中間研究報告書 1

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
修士課程

アドバイザー名: 植田好道
学生番号：322501052
氏名：イェルショフ・アレクサンドル（Alexander Jerschow）

1　基本定義

本節は *Roland Speicher* の自由確率論に関する講義ノートを参照しています。また、非可換確率空間、$*$-確率空間、C^*-確率空間等、多くの区別について論じます。簡潔さのため、関連する設定での可能な類推の完全な説明なしに、通常は一つのタイプの設定（通常は非可換確率空間または $*$-確率空間）に関連して結果を示すことが多いです。

非可換確率空間は、A が $\mathbb{C}$ 上の単位的代数であり、$\varphi : A \to \mathbb{C}$ が $\varphi(1) = 1$ を満たす線形汎関数であるような組 (A, φ) として定義されます。A の要素は非可換確率変数と呼ばれます。

A の単位的部分代数 $(A_i)_{i \in I}$ に対して、それらが自由であるとは、任意の $k \in \mathbb{N}$、インデックス $i(1) \neq i(2) \neq \cdots \neq i(k)$、および $\varphi(a_j) = 0$ を満たす元 $a_j \in A_{i(j)}$ に対して以下が成り立つことです：

$$\varphi(a_1 a_2 \cdots a_k) = 0$$

$i(1) \neq i(2) \neq \cdots \neq i(k)$ は、積の中の隣接する要素が異なる部分代数から来ることを意味することに注意してください。また、$i(1) \neq i(k)$ を要求しないことにも注意してください。A が $*$-代数であり、φ が正（すべての $a \in A$ に対して $\varphi(a^*a) \geq 0$）であるとき、(A, φ) を $*$-確率空間と呼びます。この文脈で、標準的な定義を思い出します：

- a が自己共役であるとは、$a = a^*$ であること
- a がユニタリであるとは、$a^*a = aa^* = 1$ であること
- a が正規であるとは、$a^*a = aa^*$ であること

A の構造に基づいてさらに区別が生じます。A が C^*-代数または W^*-代数であるとき、それぞれ C^*-確率空間または W^*-確率空間を得ます。$*$-確率空間における線形汎関数 φ は、すべての $a \in A \setminus \{0\}$ に対して $\varphi(a^*a) > 0$ であるとき、忠実であると呼ばれます。

一般的な非可換確率空間 (A, φ)（必ずしも $*$-確率空間である必要はない）に対して、すべての $a, b \in A$ に対して $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ であるとき、φ はトレス的であると言います。この場合、(A, φ) はトレス的確率空間と呼ばれます。

重要な例としては：

- トレース $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$ を備えた $n \times n$ 複素行列の代数 $M_n(\mathbb{C})$ は $*$-確率空間を形成します。正規化トレース $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}$ は、大きなランダム行列分布が所謂「漸近的自由性」を示すランダム行列理論において特に重要であり、ランダム行列理論と自由確率論の間の深い関連を明らかにします。

- 古典的確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して、本質的有界な確率変数の空間 $L^{\infty}(\Omega, P)$ と $\varphi(a) = \int a dP$ は $*$-確率空間を形成します。ここで対合は複素共役によって与えられます。

自由度は部分代数に対して定義されましたが、元に拡張されます：A の元 $(a_i)_{i \in I}$ が自由であるとは、それらが生成する単位的代数が自由であることです。同様に、部分集合 $B_i \subset A$ に対して、それらが生成する単位的部分代数が自由であるとき、自由であると言います。さらに、$*$-確率空間の場合、「単位的部分代数」または元/集合の場合「生成された単位的部分代数」を「単位的 $*$-部分代数」および「生成された単位的 $*$-部分代数」で置き換える $*$-自由度の概念があります。

非可換確率空間 (A, φ) に対して、$a \in A$ のモーメントは $n \in \mathbb{N}$ に対する値 $\varphi(a^n)$ です。元 $a_1, \ldots, a_s \in A$ の結合モーメントは、$k \in \mathbb{N}$ および $i_j \in \{1, \ldots, s\}$ に対する値 $\varphi(a_{i_1} \cdots a_{i_k})$ です。$*$-確率空間では、a の $*$-モーメントは (a, a^*) の結合モーメントであり、$(a_i)_{i=1}^{s}$ の結合 $*$-モーメントは $(a_i, a_i^*)_{i=1}^{s}$ の結合モーメントです。

a のすべてのモーメントの集まりをその分布と呼びます。同様に、$(a_i)_{i=1}^{s}$ のすべてのモーメントの集まりをそれらの結合分布と呼びます。$*$-の場合、$*$-分布と結合 $*$-分布を定義するために、同様に $*$-モーメント/結合 $*$-モーメントについて話します。

自由度は古典的な独立性の非可換類似物として機能します。基本的な結果は、古典的な独立性と同様に、自由確率変数の結合分布がそれらの個々の分布によって決定されることを示しています：

[Speicher Proposition 1.5] (A, φ) を非可換確率空間とし、$(A_i)_{i \in I}$ を自由な単位的部分代数とする。B が A_i によって生成される代数ならば、$\varphi|_B$ は $(\varphi|_{A_i})_{i \in I}$ から一意に回復できる。

この結果は、$*$-分布が生成された自己共役集合の分布によって決定されるため、$*$-確率空間に拡張されます。

古典確率論では、分布は σ-代数上の測度によって定義されます。非可換確率では、一般的にそのような測度を持ちません。代わりに、非可換単項式の集まりを考慮することによって、汎関数 φ を通じて分布を定義します。このアプローチは、古典確率において多くの分布がそれらのモーメント（例えば、Carleman の条件を満たすもの）によって特徴づけられるという事実によって

正当化されます。したがって、φ を一般化された期待値汎関数と見なすことができます。

可換と非可換確率の間の決定的な区別が次の結果で現れます：

[Speicher Proposition 1.10] 忠実な φ を持つ $*$-確率空間 (A, φ) と自己共役元 x, y に対して、x と y が可換で自由であるならば、それらの一方は定数である。

これは、忠実な期待値を持つ $*$-確率空間（非可換確率空間のかなりのクラス）の文脈では、非可換の枠組みを可換の状況に適用しようとすると自明になることを示しています。非可換設定が非常に豊かな理論の基礎であることを考えると、古典的と非可換のケースの間には大きな区別があることがわかります。

2　組合せ論的背景

本節は *Speicher* の自由確率論に関する講義ノートを参照しています。

2.1　非交差分割

非可換確率変数のモーメントの計算における組合せ論の役割を理解するために、次の動機付けの例を考えます：

$a_i \in A$ を自由とします。$a_1 + a_2$ の分布に関心があります。モーメントの定義により、$k \in \mathbb{N}$ に対する $\varphi((a_1 + a_2)^k)$ を理解する必要があります。しかし、$\varphi(a_{i(1)} \cdots a_{i(k)})$ を理解すれば、$\varphi((a_1 + a_2)^k)$ の展開の各項を理解します。自由度の仮定を使用するには、すべての j に対して $\varphi(a_{i(j)}) = 0$ でなければならないので、「中心化」変数 $a_{i(j)} - \varphi(a_{i(j)})$ を考えます。

(i) 最も単純な非自明な場合（a と b を自由とする）：

$$0 = \varphi((a - \varphi(a))(b - \varphi(b))) = \varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b)$$

これは可換設定での期待値と同様に、$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ を意味します。
(ii) 次に、(i) を使用して（$a1, a2, b$ を自由とする）：

$$0 = \varphi((a_1 - \varphi(a_1))(b - \varphi(b))(a_2 - \varphi(a_2))) = \varphi(a_1 b a_2) - \varphi(a_1 a_2)\varphi(b)$$

すなわち、$\varphi(a_1 a_2)\varphi(b) = \varphi(a_1 b a_2)$。
(iii) より複雑な場合、上記を使用して計算できます：

$$\varphi((a_1 - \varphi(a_1))(a_2 - \varphi(a_2))(a_1 - \varphi(a_1))(a_2 - \varphi(a_2))) =$$

$$\varphi(a_1 a_2 a_1 a_2) - \varphi(a_1^2)\varphi(a_2)^2 - \varphi(a_1)^2\varphi(a_2^2) + \varphi(a_1)^2\varphi(a_2)^2$$

すなわち、$\varphi(a_1 a_2 a_1 a_2) = \varphi(a_1)^2\varphi(a_2^2) + \varphi(a_1^2)\varphi(a_2)^2 - \varphi(a_1)^2\varphi(a_2)^2$。
(iv) $\{a_i\}, \{b_i\}, c, d$ が自由であるとき、以下を計算できます：

$$\varphi(a_1 b_1 c b_2 a_2 d a_3) = \varphi((a_1)(b_1 c b_2)(a_2 d a_3)) = \varphi((a_1)(a_2 d a_3))\varphi(b_1 c b_2) =$$

$$\varphi(a_1a_2a_3)\varphi(d)\varphi(b_1b_2)\varphi(c).$$

2 番目の等号では、要素を結合して互いに自由な 3 つの新しいものを得て、(ii) を適用したことに注意してください。最後の等号でも同様に (i) を適用しました。

同じ部分代数からの積要素を（積の下に線を引いて接続することによって）「グループ化」すると、積の「分割」が得られます（説明については、Speicher の講義ノートの第 2 章を参照してください）。そのような計算を通じて、積が「交差しない分割」（いわゆる非交差分割）をもたらす場合はうまくいくが、交差する場合はうまくいかないことが観察されます。これは、これらの「良い積」と非交差分割の間の基本的な関係を示唆しています。

[Speicher Definition 2.2] $P(n)$ で $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ のすべての分割の集合を表す。
(i) 分割 $\pi \in P(n)$ は、$p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ が存在して $p_1 \sim_\pi p_2$ かつ $q_1 \sim_\pi q_2$ であるとき、交差していると呼ばれる。分割が交差していないとき、非交差であると呼ばれる。
(ii) $NC(n)$ で $[n]$ のすべての非交差分割の集合を表す。
(iii) $\pi, \sigma \in NC(n)$ に対して、π のすべてのブロックが σ のいくつかのブロックに完全に含まれるとき、$\pi \leq \sigma$ と書く。この関係は $NC(n)$ に半順序を装備する。$\pi \leq \sigma$ かつ $\pi \neq \sigma$ のとき、$\pi < \sigma$ と書くこともある。
(iv) この順序に関する $NC(n)$ の唯一の最大元は $1_n := \{\{1, 2, \ldots, n\}\}$ である。
(v) $NC(n)$ の唯一の最小元は $0_n := \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ である。

[例] (i) $\{\{1\}, \{2\}\} \leq \{\{1, 2\}\}$
(ii) $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}, \{7\}\} \leq \{\{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3\}, \{7\}\}$ かつ $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6, 7\}\} \leq \{\{1, 2, 3, 4, 7\}, \{5, 6\}\}$

集合 $NC(n)$ は豊富な構造を持ちます一それは単なる半順序集合ではなく、実際には束を形成します。つまり、任意の 2 つの元は一意な「sup」および「inf」、すなわち 2 つより大きい最小の元と 2 つより小さい最大の元を持ちます：

半順序集合 P は、すべての $a, b \in P$ に対して交わり $a \wedge b := \max\{c \in P \mid c \leq a, c \leq b\}$ と結び $a \vee b := \min\{c \in P \mid c \geq a, c \geq b\}$ が存在するとき、束である。

[例] $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\}$ と $\{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$ の交わりは $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$ であり、それらの結びは最大元 1_5 です。

$P(n)$ も束であり、その交わりを部分束 $NC(n)$ に制限すると $NC(n)$ の交わりに対応します。しかし、$NC(n)$ での結び操作は $P(n)$ でのそれとは異なります。$NC(n)$ での結びは、$P(n)$ で結びを取った後、交差する分割ブロックをマージすることによって得られます。この区別は次の例で示されます：$\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \vee \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ in $P(4)$ に対して $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \vee \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\} = 1_4$ in $NC(4)$。$P(n)$ での結びが常に

$NC(n)$ にあるとは限らないことがわかります。最後に、次の例は、$P(n)$ でさえ、$p \sim_{\pi\vee\sigma} q \iff p \sim_\pi q$ または $p \sim_\sigma q$ のような単純な関係が成り立たないことを示しています：

[例] (i) $P(3)$ における $\pi = \{\{1\},\{2,3\}\}$ と $\sigma = \{\{1,2\},\{3\}\}$ に対して、それらの結びは 1_3 です。$1 \sim_\pi 3$ も $1 \sim_\sigma 3$ も成り立たないにもかかわらず。
(ii) $P(6)$ における $\pi = \{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$ と $\sigma = \{\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{6\}\}$ に対して、それらの結びは 1_6 です。これも元の分割での直接の接続なしです。したがって、$p \sim_{\pi\vee\sigma} q$ との同値性については、$\exists p = p_1, p_2, ..., p_n = q | \forall i \in [n-1] p_i \sim_\pi p_{i+1}$ または $p_i \sim_\sigma p_{i+1}$ のようなより複雑な（それでも帰納的でない）関係も任意の $NC(m)$ に対しては機能しません。鍵は n を任意に取ることです（すなわち、$p_i \sim_\pi p_{i+1}$ または $p_i \sim_\sigma p_{i+1}$ であるような鎖 $p_1, ..., p_n$ が存在するような n が存在する）

2.2 非交差分割の畳み込み

我々の主な関心は $NC(n)$ にありますが、以下の概念は任意の半順序集合に適用されます。この理由から、我々の順序集合を一般的に P と表します。

[Speicher Definition 3.3] $P^{(2)} := \{(\pi,\sigma) \in P^2 \mid \pi \leq \sigma\}$ とし、$F, G : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ を複素数値関数とします。$f : P \to \mathbb{C}$ を別の複素数値関数とします。
(i) F と G の畳み込みは次のように定義されます：

$$(F * G)(\pi,\sigma) := \sum_{\tau \in P,\, \pi \leq \tau \leq \sigma} F(\pi,\tau) G(\tau,\sigma)$$

(ii) f と G の畳み込みは次のように定義されます：

$$(f * G)(\sigma) := \sum_{\tau \in P,\, \tau \leq \sigma} f(\tau) G(\tau,\sigma)$$

(iii) デルタ関数 $\delta(\pi,\sigma) := \delta_{\pi,\sigma}$ は「接合代数」$(\mathbb{C}^{P^{(2)}}, *)$ における単位元として機能します。

(ii) を、$\forall \sigma \in P, F(0,\sigma) = f(\sigma)$ であるような $F : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ を考慮することによって (i) の特殊な場合と見なすことができます。さらに、畳み込みを「区間」$[\pi,\sigma] := \{\tau \in P | \pi \leq \tau \leq \sigma\}$ 上で和を取ることと見なすことができます。最後に、接合代数が結合的であるが、一般的には可換でないことを簡単に確認できます。

接合代数において特に重要な関数は、すべての $\pi \leq \sigma$ に対して $\zeta(\pi,\sigma) := 1$ で定義されるゼータ関数です。その逆は基本的な重要性を持ちます：

[Speicher Proposition 3.5] 有限順序集合 P に対して、ζ の唯一の逆 ζ^{-1} が存在し、メビウス関数と呼ばれ μ と表され、$\zeta * \mu = \mu * \zeta = \delta$ を満たします。

証明は、畳み込みの定義を使用して再帰的に μ を解くこと、そしてこれらの関数を行列変換と見なすことによって進行します。重要な系は：

[**Speicher Corollary 3.6**] メビウス関数 μ を持つ有限順序集合 P とする。任意の関数 $f, g : P \to \mathbb{C}$ に対して、以下は同値：
(i) $f = g * \zeta$、すなわち、すべての $\sigma \in P$ に対して $f(\sigma) = \sum_{\pi \leq \sigma} g(\pi)$
(ii) $g = f * \mu$、すなわち、すべての $\sigma \in P$ に対して $g(\sigma) = \sum_{\pi \leq \sigma} f(\pi)\mu(\pi, \sigma)$

このメビウス反転公式は、自由確率におけるモーメント計算と組合せ論的構造を結びつける上で重要な役割を果たします。

3　乗法的汎関数とモーメント

本節は *Speicher* の自由確率論に関する講義ノートを参照しています。

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} NC(n)$ を NC と表します。

[**Speicher Definition 3.8**] (i) $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を A^n 上の n-線形汎関数の列とする。この族を以下によって $(p_\pi)_{\pi \in NC}$ に拡張する：

$$p_\pi(a_1, \ldots, a_n) := \prod_{V \in \pi} p_{\#V}(a_1, \ldots, a_n|_V)$$

ここで,$V = \{i_1, \ldots, i_s\}$ で $i_1 < \cdots < i_s$ ならば,$p_s(a_1, \ldots, a_n|_V) := p_s(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})$ である。$(p_\pi)_{\pi \in NC}$ を $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ によって決定される NC 上の乗法的汎関数の族と呼ぶ。

(ii) $\phi_n(a_1, \ldots, a_n) := \phi(a_1 \cdots a_n)$ とする。すべての $\pi \in NC$ に対して、ϕ_π を (i) によって与えられる拡張汎関数とする。

(iii) 固定された (a_i) に対して、$\phi_{(\cdot)}(a_1, \ldots, a_n) : NC(n) \to \mathbb{C}$ を $NC(n)$ 上の関数と見なす。$\kappa_{(\cdot)}(a_1, \ldots, a_n) := \phi_{(\cdot)}(a_1, \ldots, a_n) * \mu$ と定義する。ここで μ はメビウス関数である。結果として得られる NC 上で定義される κ_π は自由累⊠量と呼ばれる。

メビウス反転公式から直ちに以下を得ます：

$$\phi(a_1 \cdots a_n) = \phi_n(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$\sum_{\pi \in NC(n)} \prod_{V \in \pi} \kappa_{\#V}(a_1, \ldots, a_n|_V)$$

これは ϕ_n と κ_n が互いに一意に決定することを示しています。

自由累☒量はいくつかの重要な性質を持ちます：

[Speicher Proposition 3.11] 自由累☒量 $(\kappa_\pi)_{\pi\in NC}$ を持つ非可換確率空間 (A,φ) に対して：
(i) すべての $n\in\mathbb{N}$ と $\pi\in NC(n)$ に対して、$\kappa_\pi : A^n\to\mathbb{C}$ は n-線形である。
(ii) 族 $(\kappa_\pi)_{\pi\in NC}$ は $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ によって決定される NC 上の乗法的汎関数の族である。

以下の基本定理は我々の組合せ論的迂回を正当化し、自由累☒量の力を強調します：

[Speicher Theorem 3.23] 非可換確率空間 (A,φ) において、元 $(a_i)_{i\in I}$ が自由であることと、すべての混合累☒量が消えることは同値である。すなわち、すべての $n\in\mathbb{N}$ とインデックス $i(1),\ldots,i(n)\in I$ に対して、$i(k)\neq i(l)$ である $k\neq l$ が存在するならば：

$$\kappa_n(a_{i(1)},\ldots,a_{i(n)})=0$$

もちろん、a,b が $*$-自由 $\iff$ a^*,b が自由であることに注意すれば、この定理は $*$-確率空間に拡張できます。この定理は、累☒量で作業することの大きな利点の一つ、自由畳み込みの下での加法性を明らかにします。a と b が自由ならば：

$$\kappa_n(a+b,\ldots,a+b)=\kappa_n(a,\ldots,a)+\kappa_n(b,\ldots,b)$$

なぜなら、すべての混合項は定理によって消えるからです。
しかし、自由累☒量には限界もあります。モーメントは結合的です：

$$\phi_{n-1}(a_1,\ldots,a_ia_{i+1},\ldots,a_n)=\phi(a_1\cdots a_ia_{i+1}\cdots a_n)=\phi_{n-1}(a_1,\ldots,a_{i-1}a_i,\ldots,a_n)$$

累☒量はこの性質を持ちません。代わりに、それらは以下の積公式を満たします：
[Speicher Theorem 3.20] 自由累☒量 $(\kappa_\pi)_{\pi\in NC}$ を持つ非可換確率空間 (A,φ) に対して、$i:[m]\to[n]$ が $1\leq i(1)<\cdots<i(m)=n$ を満たすとし、以下を定義する：

$$\begin{aligned}
A_1 &:= a_1\cdots a_{i(1)}\\
A_2 &:= a_{i(1)+1}\cdots a_{i(2)}\\
&\vdots\\
A_m &:= a_{i(m-1)+1}\cdots a_{i(m)}
\end{aligned}$$

このとき、$\tau\in NC(m)$ に対して：

$$\kappa_\tau(A_1,\ldots,A_m)=\sum_{\substack{\pi\in NC(n)\\ \pi\vee\hat{0}_m=\hat{\tau}}}\kappa_\pi(a_1,\ldots,a_n)$$

ここで、$\hat{\sigma}$ は $NC(m)$ の $\sigma \in NC(m)$ の $NC(n)$ への埋め込みを表します。具体的には、$\hat{0}_m$ は分割：

$$\hat{0}_m = \{\{a_1, \ldots, a_{i(1)}\}, \{a_{i(1)+1}, \ldots, a_{i(2)}\}, \ldots, \{a_{i(m-1)+1}, \ldots, a_{i(m)}\}\}$$

です。一般に、$\sigma \in NC(m)$ の埋め込みは、$\hat{0}_m$ のブロックを長さ m の集合の要素として扱い、σ に従ってそれらをグループ化することによって得られます。

例えば、$m = 4,\ n = 7,\ A_1 = a_1a_2,\ A_2 = a_3,\ A_3 = a_4a_5a_6,\ A_4 = a_7,$ $\sigma = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$ に対して：

$$\hat{\sigma} = \{\{1, 2\}, \{3, 7\}, \{4, 5, 6\}\}$$

4　解析化

本節は *Speicher* の自由確率論に関する講義ノートを参照しています。

これまで、モーメントと累⊠量の関係を理解するための組合せ論的枠組みを開発してきました。しかし、このアプローチは実用的な計算には扱いにくい可能性があるため、解析的変換を導入して設定を「解析化」する動機があります。あまり苦労なく証明できる以下の事実が必要です：

[**Speicher Facts 4.2**] (i) (A, φ) を $*$-確率空間とし、x を自己共役とする。x のモーメントが指数的有界、すなわち、ある $M > 0$ が存在してすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\varphi(x^n)| \leq M^n$ ならば、$\varphi(x^n) = \int t^n d\mu$ かつ μ が $B_M(0)$ 上でサポートされるような $\mathbb{R}$ 上の測度 μ が存在する。この場合、μ を x の分布と呼ぶことができる。

(ii) 任意のコンパクト台を持つ測度 μ に対して、$*$-確率空間とその中の自己共役元 x が存在して、$\varphi(x^n) = \int t^n d\mu$ となる。

今後、コンパクト台を持つ測度のみを考えます。確率空間 (A, φ) 内の与えられた $a \in A$ に対して、$m_n := \varphi_n(a, \ldots, a) = \varphi(a^n)$（$a$ のモーメント）と $\kappa_n := \kappa_n(a, \ldots, a)$（$a$ の累⊠量）とします。

[定義] 以下は（当面）形式的級数としての定義です

(i) a のモーメント級数は以下で定義されます：

$$M(z) := 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n z^n$$

(ii) a の累⊠量級数は以下で定義されます：

$$C(z) := 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n z^n$$

コンパクト台を持つ μ に対して、コーシー変換は無限大近傍で級数展開を持ちます：

[Speicher Proposition 4.10] $[-r,r]$ 上でサポートされる μ に対して、すべての $|z|>r$, $z\in\mathbb{C}^+$ に対して：

$$G_\mu(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{m_n}{z^{n+1}}$$

ここで m_n は μ の n 次モーメントを表します。

関係 $M(1/z)/z=G_\mu(z)$ は、$M(1/z)/z$ に対するある開領域上で収束を確立します（すなわち、$M(1/z)/z$ は単なる形式的級数ではありません）。さらに、以下の基本的な関係を得ます：

[補題] $a=a^*$ であるような $*$-確率空間 (A,φ) と $a\in A$ に対して、以下は同値：
(i) $\kappa * \zeta = m$、すなわち、すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して：

$$m_n=\sum_{\pi\in NC(n)}\kappa_\pi$$

(ii) $C(zM(z))=M(z)$
(iii) $M(z/C(z))=C(z)$

ここで最後の 2 点は形式的冪級数としての等式を表します。
これらの形式的同値性と解析的恒等式 $M(1/z)/z=G_\mu(z)$ を使用して、適切な領域上で解析的同値性を得ます（G_μ を G と略記）：

$$C(G(z))=C(M(1/z)/z)=M(z)=zG(z)$$

$K(z):=C(z)/z$ と定義すると、$K(G(z))=z$ を得て、したがって $G(K(z))=z$（ある領域上で解析的）となります。さらに、K は 0 に 1 位の極を持ち、次のように書くことができます：

$$K(z)=\frac{1}{z}+R(z)$$

ここで $R(z):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\kappa_n z^{n-1}$ は R 変換と呼ばれます。

[Speicher Theorem 4.5] コンパクト台を持つ μ と ν に対して、(A,φ) が $x\sim\mu$, $y\sim\nu$ であり、x と y が自由であるような $x,y\in A$ を含むとする。このとき、$x+y$ の分布は、μ と ν の自由畳み込みと呼ばれる唯一のコンパクト台を持つ測度 $\mu\boxplus\nu$ に対応する。測度 $\mu\boxplus\nu$ は特定の実現 x と y に依存しない。

ネヴァンリンナ-ピック理論を使用した R 変換の Voiculescu による特徴付けで締めくくります：

[Voiculescu Lemma 3.3] $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n+1}z^n$ とする。対応する R 変換が f に等しい測度 μ が存在することは、以下の 3 つの条件と同値である：
(i) f が $B_C(0)$ 上で収束するような $C > 0$ が存在する。
(ii) $f(\bar{\cdot}) = \overline{f(\cdot)}$.
(iii) ある $C_1 \geq 1/C$ が存在して、すべての $z_1, \ldots, z_m \in \{z \mid |z| \geq C_1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ と $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{C}$ に対して：

$$\sum_{j,k\in[m]} \frac{z_j - \bar{z}_k}{z_j - \bar{z}_k + f(z_j^{-1}) - f(\bar{z}_k^{-1})} x_j \bar{x_k} \geq 0$$

Voiculescu の論文は R 変換を定義するより一般的なアプローチを取っており、コンパクト台を持つ測度に限定しないことに注意すべきです。

References

[1] Speicher, R. (2019). *Lecture Notes on Free Probability Theory.* arXiv:1908.08125.

[2] Voiculescu, D. V. (1986). *Addition of certain non-commuting random variables.* Journal of Functional Analysis, 66(3), 323-346. DOI: `https://doi.org/10.1016/0022-1236(86)90062-5`