現代数学基礎 CIII の課題の解答例

イェルショフ・アレクサンドル（Alexander Jerschow）

問題 1.4 解答

関数 $f(z)=\overline{z}$ と $g(z)=z^2$ に対して、曲線 C_1, C_2, C_3 に沿う複素積分を計算する。

(1) C_1 について

C_1 は原点 $z=0$ から $z=1$ への線分と、$z=1$ から $z=1+i$ への線分を繋いだものである。

$f(z)=\overline{z}$ の積分

第一の線分: $z=x$ （$0\leq x\leq 1$）とパラメータ表示する。$\overline{z}=x$, $dz=dx$ より、

$$\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

第二の線分: $z=1+iy$ （$0\leq y\leq 1$）とパラメータ表示する。$\overline{z}=1-iy$, $dz=i\,dy$ より、

$$\int_0^1(1-iy)i\,dy=\int_0^1(i+y)\,dy=\left[iy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=i+\frac{1}{2}$$

したがって、

$$\int_{C_1}\overline{z}\,dz=\frac{1}{2}+\left(i+\frac{1}{2}\right)=1+i$$

$g(z)=z^2$ の積分

第一の線分: $z=x$ （$0\leq x\leq 1$）より、

$$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

第二の線分: $z=1+iy$ （$0\leq y\leq 1$）より、

$$\int_0^1(1+iy)^2 i\,dy=\int_0^1(1+2iy-y^2)i\,dy=\int_0^1(i-2y-iy^2)\,dy$$

$$= \left[iy - y^2 - \frac{i}{3}y^3\right]_0^1 = i - 1 - \frac{i}{3} = -1 + \frac{2}{3}i$$

したがって、

$$\int_{C_1} z^2\,dz = \frac{1}{3} + \left(-1 + \frac{2}{3}i\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

(2) C_2 について

C_2 は $z = 1$ を中心とする半径 1 の円周の一部で、向きは時計回りである。パラメータ表示として、$z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$（$\theta$ は π から $\pi/2$ まで減少）を用いる。$dz = ie^{i\theta}d\theta$。

$f(z) = \overline{z}$ の積分

$$\int_{C_2} \overline{z}\,dz = \int_{\theta=\pi}^{\pi/2} \overline{1 + e^{i\theta}}\,ie^{i\theta}d\theta = \int_{\pi}^{\pi/2} (1 + e^{-i\theta})ie^{i\theta}d\theta = i\int_{\pi}^{\pi/2} (e^{i\theta} + 1)d\theta$$

$$= i\left[\frac{1}{i}e^{i\theta} + \theta\right]_{\pi}^{\pi/2} = i\left[-ie^{i\theta} + \theta\right]_{\pi}^{\pi/2} = \left[e^{i\theta} + i\theta\right]_{\pi}^{\pi/2}$$

$$= \left(e^{i\pi/2} + i\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(e^{i\pi} + i\pi\right) = (i + i\frac{\pi}{2}) - (-1 + i\pi) = i + i\frac{\pi}{2} + 1 - i\pi = 1 + i\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$g(z) = z^2$ の積分

$$\int_{C_2} z^2\,dz = \int_{\pi}^{\pi/2} (1+e^{i\theta})^2 ie^{i\theta}d\theta = i\int_{\pi}^{\pi/2} e^{i\theta}(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})d\theta = i\int_{\pi}^{\pi/2} (e^{i\theta}+2e^{2i\theta}+e^{3i\theta})d\theta$$

$$= i\left[\frac{1}{i}e^{i\theta} + 2\cdot\frac{1}{2i}e^{2i\theta} + \frac{1}{3i}e^{3i\theta}\right]_{\pi}^{\pi/2} = i\left[-ie^{i\theta} - ie^{2i\theta} - \frac{i}{3}e^{3i\theta}\right]_{\pi}^{\pi/2}$$

$$= \left[e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta}\right]_{\pi}^{\pi/2}$$

$$= \left(e^{i\pi/2} + e^{2i\pi/2} + \frac{1}{3}e^{3i\pi/2}\right) - \left(e^{i\pi} + e^{2i\pi} + \frac{1}{3}e^{3i\pi}\right)$$

$$= \left(i + e^{i\pi} + \frac{1}{3}e^{3i\pi/2}\right) - \left(-1 + 1 + \frac{1}{3}e^{3i\pi}\right) = \left(i - 1 + \frac{1}{3}(-i)\right) - \left(0 + \frac{1}{3}(-1)\right)$$

$$= \left(-1 + i - \frac{i}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 + \frac{2}{3}i + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

(3) C_3 について

C_3 は放物線 $x = y^2$ の一部である。パラメータ表示として、$z = y^2 + iy$（y は 0 から 1 まで）を用いる。$dz = (2y + i)dy$。

$f(z)=\overline{z}$ の積分

$$\int_{C_3}\overline{z}\,dz=\int_0^1\overline{y^2+iy}\,(2y+i)dy=\int_0^1(y^2-iy)(2y+i)dy$$

$$=\int_0^1(2y^3+iy^2-2iy^2-i^2y)dy=\int_0^1(2y^3+iy^2-2iy^2+y)dy=\int_0^1(2y^3+y-iy^2)dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{2}y^2-\frac{i}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{i}{3}=1-\frac{i}{3}$$

$g(z)=z^2$ の積分

$$\int_{C_3}z^2\,dz=\int_0^1(y^2+iy)^2(2y+i)dy=\int_0^1(y^4+2iy^3-y^2)(2y+i)dy$$

$$=\int_0^1(2y^5+iy^4+4iy^4+2i^2y^3-2y^3-iy^2)dy=\int_0^1(2y^5+5iy^4-4y^3-iy^2)dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^6+iy^5-y^4-\frac{i}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{3}+i-1-\frac{i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

問題 2.4 解答

$|z|<1$ において

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$$

が成り立つことを用いて、$|z|<1$ において以下のべき級数が定める複素関数を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2z^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-2n)z^{2n+1}$.

解答

準備：既知の公式の導出:

基本公式から出発する：

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1$$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$ の導出

基本公式を項別微分する（$|z| < 1$ では正当化される）：

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

左辺：

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}$$

右辺：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

したがって：

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

両辺に z を掛ける：

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} \tag{A}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$ の導出

式 (A) をさらに微分する：

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$$

左辺：

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1}$$

右辺（商の微分法を使用）：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) &= \frac{(1-z)^2 \cdot 1 - z \cdot 2(1-z)(-1)}{(1-z)^4} \\ &= \frac{(1-z)^2 + 2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1-z+2z}{(1-z)^3} = \frac{1+z}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

したがって：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

両辺に z を掛ける：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \tag{B}$$

ここで、$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n$ を求めるために、次の関係を使う：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$$

式 (A) と (B) より：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(1+z) - z(1-z)}{(1-z)^3} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} \tag{C}$$

本問題の解答:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

$n^2 = n(n-1) + n$ と変形できることに注意する。すると：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$$

式 (A) と (C) を用いると：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2 + z(1-z)}{(1-z)^3} = \frac{2z^2 + z - z^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

したがって、求める関数は：

$$f(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n) z^{2n+1}$

まず、べき指数に着目して式を整理する：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n) z^{2n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 2n)(z^2)^n$$

$w = z^2$ とおくと、この級数は：

$$z \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nw^n \right)$$

式 (A) と (B)（z の代わりに w を用いて）：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w^n = \frac{w(1+w)}{(1-w)^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n w^n = \frac{w}{(1-w)^2}$$

を用いると：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-2n)w^n &= \frac{w(1+w)}{(1-w)^3} - \frac{2w}{(1-w)^2} \\ &= \frac{w(1+w)-2w(1-w)}{(1-w)^3} = \frac{w(1+w-2+2w)}{(1-w)^3} \\ &= \frac{w(3w-1)}{(1-w)^3}\end{aligned}$$

$w = z^2$ を代入し戻すと：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-2n)z^{2n+1} = z \cdot \frac{z^2(3z^2-1)}{(1-z^2)^3} = \frac{z^3(3z^2-1)}{(1-z^2)^3}$$

したがって、求める関数は：

$$g(z) = \frac{z^3(3z^2-1)}{(1-z^2)^3}$$

問題 2.C 解答

問題 **1:** $\displaystyle\int_C \frac{z}{3z-2}\,dz$

ステップ **1:** 被積分関数を変形する

$$\frac{z}{3z-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-\frac{2}{3}}$$

ステップ **2:** 特異点が積分路内にあるか確認する
積分路 C は中心 1、半径 1/2 の円である。特異点 $z = \frac{2}{3}$ について、

$$\left|\frac{2}{3} - 1\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

より、特異点は積分路内にある。
ステップ **3:** コーシーの積分公式を適用する
コーシーの積分公式より、

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot f(a)$$

ここで、$f(z) = z$、$a = \frac{2}{3}$ とすると、

$$\int_C \frac{z}{z - \frac{2}{3}} \, dz = 2\pi i \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi i}{3}$$

したがって、

$$\int_C \frac{z}{3z - 2} \, dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi i}{3} = \frac{4\pi i}{9}$$

問題 **2:** $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \, dz$

ステップ **1:** 分母を因数分解する

$$z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$$

ステップ **2:** 部分分数分解する

$$\frac{1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - 2}$$

両辺に $(z - 1)(z - 2)$ を掛けると、

$$1 = A(z - 2) + B(z - 1)$$

$z = 1$ を代入して $A = -1$、$z = 2$ を代入して $B = 1$ を得る。よって、

$$\frac{1}{(z - 1)(z - 2)} = -\frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z - 2}$$

ステップ **3:** 各項の積分を評価する
積分路 C は中心 1、半径 1/2 の円である。特異点 $z = 1$ は積分路内に、$z = 2$ は外にある。

$$\int_C \frac{1}{z - 1} \, dz = 2\pi i$$
$$\int_C \frac{1}{z - 2} \, dz = 0$$

したがって、

$$\int_C \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \, dz = -\int_C \frac{1}{z - 1} \, dz + \int_C \frac{1}{z - 2} \, dz = -2\pi i + 0 = -2\pi i$$

最終解答

$$\boxed{\frac{4\pi i}{9}} \quad \text{および} \quad \boxed{-2\pi i}$$

問題 4.1 解答

1. $f(z) = \frac{1}{z^2-2z+3}$ の $a=1$ の周りのテイラー展開

まず、分母を平方完成する：

$$z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2.$$

したがって、

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{(z-1)^2}{2}}.$$

ここで、$\left|\frac{(z-1)^2}{2}\right| < 1$ すなわち $|z-1| < \sqrt{2}$ のとき、幾何級数展開を用いて、

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad (|w| < 1)$$

なので、$w = \frac{(z-1)^2}{2}$ とおくと、

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(z-1)^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^{2n}.$$

これが求めるテイラー展開である。

2. $f(z) = \frac{1}{z^2}$ の $a=2$ の周りのテイラー展開

$z = 2 + (z-2)$ と書く。すると

$$f(z) = \frac{1}{(2+(z-2))^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-2}{2}\right)^2}.$$

ここで、$\left|\frac{z-2}{2}\right| < 1$ すなわち $|z-2| < 2$ のとき、展開公式

$$\frac{1}{(1+u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) u^n, \quad (|u| < 1)$$

を用いると、

$$f(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+2}} (z-2)^n.$$

これが求めるテイラー展開である。