + 6y = e^{2x}(x-1)$ $\qquad d)\quad y'' + 2y' + 10y = x^2 + x - 2$

$e)\quad y'' + 4y = \cos 2x$ $\qquad f)\quad y'' + y = x\sin x$

$g)\quad y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin x$ $\qquad h)\quad y'' + y' - 2y = 3xe^x$

12. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng sau

$a) y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ $\qquad b) y'' - y' = \dfrac{(2-x)e^x}{x^3}$

$c) y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$ $\qquad d) y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + x$

$e) y'' + y = e^x + 5x$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **Đậu Thế Cấp - Võ Khắc Thường**. *Toán cao cấp - Giải tích toán học*. NXB ĐHQGTP. HCM, 2006.

[2] **Đinh Thế Lục – Phạm Huy Điển – Tạ Duy Phượng**. *Giải tích toán học – Hàm số một biến – Lý thuyết và thực hành tính toán*. NXBĐHQG Hà Nội, 2005.

[3] **Đinh Thế Lục – Phạm Huy Điển – Tạ Duy Phượng**. *Giải tích các hàm nhiều biến – Những nguyên lý cơ bản và tính toán thực hành.* NXBĐHQG Hà Nội, 2002.

[4] **Lê Đình Thúy**. *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế phần 2 - Giải tích toán học*. NXB ĐHKTQD, 2012.

[5] **Lê Sĩ Đồng**. *Toán Cao cấp phần Giải tích.* Đại học Ngân hàng TPHCM.

[6] **Nguyễn Đình Trí – Tạ Văn Đĩnh – Nguyễn Hồ Quỳnh**. *Bài tập Toán Cao cấp III*. NXB Giáo dục, 1999.

[7] **Nguyễn Thừa Hợp**. *Giải tich tập 1, 2*. NXBĐHQG Hà Nội, 2008.

[8] **Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ**. *Toán cao cấp tập 1*. NXBGD, 2003.

[9] **Nguyễn Xuân Liêm**. *Giải tích – Giáo trình lý thuyết và bài tập, tập 1,2*. NXBGD, 2009.

[10] **PGS.TS Vũ Văn Khương**. *Giải tích 2*. NXB Giao thông Vận tải Hà Nội 2006

[11] **Jean – Marie Monier**. Giải tích 1. NXBGD, 2006.

[12] **PE Đankô – A G Popôp – Tla Cogiepnhicova**. *Bài tập Toán học Cao cấp phần II*, người dịch Lê Đình Thịnh, Lê Trọng Vinh. NXB Trung học chuyên nghiệp Hà Nội, 1983.

[13] **Demidovich**. *Problems In Mathematical Analysis*.

MỤC LỤC